Képalkotás modellezése, metrikái

Orvosi képdiagnosztika

2017 ősz

Jelölésjegyzék

- Rendszer válasza f gerjesztésre: $S\{f\}$
- Dirac-delta: $\delta(x)$; egységugrás: $1(x)$
- x_0 idejű Dirac-delta gerjesztése a rendszer válasza: $h(x, x_0)$
  - LTI esetben: $h(x - x_0) := h(x, x_0)$
- Konvolúció: $*$
- g Fourier transzformáltja: $G = FT\{g\}$
  - g spektruma: G
- g sávszélessége: $bw\{g\}$
- X eloszlás várható értéke: $\mu(X)$, szórása: $\mathrm{std}(X)$
- Szürkeárnyalatos képet leíró leképezés: $I : R^2 \to R$
- Elemenkénti átlagolás: $\left\langle I^{(1:M)} \right\rangle (x, y) = (1/M) \sum_i I^{(i)}(x, y)$

Tartalom

- Elméleti áttekintés – lineáris rendszerek:
  - LTI rendszerek leírása – konvolúciós integrál
  - Rendszer identifikáció
  - Folytonos idejű Fourier transzformáció
- Képalkotás mérése lineáris rendszerekkel:
  - Point Spread Function, Modulation Transfer Function, Noise Power Spectra, SNR, CNR
  - NEQ, DQE

Lineáris rendszerek

- Komplex, fizikai rendszerek sosem lineárisak
  - Linearizálás nélkül kezelhetetlenül bonyolultak
  - Leginkább sztochasztikus folyamatok
    - Lin. rendszerként várható értékük jellemezhető
- Lineáris rendszerek jellemzői
  - Rendszer: $S : A \to B$
  - Lineáris: $S\{a \cdot f + b \cdot g\} = a \cdot S\{f\} + b \cdot S\{g\}$

$$a, b \in R \quad f, g : C \to A$$

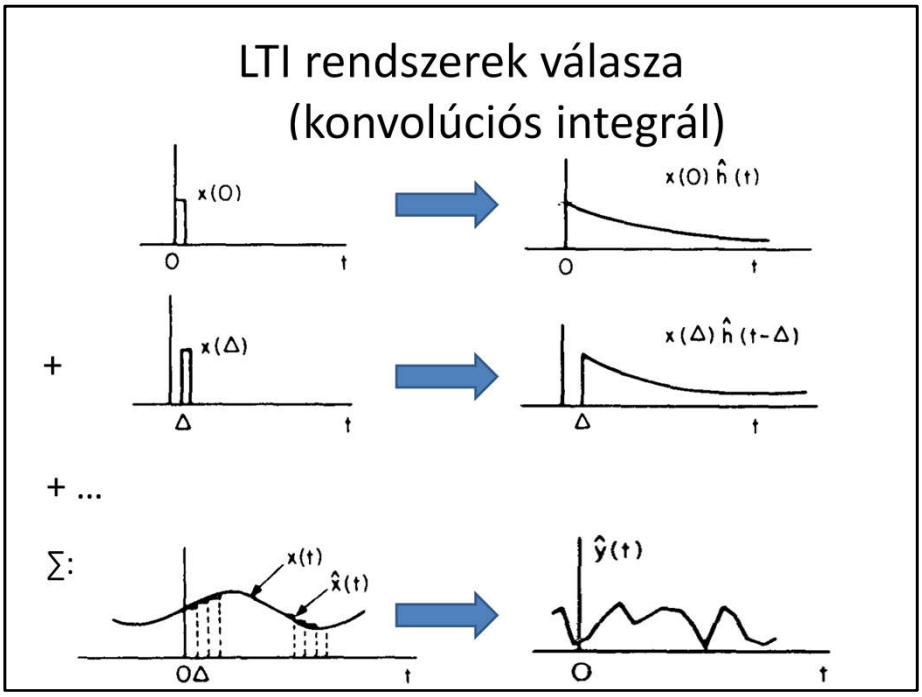
Lineáris rendszerek vizsgálata

- Eltolás-invariáns (idő invariáns) rendszer:
  - $S\{f * \delta(x - x_0)\}(y + x_0) = S\{f\}(y)$
- Dirac impulzus:
  - $\delta(x) = \lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)$
  - Impulzusválasz: $h(x, x_0) = S\{\delta(y - x_0)\}(x)$
    - Eltolás-invariáns rendszernél: $h(x, x_0) \equiv h(x - x_0)$
    - LTI rendszereket egyértelműen leírja $h(x)$

