Fourier térbeli analízis, inverz probléma

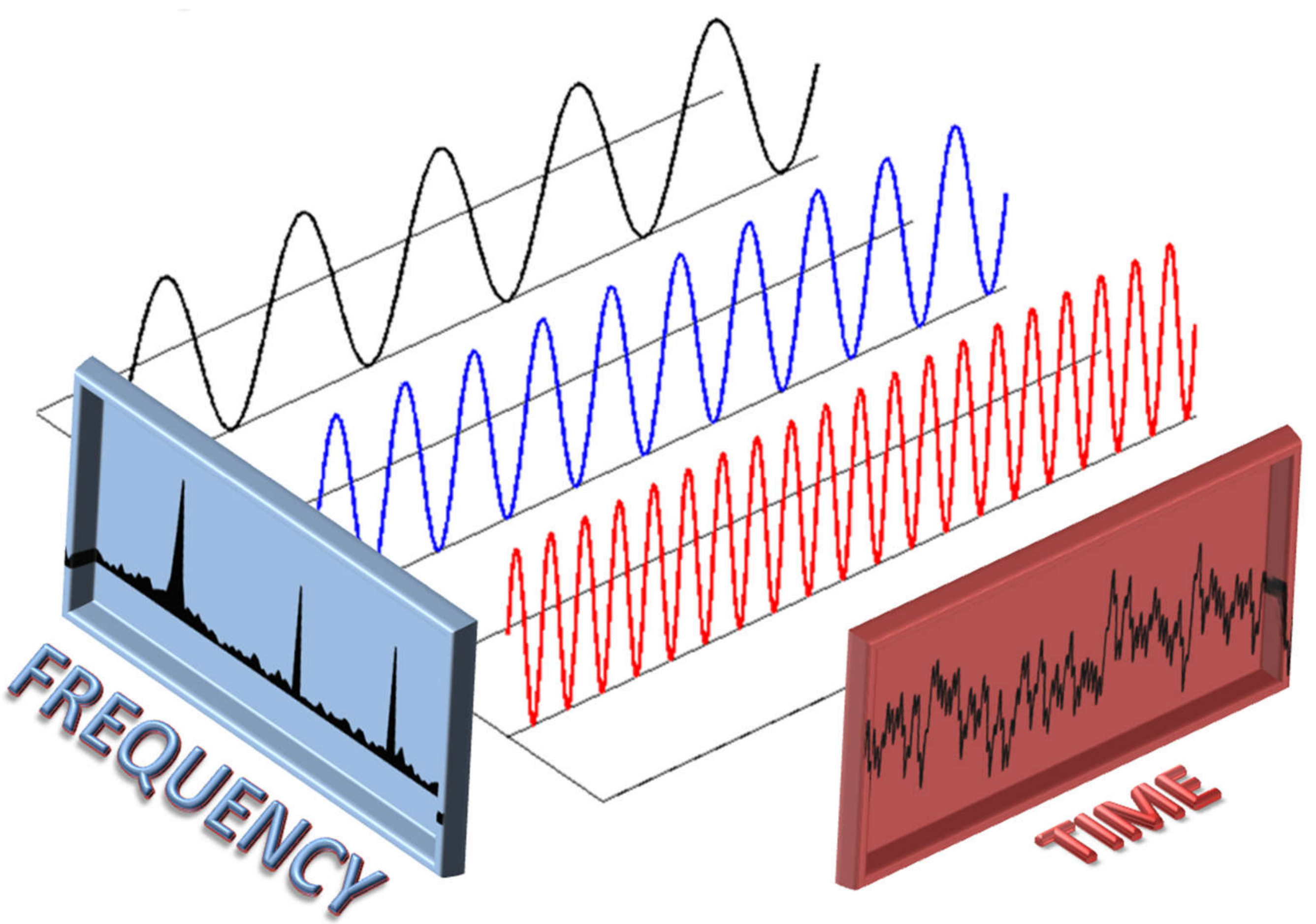
Orvosi képdiagnosztika

5-7. ea. 2017 ősz

5. Előadás témái

- Fourier transzformációk és kapcsolataik:
  - FS, FT, DTFT, DFT, DFS
  - Mintavételezés, interpoláció

Folytonos Fourier Transzformáció



Folytonos Fourier Transzformáció

- Lineáris transzformáció a <u>véges energiájú</u>, folytonos függvények tere felett:
  - $F(\omega) = FT\{f\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp\{-j \cdot x \cdot \omega\}dx$
  - $f(x) = FT^{-1}\{F\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp\{j \cdot x \cdot \omega\}d\omega$

