ACM Snake

Orvosi képdiagnosztika

11. előadás második fele

ACM Snake

- A szegmentáló kontúr egy paraméteres görbe:
  - $\mathbf{x}(s)=\left[X(s),Y(s),Z(s)\right],\ s\in\mathbb{R}$
- A szegmentáció – energia funkcionál minimalizálása:
  - $E(\mathbf{x})=E_{\text{int}}(\mathbf{x})+E_{im}(\mathbf{x})+E_{ext}(\mathbf{x})$
  - Zárt görbe esetén periodicitási kényszer: $\mathbf{x}(i)\equiv\mathbf{x}(i+k)\ i\in[0,1]\ k\in\mathbb{Z}$
- Belső energia ($E_{\text{int}}(\mathbf{x})$):
  - Általában: $E_{\text{int}}(\mathbf{x})=\frac{1}{2}\int\limits_{s=0}^{1}\alpha(s)\cdot\left|\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial s}\right|^2+\beta(s)\cdot\left|\frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial s^2}\right|^2 ds$
  - Regularizációként is értelmezhető
  - Első tag kényszeríti ki a szegmentáló görbe folytonosságát
  - Második tag bünteti a görbületet

ACM Snake

- Képből származó (külső) energia ($E_{\text{im}}(\mathbf{x})$):
  - $E_{\text{im}}(\mathbf{x}) = \int\limits_{s=0}^{1} P(\mathbf{x}(s))\,ds$
  - $P(\mathbf{x}(s))$ definiálja azt, hogy mit szegmentáljon a görbe
- P tipikus megválasztása:
  - Élek: $-w_{el}\left\|\left(\nabla G_\sigma * I\right)(x,y)\right\|_2^2$
  - Régió: $w_{reg}\cdot G_\sigma \cdot I(x,y)$
  - Vonal szakasz végződése: $-w_{veg}\cdot\dfrac{\partial ang\left(\nabla G_\sigma * I\right)}{\partial \mathbf{n}\left(ang\left(\nabla G_\sigma * I\right)+\pi\right)}$
  - És még sok egyéb más…
  - Cél a súlyok olyan módon történő definiálása, hogy a kontúr az általunk kívánt pontokba tartson

ACM Snake

- Képből származó (külső) energia ($E_{\text{im}}(\mathbf{x})$):
  - $E_{\text{im}}(\mathbf{x}) = \int\limits_{s=0}^{1} P(\mathbf{x}(s))\,ds$
  - $P(\mathbf{x}(s))$ definiálja azt, hogy mit sze

Minden tagban megjelenik egy Gauss függvényes elmosás!

- P tipikus megválasztása:
  - Élek: $-w_{el}\left\|\left(\nabla G_{\sigma} * I\right)(x,y)\right\|_2^2$
  - Régió: $w_{reg} \cdot G_{\sigma} \cdot I(x,y)$
  - Vonal szakasz végződése: $-w_{veg} \cdot \dfrac{\partial ang\left(\nabla G_{\sigma} * I\right)}{\partial \mathbf{n}\left(ang\left(\nabla G_{\sigma} * I\right) + \pi\right)}$
  - És még sok egyéb más…
  - Cél a súlyok olyan módon történő … kontúr az általunk kívánt pontokba tartson

$$ang(\mathbf{x}) = \tan^{-1}\left(\mathbf{x}_{(2)} / \mathbf{x}_{(1)}\right)$$

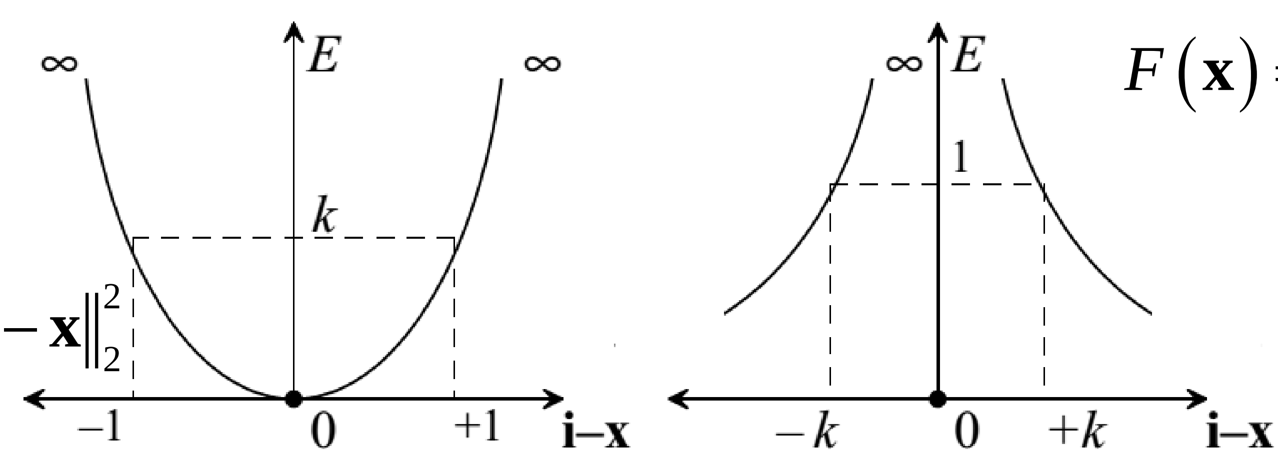
$$\mathbf{n}(\mathbf{x})^T \mathbf{x} = 0 \qquad \left\|\mathbf{n}(x)\right\| = 1$$