Dirac delta tulajdonságai: értéke – integrálja

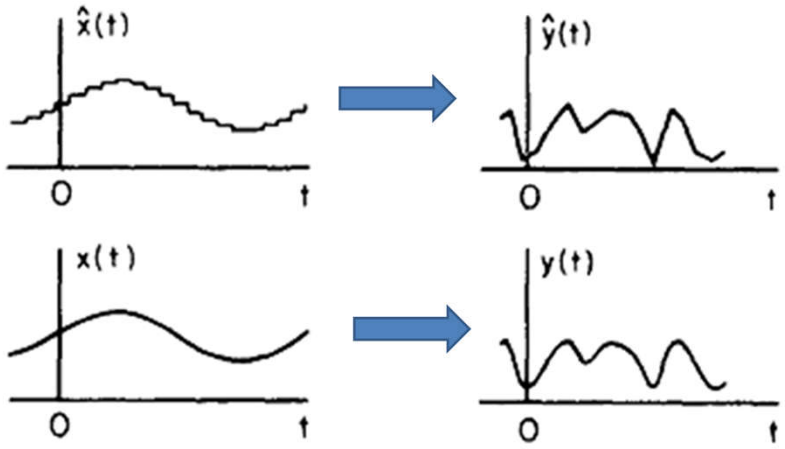
LTI rendszerek válasza (konvolúciós integrál)

- Közelítsük infinitezimális téglákkal f-et:
  - $S\{f\}(x) \approx \hat{y}(x) := \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(j \cdot \Delta x) \cdot h(x, j \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$
  - Közelítő modell helyességének feltételei:
    - f folytonos
    - $h(x, y)$ is folytonos függvénye y-nak
    - $\Delta x << 1$
- Ha S eltolás invariáns:
  - $S\{f\}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \hat{y}(x) = \int_{x'=-\infty}^{\infty} f(x') \cdot h(x - x') \cdot dx'$
  - Tömörebben: $y(x) := S\{f\}(x) = (f * h)(x)$



Megj.: a fenti ábrán kauzális a rendszer

LTI rendszerek válasza
(konvolúciós integrál)

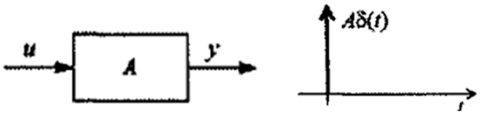


LTI rendszerek

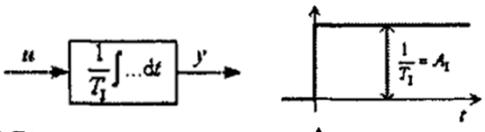
- Impulzusválasz (h) egyéb elnevezései:
  - Súlyfüggvény
  - Gerjesztés Válasz függvény
  - Képalkotó rendszereknél: Point Spread Function
- Fizikai képalkotó rendszerek sajátosságai:
  - Rögzített képek (projekciók, stb.): $y \approx h * x + \eta$
  - Általában $x : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}$, $y : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$
  - η a képalkotás, és a fizikai foton interakciók függvénye

Egyszerű rendszerek impulzusválasza (szemléltetés)

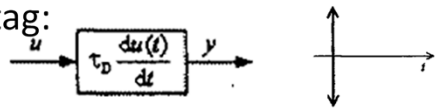
- Arányos tag:



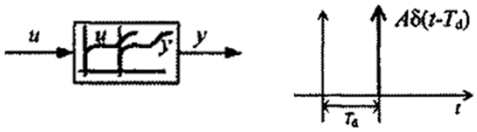
- Integráló tag:



- Diffrenciáló tag:



- Holtidős tag:



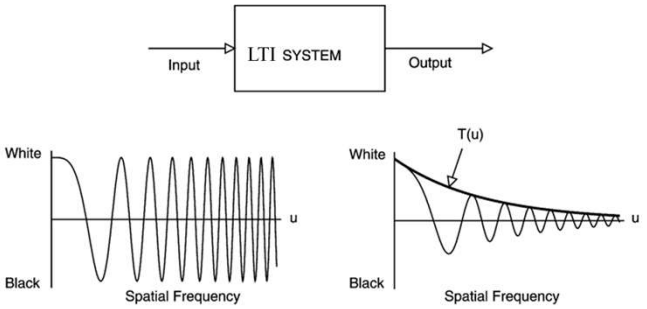
Fourier Transzformáció

- Folytonos függvények lineáris transzformációja:
  - $F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \mathrm{e}^{(-j \cdot 2\pi \cdot \xi \cdot x)} \cdot dx; \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \cdot \mathrm{e}^{(j \cdot 2\pi \cdot \xi \cdot x)} \cdot d\xi$
  - Euler formula: $\exp(j \cdot 2\pi \cdot \xi \cdot x) = \cos(2\pi \cdot \xi \cdot x) + j \cdot \sin(2\pi \cdot \xi \cdot x)$
- LTI rendszerek vizsgálata Fourier tartományban:
  - $y(x) = \int_{x'=-\infty}^{\infty} h(x') \int_{\xi=-\infty}^{\infty} F(\xi) \cdot e^{(j \cdot 2\pi \cdot \xi \cdot (x - x'))} \cdot d\xi \cdot dx'$
  - $y(x) = \int_{\xi=-\infty}^{\infty} F(\xi) \cdot \left(\int_{x'=-\infty}^{\infty} h(x') \cdot e^{(-j \cdot 2\pi \cdot \xi \cdot x')} dx' \right) \cdot e^{(j \cdot 2\pi \cdot \xi \cdot x)} \cdot d\xi$
  - Konvolúció tétel: $Y(\xi) = F(\xi) \cdot H(\xi)$