- Legfontosabb tulajdonságai:
  - Konvolúció tétel: $(f * g) = FT^{-1}\{(F \cdot G)(\omega)\}$
  - Fordított konvolúció: $((f \cdot g)(x)) = \frac{1}{2\pi} FT^{-1}\{F * G\}\big|_x$
  - Parseval tétel: $E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega$

Folytonos Fourier Transzformáció

– Valós jel spektruma: $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$

– Páros, valós jel spektruma:

$$F(-\omega) = \mathrm{Re}\{F(-\omega)\} = \mathrm{Re}\{F(\omega)\} = F(\omega)$$

– Páratlan, valós jel spektruma:

$$F(-\omega) = \mathrm{Im}\{F(-\omega)\} \cdot j = \mathrm{Im}\{F(\omega)\} \cdot (-j) = \overline{F(\omega)}$$

– Periodikus jel spektruma diszkrét:

$F(\omega) = 0$, ha $\omega \neq k \cdot (2\pi \cdot f)\big|_{k \in Z}$

– Ekvivalens egy unitér transzformációval:

- Ez pl. maga után vonja a bijektivitást

Folytonos Fourier Sorfejtés

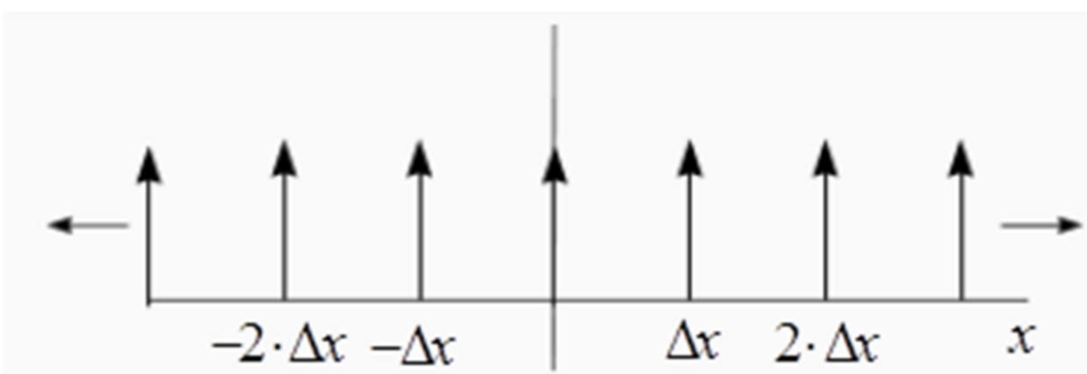
- Lineáris transzformáció a <u>periodikus</u> folytonos függvények tere felett:
  - $c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cdot \exp(-j \cdot x \cdot 2\pi\, n/T)\, dx\,; \quad n \in Z$
  - $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \exp\{j \cdot x \cdot 2\pi\, n/T\}$
- Kapcsolat a folytonos FT-val:
  - Mintavételezi a spektrumot: $c_n = 1/T \cdot F(2\pi \cdot n/T)$
  - Periodikus jel ⇔ diszkrét spektrum
  - Egyéb tulajdonságokat örökli a folytonos FT-től

Diszkrét idejű Fourier Transzformáció (DTFT)

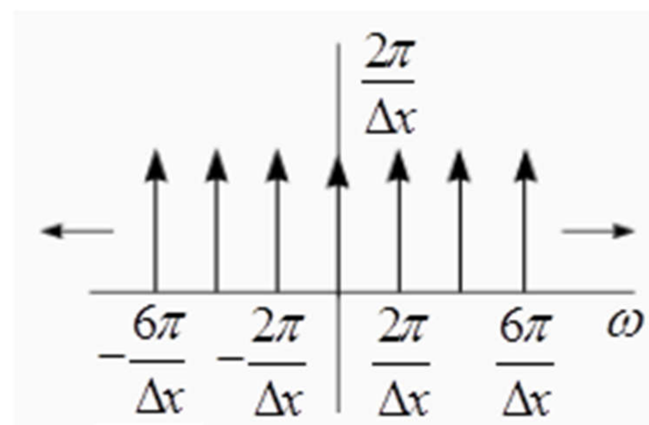
- Adott egy mintavételezéssel előállt <u>végtelen hosszú, abszolút összegezhető jel</u>: $f[n]$
- Definíció:
  - $X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] \exp\{-j \cdot \omega \cdot n\}$
  - $x[n] = 1/2\pi \cdot \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) \exp\{j \cdot \omega \cdot n\} \, d\omega$
- Alapvető tulajdonságok:
  - $n \in Z$, de $\omega \in R$
  - $X(\omega + 2 \cdot k \cdot \pi)\big|_{k \in Z} = X(\omega)$
  - Egyéb tulajdonságait örökli a folytonos FT-től

