

Fourier térbeli analízis, inverz probléma

Orvosi képdiagnosztika

5-7. ea. 2017 ősz

6. Előadás tartalma

- Spektrumszivárgás
- Képfeldolgozás frekvencia tartományban:
 - 2D Spektrum gépi ábrázolása
 - Szűrések frekvenciatartományban
 - Spektrumképek értelmezése

Spektrumszivárgás - ablakozás

- DFT kapcsolata a DTFT-vel és a DFS-el:
 - Impliciten cirkuláris jelet feltételez (DFS)
 - Tegyük fel, hogy az eredeti jelünk (végtelen terjedelmű) véges részét tudtuk mintavételezni:

$$h[n] = \text{rect}_T[n], \quad y[n] = y_\infty[n] \cdot h[n]$$

- Ideális esetben: $Y_{(k)} = Y_\infty(k \cdot \Delta\omega)$
- A valóságban: $Y_{(k)} = 1/2\pi \cdot (Y_\infty * H)(k \cdot \Delta\omega)$
- Cél lenne a DTFT spektrumot szivárgás nélkül mintavételezni: $Y_{(k)} := Y_\infty(k \cdot \Delta\omega)$

Spektrumszivárgás - ablakozás

- DFT kapcsolata a DTFT-vel és a DFS-el:

- Impliciten cirkuláris jelet feltételez (DFS)

- $\sum_{k=1}^T \delta[n-k]$, hogy Végtelen kiterjedésű mintavételezett jel (megfigyelési ekvivalens) ni:

$$h[n] = \text{rect}_T[n], \quad y[n] = y_\infty[n] \cdot h[n]$$

- Ideális esetben: $Y_{(k)} = Y_\infty(k \cdot \Delta\omega)$
- A valóságban: $Y_{(k)} = 1/2\pi \cdot (Y_\infty * H)(k \cdot \Delta\omega)$
- Cél lenne a DTFT spektrumot szivárgás nélkül mintavételezni: $Y_{(k)} := Y_\infty(k \cdot \Delta\omega)$

Spektrumszivárgás - ablakozás

– Tehát a megfigyelt jel DFT spektruma:

$$Y_k = 1/2\pi \cdot (Y * H)(k \cdot \Delta\omega)$$

– $h[n]$ az úgynevezett ablak függvény

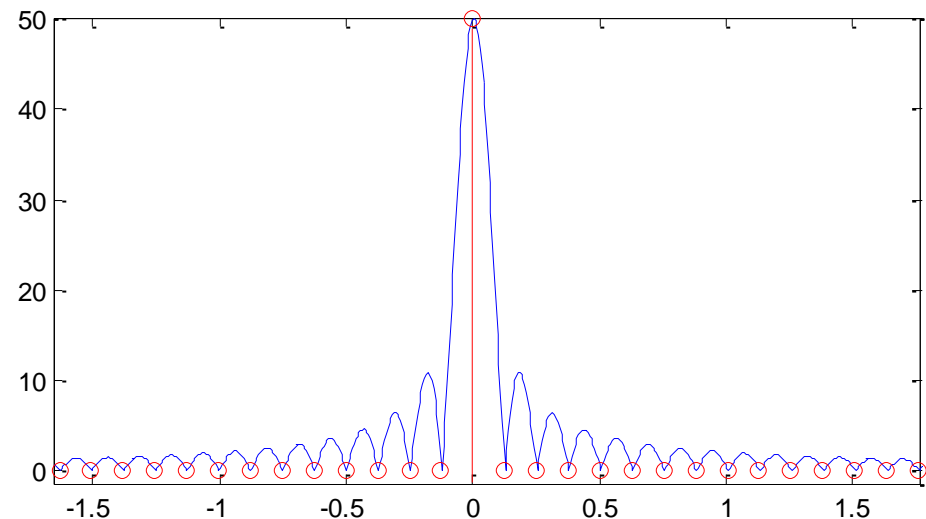
- Ha expliciten nem ablakozunk, akkor: $h[n] = \text{rect}_T[n]$