- Jelölés elmagyarázása
- Euler formulánál annak a hangsúlyozása, hogy w frekvenciájú komponens ⇔ w frekvenciájú jel

LTI rendszerek – konvolúció tétel

- LTI rendszer sajátfüggvényei az FT bázisfüggvényei (komplex exponenciálisak):
  - ξ frekvenciájú szinuszos jelre adott válasz is ξ frekvenciájú szinuszos jel:



LTI rendszerek átviteli függvény

- Átviteli függvény: $H = FT\{h\}$
- $H(\xi) = |H(\xi)| \cdot \exp(j \cdot \varphi(H(\xi)))$ értelmezése:
  - $|H(\xi)|$ rendszer erősítése (1/ tehetetlensége):
    - ξ ~ jel változásának sebessége
    - Fizikailag realizálható rendszerek sávkorlátozottak: $|H(\xi)| << 1$, ha $\xi > bw(h)$
    - Általában monoton csökkenő függvény (ellenpélda: kondenzátor)
  - $\varphi(H(\xi))$ rendszer fázis tolása (késleltetése):
    - $FT\{f(x - x_0)\} = F(\xi) \cdot \exp(j \cdot 2\pi \cdot x_0 \cdot \xi)$

Kauzális rendszer esetén csak késleltetés lehetséges:

- DE: képfeldolgozásnál a futó változók nem időt, hanem pozíciót jelölnek, ezért itt ennek a megkülönböztetésnek nincs értelme

LTI rendszerek identifikációja

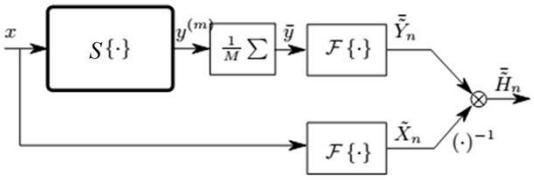
- $H(\xi)$ meghatározása:
  - Egységimpulzus ($\delta(x)$) gerjesztés
  - Egységugrás gerjesztés: $1(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(x') \cdot dx'$
    - $h(x) = dS\{1\}(x)/dx$
  - Szinuszos vizsgálójellel (LTV-hez is jó lehet):
    - $f(x) = A_0 \cdot \cos(2\pi \cdot \omega \cdot x + \varphi_0)$

      $y(x) = A_0 \cdot A \cdot \cos(2\pi \cdot \omega \cdot x + \varphi_0 + \varphi)$ esetén

$$H(\xi) = \begin{cases} A \cdot \exp(j \cdot \varphi \cdot sign(\xi)) & |\xi = \pm\omega \\ ? & |\xi \neq \pm\omega \end{cases}$$

LTI rendszerek identifikációja

– Multiszinuszos vizsgálójel (LTV rendszerekhez is):
- $f(x) = \sum_i A_i \cdot \cos\left(2\pi \cdot (i \cdot \omega) \cdot x + \varphi_i\right)$
- $y(x)$ Fourier Sorfejtése megadja $H(\pm i \cdot \omega)$ értékeit

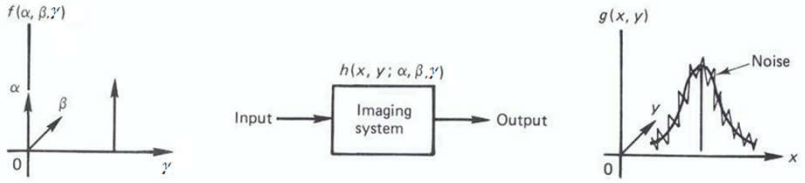


– Fehér zajjal:
- Bemeneti zaj: teljesítménysűrűség spektruma egyenletes
- Kimeneti zaj: teljesítménysűrűség spektruma $\propto \left|H(\xi)\right|^2$

Teljesítménysűrűség spektrum:
- Jel autokorrelációs függvényének a spektruma (F{corr(s,s)})=F{s(t)*s(-t)}=F(s).×konj(F(s))=|F(s)|^2

Képalkotó rendszerek jellemzése

- Képalkotás általános modellje: Lineáris rendszer:



- Lineáris rendszerek – GV vizsgálat
  - Ideális gerjesztés: dirac-delta
  - Közelítése: pontszerű gerjesztés
    - A gerjesztés is GV válasza egy lineáris rendszernek ($l(\alpha,\beta,\gamma)$)
    - Közvetlenül a ($h*l$) rendszert vizsgáljuk