Matematikai mintavételezés
Folytonos FT és DTFT kapcsolata

- Végtelen impulzus fésű:
  - Matematikai mintavételezés: folytonos jel elemenkénti szorzata az impulzus fésűvel.
  - Időtartománybeli szorzás ⇔ Spektrumok konvolúciója



Impulzusfésű az időtartományban



frekvenciatartományban

Mintavett jel spektruma

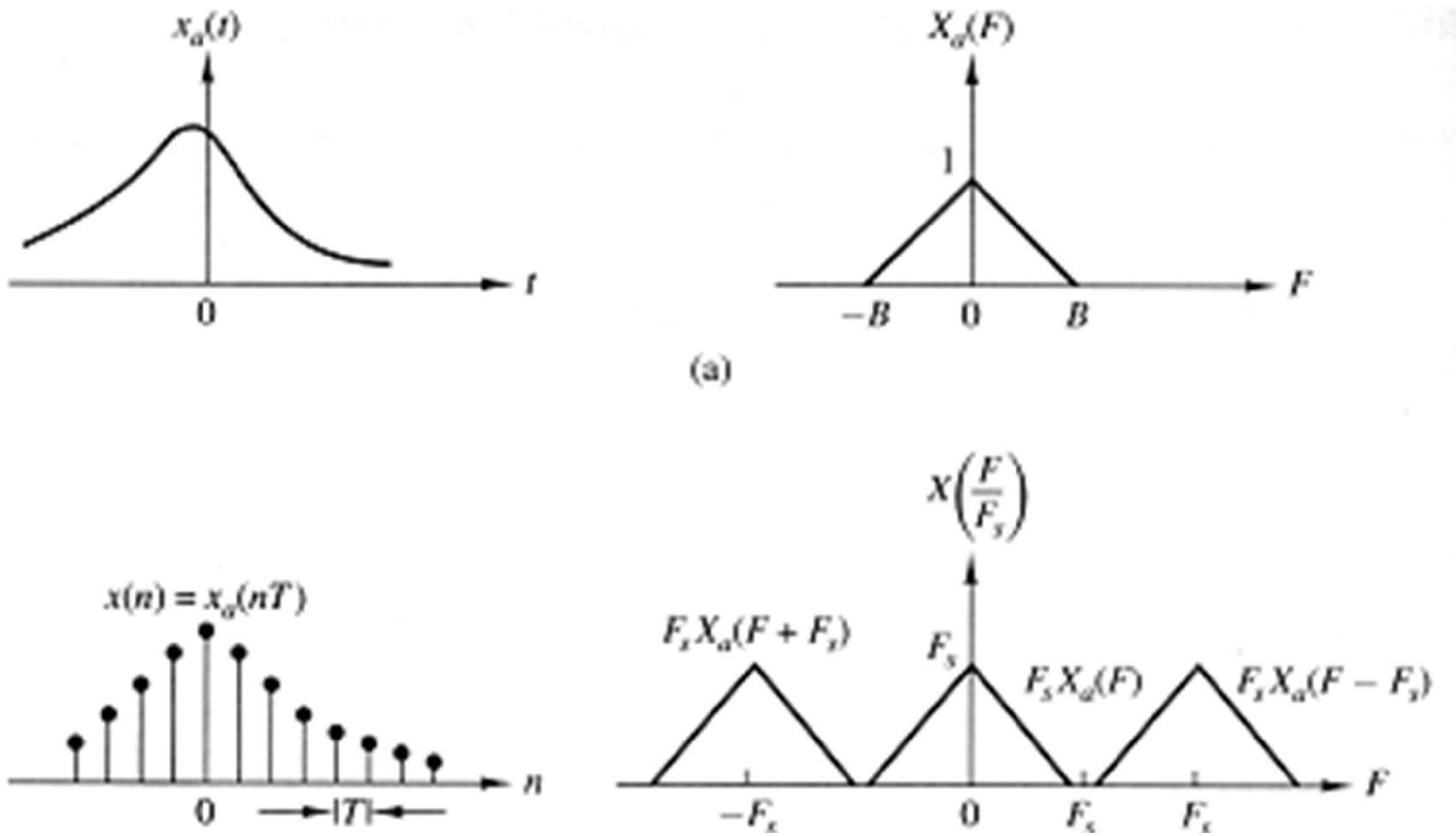
- Formálisan a mintavett jel spektruma:

$$X_s(\omega) = \frac{2\pi}{\Delta x} X(\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{\Delta x}\right) = \frac{2\pi}{\Delta x} \sum_k X\left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{\Delta x}\right)$$