Pl.: $T = 50$

Kék görbe: rect ablak DTFT
spektrum amplitúdója

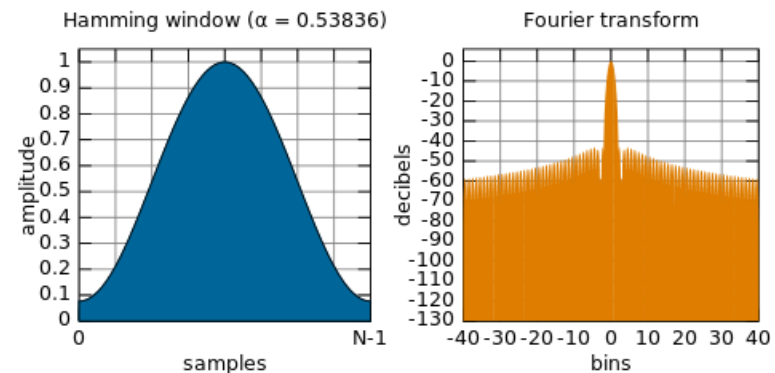
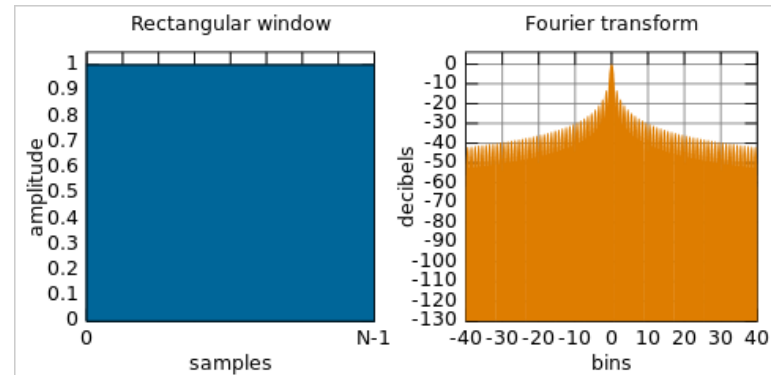
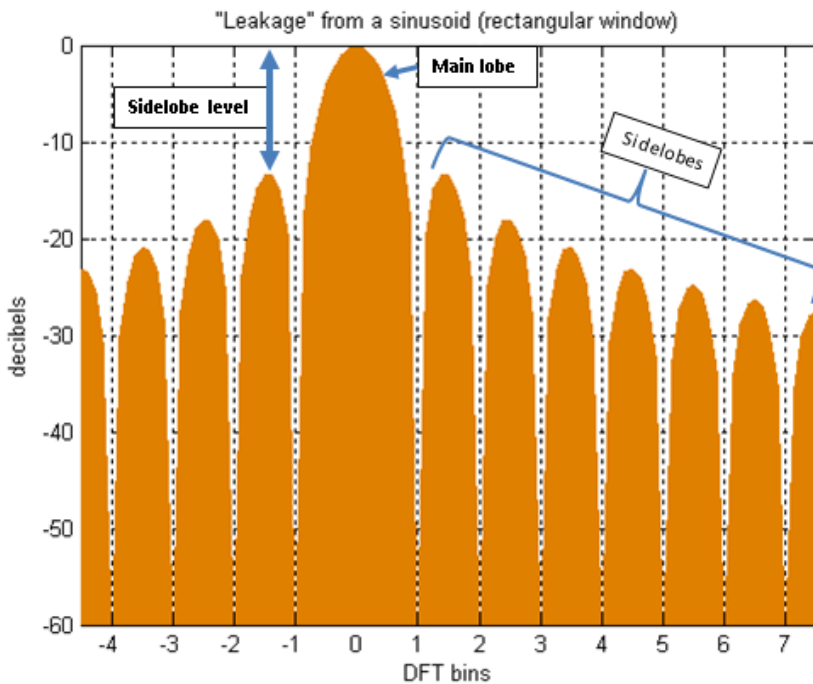
Piros pontsor: rect ablak DFT
spektrum amplitúdója

Mikor nincs spektrumszivárgás?



Spektrumszivárgás - ablakozás

- DFT előtti ablakozás:
 - Képtérben az általunk definiált $h[n]$ -el szorzunk
 - Ablakfüggvények tulajdonságai:

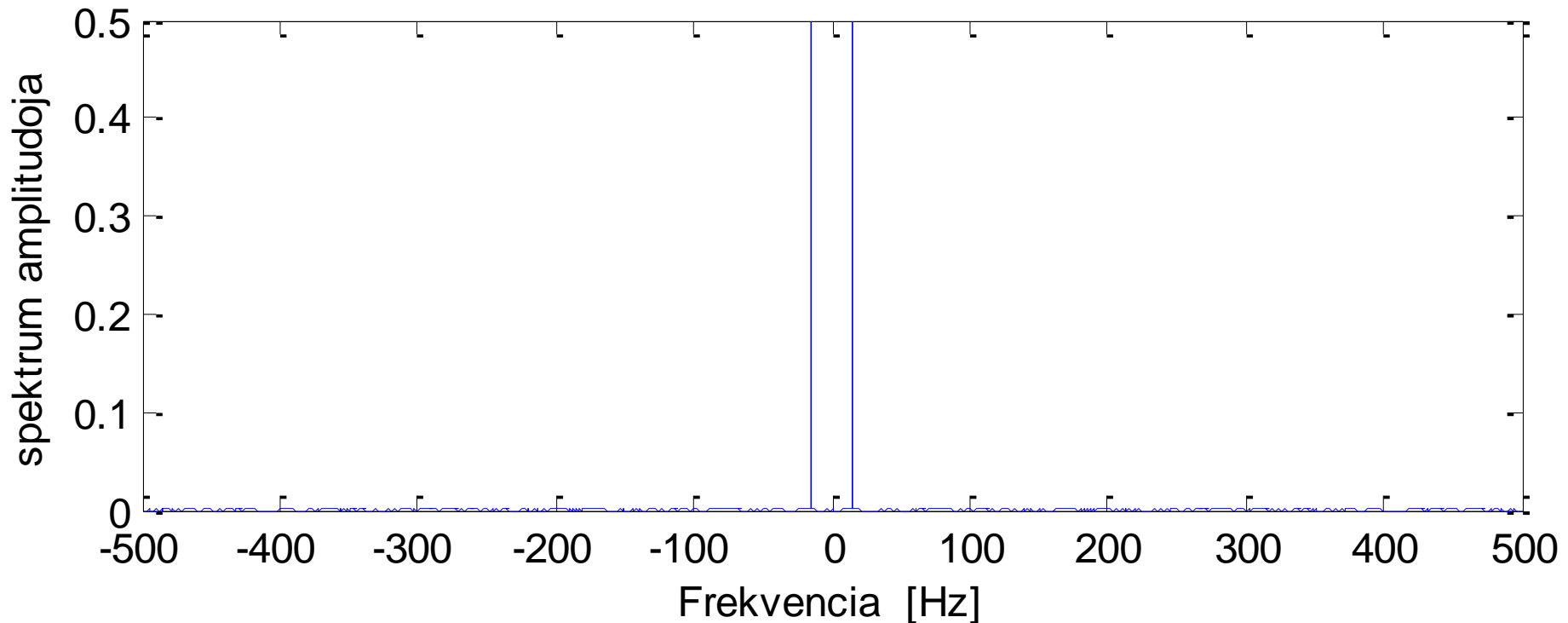


Koherens mintavételezés

- Periodikus jelből egész számú periódusnyit mintavételezünk (y_N): $N/f_s = k/f$, $k \in \mathbb{Z}_+$
 - f : periodikus jelünk frekvenciája, N : minták száma
 - N pontos négyzetes ablak DTFT spektruma:
 - $H_{rect} = \sin(\omega/\Delta f)/(\omega/\Delta f)$
 - $H_{rect}(k \cdot \Delta f) = \delta_{k,0}$ ha $k \in \mathbb{Z}$
 - $Y_s(\omega) = 0$, ha $\omega \neq k \cdot \Delta f \mid_{k \in \mathbb{Z}}$
 - Tehát a DFT által mintavételezett frekvenciákon nem torzul az ablakozás miatt a DTFT spektruma
 - Különben Spektrumszivárgás.

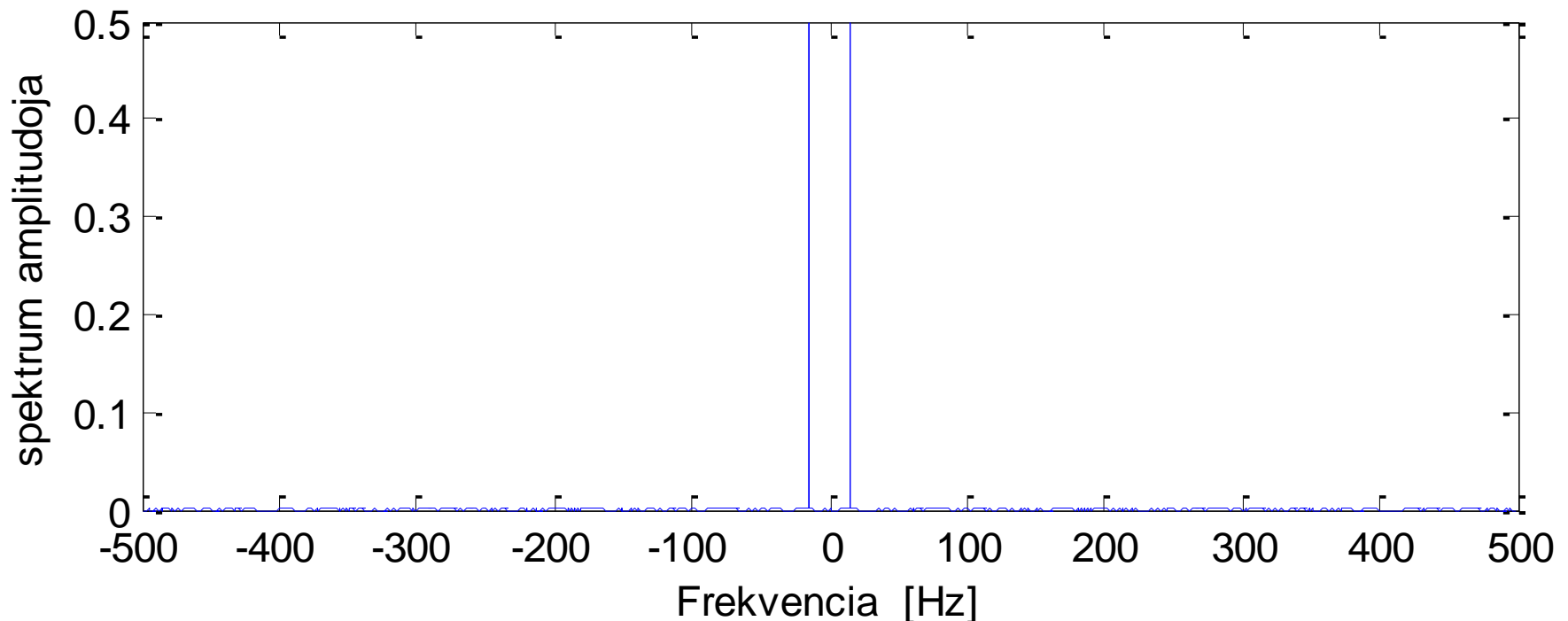
Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$