Pontszerű gerjesztés: véletlenül sem pontszerű sugár/fényforrás, hanem pontszerű objektum

Point Spread Function

- Általános modell (konv. integrál)- a gerjesztés képét elmosás és additív zaj degradálja:

$$g(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} h(x,y;\alpha,\beta,\gamma)\cdot f(\alpha,\beta,\gamma)\,d\gamma\,d\alpha\,d\beta+\eta(x,y)$$

  - $f(\alpha,\beta,\gamma)$: gerjesztés (vizsgált objektum)
  - $\eta(x,y)$: additív zaj
  - $h(x,y;\alpha,\beta,\gamma)$: rendszer súlyfüggvénye – PSF-je
- Inverz probléma – később részletesen tárgyaljuk

Gamma határai – backscattering problémája

Point Spread Function (2D – 2D eset)

- Nem szükségszerűen izotropikus:
  - Fényképezőgépek / mikroszkópok – inhomogén lencsék okozzák az anizotróp PSF-et
  - PA röntgen, CT, DTS esetén tipikusan anizotróp
  - MRI esetén felvételi paraméterek függvénye
- Nem szükségszerűen shift invariáns:
  - Jelentősen nagyobb probléma
  - Közelítés shift invariáns rendszerekkel:
    - Alapelv: PSF folytonos függvény
    - Isoplanatic régiók

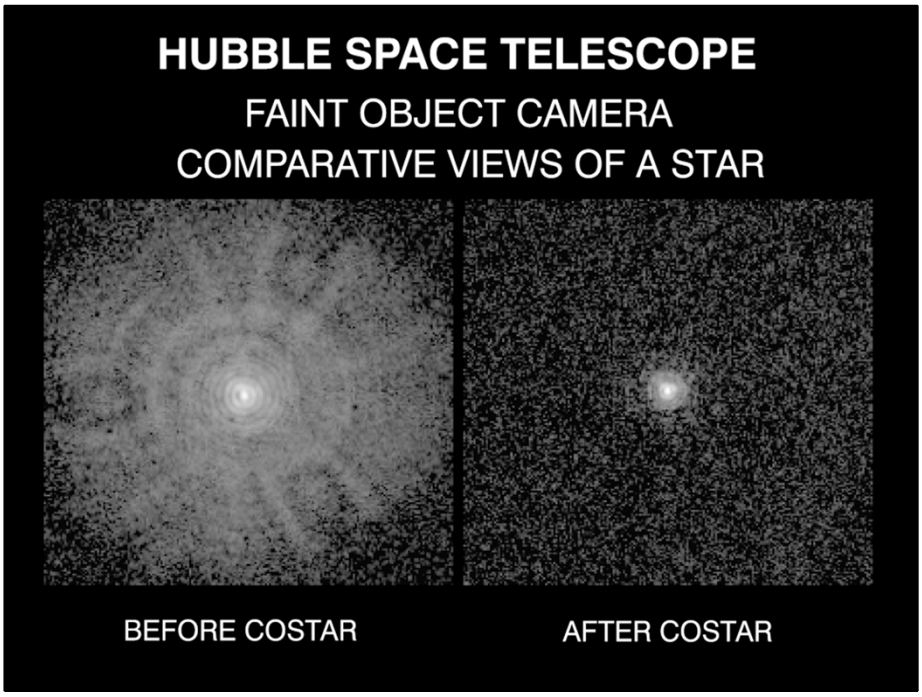
Isoplanatic régió: ezen belül jó közelítéssel eltolás invariáns a PSF

Point Spread Function (2D – 2D eset)

2D – 2D: az ideális képalkotással kelet-kező és a rögzített kép közötti rendszer

- Nem szükségszerű
  - Fényképezőgépek / mikroszkópok – inhomogén lencsék okozzák az anizotróp PSF-et
  - PA röntgen, CT, DTS esetén tipikusan anizotróp
  - MRI esetén felvételi paraméterek függvénye
- Nem szükségszerűen shift invariáns:
  - Jelentősen nagyobb probléma
  - Közelítés sh
    - Alapelv: PSF folytonos függvény
    - Isoplanatic régiók

Az időinvariancia elnevezése képeket bemenetként kezelő 2D rendszer esetén.



