Fourier térbeli analízis, inverz probléma

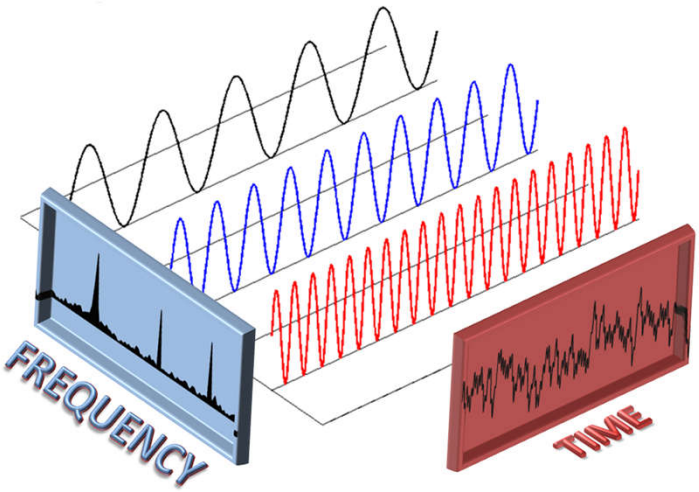
Orvosi képdiagnosztika

5-7. ea. 2017 ősz

5. Előadás témái

- Fourier transzformációk és kapcsolataik:
  - FS, FT, DTFT, DFT, DFS
  - Mintavételezés, interpoláció

Folytonos Fourier Transzformáció



Folytonos Fourier Transzformáció

- Lineáris transzformáció a véges energiájú, folytonos függvények tere felett:
  - $F(\omega) = FT\{f\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp\{-j \cdot x \cdot \omega\}dx$
  - $f(x) = FT^{-1}\{F\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp\{j \cdot x \cdot \omega\}d\omega$
- Legfontosabb tulajdonságai:
  - Konvolúció tétel: $(f * g) = FT^{-1}\{(F \cdot G)(\omega)\}$
  - Fordított konvolúció: $((f \cdot g)(x)) = \frac{1}{2\pi} FT^{-1}\{F * G\}\big|_x$
  - Parseval tétel: $E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$

FT kétféle alakban is felírható:
- Kör / fizikai frekvencia
- Unitér transzformációként is felírható

FT értelmezése

Folytonos Fourier Transzformáció

– Valós jel spektruma: $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$

– Páros, valós jel spektruma:

$$F(-\omega) = \mathrm{Re}\{F(-\omega)\} = \mathrm{Re}\{F(\omega)\} = F(\omega)$$

– Páratlan, valós jel spektruma:

$$F(-\omega) = \mathrm{Im}\{F(-\omega)\} \cdot j = \mathrm{Im}\{F(\omega)\} \cdot (-j) = \overline{F(\omega)}$$

– Periodikus jel spektruma diszkrét:

$F(\omega) = 0$, ha $\omega \neq k \cdot (2\pi \cdot f)\big|_{k \in Z}$

– Ekvivalens egy unitér transzformációval:

- Ez pl. maga után vonja a bijektivitást

Folytonos Fourier Sorfejtés

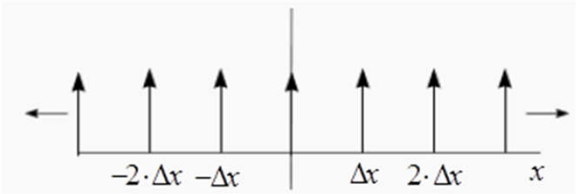
- Lineáris transzformáció a <u>periodikus</u> folytonos függvények tere felett:
  - $c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cdot \exp(-j \cdot x \cdot 2\pi\, n/T)\, dx\,; \quad n \in Z$
  - $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \exp\{j \cdot x \cdot 2\pi\, n/T\}$
- Kapcsolat a folytonos FT-val:
  - Mintavételezi a spektrumot: $c_n = 1/T \cdot F(2\pi \cdot n/T)$
  - Periodikus jel ⇔ diszkrét spektrum
  - Egyéb tulajdonságokat örökli a folytonos FT-től

Diszkrét idejű Fourier Transzformáció (DTFT)

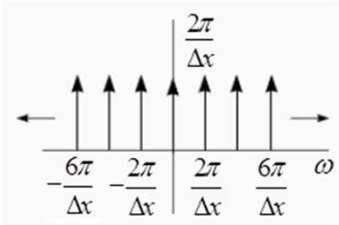
- Adott egy mintavételezéssel előállt <u>végtelen hosszú, abszolút összegezhető jel</u>: $f[n]$
- Definíció:
  - $X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] \exp\{-j \cdot \omega \cdot n\}$
  - $x[n] = 1/2\pi \cdot \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) \exp\{j \cdot \omega \cdot n\} \, d\omega$
- Alapvető tulajdonságok:
  - $n \in Z$, de $\omega \in R$
  - $X(\omega + 2 \cdot k \cdot \pi)\big|_{k \in Z} = X(\omega)$
  - Egyéb tulajdonságait örökli a folytonos FT-től

Matematikai mintavételezés
Folytonos FT és DTFT kapcsolata

- Végtelen impulzus fésű:
  - Matematikai mintavételezés: folytonos jel elemenkénti szorzata az impulzus fésűvel.
  - Időtartománybeli szorzás ⇔ Spektrumok konvolúciója



Impulzusfésű az időtartományban



frekvenciatartományban

Mintavett jel spektruma

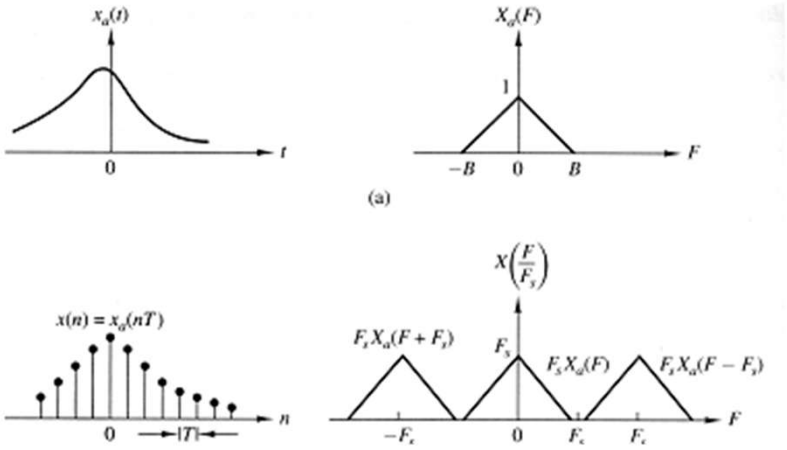
- Formálisan a mintavett jel spektruma:

$$X_s(\omega) = \frac{2\pi}{\Delta x} X(\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{\Delta x}\right) = \frac{2\pi}{\Delta x} \sum_k X\left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{\Delta x}\right)$$

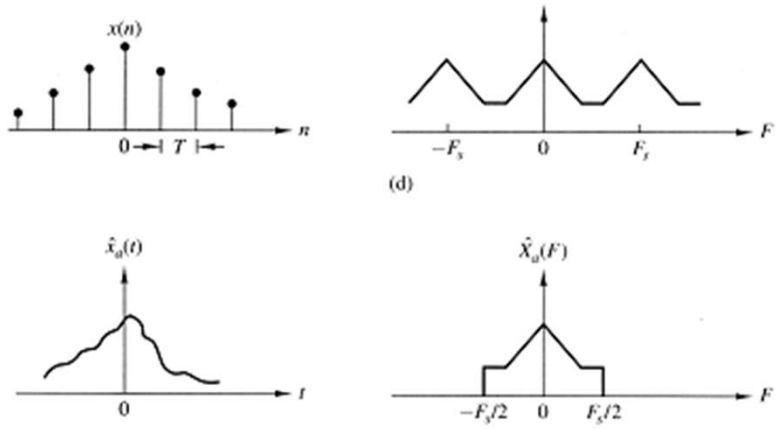
  - Δx : mintavételezések távolsága
  - $X(\omega)$: folytonos idejű jel spektruma
  - $X_s(\omega)$: mintavételezett jel spektruma
- Nyquist mintavételi törvény:
  - $bw\{x\} < (1/2) \cdot f_s; \square\ f_s = (1/\Delta x)$
  - Ha nem tartjuk be alul mintavételezés: $K \cdot X_s(\omega) \neq X(\omega)$

Összefüggésből:
- w+k*2pi*fs spektrum tényező „belapolódik”
- Periodikus a spektrum 2pi*fs „periódusfrekvenciával”

Helyesen mintavételezés interpretációja



Alul mintavételezés interpretációja spektrum átlapolódása

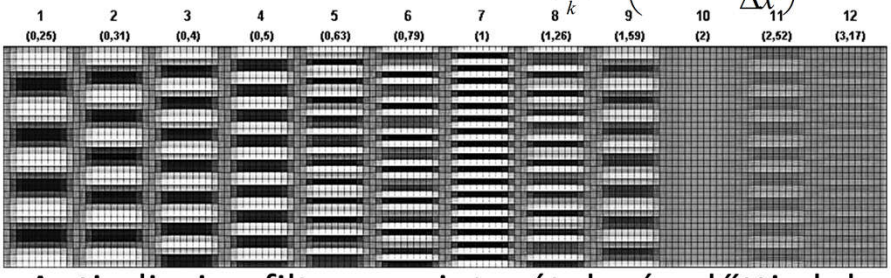


Spektrum átlapolódása
moire / aliasing

- Spektrum átlapolódása által generált jeltorzulás

Spektrum átlapolódása - aliasing

- Aliasing formálisan: $X_s(\omega) \propto \sum_k X\left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{\Delta x}\right) \neq X(\omega)$



- Anti-aliasing filter – mintavételezés előtti alul-áteresztő szűrés:
  - Pl. Bayer szűrős fényképezőgépeknél optikai szűrő
  - Radiológiában az elkent PSF-ek miatt elhagyható

Kérdés az ábrához: mekkora lehetett a mintavételi frekvencia?