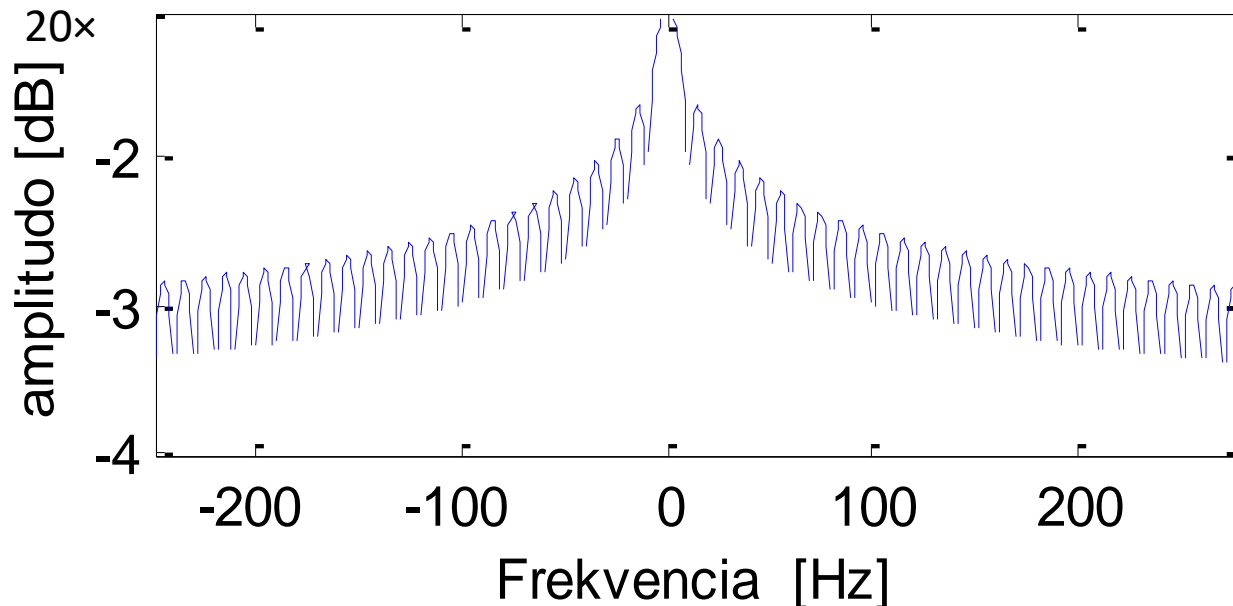
Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
 - Mintavételezzük ($y_\infty[\cdot]$): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = \infty$
 - Mivel a mintavételi törvényt nem sértjük meg:



Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
 - Mintavételezzük (y_{100}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 100$
 - Megfigyelési ekvivalens: $(y_\infty \cdot \text{rect}_{100})[\cdot]$
 - Implicit ablak DTFT spektrumának részlete:



Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

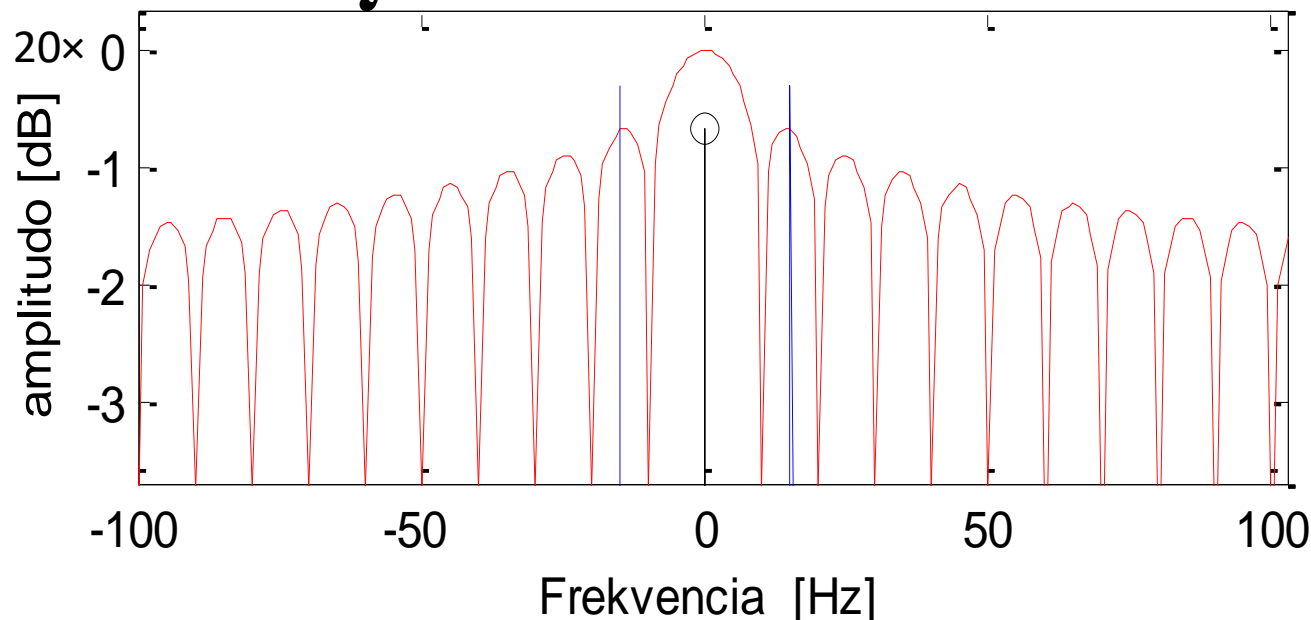
- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
 - Mintavételezzük (y_{100}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 100$
 - Megfigyelési ekvivalens spektruma: $Y_{100} \propto Y_\infty * H_{rect}$

$$Y_{100}(0) = \int Y_\infty(\tau) \cdot \frac{1}{2\pi} H_{rect}(0 - \tau) d\tau$$