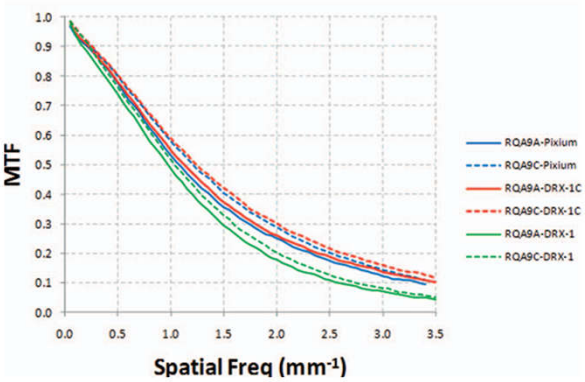
Costar: Corrective Optics Space Telescope Axial Replacement: szenzor mozgatása az SPF kompenzálása érdekében (itt főleg lencsehibából ered)

Modulation Transfer Function

(modulációs átviteli függvény)

- Tételezzük fel, hogy a PSF pozíció független
- Ekkor a PSF spektrumát érdemes vizsgálni:
  - TF (átviteli függvény): $\mathbf{H} = F\{\mathbf{h}\}$
- Elterjedt még az OTF / MTF felbontás is:
  - Optical Transfer Function: $\mathbf{H}/\mathbf{H}(0,0)$
  - Modulation Transfer Function: $\left|\mathbf{H}/\mathbf{H}(0,0)\right|$
- Effektív felbontás (zaj nélkül): $bw\{\mathbf{h}\}$
  - Képalkotásban 0.5-ös MTF érték határozza meg

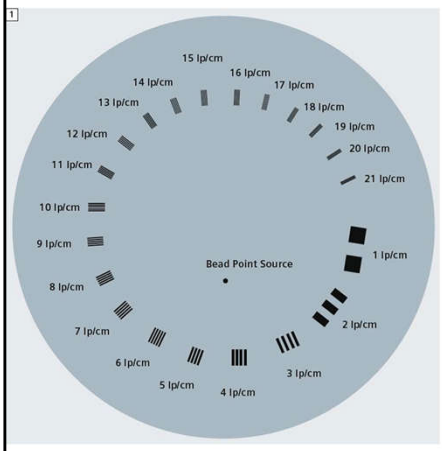
Röntgen detektor MTF példák



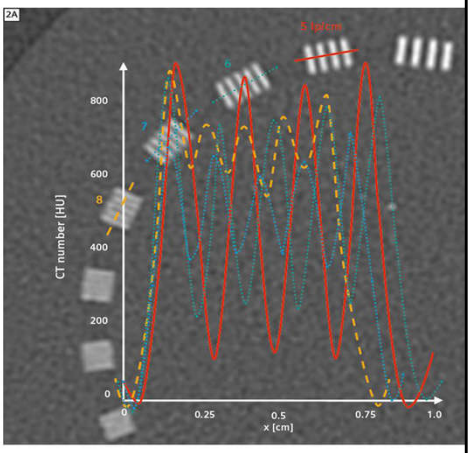
MTF mérése

- MTF definiálásánál LTI modellt használtunk:
  - Expected MTF: célja az alul-mintavételezés hatására keletkező moire hatásait degradálni
- Gyakori megvalósításai:
  - Vonalpár fantom: MTF származtatható belőle
  - Rés módszer: magas frekvencián pontosabb
  - Él módszer: alacsony frekvencián pontosabb
  - Általában egy irány mentén mérhető:
    - Ami a fantom elhelyezésétől függ

MTF mérése vonalpár fantomok



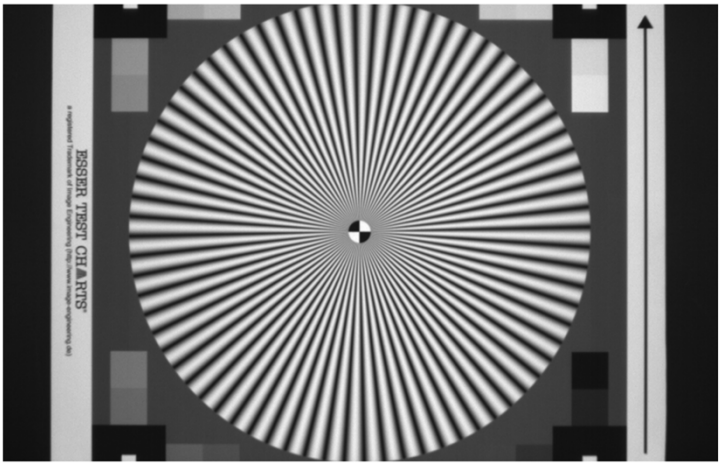
Catphan ® 500



FBP-vel rekonstruált axiális szelet

MTF mérése vonalpár fantom

- Digitális fényképezőgépekhez készült fantom:



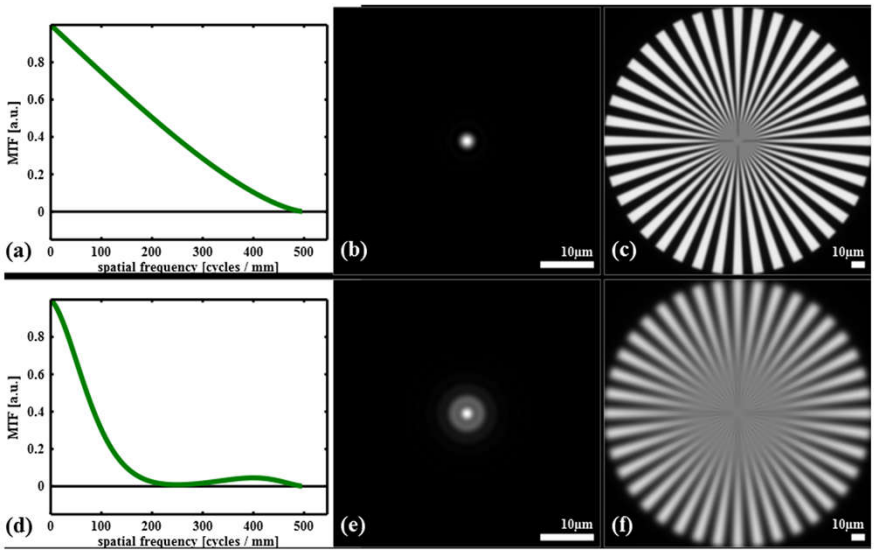
Előnye: minden irány mentén lehetséges az MTF mérése

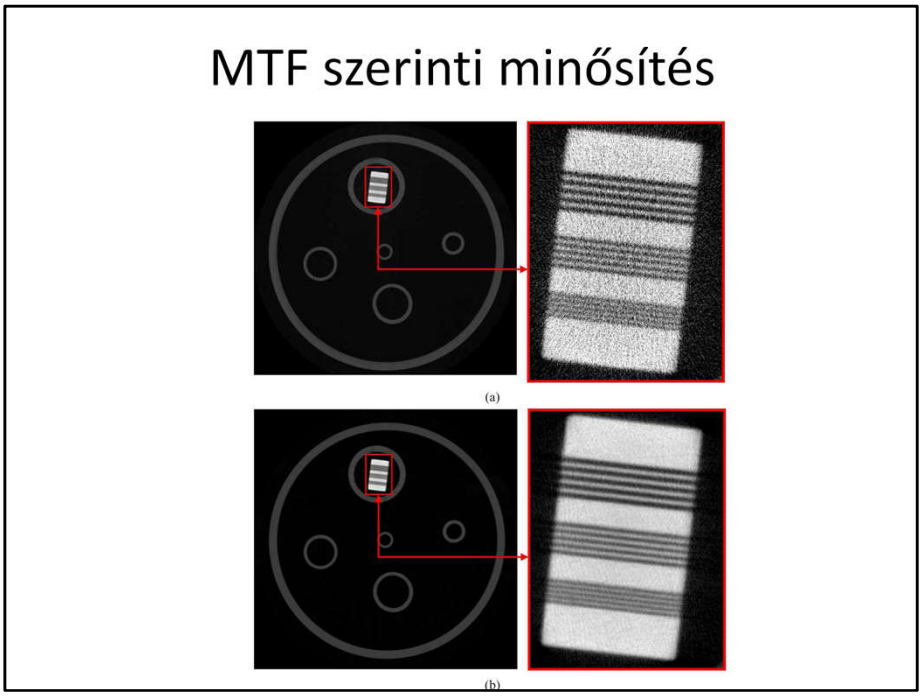
MTF mérése: él módszer

- A fantom éle a pixelek oszlopaival kis, de >0 szöget zár be.
- Így lehetőség nyílik az él „felül-mintavételezésére”, korrigálható az alul-mintavételezési probléma.
- Az élre merőleges derivált adja meg a PSF-et.

- Összes sorban mért PSF-et kiátlagoljuk
- Ezzel az elrendezéssel kiátlagolható a mintavételezés hatása

MTF – PSF közötti kapcsolat





Bár a felső ábránál az alsó vonalblokkhoz tartozó MTF értéke magasabb, a túl nagy zajtól szemmel még sem különíthetőek jobban el, mint az alsó ábra esetén.

Signal to Noise Ratio

(jel / zaj viszony)

- Általános jelfeldolgozásban:

$$SNR = 10 \cdot \log_{10}\left(P_{signal} / P_{noise}\right) = 20 \cdot \log_{10}\left(A_{signal} / A_{noise}\right)[dB]$$

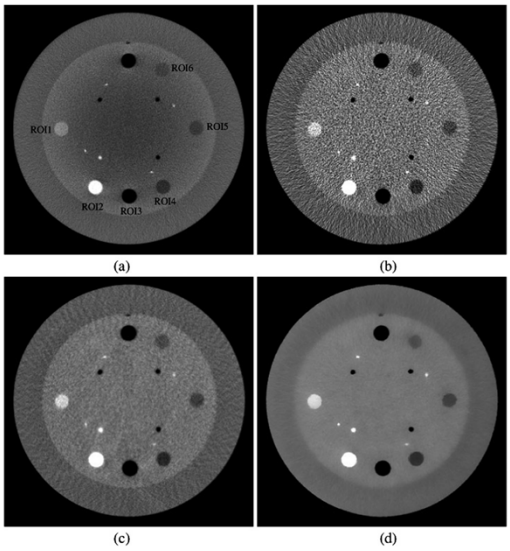
  – Általában additív zaj
- Képalkotó rendszerek esete:
  – f homogén objektum legyen
  – $SNR = \underset{(x,y)\in N}{\mu}\left\{I(x,y)\right\} \Big/ \underset{(x,y)\in N}{std}\left\{I(x,y)\right\}$
    - N a homogén objektum képének kiterjedése, fontos, hogy elegendően nagy legyen
    - Több felvételből is mérhető