Mintavett jel rekonstrukciója

- Rekonstrukció (interpoláció):
  - Cél: a mintavételezett jel értékének előállítása két mintavételezési pont között
  - Ha sérült a mintavételezési törvény, akkor lehetetlen
  - LTI rendszerrel: $x_R = x_S * h_R$
  - Ideális interpolációs kernel:
    - $H_R(\omega) = \begin{cases} K & \left| -\omega_L \le \omega/2\pi \le \omega_L \right. \\ 0 & \left| egyébként \right. \end{cases} \qquad \omega_L = f_S/2$
    - $h_R \propto \mathrm{sinc}(\omega_L \cdot x)$

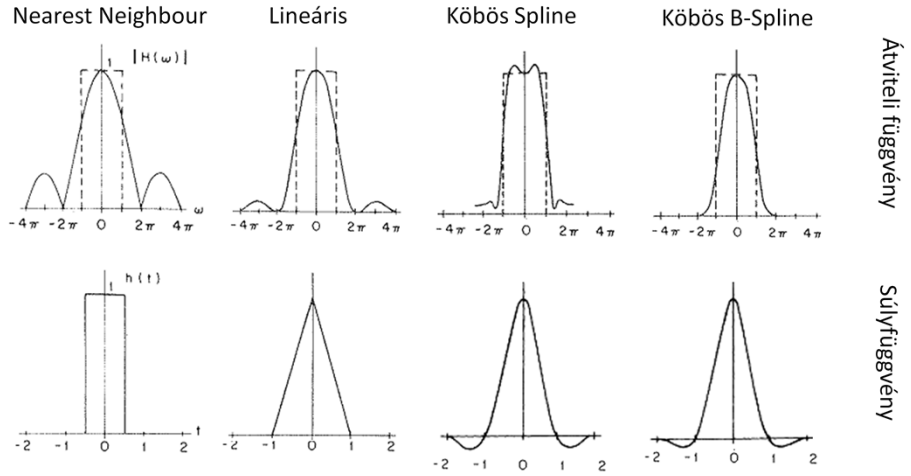
Probléma az ideális interpolációval:
- Időtartományban végtelen a tartója a kernelnek

Interpoláció hibái

- Megfigyelt tartomány széle:
  - Súlyfüggvény „kilóg” a megfigyelt tartományból
- $\left|H_R(\omega)\right| \neq 0 \quad |\omega| > f_s/2$ esete:
  - Lényegesen jelentősebb hibaforrás
  - Mintavett jel rekonstrukciója:
    - $X_R(\omega) = H_R(\omega) \cdot X_S(\omega) \propto \sum_k H_R(\omega) \cdot X\left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{\Delta x}\right)$
    - $X_R(\omega) \neq X(\omega)$, ha $|\omega| > f_s/2$
  - Példa rá a Nearest Neighbour interpoláció (ZOH)

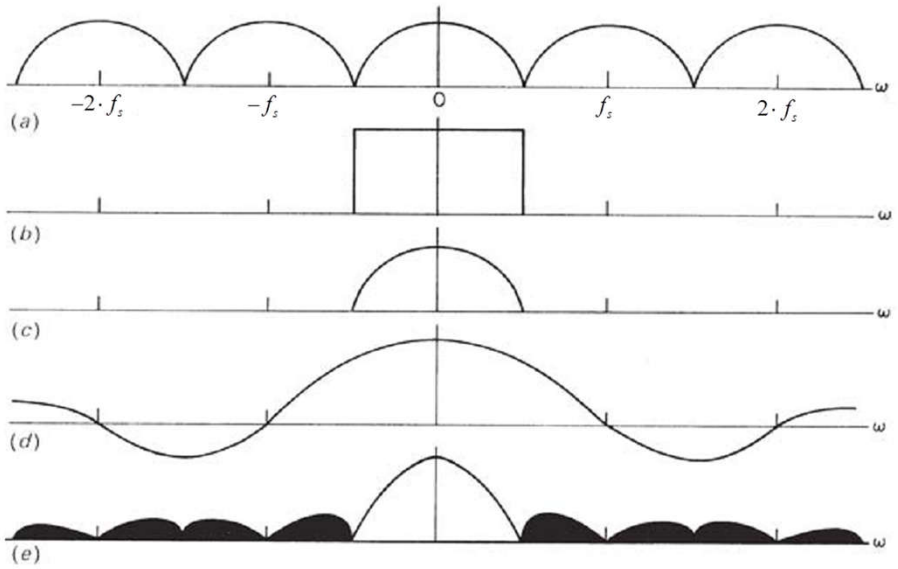
Interpolációk összehasonlítása

- Átviteli/súlyfüggvényük analízisével:



Fent spektrumok, alul a kernelek súlyfüggvényei:
- Sávkorlátosság szempontjából a legjobb helyzet a köbös b-spline-nál
- Patkoltak a spline-ok

(Hibás) interpoláció vizualizációja



a.) mintavett jel DTFT spektruma
b.) ideális interpolációs kernel átviteli függvénye
c.) ideális interpolációval előállított folytonos jel spektruma
d.) Nearest Neighbour (ZOH) kernel átviteli függvénye
e.) ZOH-al interpolált jel folytonos spektruma (torzul a fősáv is, és marad az ismétlődésekből is).

Integráló mintavételezés

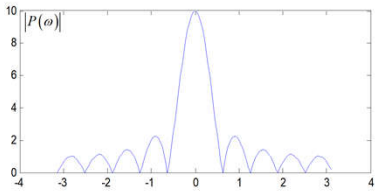
- Érzékelők integrálják a foton fluxust:
  - Érzékelőelemek **homogén** súlyfüggvénye: $p(x)$
  - Adekvát az alábbi modell:
    1. Megszűrjük a folytonos jelet az érzékelők súlyfüggvényével
    2. Elvégezzük a matematikai mintavételezést

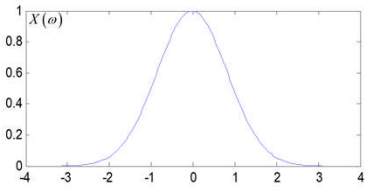
$$X_s(\omega) \propto \left(X(\omega)\cdot P(\omega)\right) * \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\cdot\frac{2\pi}{\Delta x}\right)\right)$$

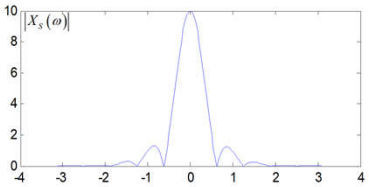
  - Ha az érzékelőelemek súlyfüggvénye nem homogén, akkor nem modellezhető LTI rendszerrel

Integráló mintavételezés - példa

- Ideális, integráló mintavételezés esete:
  - $p(x) = \begin{cases} 1/\Delta_x & |x| < \Delta_x/2 \\ 0 & |x| > \Delta_x/2 \end{cases}$
  - $P(\omega) = \Delta x \cdot \mathrm{sinc}(\Delta x \cdot \omega/2)$







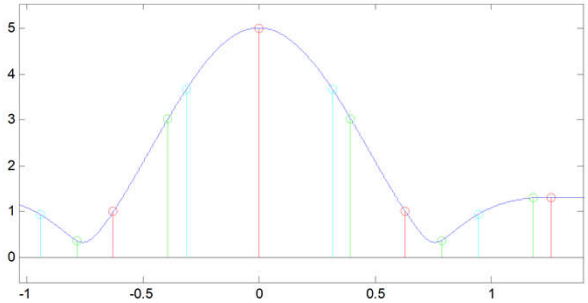
Diszkrét Fourier Transzformáció (DFT)

- Diszkretizált jelet N pontban ismerjük:
  - $X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\{-j \cdot n \cdot (k \cdot 2\pi/N)\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\{-j \cdot n \cdot k \cdot \Delta\omega\}$
  - $x[n] = (1/N) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} X_k \cdot \exp\{j \cdot 2\pi\, kn/N\}$
- Kapcsolat a DTFT-vel:
  - $x[n] = \begin{cases} y[n] & n \in [0,1,\ldots,N-1] \\ 0 & egyébként \end{cases}$ megfigyelési ekvivalens
  - DFT mintavételezi a megfigyelési ekvivalens DTFT spektrumát: $Y_k = X(k \cdot \Delta\omega)$
- C^N feletti ortogonális transzformáció, mi a mátrixa?

M>N pontos DFT mely jel natív DFT-éjével ekvivalens?
DFT mátrixa …

DFT pontszáma

- Megfigyelési ekvivalens DTFT spektrumát tetszőleges felbontással mintavételezhetjük:
  - Ha M minta érdekel, akkor M-N db 0-val paddelünk
  - A fizikai (folytonos) jel spektrumáról ezáltal nem tudunk meg többet!
  - 2-Radix FFT



0-val paddalés értelme:
- 2 Radix FFT: 2^n esetre fut gyorsan
- Cirkuláris konvolúció problémájának elkerülése érdekében
- Interpolálása a DFT spektrumnak

7. Előadás tartalma

- Spektrumszivárgás
- Képfeldolgozás frekvencia tartományban:
  - 2D Spektrum gépi ábrázolása
  - Szűrések frekvenciatartományban
  - Spektrumképek értelmezése
- Inverz probléma – dekonvolúció:
  - Inverz probléma formális felírása
  - Dekonvolúció nehézsége
  - Közismert algoritmusok: Wiener inverz szűrés, RLA/ ML-EM, MAP becslés, és ezek kapcsolataik

DFT és a DFS kapcsolata

- A DFT által meghatározott spektrum diszkrét:
  - $$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_k \cdot \exp\{j \cdot 2\pi\, kn/N\} = \\ = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_k \cdot \exp\{j \cdot 2\pi\, kn/N + 2\pi k\} = x[n+N]$$
  - Lényegében **Diszkrét Fourier Sorfejtés (DFS)**
- DFT kapcsolata a Diszkrét Fourier Sorfejtéssel:
  - DFT időtartományban véges idejű diszkrét jelet vár
  - DFS periodikus, végtelen idejű diszkrét jelet vár
  - Ezt leszámítva identikusak.

Tehát a DFT impliciten, de periodikus jelet feltételez – Spektrumszivárgás probléma

DFT és FFS kapcsolata

- Vizsgáljuk a mintavételezett jelet folytonos időben:
  - $x_s(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t)$ és $x_s(t + N \cdot \Delta t) = x_s(t)$
  - $c_k = \frac{1}{N \cdot \Delta_x} \int_{0-0}^{N\Delta x - 0} x_s(t) \cdot \exp\left\{-j \cdot t \cdot k \cdot \frac{2\pi}{N \cdot \Delta_x}\right\} dt =$

    $= \frac{1}{N \cdot \Delta_x} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\left\{-j \cdot n \cdot \frac{k \cdot 2\pi}{N}\right\} \propto \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\{-j \cdot n \cdot k \cdot 2\pi / N\}$
- Mintavételezés hatásai:
  - DFT felbontása: $\Delta f = f_s / N = 1/(N \cdot \Delta x)$ $\omega_k = 2\pi \cdot k \cdot \Delta f$
  - Aliasing (már volt)

xs: mintavételezett jel
Delta x: mintavételek távolsága
N: mintavételek darabszáma

DFT és FFS kapcsolata

- Vizsgáljuk a mintavét
  időben:

A megfigyelt jelrészlet egy periódusa egy folytonos periodikus jelnek.