Piros: ablak normált spektruma

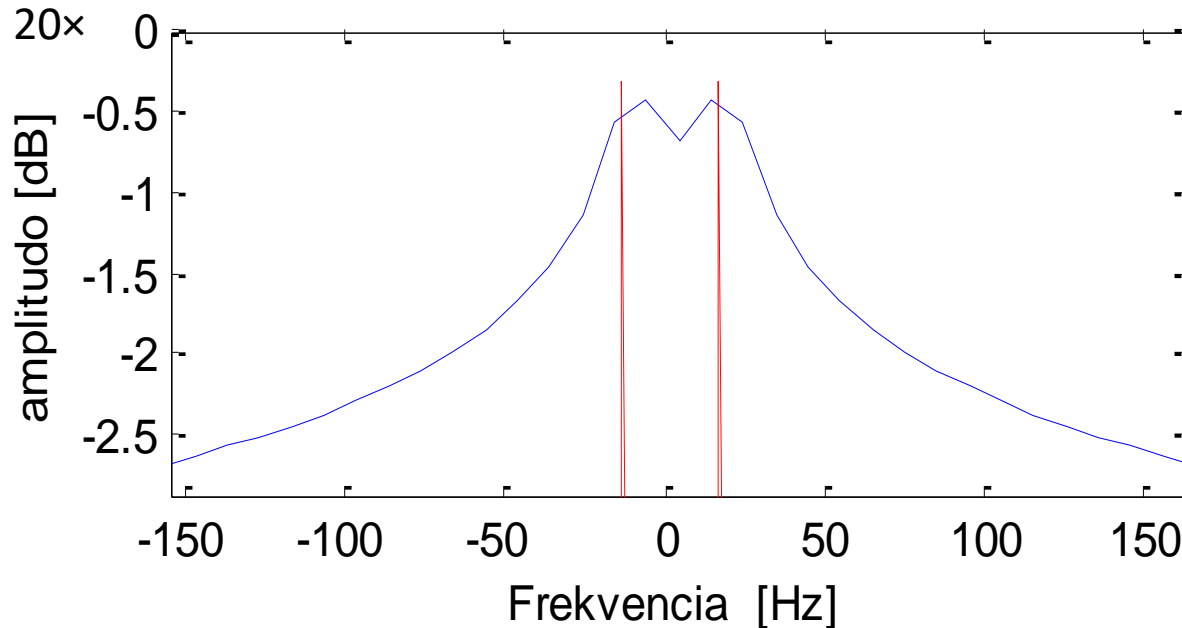
Kék: folytonos jel spektruma

Fekete: $N=100$ mintavétellel előálló jel spektrumának DC komponense



Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
 - Mintavételezzük (y_{100}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 100$
 - Megfigyelési ekvivalens spektruma: $Y_{100} \propto Y_\infty * H_{rect}$