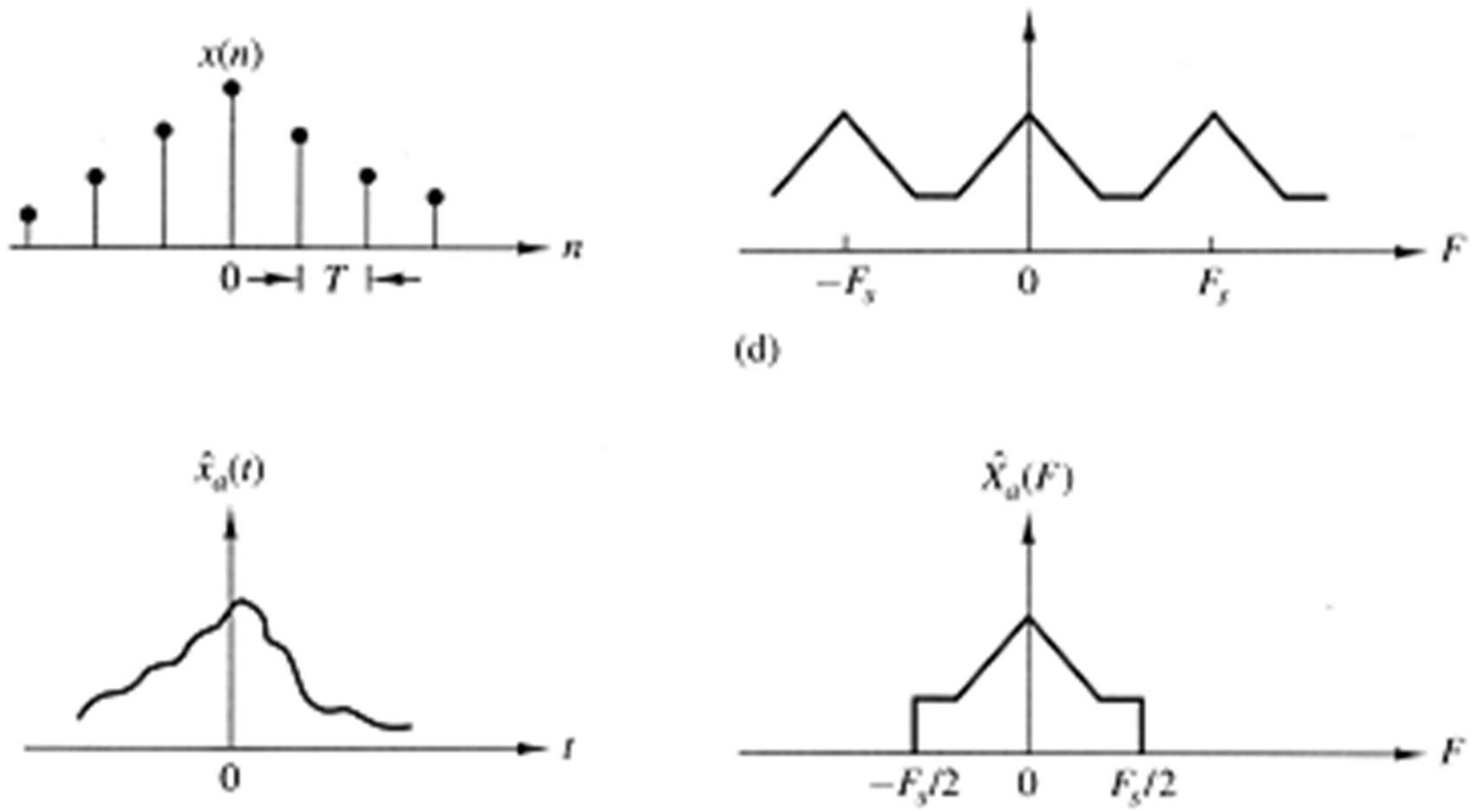
  – Δx : mintavételezések távolsága
  – $X(\omega)$: folytonos idejű jel spektruma
  – $X_s(\omega)$: mintavételezett jel spektruma