  - $x_s(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t)$ és $x_s(t + N \cdot \Delta t) = x_s(t)$

FFS

  - $c_k = \frac{1}{N \cdot \Delta_x} \int_{0-0}^{N\Delta x - 0} x_s(t) \cdot \exp\left\{-j \cdot t \cdot k \cdot \frac{2\pi}{N \cdot \Delta_x}\right\} dt =$

$$= \frac{1}{N \cdot \Delta_x} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\left\{-j \cdot n \cdot \frac{k \cdot 2\pi}{N}\right\} \propto \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\{-j \cdot n \cdot k \cdot 2\pi / N\}$$

DFT

- Mintavételezés hatásai:
  - DFT felbontása: $\Delta f = f_s / N = 1/(N \cdot \Delta x)$ $\omega_k = 2\pi \cdot k \cdot \Delta f$
  - Aliasing (már volt)

xs: mintavételezett jel
Delta x: mintavételek távolsága:
N: mintavételek darabszáma

Spektrumszivárgás - ablakozás

- DFT kapcsolata a DTFT-vel és a DFS-el:
  - Impliciten cirkuláris jelet feltételez (DFS)
  - Tegyük fel, hogy az eredeti jelünk (végtelen terjedelmű) véges részét tudtuk mintavételezni:

    $h[n] = rect_T[n]$, $y[n] = y_\infty[n] \cdot h[n]$
    - Ideális esetben: $Y_{(k)} = Y_\infty(k \cdot \Delta\omega)$
    - A valóságban: $Y_{(k)} = 1/2\pi \cdot (Y_\infty * H)(k \cdot \Delta\omega)$
    - Cél lenne a DTFT spektrumot szivárgás nélkül mintavételezni: $Y_{(k)} := Y_\infty(k \cdot \Delta\omega)$

y[n]: megfigyelés ekvivalens, y(inf)[n]: végtelen számú helyen mintavételezett, folytonos jel
y[n]: véges hosszú jelünk DTFT-s megfigyelési ekvivalense
h[n]: ablakfüggvény

Ideális ablakfüggvény: végtelen hosszan mintavett DC jel => DTFT spektruma: dirac(w)

Spektrumszivárgás - ablakozás

- DFT kapcsolata a DTFT-vel és a DFS-el:
  - Impliciten cirkuláris jelet feltételez (DFS)
  - l, hogy
    ű) vég ni:

    $\sum_{k=1}^{T} \delta[n-k]$

    Végtelen kiterjedésű mintavételezett jel (megfigyelési ekvivalens)

    $h[n] = rect_T[n], \; y[n] = y_\infty[n] \cdot h[n]$
    - Ideális esetben: $Y_{(k)} = Y_\infty(k \cdot \Delta\omega)$
    - A valóságban: $Y_{(k)} = 1/2\pi \cdot (Y_\infty * H)(k \cdot \Delta\omega)$
    - Cél lenne a DTFT spektrumot szivárgás nélkül mintavételezni: $Y_{(k)} := Y_\infty(k \cdot \Delta\omega)$

y[n]: megfigyelés ekvivalens, y(inf)[n]: végtelen számú helyen mintavételezett, folytonos jel
y[n]: véges hosszú jelünk DTFT-s megfigyelési ekvivalense
h[n]: ablakfüggvény

Ideális ablakfüggvény: végtelen hosszan mintavett DC jel => DTFT spektruma: dirac(w)

Spektrumszivárgás - ablakozás

– Tehát a megfigyelt jel DFT spektruma:

$$Y_k = 1/2\pi \cdot (Y * H)(k \cdot \Delta\omega)$$

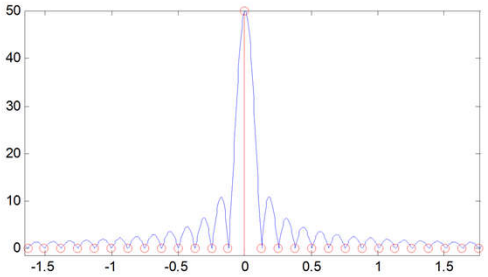
– $h[n]$ az úgynevezett ablak függvény

- Ha expliciten nem ablakozunk, akkor: $h[n] = rect_T[n]$

Pl.: $T = 50$

Kék görbe: rect ablak DTFT spektrum amplitúdója

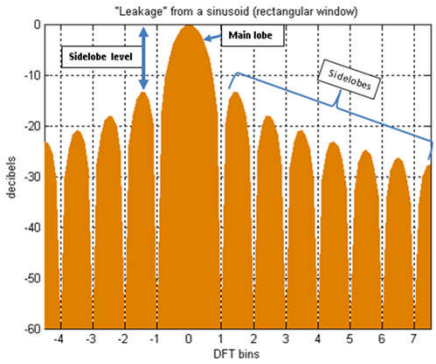
Piros pontsor: rect ablak DFT spektrum amplitúdója

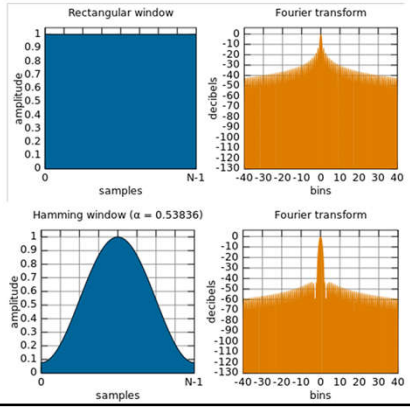


Mikor nincs spektrumszivárgás?

Spektrumszivárgás - ablakozás

- DFT előtti ablakozás:
  - Képtérben az általunk definiált $h[n]$-el szorzunk
  - Ablakfüggvények tulajdonságai:





Fősáv tulajdonságai:
- Picket fence: minél laposabb, annál pontosabb az amplitudó értéke
- Szélessége: ideális esetben 1 bin

Melléksávok:
- Amplitudóik meghatározzák a spektrum szivárgás mértékét (ideális esetben 0)

Nincs ideális ablak …

Koherens mintavételezés

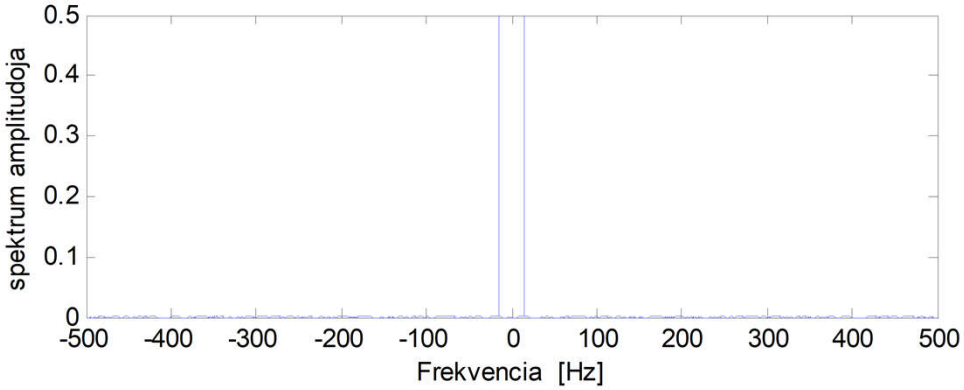
- Periodikus jelből egész számú periódusnyit mintavételezünk (y_N) : $N/f_s = k/f$, $k \in Z_+$
  - f : periodikus jelünk frekvenciája, N: minták száma
  - N pontos négyzetes ablak DTFT spektruma:
    - $H_{rect} = \sin(\omega/\Delta f)/(\omega/\Delta f)$
    - $H_{rect}(k \cdot \Delta f) = \delta_{k,0}$ ha $k \in Z$
    - $Y_s(\omega) = 0$, ha $\omega \neq k \cdot \Delta f \big|_{k \in Z}$
  - Tehát a DFT által mintavételezett frekvenciákon nem torzul az ablakozás miatt a DTFT spektruma
  - Különben Spektrumszivárgás.

- Alapprobléma: adott folytonos idejű jelet mintavételezünk a Nyquist törvénynek megfelelően (tehát nincs aliasing), viszont mi a DFT-vel a folytonos jel spektrumát szeretnénk szivárgás nélkül mintavételezni – így jártunk...

- Feltétel teljesülése esetén nem torzul a spektrum azon frekvenciákon, ahol a DFT mintavételezi a megfigyelési ekvivalens DTFT spektrumát

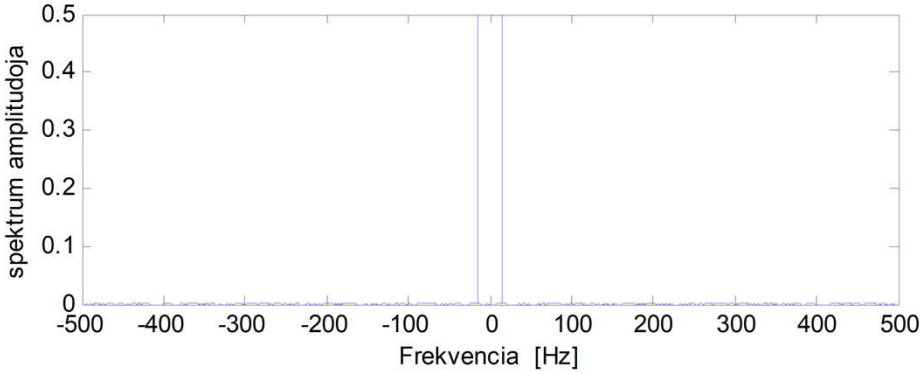
Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$



Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

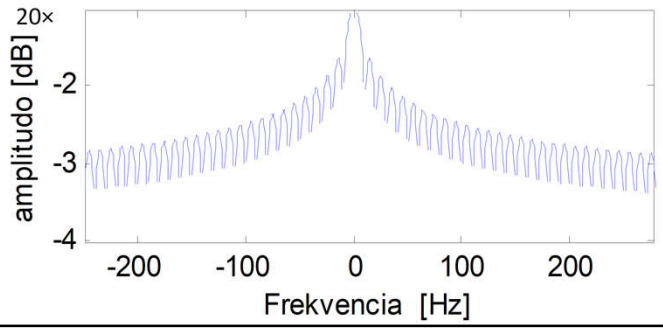
- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
  - Mintavételezzük ($y_\infty[\cdot]$): $f_s = 1\text{kHz},\ N = \infty$
  - Mivel a mintavételi törvényt nem sértjük meg:



1 kHz-es mintavételi frekvencia => nem sérül a Nyquist törvény

Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

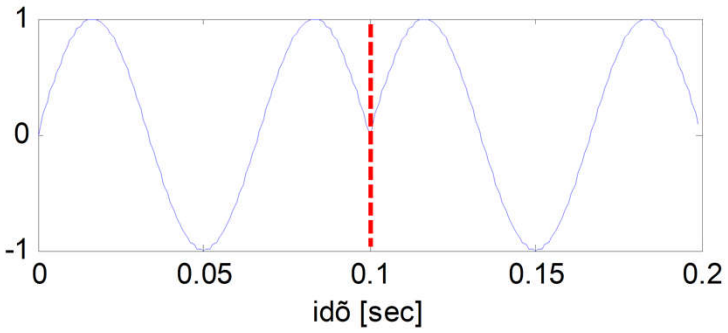
- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
  - Mintavételezzük (y_{100}): $f_s = 1\text{kHz},\ N = 100$
  - Megfigyelési ekvivalens: $(y_\infty \cdot \text{rect}_{100})[\cdot]$
  - Implicit ablak DTFT spektrumának részlete:



100 mintát veszünk 1 kHz-el, az ehhez tartozó implicit ablak DTFT spektrumát mutatja az ábra

Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
  - Mintavételezzük (y_{100}): $f_s = 1\text{kHz},\ N = 100$
  - DFT által „látott” jel: $y_{100}[n] = (y_\infty \cdot \mathrm{h}_{Rect})[\mathrm{mod}_{100}(n)]$

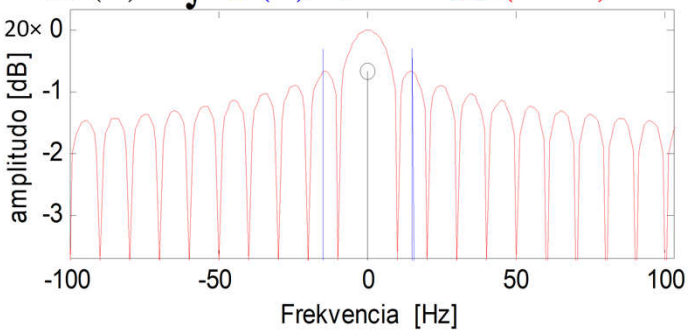


Kérdés: mi a frekvenciája a szinusz jelünknek?

Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
  - Mintavételezzük (y_{100}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 100$
  - Megfigyelési ekvivalens spektruma: $Y_{100} \propto Y_\infty * H_{rect}$

$$Y_{100}(0) = \int Y_\infty(\tau) \cdot 1/2\pi\, H_{rect}(0-\tau)\, d\tau$$



Piros: ablak normált spektruma

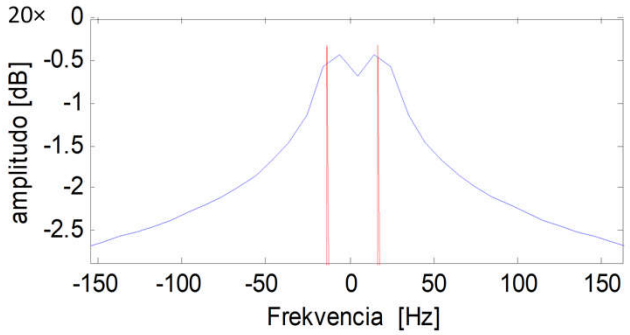
Kék: folytonos jel spektruma

Fekete: N=100 mintavétellel előálló jel spektrumának DC komponense

Y100: N=100-as mintavételezett jel megfigyelési ekvivalensének DTFT spektruma

Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
  - Mintavételezzük (y_{100}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 100$
  - Megfigyelési ekvivalens spektruma: $Y_{100} \propto Y_\infty * H_{rect}$

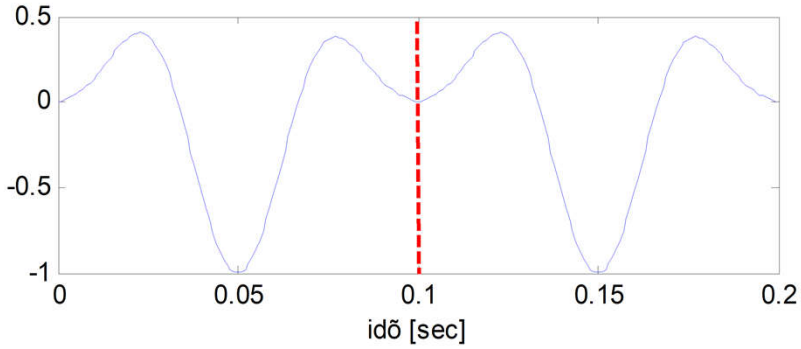


Piros: folytonos jel spektruma

Kék: N=100 mintavétellel előálló jel spektruma

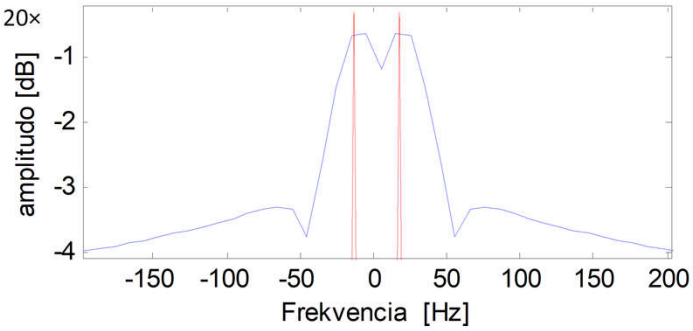
Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés, Hamming ablak

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
  - Mintavételezzük (y_{100}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 100$
  - DFT által „látott” jel: $y_{100}[n] = (y_\infty \cdot \mathrm{h}_{Ham})[\mathrm{mod}_{100}(n)]$



Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés, Hamming ablak

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
  - Mintavételezzük (y_{100}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 100$
  - Megfigyelési ekvivalens spektruma: $Y_{100} \propto Y_{\infty} * H_{Ham}$

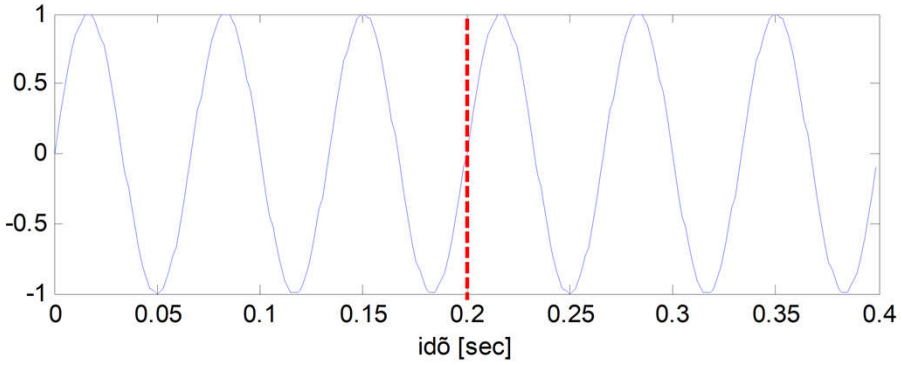


Piros: folytonos jel spektruma

Kék: N=100, Hamming ablakos, mintavételezett jel spektruma

Koherens mintavételezés

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
  - Koherensen mintavételezzük (y_{200}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 200$
  - DFT által „látott” jel: $y_{200}[n] = y_\infty\left[\text{mod}_{200}(n)\right] = y_\infty[n]$

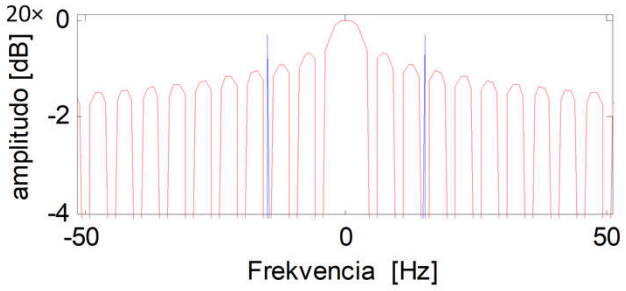


Koherensen mintavételezünk ⇔ cirkuláris a mintavett jelünk
- DFT által látott jel megegyezik a végtelen számú helyen mintavett, DTFT által látott jellel

Spektrum koherens mintavételezés esetén

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
  - Mintavételezzük (y_{200}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 200$
  - Megfigyelési ekvivalens spektruma: $Y_{200} \propto Y_\infty * H_{rect}$

$$Y_{200}(0) = \int Y_\infty(\tau) \cdot 1/2\pi \, H_{rect}(0-\tau)\, d\tau$$



Piros: ablak normált spektruma

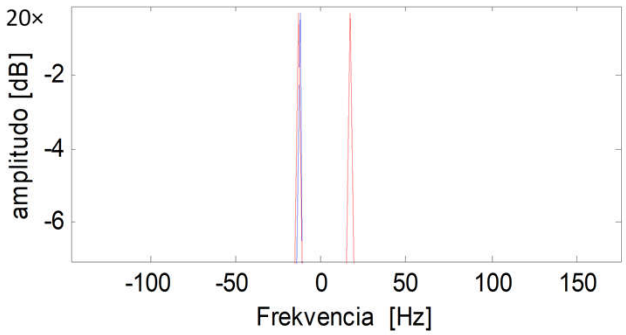
Kék: folytonos jel spektruma

Fekete: N=200 mintavétellel előálló jel spektrumának DC komponense (log(0))

Ábra általánosítása is igaz

Spektrum koherens mintavételezés esetén

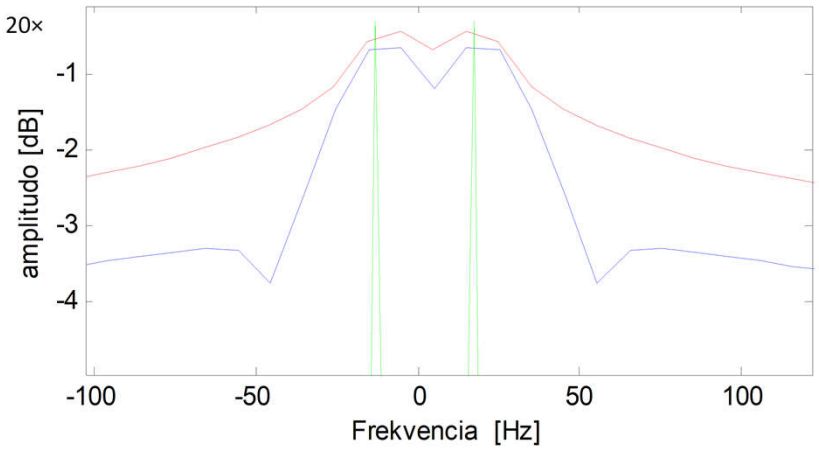
- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
  - Koherensen mintavételezzük (y_{200}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 200$
  - Megfigyelési ekvivalens spektruma: $Y_{200} \propto Y_{\infty} * H_{rect}$



Piros: folytonos jel spektruma

Kék: N=200 mintavétellel előálló jel spektruma

Koherensen mintavett / ablakozott, nem koherensen mintavett jelek spektruma



Zöld: koherensen mintavételezett jel spektruma, kék: Hamming ablakos, piros: téglalap ablakos spektrum

Csúcsérték szempontjából a rectangular jobb, szivárgás szempontjából a Hamming ablak a jobb

2D DFT

- Analízis irány:

Többi transzformáció esetén is hasonló a többdimenziós eset

$$F_{u,v} = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f[m,n]\exp\{-2\pi j\cdot(u\cdot m/M + v\cdot n/N)\} =$$

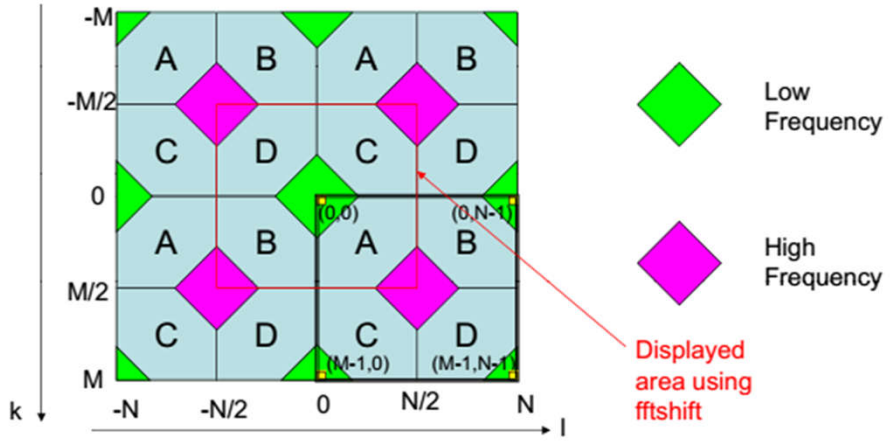
$$= \sum_{m=0}^{M-1}\left(\sum_{n=0}^{N-1} f[m,n]\cdot\exp\{-2\pi j\cdot(v\cdot n/N)\}\right)\exp\{-2\pi j\cdot(u\cdot m/M)\}$$

- Tulajdonságok:
  - Periodikus: [M,N] szerint
  - Valós jel esetén: $F_{u,v} = \overline{F_{-u,-v}} = \overline{F_{M-u,\mathrm{N}-v}}$
    - Ha M, N páros: $F_{M/2+u,N/2+v} = \overline{F_{M/2-u,N/2-v}}$
- Spektrum hullámfrontos interpretációja

- 2D DFT: 2 db 1D DFT
- Hullámfrontos értelmezés

2D DFT spektrum

- Spektrum blokkjai:



- DFT: Tehát mintavételezi a DTFT-t, melynek már láttuk, hogy periodikus => DFT is az
- Ábrán 2 periódus látszik
- Gépi ábrázolás / általános ábrázolása a spketrum képnek

2D DFT spektrum gépi ábrázolása

- Konjugált szimmetria valós jelek esetén:

0	1	2	3	4	3	2	1
5	6	7	8	9	33	32	31
10	11	12	13	14	30	29	28
15	16	17	18	19	27	26	25
20	21	22	23	24	23	22	21
15	25	26	27	19	18	17	16
10	28	29	30	14	13	12	11
5	31	32	33	9	8	7	6