ACM Snake

- Külső energia miatt a célfüggvény nem konvex
  - Hibafelület tele van lokális minimumokkal
  - Részben kezelhető a Gauss kernelekkel történő elmosással
  - És az úgynevezett Gradient Vector Flow „regularizációval”
- Külső energia ($E_{ext}(\mathbf{x})$): felhasználói beavatkozás

(a) Attractive Energy (b) Repulsive Energy

$$F(\mathbf{x}) = k \cdot \left\| \mathbf{i} - \mathbf{x} \right\|_2^{-2}$$



$$F(\mathbf{x}) = k \cdot \left\| \mathbf{i} - \mathbf{x} \right\|_2^{2}$$

Snake implementációja

- Cél az energia összefüggés minimalizációja:
  - $\mathbf{x}^* = \arg\min_{\mathbf{x}} \left\{ E(\mathbf{x}) = E_{\text{int}}(\mathbf{x}) + E_{im}(\mathbf{x}) + E_{ext}(\mathbf{x}) \right\}$
  - $E(\mathbf{x}) = \int_0^1 P(\mathbf{x}(s))\,ds + \frac{\alpha}{2}\int_0^1 \left| \frac{\partial \mathbf{x}(s)}{\partial s} \right|^2 ds + \frac{\beta}{2}\int_0^1 \left| \frac{\partial^2 \mathbf{x}(s)}{\partial s^2} \right|^2 ds$
- $E(\mathbf{x})$ nem konvex ⇒ globális optimum: NP nehéz
- Lokális minimalizálás iteratív algoritmusokkal:
  - Legmeredekebb lejtő / Szemi-implicit minimalizáció
  - Iterációk: $\mathbf{x}^{(t+1)} = \mathbf{x}^{(t)} + \arg\min_{\delta\mathbf{x}} \left\{ \hat{E}\left(\mathbf{x}^{(t)} + \delta\mathbf{x}\right) - E\left(\mathbf{x}^{(t)}\right) \right\}$
  - Hátránya, hogy első derivált csak lokális információt ad

Legmeredekebb lejtő módszere

- $E(\mathbf{x}) = \int_0^1 P(\mathbf{x}(s))\,ds + \frac{\alpha}{2}\int_0^1 |\mathbf{x}'|^2\,ds + \frac{\beta}{2}\int_0^1 |\mathbf{x}''|^2\,ds$
  - $\mathbf{x}' = \partial\mathbf{x}/\partial s$, illetve $\mathbf{x}'' = \partial^2\mathbf{x}/\partial s^2$
  - továbbiakban zárt görbét feltételezünk: $\mathbf{x}(i) \equiv \mathbf{x}(i+k) \quad i \in [0,1] \quad k \in \mathbb{Z}$
- $E(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}) = \int_0^1 P(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x})\,ds + \frac{\alpha}{2}\int_0^1 |\mathbf{x}'+\delta\mathbf{x}'|^2\,ds + \frac{\beta}{2}\int_0^1 |\mathbf{x}''+\delta\mathbf{x}''|^2\,ds$
  - $\mathbf{x}$ középpontú elsőfokú Taylor polinom alapján:
    $P(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}) = P(\mathbf{x}) + \delta P(\mathbf{x}) \approx P(\mathbf{x}) + (\partial P/\partial\mathbf{x})^T \cdot \delta\mathbf{x}/1!$
  - tetszőleges $\mathbf{v}$ esetén elsőfokú Taylor közelítés ($|\delta\mathbf{v}| << |\mathbf{v}|$):
    $|\mathbf{v}+\delta\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{v}|^2 + 2\cdot\mathbf{v}^T\cdot\delta\mathbf{v} + |\delta\mathbf{v}|^2 \approx |\mathbf{v}|^2 + 2\cdot\mathbf{v}^T\cdot\delta\mathbf{v}$

Legmeredekebb lejtő módszere

- Minden iterációs lépéssel ($\delta \mathbf{x}$) E-t minimalizáljuk:

$$E(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}) = E(\mathbf{x}) + \int_0^1 \frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}} \cdot \delta\mathbf{x} + \alpha \cdot \left(\mathbf{x}'^T \cdot \delta\mathbf{x}'\right) + \beta \cdot \left(\mathbf{x}''^T \cdot \delta\mathbf{x}''\right) ds$$