Contrast to Noise Ratio

(kontraszt / zaj viszony)

- Kontraszt önmagában nem jó minősítő:
  - Gyakran főleg a zaj generálja
  - Objektumok elkülönítését javítja a jobb kontraszt, de degradálja a nagyobb zaj
- $CNR_{A,B} = C_{A,B} \Big/ \sigma_N = \left| \underset{(x,y)\in A}{\mu} \{I(x,y)\} - \underset{(x,y)\in B}{\mu} \{I(x,y)\} \right| \Big/ \underset{(x,y)\in N}{std} \{I(x,y)\}$
  - A,B a két elkülöníteni kívánt objektum képe
  - N azon régió, melyből becsülhető a képzaj:
    - Ennek konkrét megválasztása esetfüggő
  - Alkalmazása (mint metrika) főleg orvosi körben elterjedt

CNR mérése CT esetén



- Fontos, hogy nem tételez fel lineáris képalkotást!
- Szeleten belüli felbontás vs. sugárdózis optimalizáció
- Nemlineáris rekonstrukciók minősítése

Catphan ® 600

Röntgen kvantum jellemzői

- Kvantum: fotonok száma
- Fotonok eloszlása:
  - Érzékelő felületén/ időben nem egyenletes
    - Sugárzás inherens zaját ez a jelenség generálja
  - Ergodikus eloszlással írható le
  - Véletlen Poisson Folyamat:
    - Q várható érték esetén $\sqrt{Q}$ szórás
- Ideális képalkotó rendszer:
  - Plusz zajt nem generál ($SNR_{out} = SNR_{in}$)

Kvantum: EM sugárzás „legkisebb” mérhető egysége
SNR_in: képalkotó rendszer bemenetén lévő „jel”=sugárzás SNR-je

Noise Power Spectrum

(zaj teljesítmény spektrum)

- A képzaj energiája frekvenciafüggő:
  - NPS definíciója *folytonos* jel esetén:

$$NPS = \lim_{Nx,Ny,M\to\infty} \frac{1}{X \cdot Y} \left\langle \left| F\left\{ I^{(1:M)} - \overline{I} \right\} \right|^2 \right\rangle$$

  - *Diszkrét* esetben:

$$NPS = \lim_{Nx,Ny,M\to\infty} \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{N_x \cdot N_y} \left\langle \left| F\left\{ I^{(1:M)} - \overline{I} \right\} \right|^2 \right\rangle$$

    - $\Delta x,\ \Delta y$: detektor pixeleinek x és y irányú kiterjedése
    - $N_x,\ N_y$: detektor x és y irányú logikai felbontása (pixeleinek a száma)
    - $X = \Delta x \cdot N_x,\ \ Y = \Delta y \cdot N_y$ detektor fizikai mérete

S: szóródásmentes kép; I: felvételsorozat; <>: elemenkénti átlagolás; Nx, Ny: felvételek függőleges / vízszintes felbontása

Noise Power Spectrum

(zaj teljesítmény spektrum)

- A képzaj e

$$\int_{x,y} f(x,y)\cdot\exp\left(-2\pi j\cdot(ux+vy)\right)dydx$$

  – NPS defin

$$NPS = \lim_{Nx,Ny,M\to\infty}\frac{1}{X\cdot Y}\left\langle\left|F\left\{I^{(1:M)}-\overline{I}\right\}\right|^2\right\rangle$$

  – *Diszkrét* esetben:

$$NPS = \lim_{Nx,Ny,M\to\infty}\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{N_x\cdot N_y}\left\langle\left|F\left\{I^{(1:M)}-\overline{I}\right\}\right|^2\right\rangle$$

$$\sum_{m,n} f[m,n]\exp\left\{-2\pi j\cdot(u\cdot m/M+v\cdot n/N)\right\}$$

    - $\Delta x,\ \Delta y$ rjedése
    - $N_x,\ N_y$ ása (pixeleinek a száma)
    - $X=\Delta x\cdot N_x,\ \ Y=\Delta y\cdot N_y$ detektor fizikai mérete

Noise Equivalent Quanta

(zaj ekvivalens kvantum)