M=N=8

real x x Conjugate pairs

Nyquist frekvenciához tartozó komponens

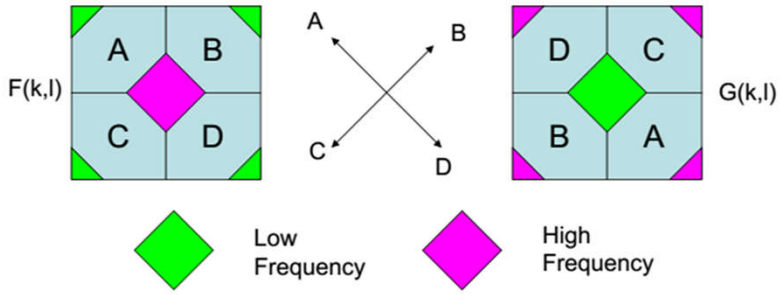
0	1	2	3	4	4	3	2	1
5	6	7	8	9	40	39	38	37
10	11	12	13	14	36	35	34	33
15	16	17	18	19	32	31	30	29
20	21	22	23	24	28	27	26	25
20	25	26	27	28	24	23	22	21
15	29	30	31	32	19	18	17	16
10	33	34	35	36	14	13	12	11
5	37	38	39	40	9	8	7	6

M=N=9

- Nyquist frekvencia valós értékű: komplex exponenciális függvény értéke Nyquist frekvencián [+1,-1,+1,-1,…]
- Fontos, hogy half complex ábzrázolással helyben tárolható

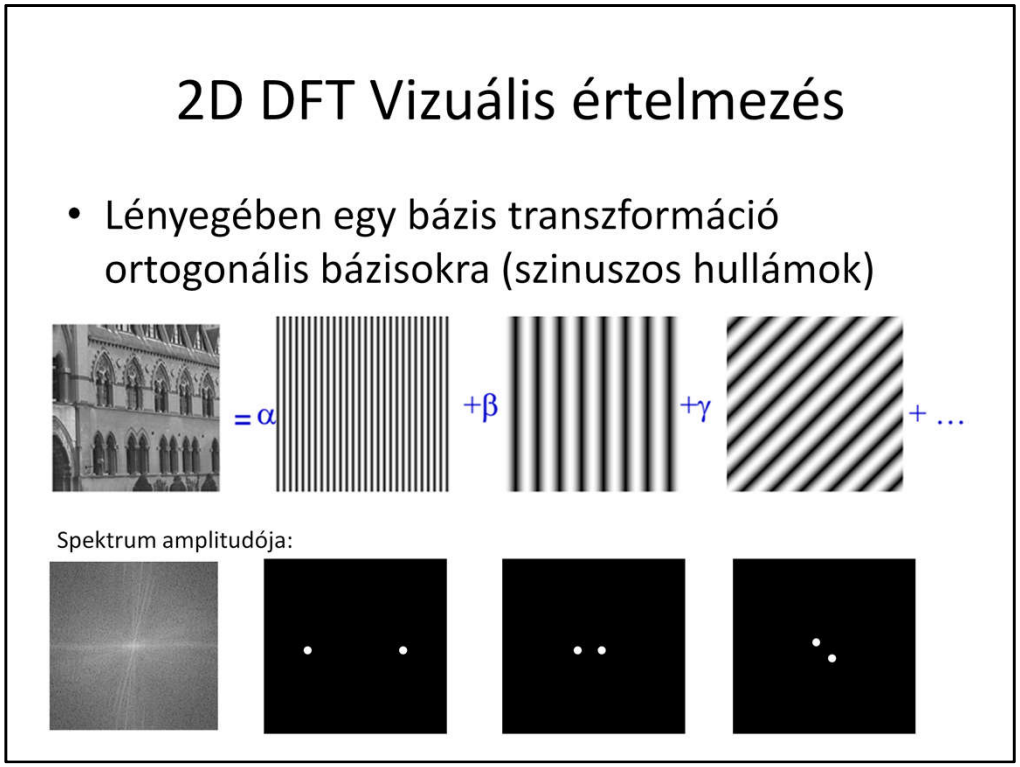
2D DFT spektrum

- Általában a DC komponenst „csavarjuk” középre:
  - Ampl. moduláció: $g[m,n] = f[m,n] \cdot (-1)^{(m+n)}$



2D DFT Számolási tulajdonságok

- 1D DFT komplexitása:
  - Direkt módszer: O(N^2)
  - FFT: O(N×log(N)), hatékonyan számítható, ha N 2 hatvány (radix-2 Cooley-Tukey)
- 2D DFT komplexitása (N×N-es képre):
  - Direkt számítás: O(N^4)
  - Szeparálással: O(N^3)
  - Szeparálás + FFT: O(N^2×log(N))
- Half Complex ábrázolással helyben tárolható!

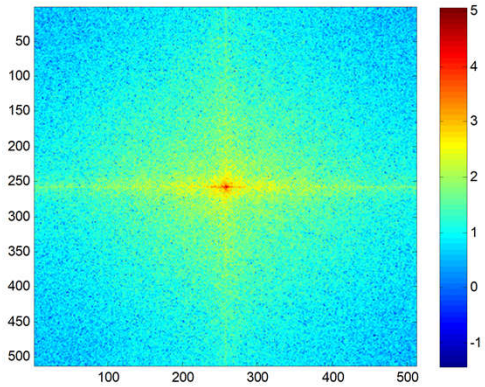


Spektrum amplitudóján lévő él => képen az adott élre merőleges markáns él, pl. párkányok

Szivárgás

Képek spektrumának jellemzői

- Alacsony frekvenciákon nagy energia:



Spektrum amplitúdója logaritmikus skálán

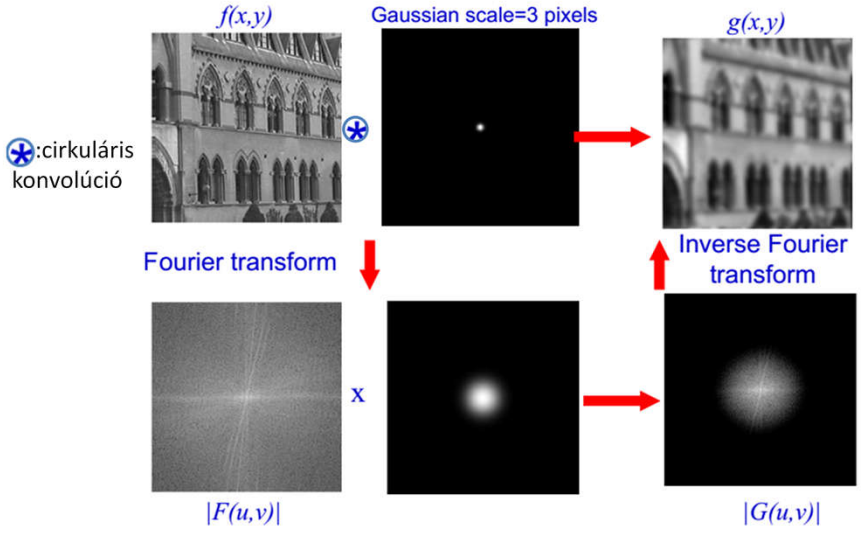
Spektrumok általános jellemzői: képek energiája főként alacsonyfrekvenciás tartományban koncentrálódik

2D DFT konvolúciós tétele:

- DFS- es analógia – cirkularitás:
  - $(f \otimes g)[n] = \sum_{m=0}^{N} f[m] \cdot g\left[\mathrm{mod}_N(n-m)\right] = (f' * g')[n]$
  - $f'[n] = f\left[\mathrm{mod}_N(n)\right]$, míg $g'[m] = g\left[\mathrm{mod}_N(m)\right]$
- Mit tegyünk, ha $f * g$-t akarjuk DFT-vel számolni?
  - Terjesszük ki f és g méretét [N+M] hosszúra:
    - Ezt időtartomány / síktartományban is meg kell tenni
    - Általános módszerek: 0-val paddelés, kép széleire tükrözés, alul-áteresztő szűréseknél súlyozás, kiterjesztés a kép szélső pixelének intenzitásával, stb.
  - 5×5-ös kernel esetén már gyorsabb

Konvolúció tétel fontossága

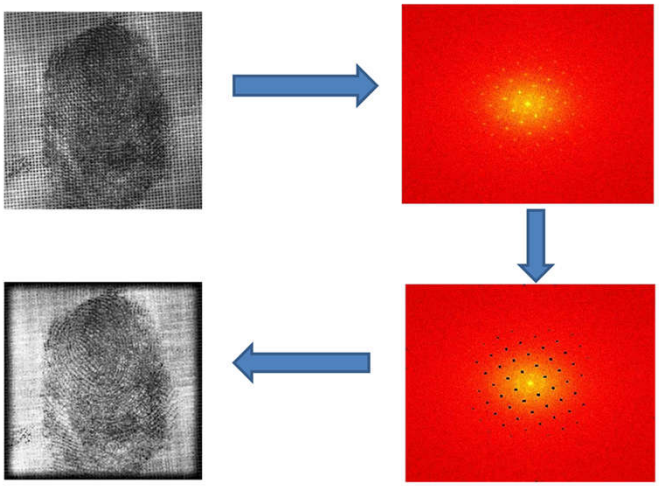
- Lineáris szűrések frekvenciatérben:



2D DFT Példa – periodikus textúra

ampl. moduláció

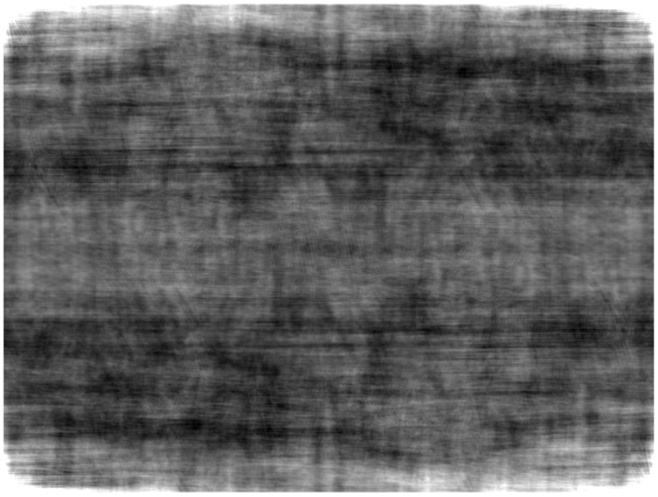
- Periodikus mintázat ⇔ csúcsok a spektrumban:



2D DFT példa – rekonstrukció spektrum amplitúdóból és fázisból

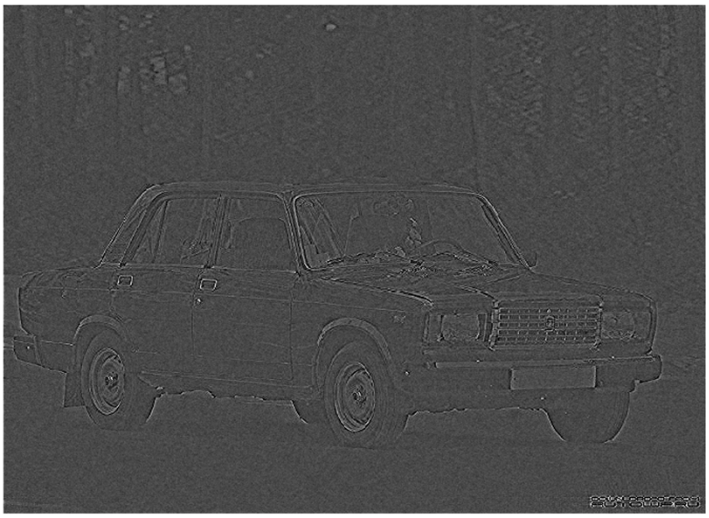
Kései űrkorszak

2D DFT példa – spektrum amplitúdójából rekonstruált kép



Volvo lobbi?