- $$\delta\mathbf{x}^* = \underset{|\delta\mathbf{x}|=\xi\in\mathbb{R}}{\arg\min} \left\{ \delta E = \int_0^1 \frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}} \cdot \delta\mathbf{x} + \alpha \cdot \left(\mathbf{x}'^T \cdot \delta\mathbf{x}'\right) + \beta \cdot \left(\mathbf{x}''^T \cdot \delta\mathbf{x}''\right) ds \right\}$$
  - Problémát jelent $\delta\mathbf{x}'$, és $\delta\mathbf{x}''$, cél ezeket eliminálni.
  - Szorzatfüggvény deriváltjának azonossága alapján:

$$\int_0^1 \mathbf{u}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} ds = \left[\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{v}\right]_0^1 - \int_0^1 \mathbf{v}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} ds$$

  - Zárt görbe miatt $\mathbf{u}(0) \equiv \mathbf{u}(1)$, $\mathbf{v}(0) \equiv \mathbf{v}(1)$ $\Rightarrow$ $\left[\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{v}\right]_0^1 = 0$

Legmeredekebb lejtő módszere

– Tehát $\int_0^1 \mathbf{u}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} ds = -\int_0^1 \mathbf{v}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} ds$ összefüggést alkalmazva

- $\int_0^1 \alpha \cdot \left(\mathbf{x}'^T \cdot \delta \mathbf{x}'\right) ds = -\alpha \int_0^1 \cdot \left(\mathbf{x}''^T \cdot \delta \mathbf{x}\right) ds$
- $\int_0^1 \beta \cdot \left(\mathbf{x}''^T \cdot \delta \mathbf{x}''\right) ds = -\beta \cdot \int_0^1 \left(\mathbf{x}'''^T \cdot \delta \mathbf{x}'\right) ds = \beta \cdot \int_0^1 \left(\mathbf{x}''''^T \cdot \delta \mathbf{x}\right) ds$

- $\delta E = \int_0^1 \left(\frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}} - \alpha \cdot \mathbf{x}'' + \beta \cdot \mathbf{x}''''\right)^T \cdot \delta \mathbf{x} ds$ -t minimalizáljuk:
  – Az optimális lépés: $\delta \mathbf{x} = -\delta t \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}} - \alpha \cdot \mathbf{x}'' + \beta \cdot \mathbf{x}''''\right)$
    - Csak a lépés irányát határozza meg az összefüggés
    - A hibafelületről csak lokális jellemzőket vesz figyelembe

Legmeredekebb lejtő iterációja

- $\mathbf{x}^{(t+1)} \leftarrow \mathbf{x}^{(t)} + \delta\mathbf{x}^{(t)}$, ahol $\delta\mathbf{x}^{(t)} = -\delta t \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}^{(t)}} - \alpha \cdot \mathbf{x}^{(t)}'' + \beta \cdot \mathbf{x}^{(t)}'''' \right)$
- Átrendezve az egyenletet (és elhagyva a *t*-ket):

  $\delta\mathbf{x}/\delta t = \alpha \cdot \mathbf{x}'' - \left(\partial P / \partial \mathbf{x} \right) - \beta \cdot \mathbf{x}''''$

- Infinitezimiális δt esetén $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial s^2} - \beta \cdot \frac{\partial^4 \mathbf{x}}{\partial s^4} - \frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}}$:
  - Első tag az úgynevezett tenziós erő
  - Második tag az úgynevezett merevségi (stiffness) erő
  - Haramdik tag a kép / külső erő
  - Ezek az erők fizikai értelembe véve sebességek

Euler módszer

- Optimum szükséges feltétele:

$$\delta E(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \partial P / \partial \mathbf{x} - \alpha \cdot \mathbf{x}'' + \beta \cdot \mathbf{x}'''' = \mathbf{0}$$

  - Nem elégséges feltétel P nem konvex jellege miatt
  - Első tag miatt a jelekből / szabályozástechnikából megismert diff egyenlet módszerek nem alkalmazhatóak.
  - Legmeredekebb lejtő módszerének leállási feltétele

- Deriváltak approximációja:
  - $\left.\dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}\right|_{s=i\cdot\delta s} = \lim\limits_{\delta s' \to 0} \dfrac{\mathbf{x}(i\cdot\delta s + \delta s') - \mathbf{x}(i\cdot\delta s)}{\delta s'} \approx \dfrac{\mathbf{x}[i+1/2] - \mathbf{x}[i-1/2]}{\delta s}$
  - $\mathbf{x}[i] := \mathbf{x}(i\cdot\delta s)$; $\quad \delta s = 1/f_s$

Deriváltak approximációja

$$-\left.\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial s^2}\right|_{s=i\cdot\delta s} \approx \frac{1}{\delta s}\cdot\left(\frac{\mathbf{x}[i+1]-\mathbf{x}[i]}{\delta s}-\frac{\mathbf{x}[i]-\mathbf{x}[i-1]}{\delta s}\right)=\frac{1}{\delta s^2}\left(\mathbf{x}*[1,-2,1]\right)[i]$$

– Magasabb rendű deriváltak közelítése:

általános formula: $\left.\partial^n \mathbf{x}/\partial s^n\right|_{s=i\cdot\delta s} \approx \delta s^{-n}\left(\mathbf{x}*\mathbf{P_n}\right)[i]$

- $\mathbf{P_n}$ az előjeles Pascal háromszög n-edik sora:

$n:$																		
0 :					1										+			
1 :				1		1								+		–		
2 :			1		2		1						+		–		+	
3 :		1		3		3		1				+		–		+		–
4 :	1		4		6		4		1		+		–		+		–		+
	i-2		i-1		i		i+1		i+2									

Szemi-implicit minimalizáció

- $\delta\mathbf{x}/\delta t = \alpha\cdot\mathbf{x}'' - \beta\cdot\mathbf{x}'''' - \left(\partial P/\partial\mathbf{x}\right)$
- Szeparálható a görbe koordináták szerint:
  - $\mathbf{u}_j^{(t)}$ jelölje az egyik 1D-s görbe j-edik elemét t-időben (iteráció)
  - $\dfrac{\delta\mathbf{u}^{(t+0,5)}}{\delta t} = \alpha\cdot\dfrac{\delta^2\mathbf{u}^{(t+1)}}{\delta s^2} - \beta\cdot\dfrac{\delta^4\mathbf{u}^{(t+1)}}{\delta s^4} - \dfrac{\partial P}{\partial\mathbf{x}^{(t)}}$, approximációk:
    - $\delta\mathbf{u}^{(t+0,5)}/\delta t = \left(\mathbf{u}^{(t+1)} - \mathbf{u}^{(t)}\right)/\delta t$
    - $\delta^2\mathbf{u}^{(t+1)}/\delta s^2 = \left(\mathbf{u}^{(t+1)} * [1,-2,1]\right)/\delta s^2$
    - $\delta^4\mathbf{u}^{(t+1)}/\delta s^4 = \left(\mathbf{u}^{(t+1)} * [1,-4,6,-4,1]\right)/\delta s^4$
  - Explicit Euler lépés: külső erők kezelése, Implicit Euler lépés: belső erők kezelése (t+1. iterációban vizsgáljuk)

Szemi-implicit minimalizáció

- Euler lépések:

Explicit

$$\tilde{\mathbf{u}}_j^{(t+1)} := \mathbf{u}_j^{(t)} + \delta t \cdot \left(\partial P / \partial \mathbf{x}_j^{(t)} \right)$$

Implicit

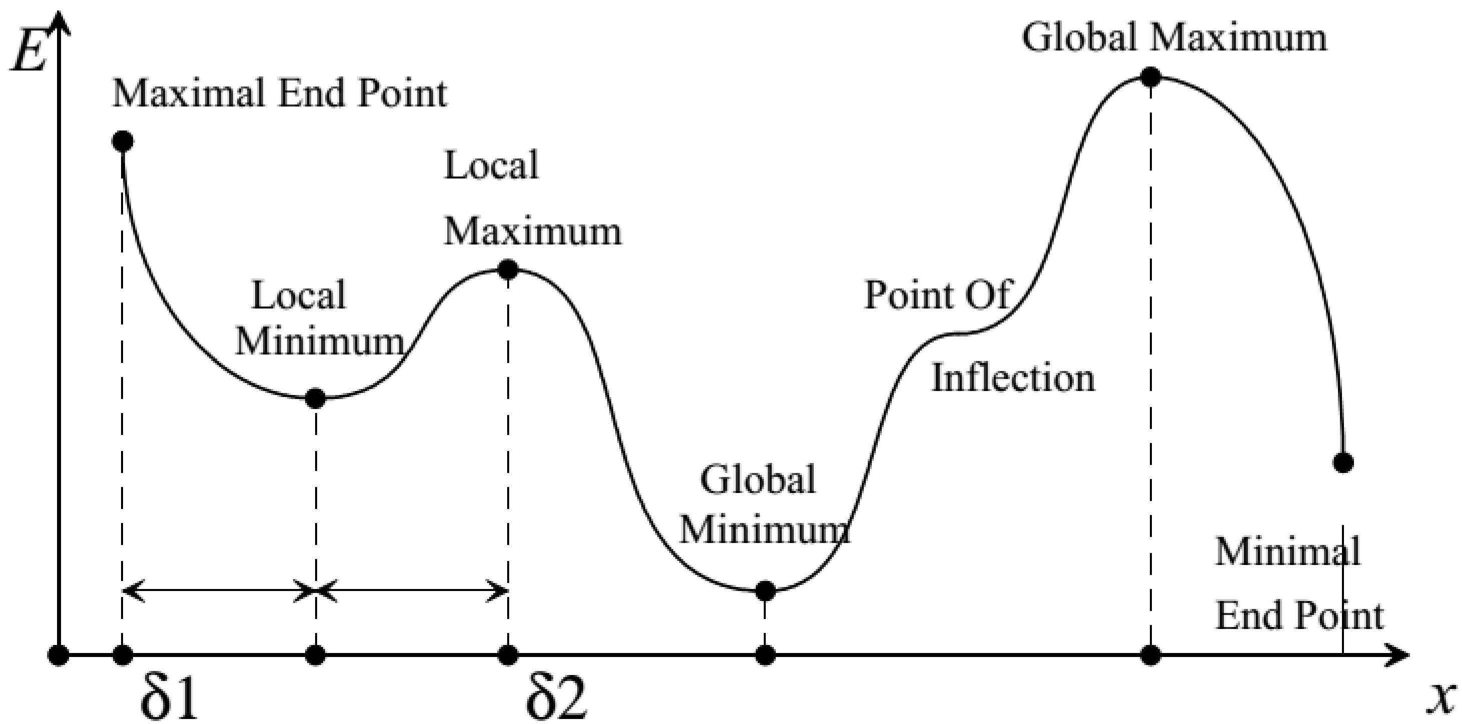
$$p \cdot \mathbf{u}_{j+2}^{(t+1)} + q \cdot \mathbf{u}_{j+1}^{(t+1)} + r \cdot \mathbf{u}_j^{(t+1)} + q \cdot \mathbf{u}_{j-1}^{(t+1)} + p \cdot \mathbf{u}_{j-2}^{(t+1)} = \tilde{\mathbf{u}}_j^{(t+1)}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} r & q & p & & & p & q \\ q & r & q & p & & & p \\ p & q & r & q & p & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & p & q & r & q & p \\ p & & & p & q & r & q \\ q & p & & & p & q & r \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\left(\begin{bmatrix} u_0^{t+1} \\ u_1^{t+1} \\ u_2^{t+1} \\ \vdots \\ u_{N-3}^{t+1} \\ u_{N-2}^{t+1} \\ u_{N-1}^{t+1} \end{bmatrix} \right)}_{\mathbf{u}^{t+1}} \underset{=}{=} \underbrace{\left(\begin{bmatrix} \tilde{u}_0^{t+1} \\ \tilde{u}_1^{t+1} \\ \tilde{u}_2^{t+1} \\ \vdots \\ \tilde{u}_{N-3}^{t+1} \\ \tilde{u}_{N-2}^{t+1} \\ \tilde{u}_{N-1}^{t+1} \end{bmatrix} \right)}_{\tilde{\mathbf{u}}^{t+1}}$$