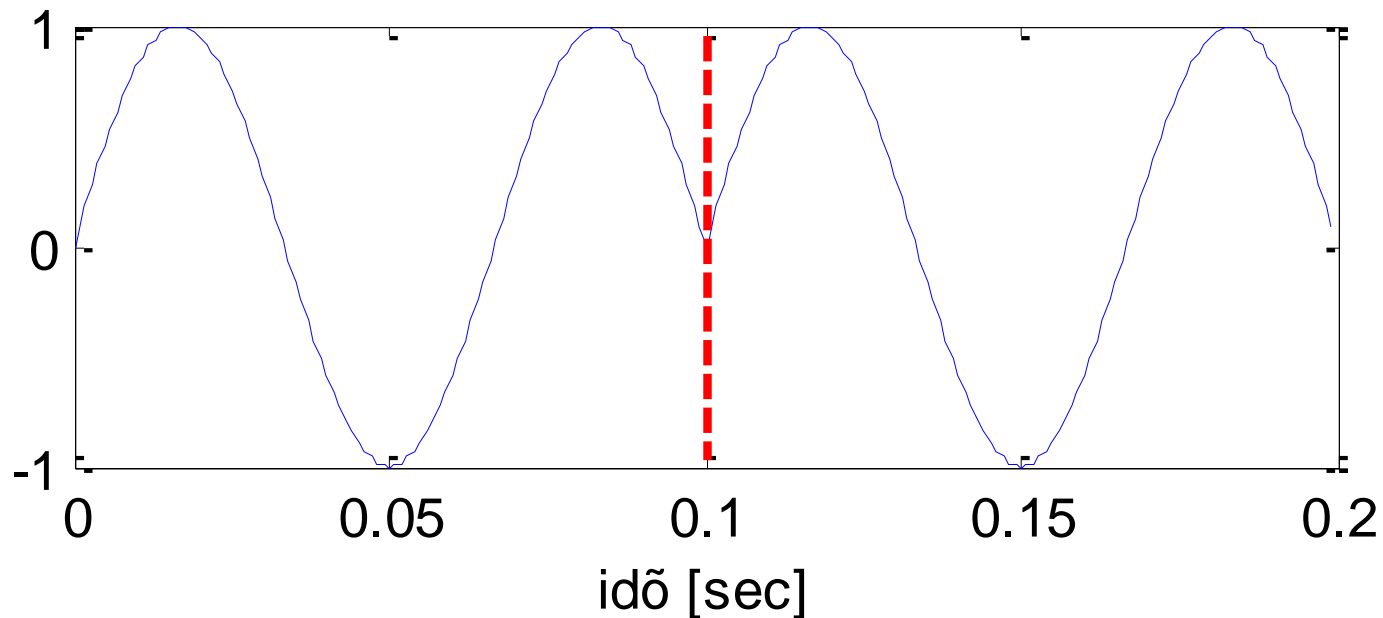


Piros: folytonos jel
spektruma

Kék: $N=100$
mintavétellel előálló
jel spektruma

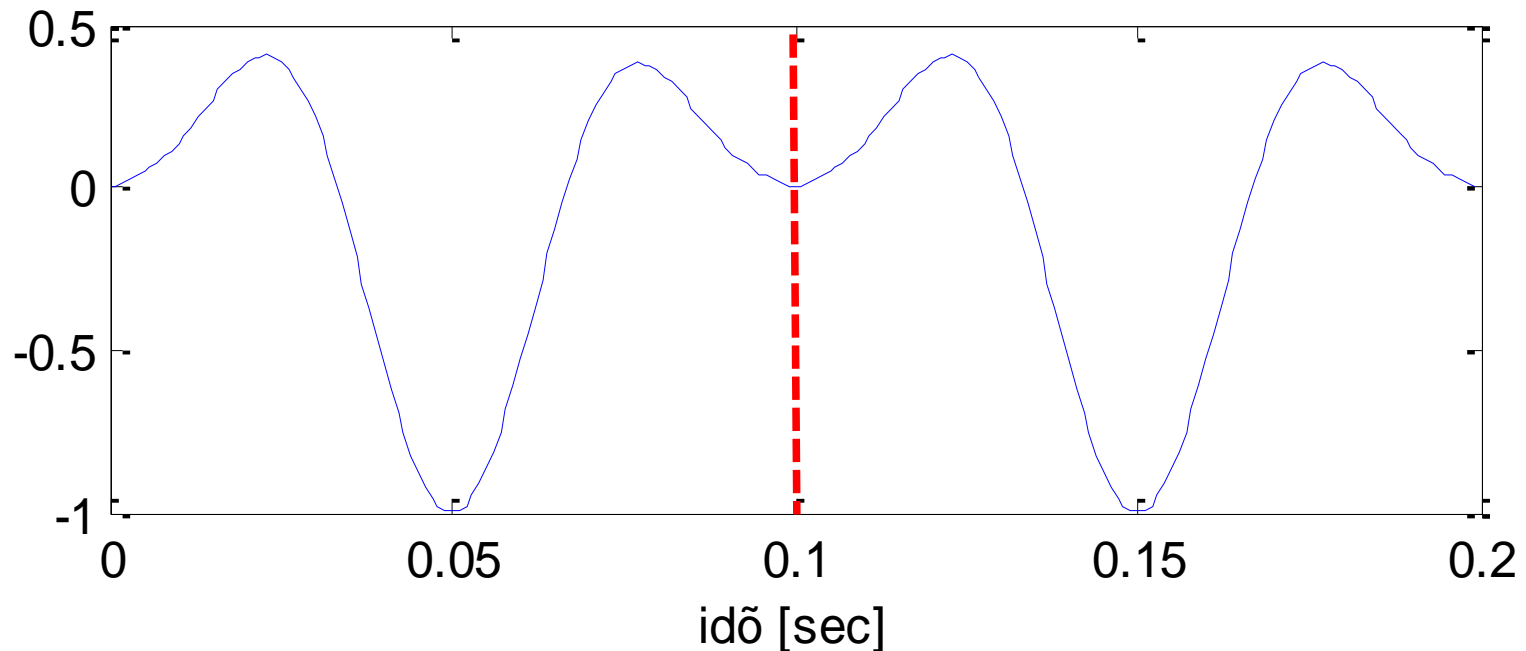
Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
 - Mintavételezzük (y_{100}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 100$
 - DFT által „látott” jel: $y_{100}[n] = (y_\infty \cdot h_{Rect})[\text{mod}_{100}(n)]$