2D DFT példa – spektrum fázisából rekonstruált kép

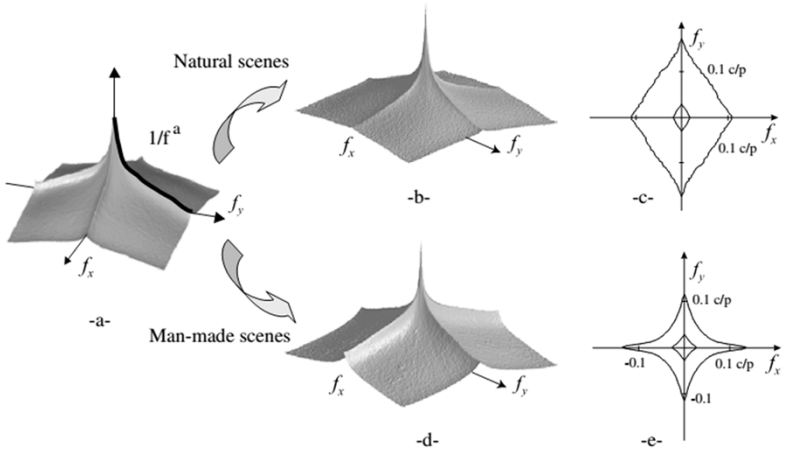


Polár koordinátás DFT

- Motiváció:
  - Radon transzformáció és annak invertálása
  - Regisztráció: elforgatás és eltolás könnyen számolhatóvá válik
- Számítása – folytonos eset:
  - $F\{\theta,\rho\} = \iint_{x,y} f(x,y)\cdot\exp\left(-2\pi j\cdot\rho\cdot\left(x\cdot\cos(\theta)+y\cdot\sin(\theta)\right)\right)dydx$
  - Nem szeparábilis
  - Fourier vetítősík tétel

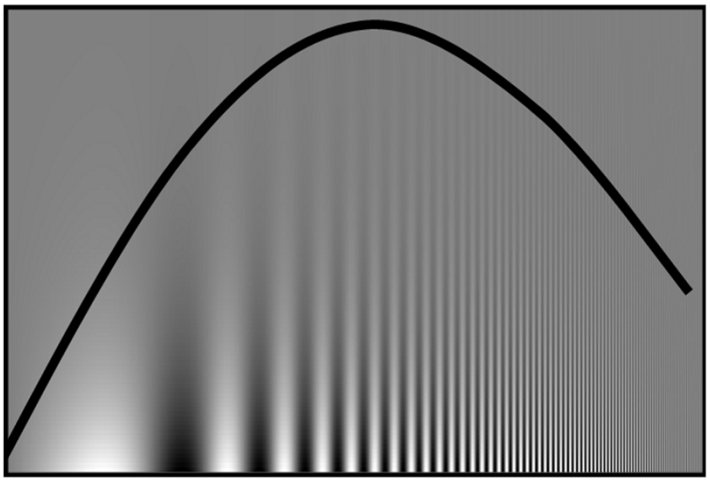
    Majd a rekonstrukcióknál bizonyítjuk is!
    - Spektrum vonal profiljai ⇔ Radon transzformáció 1D Fourier transzformáltjai

Digitális képek átlagos energiaspektruma



Frekvenciatartomány és emberi látás

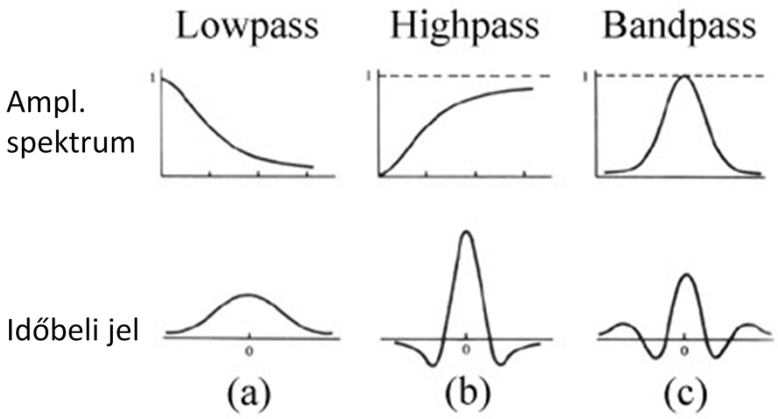
- Campbell-Robson kontraszt érzékenységi görbe:



8. Előadás tartalma

- Lineáris szűrők:
  - Klasszikus szűrők súly és átviteli függvénye
  - Gibbs jelenség
- Inverz probléma – dekonvolúció:
  - Inverz probléma formális felírása
  - Dekonvolúció nehézsége
  - Közismert algoritmusok: Wiener inverz szűrés, RLA/ ML-EM, MAP becslés, és ezek kapcsolataik

Szűrők idő és frekvencia tartományban

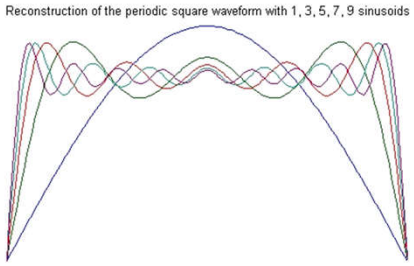


Ideális szűrők

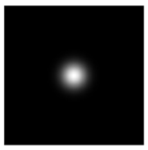
- Amplitúdó éles vágásánál Gibbs jelenség:

Gibbs gyűrű effektus

- Gibbs jelenség elkerülhető „sima” átmenetű szűrőkkel:
  - Butterworth szűrő: adott sávkorlát mellett a legsimább ampl. spektrumú lineáris szűrő
  - Gauss szűrő: alkalmazásával nincs Gibbs artefekt



Gibbs gyűrű effektus



Inverz probléma

- Megfigyelési modell (zajos LTI): $g = h * f + \eta$
  - h-t (avagy a PSF-t) mi befolyásolhatja?
    - Páciens bemozdulása a felvételek készítése alatt
    - Out-of-focus elrendezés
    - Szóródó fotonok képek rögzítése során
  - Jelen előadás során $f, g \in R_+^2$ és $\eta \in R^2$:
    - f a vizsgált 3D objektum projekciója
- Alapötlet – direkt módszer:
  - Dekonvolúció frekvenciatérben: $F_{(u)} = \left(G / H\right)_{(u)}$

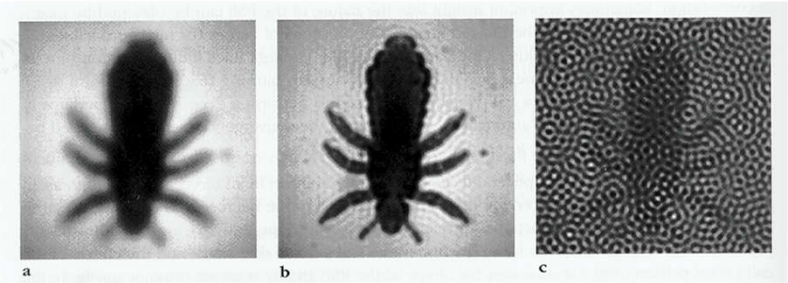
Éta nem feltétlenül pozitív

Inverz probléma statisztikai interpretációja

- Cél megbecsülni $\mathrm{P}\{f\}$-et:
  - Maximum likelihood módszer:
    - $f_{ML}^{*} = \arg\max_{f} \left\{ P\left\{ g \middle| f \right\} \right\}$
    - Gyakorlatban majdnem mindig $P\left\{ g \middle| f \right\} = P_{\eta}\left\{ g - h * f \right\}$ és az $f_{ML}^{*} = \arg\min_{f} \left\{ -\log\left\{ P\left\{ g \middle| f \right\} \right\} \right\}$-t szoktuk keresni
  - Maximum a posterior (MAP) becslés:
    - $f_{ML}^{*} = \arg\max_{f} \left\{ P\left\{ f \middle| g \right\} \right\} = \arg\max_{f} \left\{ P\left\{ g \middle| f \right\} \cdot P\left\{ f \right\} \right\}$
    - Gyakorlatban ezeket a szélsőérték keresési problémákat is negatív logaritmálás után oldjuk meg.

Direkt dekonvolúció zajérzékenysége

- Problémák a direkt módszerrel:
  - PSF-et nem ismerjük pontosan $\tilde{H} \neq H$
  - $\tilde{F} = G / \tilde{H} = F \circ \left(H / \tilde{H} \right) + N / \tilde{H} \neq F$
  - a PSF általában alul-áteresztő jellegű
    - magas frekvenciákon $N./\tilde{H}$ dominál (~0-val osztás)



a: elmosott kép

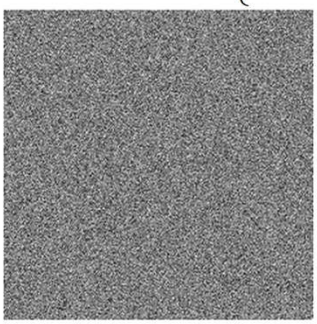
b: direkt dekonvolúció eredménye, ha nincs additív zaj

c: eredmény ha van additív zaj

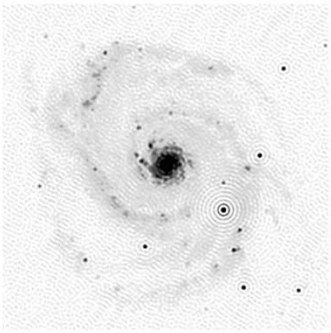
Azon frekvenciákon, ahol a becsült PSF átvitele 0 a második tag amplitudója még H=H~ esetén is nagy lesz…

Csonkolt dekonvolúció

- Azon frekvenciákon, melyeken az MTF alacsony 0 legyen az eredmény
  - $\tilde{F}_{(u)} = \begin{cases} G_{(u)}./H_{(u)} & \left|H_{(u)}\right| > \varepsilon \\ 0 & egyébként \end{cases}$



Direkt dekonvolúció eredménye



Csonkolt dekonvolúció eredménye

Gibbs artifakt jól megfigyelhető
Érdemes lenne egy profilt is nézni, meg észrevenni rajta, hogy negatív intenzitásai is vannak a hullámfrontnak…

Wiener inverz-szűrés

- Várható értékben legpontosabb szűrő:
  - $F_{(u)}^{Wiener} = H_{(u)}^{Wiener} \cdot G_{(u)}$
  - $f^{Wiener} = \arg\min \left\{ \mathrm{E} \left\{ \left\| f^{Wiener} - f^{valódi} \right\|_2^2 \right\} \right\}$
  - A matematikai levezetést hanyagolva:

$$H_{(u)}^{Winer} = \frac{H_{(u)}^{*}}{\left|H_{(u)}\right|^2 + \mathrm{E}\left\{\left|N_{(u)}\right|^2\right\} \Big/ \mathrm{E}\left\{\left|F_{(u)}\right|^2\right\}}$$

  - Interpretáció:

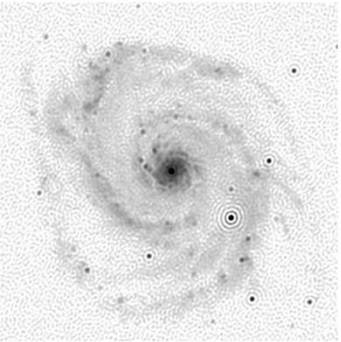
$$H_{(u)}^{Winer} \approx \begin{cases} 1/H_{(u)} & \left|SNR_{(u)}\right. >> 1 \\ 0 & \left|SNR_{(u)}\right. << 1 \end{cases} \qquad SNR_{(u)} = \sqrt{\frac{\left|H_{(u)}\right|^2 \mathrm{E}\left\{\left|F_{(u)}\right|^2\right\}}{\mathrm{E}\left\{\left|N_{(u)}\right|^2\right\}}}$$

Rendezzük át a H(u)^Wiener-t

Ráadás: Moore Penrose pszeudo inverz SVD-s alakjának diagonál mátrixa

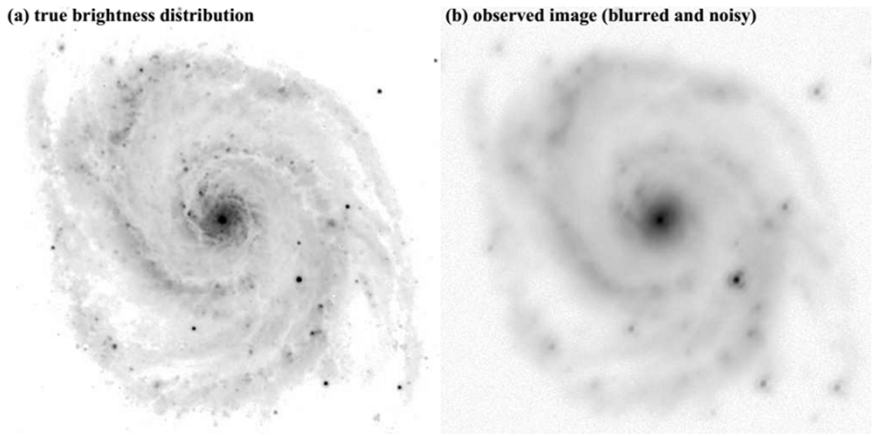
Wiener inverz szűrés

- Az eredmény (f^{Wiener}) gyakran nem realisztikus:
  - Negatív intenzitások is előfordulnak (negatív fluxus?)
  - Nagyfrekvencián a hirtelen romló SNR Gibbs artefektet generál
- SNR gyakran nem mérhető ki

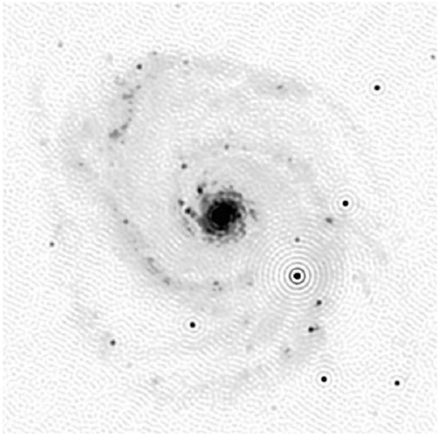


Wiener szűrés eredménye: jobb részletgazdagság, de a gyűrűk egy része megmaradt

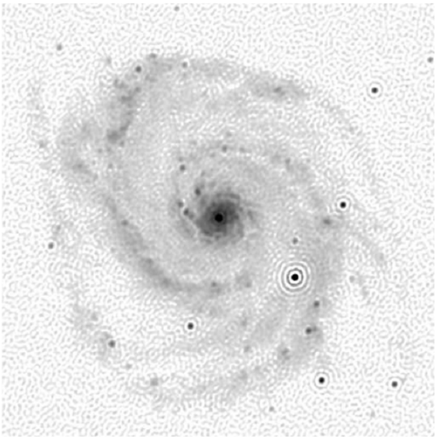
Eljárások illusztrálása -0-



Eljárások illusztrálása -1-



Csonkolt dekonvolúció



Wiener inverz szűrés

Bár mindkettő zajos, de a Wiener szűréssel előállított kép részletgazdagsága finomabb, ringing artifakt mintha kevésbé jelenne meg rajta

Kényszermentes ML becslés

- Additív Gauss zaj esete ($\eta \in \aleph\left(0, W^{-1}\right)$):
  - $f_{ML}^{*} = \arg\max_{f} \left\{ \mathrm{K} \cdot \exp\left(-\left(g - H' \cdot f\right)^{T} \cdot W / 2 \cdot \left(g - H' \cdot f\right) \right) \right\}$
    - H' a rendszer torzításának mátrixa, tehát: $h * f = H' \cdot f$
  - Minimalizáljuk a negatív log likelihood függvényt:
    - $L(f) = \left(g - H' \cdot f\right)^{T} \cdot W / 2 \cdot \left(g - H' \cdot f\right)$
    - Mivel $H'^{\mathrm{T}} \cdot W \cdot H$ pozitív szemidefinit, ezért $L(\cdot)$ konvex.
    - Tehát $\nabla L\left(f_{ML}^{*}\right) = 0$ kényszer definiálja az optimum helyet
    - $f_{ML}^{*} = \left(H'^{T} \cdot W \cdot H'\right)^{-1} \cdot H'^{T} \cdot W \cdot g$ ún. súlyozott LS becslés

- ML becslés alapötletét a táblára

Pozitív szemidefinit másodfokú felület geometriai interpretálása: V*diag(lambda)*V' alakú, ahol minden lambda pozitív, tehát van egy pont, melyből bármilyen irányba eltérünk nagyobb lesz a függvény értéke (+ első rendű felület + offszet)

Kényszermentes ML becslés példa

- Stacionárius, 0 várható értékű Gauss megfigyelési zaj esete :
  - $Cov(g) = \sigma^2 \cdot I$, tehát $W = \sigma^{-2} \cdot I$
  - $f_{ML}^* = \left(H'^T \cdot W \cdot H'\right)^{-1} \cdot H'^T \cdot W \cdot g = \left(H'^T \cdot H'\right)^{-1} \cdot H'^T \cdot g$
- Vizsgáljuk meg f_{ML}^* spektrumát:
  - $F_{ML(u)}^* = \dfrac{H_{(u)}^* \cdot G_{(u)}}{H_{(u)}^* \cdot H_{(u)}} = \dfrac{H_{(u)}^* \cdot G_{(u)}}{\left|H_{(u)}\right|^2} = \dfrac{G_{(u)}}{H_{(u)}} = \left(G/H\right)_{(u)}$
  - Konzekvencia: ML eljárással nem lehet a rosszul kondícionált inverz problémát megoldani.

ML becsléssel eljutottunk a direkt dekonvolúcióhoz…
Spektrális összefüggés levezetése F* F-el bővítgessünk.

ML becslés pozitivitási kényszerrel

- Nem negativitási kényszer: $f \in R_+$
- Jó esetben konvex optimalizálási probléma:

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & \mathrm{P}\{g|f\} \\ \text{s.t.} & f \geq 0 \end{array} \xrightarrow{\text{- log}} \begin{array}{ll} \text{min.} & L_g(f) \\ \text{s.t.} & f \geq 0 \end{array}$$

  - Konvex a probléma, ha $\Pr\{g|f\}$ log-konkáv.
  - Nem adható rá analitikus megoldás
- Milyen eloszlású lehet valójában az additív zaj:
  - Poisson: fotonok inherens zaja
  - Gauss: termikus zaj
  - Uniform: kvantálási zaj (A/D átalakítás)

Richardson Lucy algoritmus (+)

- Interpretáljuk a képpontok intenzitását fotonok becsapódási valószínűségeivel:
  - $\mathrm{P}\left\{f_{(i)}\right\}$: P(„egy fotonon a detektor i-edik érzékelő-elemébe csapódik, ha nincs zaj és torzítás”)
  - $\mathrm{P}\left\{g_{(k)}\right\}$: P(„egy fotonon a detektor k-adik érzékelő-elemébe csapódott a megfigyelt kép rögzítése során”)
  - $\mathrm{P}\left\{g_{(k)} \middle| f_{(i)}\right\}$: P(„ideális esetben az i-edik érzékelőelembe csapódó foton a k-adik érzékelőelembe csapódik bele – a képalkotó LTI rendszer torzítása miatt”)

Richardson Lucy algoritmus

- Lényegében egy Bayes-i becslés:
  - Bayes szabály: $\mathrm{P}\left\{f_{(i)} \middle| g_{(k)}\right\} = \dfrac{\mathrm{P}\left\{g_{(k)} \middle| f_{(i)}\right\} \cdot \mathrm{P}\left\{f_{(i)}\right\}}{\sum_j \mathrm{P}\left\{g_{(k)} \middle| f_{(j)}\right\} \cdot \mathrm{P}\left\{f_{(j)}\right\}}$
  - Dekomponálás: $\mathrm{P}\left\{f_{(i)}\right\} = \sum_k \mathrm{P}\left\{f_{(i)} \middle| g_{(k)}\right\} \cdot \mathrm{P}\left\{g_{(k)}\right\}$
  - Tehát: $\mathrm{P}\left\{f_{(i)}\right\} = \sum_k \dfrac{\mathrm{P}\left\{g_{(k)} \middle| f_{(i)}\right\} \cdot \mathrm{P}\left\{f_{(i)}\right\} \cdot \mathrm{P}\left\{g_{(k)}\right\}}{\sum_j \mathrm{P}\left\{g_{(k)} \middle| f_{(j)}\right\} \cdot \mathrm{P}\left\{f_{(j)}\right\}}$

Bayes szabályban P{gk} dekomponálásának okai:

- Technikailag fixpont lenne az első becslés, ha szumma(k) P{g(k)|f(i)}=1 teljesül, márpedig ez teljesül egy feltevésünk miatt
- Interpretáció: nem a k-adik pixel intenzitása, hanem annak az aktuális rekonstrukció eredménye szerinti becslésével osztunk

EM elv…

Richardson Lucy algoritmus

– Bevett gyakorlat: iteráljunk a célváltozó felett:

$$\mathrm{P}_{(r+1)}\left\{f_{(i)}\right\} = \sum_k \frac{\mathrm{P}\left\{g_{(k)} \middle| f_{(i)}\right\} \cdot \mathrm{P}\left\{g_{(k)}\right\}}{\sum_j \mathrm{P}\left\{g_{(k)} \middle| f_{(j)}\right\} \cdot \mathrm{P}_{(r)}\left\{f_{(j)}\right\}} \cdot \mathrm{P}_{(r)}\left\{f_{(i)}\right\}$$

– Oldjuk fel a valószínűségi értelmezést:

- $\mathrm{P}\left\{f_{(i)}\right\} = f_{(i)} \big/ \left(f^T \cdot 1\right)$; $\mathrm{P}\left\{g_{(i)}\right\} = g_{(i)} \big/ \left(g^T \cdot 1\right)$
- $\mathrm{P}\left\{g_{(k)} \middle| f_{(i)}\right\} = h_{(i-k)}$
- T.f.h $h^T \cdot 1 = 1$; $h \geq 0$ ezekből következik: $g^T \cdot 1 \leftrightarrow f^T \cdot 1$