  – $\mathbf{M}$ ciklikus pentadiagonális mátrix, ezért $\mathbf{M}^{-1}$ előállítása $O(N)$ komplexitású, ahol N a kontrollpontok száma

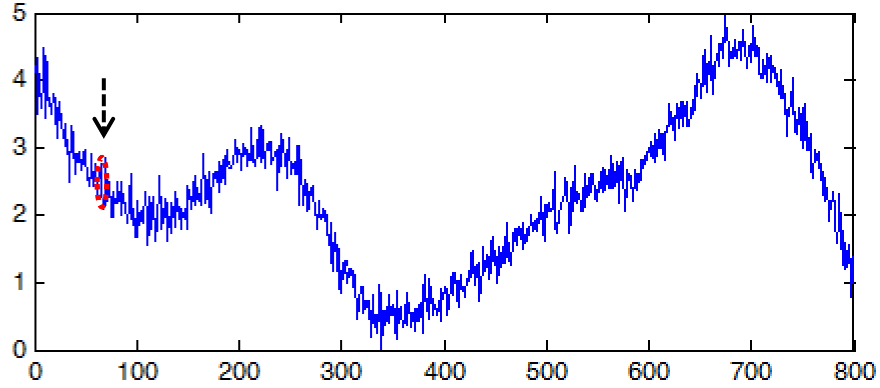
Lokális optimum probléma

- Lokális optimum probléma:
  - Fontos a kezdeti pozíció megválasztás (2 lépéses eljárások)
  - Kezelése az erőmező regularizációjával (GVF) illetve a képi potenciálok deriválás előtti (multiscale) elmosásával