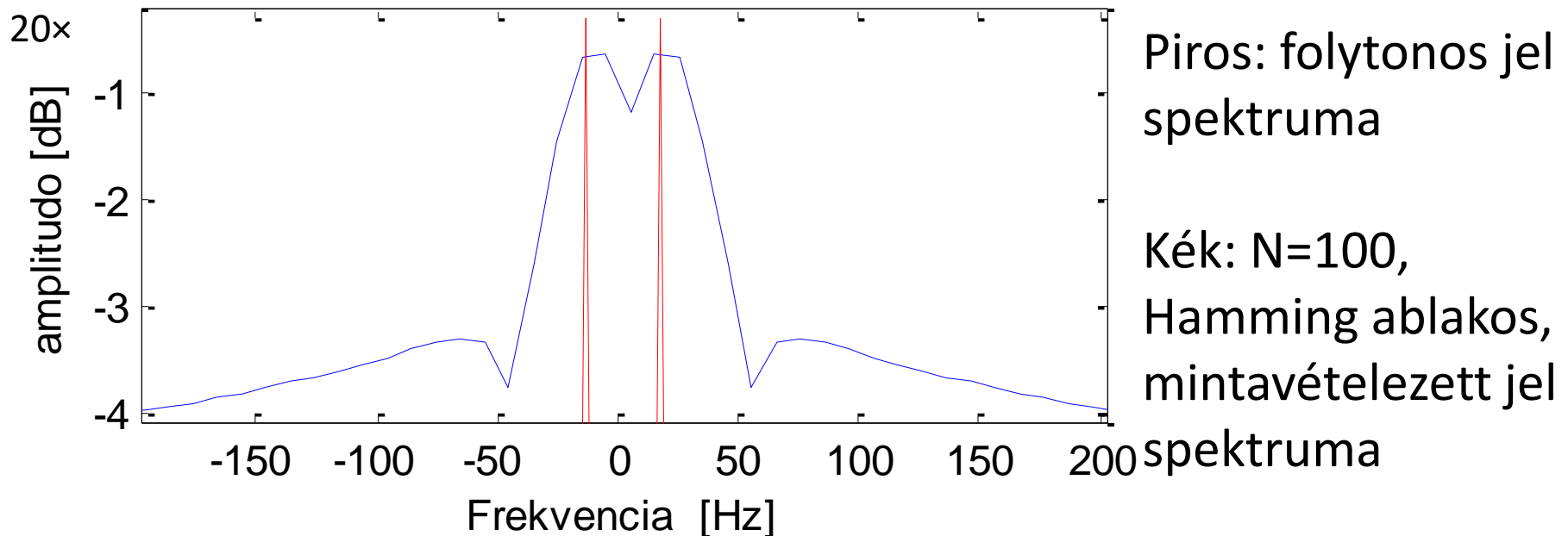
Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés, Hamming ablak

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
 - Mintavételezzük (y_{100}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 100$
 - DFT által „látott” jel: $y_{100}[n] = (y_\infty \cdot h_{Ham})[\text{mod}_{100}(n)]$



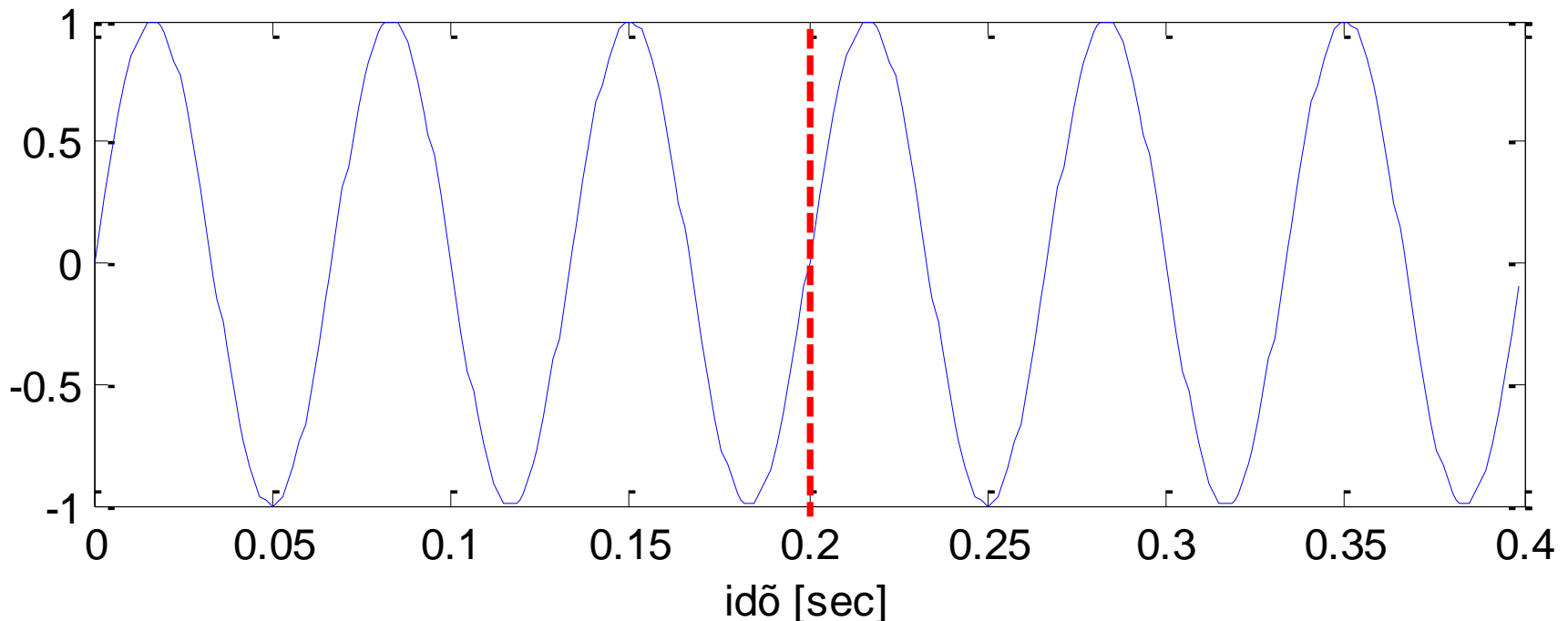
Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés, Hamming ablak

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
 - Mintavételezzük (y_{100}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 100$
 - Megfigyelési ekvivalens spektruma: $Y_{100} \propto Y_\infty * H_{Ham}$



Koherens mintavételezés

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
 - Koherensen mintavételezzük (y_{200}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 200$
 - DFT által „látott” jel: $y_{200}[n] = y_\infty[\text{mod}_{200}(n)] = y_\infty[n]$