- Nyquist mintavételi törvény:
  – $bw\{x\} < (1/2) \cdot f_s; \square\, f_s = (1/\Delta x)$
  – Ha nem tartjuk be alul mintavételezés: $K \cdot X_s(\omega) \neq X(\omega)$

Helyesen mintavételezés interpretációja



Alul mintavételezés interpretációja spektrum átlapolódása

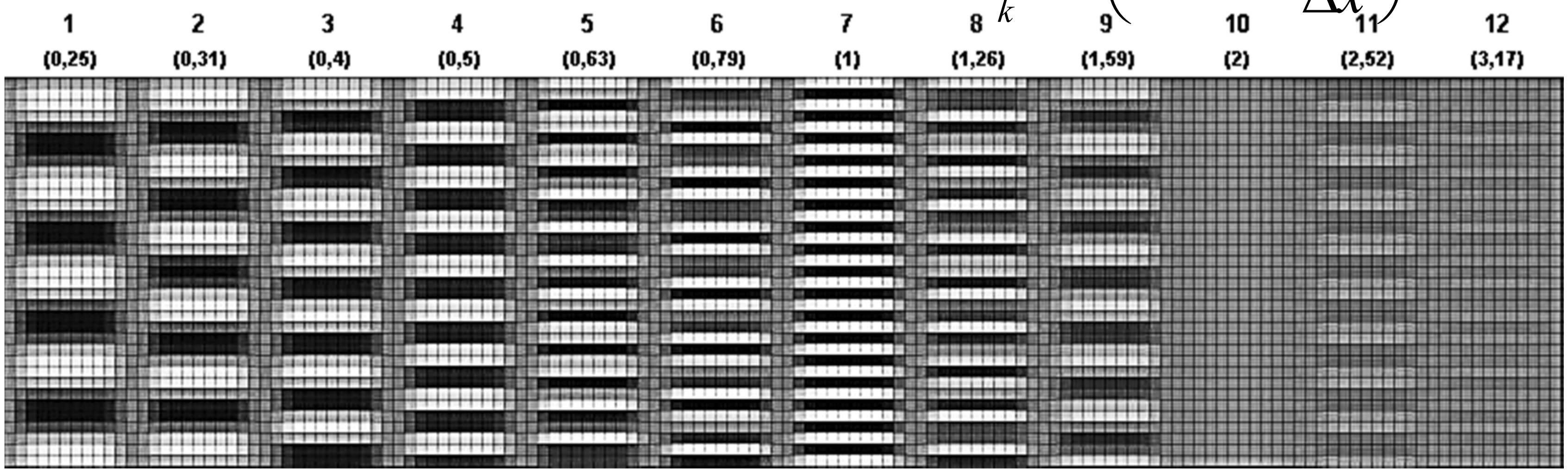


Spektrum átlapolódása
moire / aliasing

- Spektrum átlapolódása által generált jeltorzulás

Spektrum átlapolódása - aliasing

- Aliasing formálisan: $X_s(\omega) \propto \sum_k X\left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{\Delta x}\right) \neq X(\omega)$



- Anti-aliasing filter – mintavételezés előtti alul-áteresztő szűrés:
  – Pl. Bayer szűrős fényképezőgépeknél optikai szűrő
  – Radiológiában az elkent PSF-ek miatt elhagyható

Mintavett jel rekonstrukciója

- Rekonstrukció (interpoláció):
  - Cél: a mintavételezett jel értékének előállítása két mintavételezési pont között
  - Ha sérült a mintavételezési törvény, akkor lehetetlen
  - LTI rendszerrel: $x_R = x_S * h_R$
  - Ideális interpolációs kernel:
    - $H_R(\omega) = \begin{cases} K & \left| -\omega_L \le \omega/2\pi \le \omega_L \right. \\ 0 & \left| \text{egyébként} \right. \end{cases}$ $\qquad \omega_L = f_S/2$
    - $h_R \propto \operatorname{sinc}(\omega_L \cdot x)$