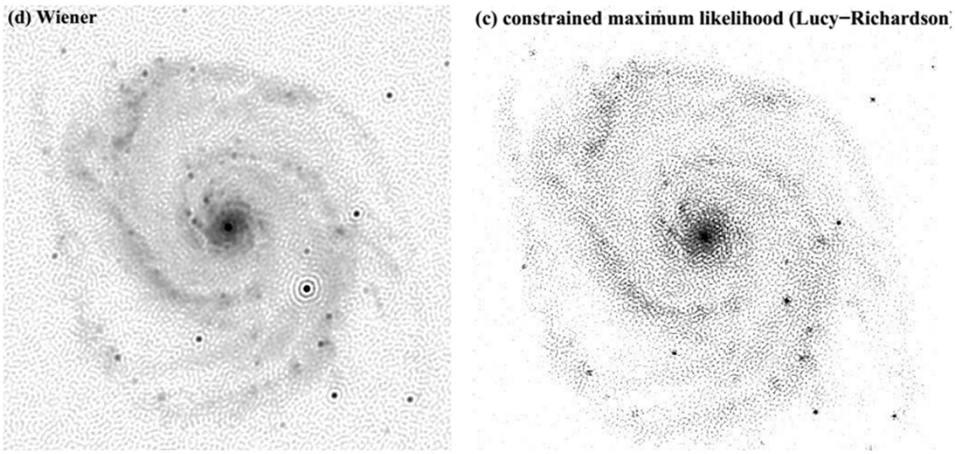
Richardson Lucy algoritmus (+)

- $\mathrm{P}\left\{f_{(i)}\right\} = f_{(i)} \Big/ \left(f^T \cdot 1\right)$: dekonvolvált kép i-edik pixelének normált intenzitása
- $\mathrm{P}\left\{g_{(i)}\right\} = g_{(i)} \Big/ \left(g^T \cdot 1\right)$: képalkotó rendszer (LTI + zaj) által torzított kép i-edik pixelének relatív intenzitása
- $\mathrm{P}\left\{g_{(k)} \middle| f_{(i)}\right\} = h_{(i-k)}$: csak az LTI rendszerrel leírható torzítást modellezzük
- $h^T \cdot 1 = 1$: minden olyan foton, mely a torzítatlan rendszer esetén a detektorba csapódna be a torzított rendszer esetén is a detektorba csapódik be (maximum más érzékelőelembe)
- Végig monokróm spektrumú fotonokat feltételezve a detektált intenzitás (fluxus) egyenesen arányos a becsapódó fotonok számával

Richardson Lucy algoritmus

- Végezzük el a behelyettesítést:
  - $f_{(i)}^{(r+1)} = \sum_k \frac{h_{(i-k)} \cdot g_{(k)}}{\sum_j h_{(j-k)} \cdot f_{(j)}^{(r)}} \cdot f_{(i)}^{(r)} = \sum_k \frac{h_{(i-k)} \cdot g_{(k)}}{\left(h * f^{(r)}\right)_{(k)}} \cdot f_{(i)}^{(r)}$
  - Érdemes észrevenni, hogy ha $f^{(0)} \geq 0$, akkor minden iterációban $f^{(r)} \geq 0$, tehát teljesül a nem-negativitási kényszer
  - Eljárás konvergenciája bizonyítható.
- Ekvivalens a pozitivitási kényszeres ML becsléssel, Poisson zaj modell esetén.

Eljárások illusztrálása -2-



Talán a Wiener szűrt kép SNR-je jobb, viszont a ringing artifakt jelentkezik, míg az LRA esetében nem

ML becslések összegzése

- Jelentősen felerősítik a zajt:
  - A probléma rosszul kondícionált jellegét nem képesek megfelelően kezelni.
  - Kivétel az iteratív algoritmusok köre, ha $f^{(0)}$ elegendően sima, és konvergencia előtt leállunk!
- Explicit regularizáció szükséges:
  - Definiáljuk $f^{(0)}$ a-priori eloszlását, és azt rögzítsük a minimalizálandó célfüggvényünkben
    - Megj.: RLA-nál szerepelt prior, de annak más a szerepe, értelmezése…

MAP becslések

- Bayes becsléselmélet:
  - max. $\mathrm{P}\{f|g\} \propto \left(\mathrm{P}\{g|f\} \cdot \mathrm{P}\{f\}\right)$
  - Másképpen : min. $-\log\left(\mathrm{P}\{f|g\}\right) = \Phi_{ML}(f) + \Phi_{prior}(f) + K$
    - $\Phi_{ML}(f) = -\log\left(\mathrm{P}\{g|f\}\right)$: bünteti a mérések és a zaj nélkül becsült, torzított kép eltérését: $\|g - \tilde{g}\| = \|g - h * f\|$
    - $\Phi_{prior}(f) = -\log\left(\mathrm{P}\{f\}\right)$: meghatározza, hogy milyen dekonvolvált képet preferálunk (pl. zajmentesség, pozitivitás, simaság, stb.).
  - Analitikai értelmezés: regularizált becslés

FONTOS:
- Valséges összefüggés elemeinek az értelmezése

MAP becslés példa – stacionárius Gauss zaj, frekvenciatérbeli prior

- Prior frekvenciatartományban: $\Phi_{prior}(F) = \mu \cdot \sum_u W_{(u)} \cdot \left|F_{(u)}\right|^2$
- Gauss, stacionárius zaj: $\Phi_{ML}(f) = 1/2\sigma^2 \cdot \sum_j \left(g_{(j)} - (H' \cdot f)_{(j)}\right)^2$
  - Parseval tétel szerint: $\Phi_{ML}(F) = \frac{1}{2N \cdot \sigma^2} \sum_u \left|G_{(u)} - H_{(u)} \cdot F_{(u)}\right|^2$
- Összegezve: $\Phi(F) = \frac{1/2}{N \cdot \sigma^2} \sum_u \left|G_{(u)} - H_{(u)} \cdot F_{(u)}\right|^2 + \mu \cdot \sum_u W_{(u)} \cdot \left|F_{(u)}\right|^2$
  - Mivel $\Phi(\cdot)$ konvex, ezért $\nabla\Phi\left(F^{opt}\right) = 0$, tehát:

$$F_{(u)}^{opt} = \frac{H_{(u)}^* \cdot G_{(u)}}{\left|H_{(u)}\right|^2 + 2 \cdot \mu \cdot N \cdot \sigma^2 \cdot W_{(u)}}$$

Frekvenciatartománybeli prior:
- W(u): u frekvenciájú komponens energiája milyen súllyal büntetendő
- Mű: súlyzó tag – tradeoff szerepet tölt be az ml tag és a prior tag között…

MAP becslés példa – stacionárius Gauss zaj, simasági prior

– $W_{(u)} = \left(\mathrm{E}\left\{ \left| N_{(u)} \right|^2 \right\} \Big/ \mathrm{E}\left\{ \left| F_{(u)} \right|^2 \right\} \right) \Big/ \left(2\mu \cdot N \cdot \sigma^2 \right)$ esetén:

- $F_{(u)}^{opt} = \dfrac{H_{(u)}^{*} \cdot G_{(u)}}{\left| H_{(u)} \right|^2 + \mathrm{E}\left\{ \left| N_{(u)} \right|^2 \right\} \Big/ \mathrm{E}\left\{ \left| F_{(u)} \right|^2 \right\}}$
- Tehát a Wiener dekonvolúció is egy MAP becslés

– $\mathrm{E}\left\{ \left| N_{(u)} \right|^2 \right\} \Big/ \mathrm{E}\left\{ \left| F_{(u)} \right|^2 \right\}$ gyakorlatban nem határozható meg

– Gyakran fehér zaj, és $W_{(u)} = 1 \Big/ \mathrm{E}\left\{ \left| F_{(u)} \right|^2 \right\} \propto u^{\beta}$

- μ értéke szabályozza, hogy mennyire domináljon a prior (magas frekvenciás komponensekért mennyire büntetünk).

Tehát a Wiener dekonvolvált egy MAP becslés

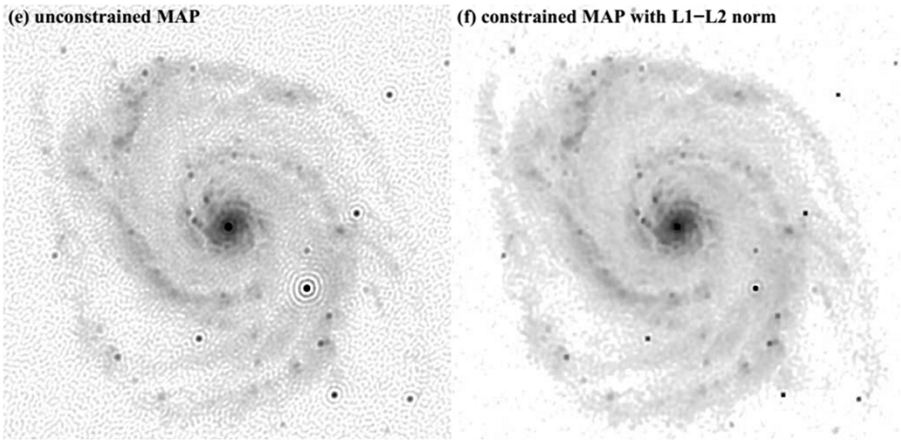
Gyakori probléma, hogy nem becsülhető a zaj, illetve a torzítatlan jel teljesítmény srűség spektrumának aránya:

- Ezért gyakran fehér zajt és alul-áteresztett jelet feltételezünk

MAP becslés gyakorlat

- Általában közvetlenül $\Phi(f)$ -et definiáljuk:
  - $\Phi_{ML}(f) = \|g - h * f\|_\alpha^\beta$, $\alpha \in \{1,2,\infty\}$; $\beta \geq 1$
  - $\Phi_{prior}(f) = \|D(f)\|_\alpha^\beta$, $\alpha \in \{1,2,\infty\}$; $\beta \geq 1$
    - $D(\cdot)$ tetszőleges, konvexitást nem elrontó (pl. affin) függvény, pl. deriválás, Laplace, felül-áteresztő szűrést.
- Célfüggvény ($\Phi(f)$) minimalizálása:
  - Analitikus megoldás, ha $\alpha = 2$; $\beta = 2$; $D(\cdot)$ affin
  - Egyéb esetben konvex optimalizálás:
    - Jelentős megkötés, pl. gyűrűs artefaktot egy nem konvex prior (L1-L2) hatékonyan elnyomja

Eljárások illusztrálása -3-



Itt egyértelmű a javulás

Ismertetett módszerek csoportosítása

ML becslés:

- Csak a megfigyelési zaj osztályát ismerjük
- ***Zajérzékenység*** jelentős probléma, csak a konzisztenciára figyel

Példák:

- Direkt dekonvolúció (additív Gauss zajos ML becslés)
- Richardson – Lucy (additív Poisson zajos, pozitivitási kényszeres ML becslés)

MAP becslés:

- Explicit módon definiáljuk, hogy milyen jellegű képet akarunk
- Ha jól ***regularizálunk***, akkor a zajérzékenység redukálódik, de az eredmény kevésbé konzisztens

Példák:

- Csonkolt dekonvolúció
- Wiener dekonvolúció (additív Gaussz zaj + frekvencia függő energia minimalizáció)
- Egyéb, regularizált dekonvolúciók

MAP és ML becslés összehasonlítása

- Stabilitás:
  - MAP-nál a regularizáció célja ennek kikényszerítése (pl. sima, kevésbé zajos, stb. dekonvolvált kép előállítása)
  - ML becslésnél ez legfeljebb impliciten kényszeríthető ki (pl. iteratív becsléseknél konvergencia előtti leállás).
- Becslés inkonzisztenciája ($\|g - h * f\|$):
  - Likelihood tag minimalizálásával redukálható
  - ML becsléseknél ennek az értéke kisebb – ez viszont a zajos input képhez (g) a becsült torzítatlan kép ***túlilleszkedést*** vonja maga után (rosszabb képminőség)