- Normalized NPS:
  - Kompenzálja a rendszer erősítését
  - $NNPS(u,v) = NPS(u,v)/A^2$
    - A ~ Mi a detektor válasza olyan helyen, melybe Q foton érkezik (kvázi a rendszer erősítése)
- Noise Equivalent Quanta:
  - Mennyi foton lenne szükséges ugyanazon képminőség eléréséhez, ha ideális lenne a képalkotás
  - $NEQ(u,v) = MTF^2(u,v)/NNPS(u,v) = SNR^2(u,v)$

Mivel Poisson folyamatként modellezzük az inherens zaj leírását =>
SNR*=Q*/(Q*)^(1/2)=Q*^(1/2)

Detective Quantum Efficiency

(detektálási kvantumhatékonyság)

- Eddigi metrikáknál nem vizsgáltuk a dózistól / fotonok számától való függést:
  - $DQE(u,v) = NEQ(u,v)/Q$
    - *Q* a vizsgált detektort elérő kvantum (fotonok száma, definiálható így is a dózis)
  - Fontos interpretáció:

    $DQE(u,v) = SNR^2(u,v)/SNR_{in}^2(u,v)$
    - $SNR_{in}(u,v)$: érzékelőelemre belépő jel (pl. röntgensugár, fotonok) SNR –je
    - A kész rendszer „információ átvitelének” hatékonyságát méri, értéke 0 és 1 között változik.

Poisson eloszlású röntgensugarakat feltételezve:
SNRout=NEQ/NEQ^(1/2)=NEQ^(1/2), SNRin=Q/Q^(1/2)=Q^(1/2)

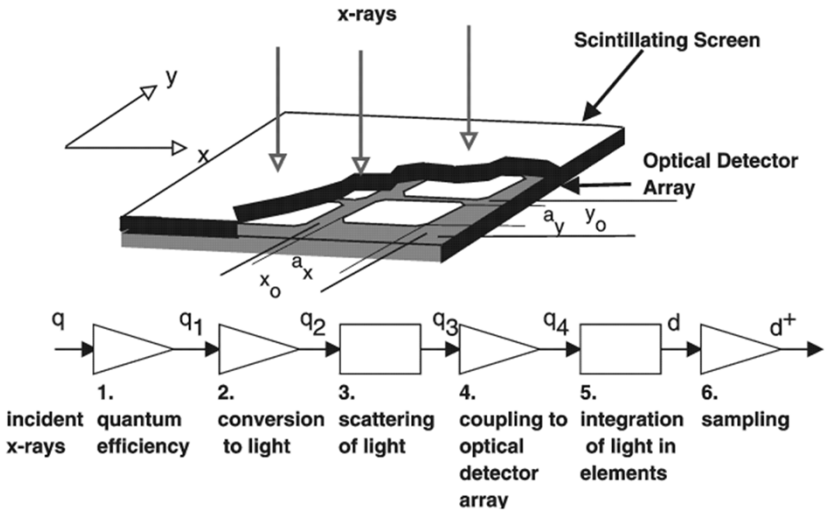
DQE számolási példák -1-

- Adott egy röntgen detektor, melyet az alábbi rendszer ír le:
  - Egy ideális detektor és egy csillapító réteg soros kaszkádja (pl. CsI szcintillátor), a csillapító réteg nem változtatja az átmenő sugárzás eloszlásának típusát.
  - A szcintillátor a felületét elérő röntgen fotonok ¼-éből generál látható fotont, plusz zajt nem generál.
  - Q=5000 röntgen foton/ pixel éri a teljes rendszert.
  - NEQ=? DQE=? SNRin=? SNR=?

DQE számolási példák -2-

- Adott egy röntgen detektor, mely:
  - Ideális detektor, és zajos A/D átalakító soros kaszkádja, mely zaja ekvivalens 50 foton/pixel-el a belépő sugárzás fluxusában (inherens zaj).
  - A kiolvasási zaj és a detektort érő fotonok zaja Poisson eloszlású, egymással korrelálatlan.
  - Q=10000 foton/pixel éri a detektor felületét.
  - NEQ=? DQE=? SNRin=? SNR=?
- Jó közelítéssel ez a két zajforrás aggregálódik (Hf. az aggregált rendszer metrikái).

Röntgen detektor kvantum modellje



És mi a valóság?

- Gyakorlatban integráló típusú detektorok:
  - Detektorok erősen érzékenyek a becsapódó fotonok energiájára:
    - Kisebb energiájú fotonok esetén kevésbé érzékenyek
    - Gyakorlatban van egy minimum energiaküszöb
  - Az eddig tárgyalt elmélet erősen egyszerűsít
    - Ezen alapszik az integráló detektorok modellezése is, de az jóval bonyolultabb (ritkán használják, főleg szimulációra)
  - DE nincs ennél jobb általános modell
    - Vagy a nagy számok törvényére hivatkozva minden zajt Gauss zajnak feltételeznek, mely még kevésbé adekvát.