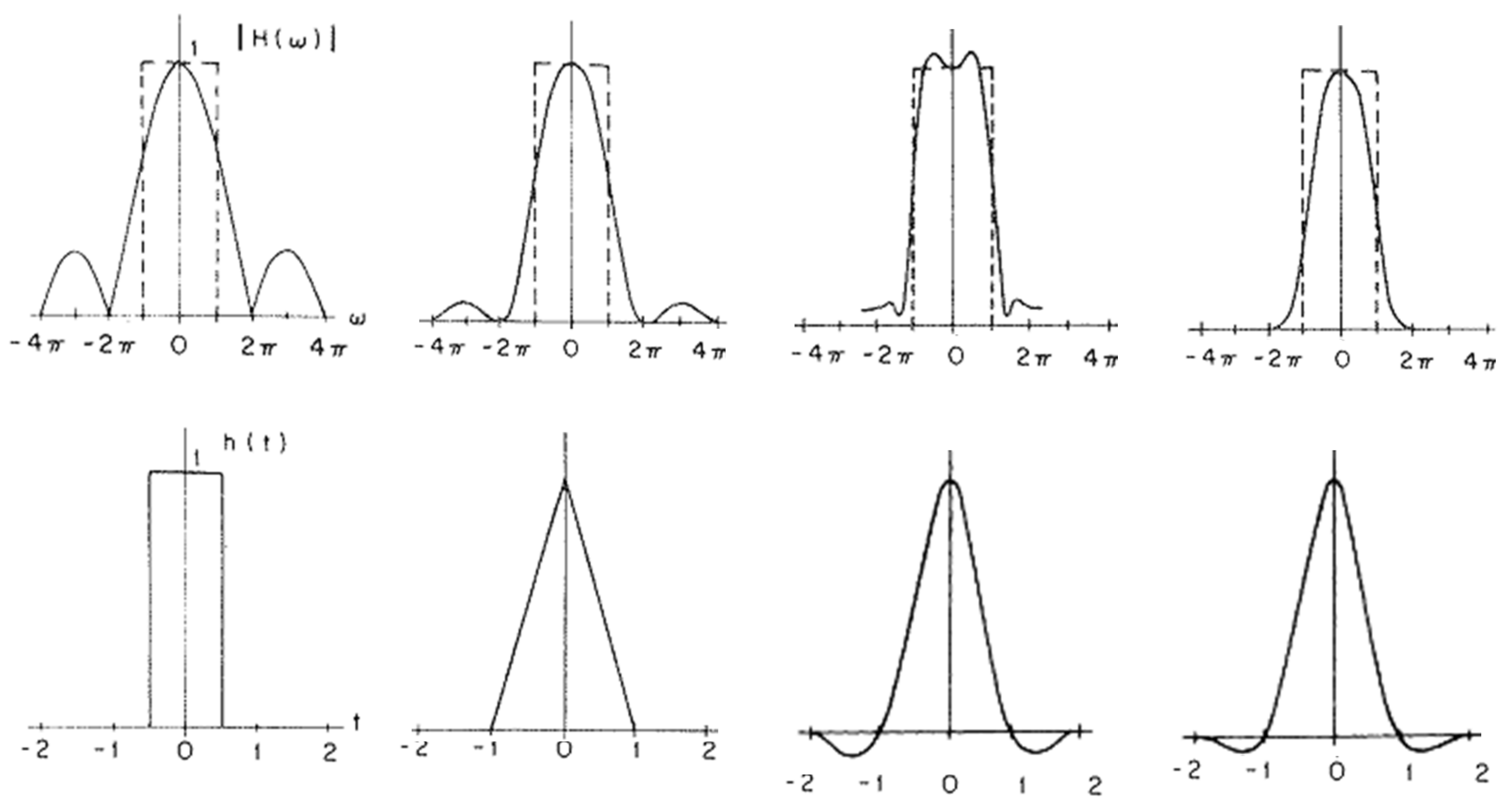
Interpoláció hibái

- Megfigyelt tartomány széle:
  - Súlyfüggvény „kilóg” a megfigyelt tartományból
- $\left|H_R(\omega)\right| \neq 0 \quad |\omega| > f_s/2$ esete:
  - Lényegesen jelentősebb hibaforrás
  - Mintavett jel rekonstrukciója:
    - $X_R(\omega) = H_R(\omega) \cdot X_S(\omega) \propto \sum_k H_R(\omega) \cdot X\left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{\Delta x}\right)$
    - $X_R(\omega) \neq X(\omega)$, ha $|\omega| > f_s/2$
  - Példa rá a Nearest Neighbour interpoláció (ZOH)

Interpolációk összehasonlítása

- Átviteli/súlyfüggvényük analízisével:

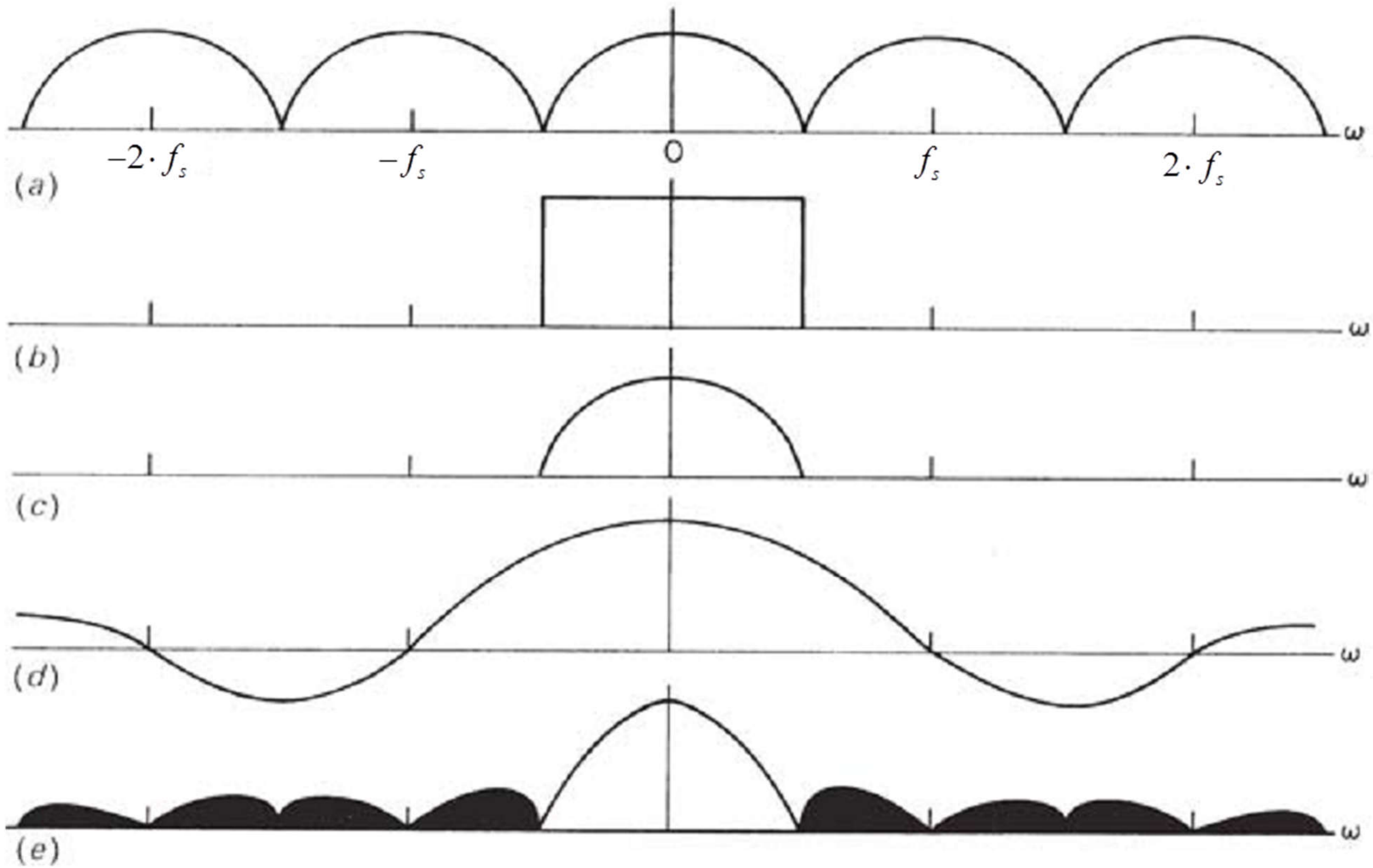
Nearest Neighbour | Lineáris | Köbös Spline | Köbös B-Spline