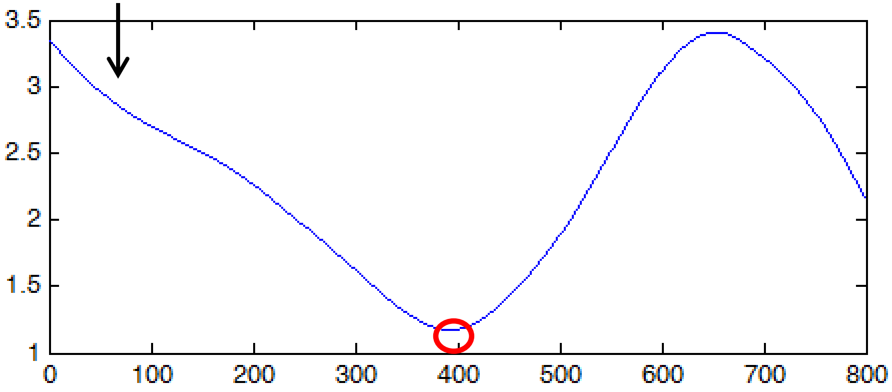


Probléma kezelése *multiscale* szűréssel

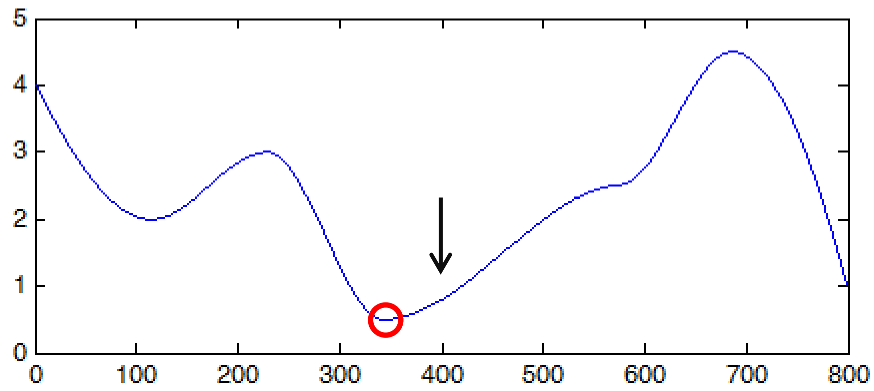
- Multiscale Gauss bankkal az Energiapotenciál elmosása:



$\sigma = 180$



$\sigma = 10$



Probléma kezelése *multiscale* szűréssel

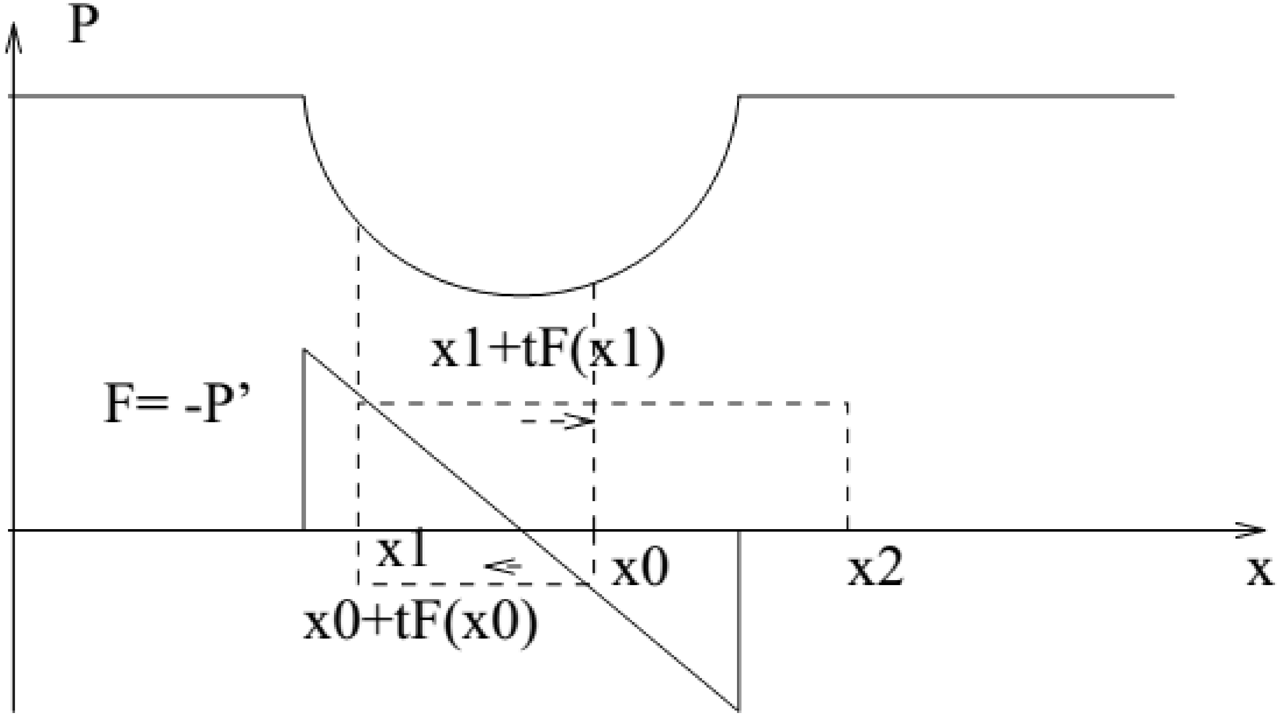
- Energiapotenciál elmosása:
  - Nagy szigma: globális optimum „vonzásába” kerül a görbe
  - Kisebb szigma: nem kezeli a lokális optimumok problémáját
  - Lényegében egy regularizáció (szigma ~ NSR)
- Szükséges-e a globális optimumot megkeresni:
  - Szegmentálások (Snake) esetén tipikusan nem
  - Kétfázisú algoritmusokkal kezelhető a probléma:
    - 1. fázis: közelítően helyes szegmentáció
    - 2. fázis: Snake futtatása az első fázis eredményéből