Átviteli függvény

Súlyfüggvény

(Hibás) interpoláció vizualizációja



Integráló mintavételezés

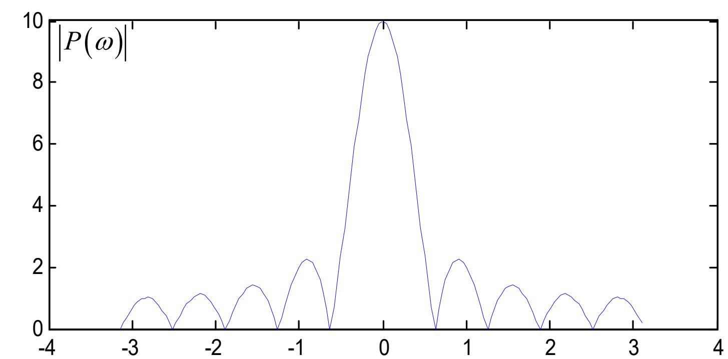
- Érzékelők integrálják a foton fluxust:
  - Érzékelőelemek **homogén** súlyfüggvénye: $p(x)$
  - Adekvát az alábbi modell:
    1. Megszűrjük a folytonos jelet az érzékelők súlyfüggvényével
    2. Elvégezzük a matematikai mintavételezést

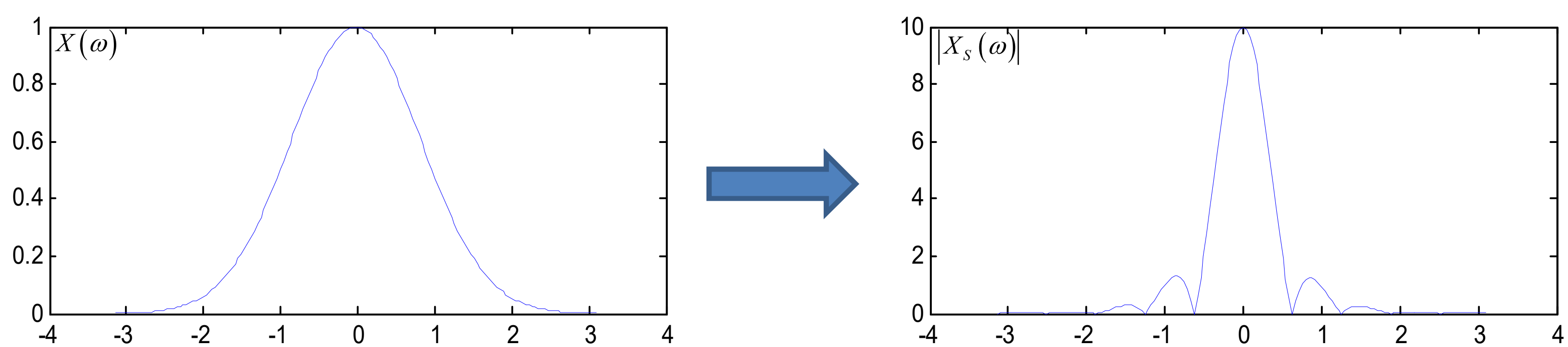
$$X_s(\omega) \propto \left(X(\omega)\cdot P(\omega)\right) * \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\cdot\frac{2\pi}{\Delta x}\right)\right)$$

  - Ha az érzékelőelemek súlyfüggvénye nem homogén, akkor nem modellezhető LTI rendszerrel

Integráló mintavételezés - példa

- Ideális, integráló mintavételezés esete:
  - $p(x) = \begin{cases} 1/\Delta_x & \|x| < \Delta_x/2 \\ 0 & \|x| > \Delta_x/2 \end{cases}$
  - $P(\omega) = \Delta x \cdot \mathrm{sinc}(\Delta x \cdot \omega/2)$





Diszkrét Fourier Transzformáció (DFT)

- Diszkretizált jelet N pontban ismerjük:
  - $X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\{-j \cdot n \cdot (k \cdot 2\pi/N)\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\{-j \cdot n \cdot k \cdot \Delta\omega\}$
  - $x[n] = (1/N) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} X_k \cdot \exp\{j \cdot 2\pi\, kn/N\}$
- Kapcsolat a DTFT-vel:
  - $x[n] = \begin{cases} y[n] & n \in [0,1,\ldots,N-1] \\ 0 & \mathit{egyébként} \end{cases}$ megfigyelési ekvivalens
  - DFT mintavételezi a megfigyelési ekvivalens DTFT spektrumát: $Y_k = X(k \cdot \Delta\omega)$
- C^N feletti ortogonális transzformáció, mi a mátrixa?

DFT pontszáma

- Megfigyelési ekvivalens DTFT spektrumát tetszőleges felbontással mintavételezhetjük:
  - Ha M minta érdekel, akkor M-N db 0-val paddelünk
  - A fizikai (folytonos) jel spektrumáról ezáltal nem tudunk meg többet!
  - 2-Radix FFT