GVF regularizáció

- Külső energiatagot regularizáljuk:
  - Új mezőt definiálunk a külső energiatag helyett:
    $$\mathbf{v}(x,y)=\left[u(x,y),\, z(x,y)\right]$$
  - Melyet az alábbi optimalizációs probléma definiál:
    $$\mathbf{v}^* = \arg\min_{\mathbf{v}=[u,z]} \left\{ \iint \mu \cdot \left(\|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla z\|_2^2 \right) + \|\nabla P\|_2^2 \cdot \|\mathbf{v} - \nabla P\|_2^2 dxdy \right\}$$
  - Interpretáció:
    - Ahol $\|\nabla P\|_2^2 << \mu$, ott az integrandus első tagja dominál, a GVF mező sima lesz, így $\mathbf{v}$ „beáll” a szomszédjai irányába
    - Ahol $\|\nabla P\|_2^2 >> \mu$, ott a regularizáció nem módosít a külső energián
  - $\mathbf{v}$-t elég egyszer előállítani, nem függ a kontrollpontoktól

Time step megválasztásának nehéségei

- Time step (δt) megválasztásának nehézségei:
  – Túl kicsi: lassú konvergencia
  – Túl nagy: oszcilláció / divergencia / rossz helyre konvergál



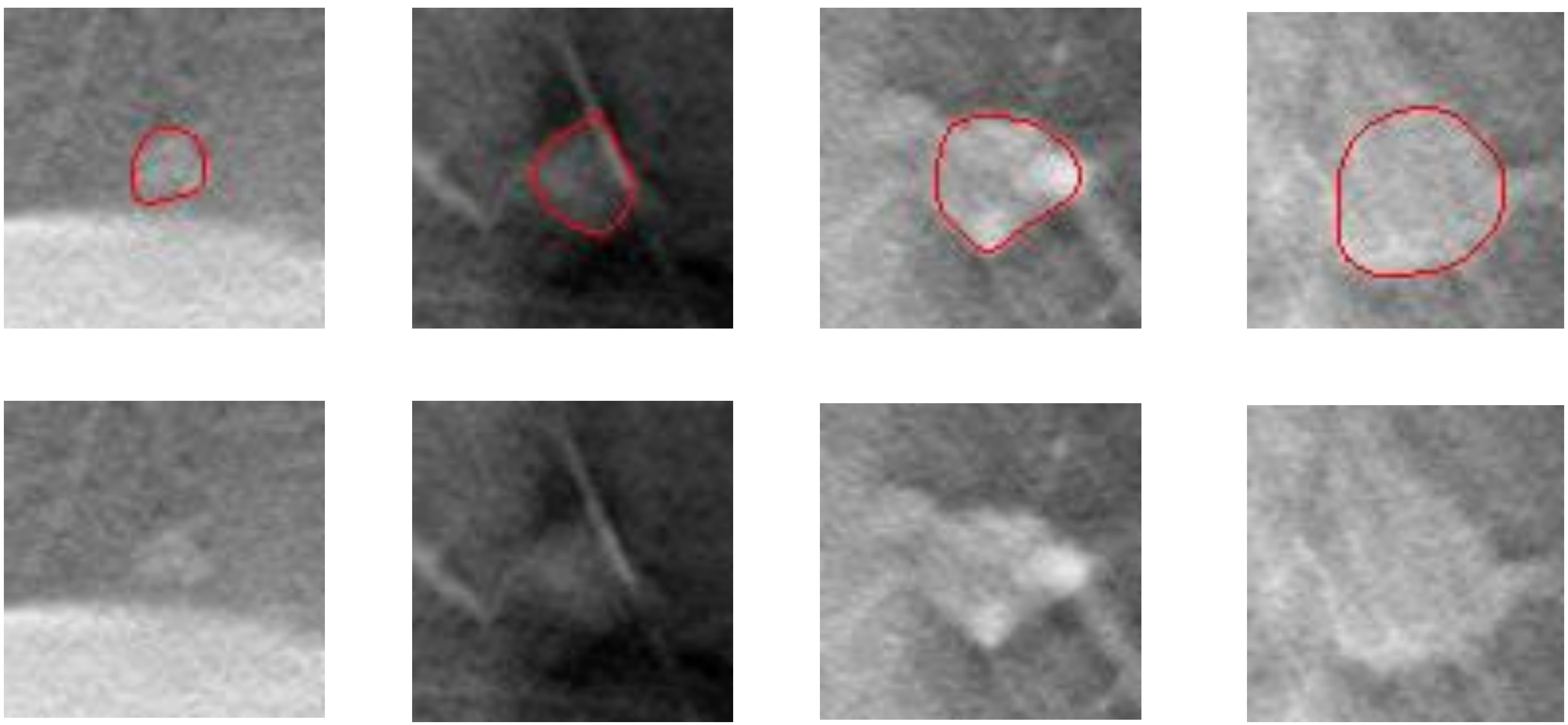
Zsugorodó Snake problémája

- $\arg\min_{\mathbf{x}} \left\{ E_{\text{int}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int_{s=0}^{1} \alpha(s) \cdot \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \right|^2 + \beta(s) \cdot \left| \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial s^2} \right|^2 ds \right\} \equiv \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2$
- Ballon erővel történő kompenzáció:

  $$\delta \mathbf{x} = -\delta t \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}} - \alpha \cdot \mathbf{x}'' + \beta \cdot \mathbf{x}'''' - \gamma \cdot \vec{\mathrm{n}}(\mathbf{x}) \right)$$

  - $\vec{\mathrm{n}}(\mathbf{x})$ az $\mathbf{x}$ helyen lévő, egységhosszú normálvektor
  - optimális γ esetén a görbe magától nem zsugorodik
  - Kezdeti szegmentáció pontatlanságai is kezelhetőek:
    - Túlszegmentálás esetén cél a zsugorodás: $\gamma < 0$
    - Alulszegmentálásnál cél a tágulás: $\gamma >> 1$

Esettanulmány (idén kimaradt)

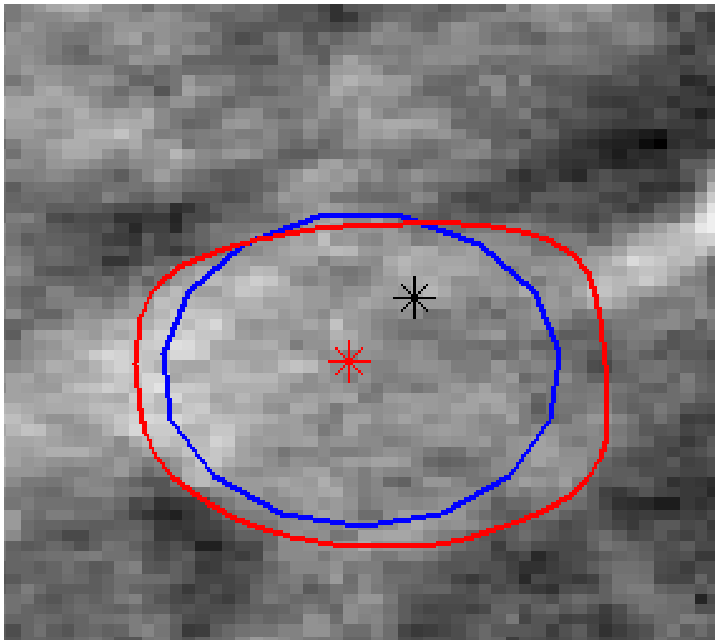


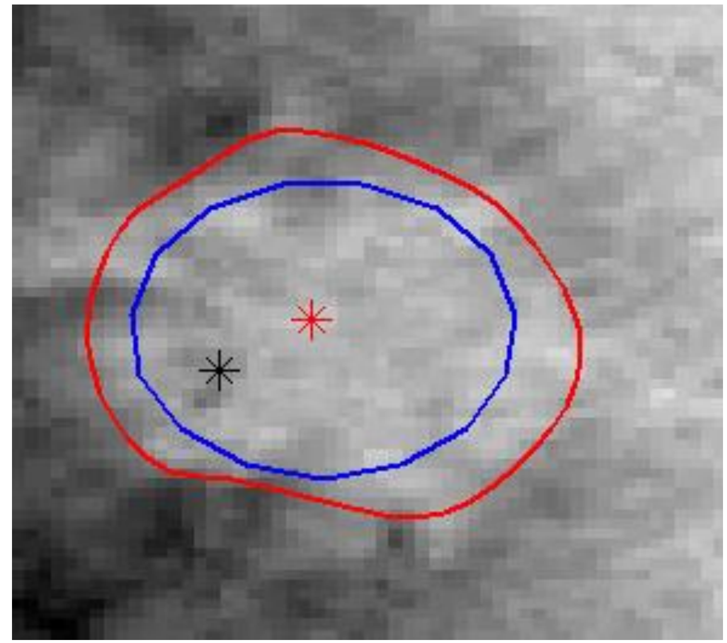
Esettanulmány (idén kimaradt)

- Tumorok szegmentálása mellkas tomoszintézis rétegfelvételen:
  - Input: vizsgálandó elváltozás egy pontja
  - Output: elváltozás körvonala
  - Motiváció: onkológiai kezelés hatásának vizsgálata
- Implementáció kétfázisú eljárással:
  1. Fázis: Elváltozás középpontjának detektálása, elváltozás skálájának becslése – negatív LoG szűrőbank
  2. Fázis: Problémára szabott energiatagokkal Sanke

     Gradiens iránya ellentétes a sugár irányával

Esettanulmány (idén kimaradt)





Fekete kereszt: input belső pont
Piros kereszt: becsült középpont
Kék görbe: LoG-os kezdeti szegmentáció eredménye
Piros görbe: Snake-el finomított szegmentáció eredménye