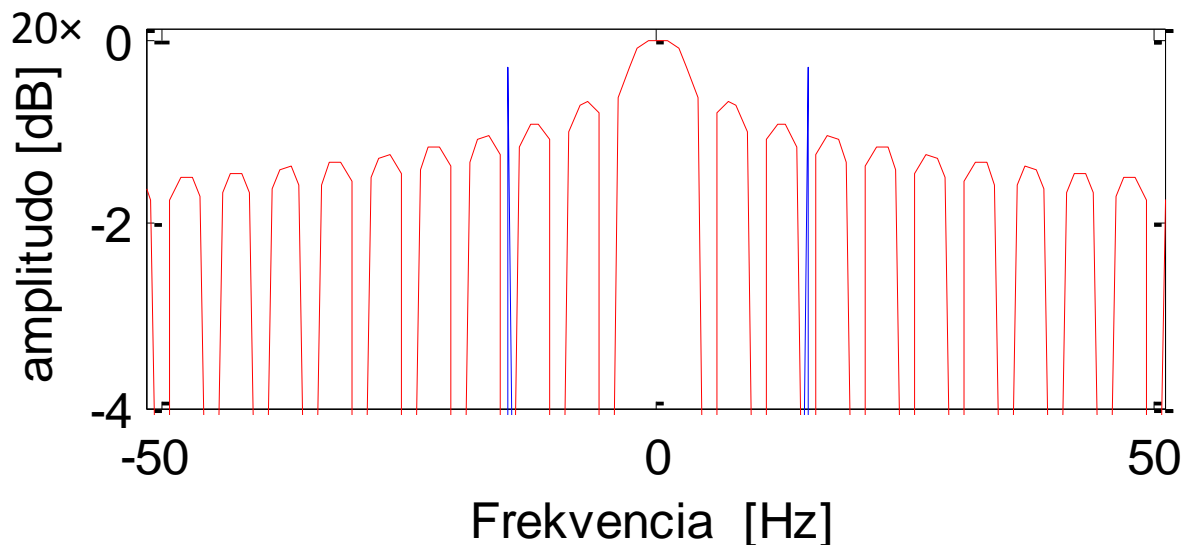


Spektrum koherens mintavételezés esetén

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
 - Mintavételezzük (y_{200}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 200$
 - Megfigyelési ekvivalens spektruma: $Y_{200} \propto Y_\infty * H_{rect}$

$$Y_{200}(0) = \int Y_\infty(\tau) \cdot 1/2\pi H_{rect}(0 - \tau) d\tau$$

Piros: ablak normált spektruma

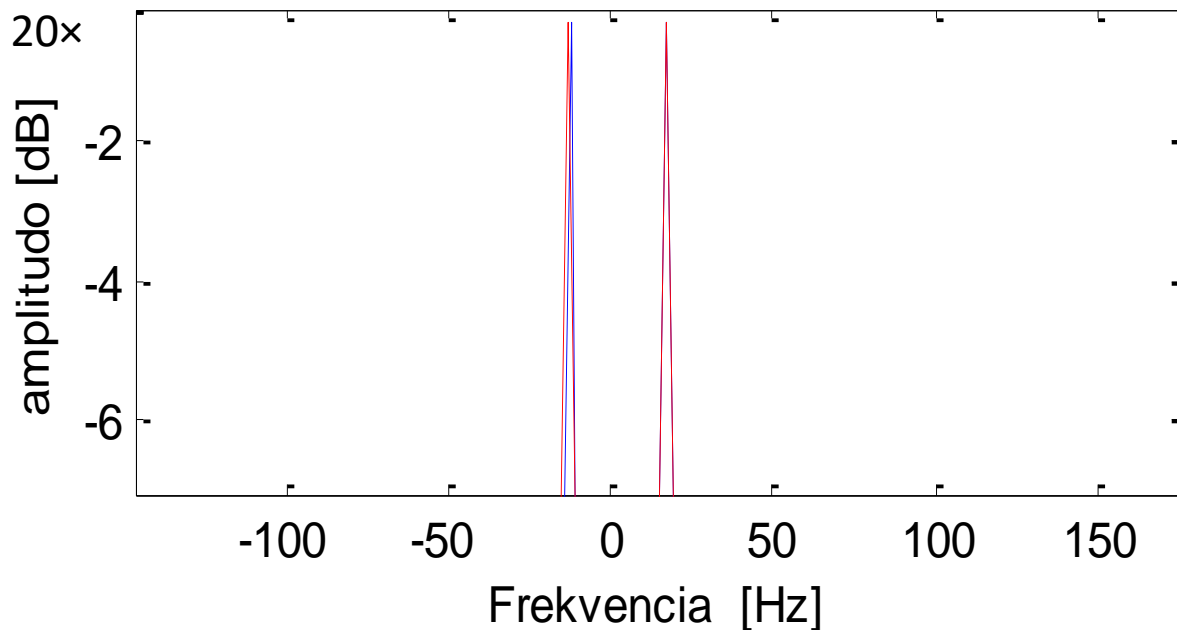


Kék: folytonos jel
spektruma

Fekete: $N=200$
mintavétellel előálló
jel spektrumának DC
komponense ($\log(0)$)

Spektrum koherens mintavételezés esetén

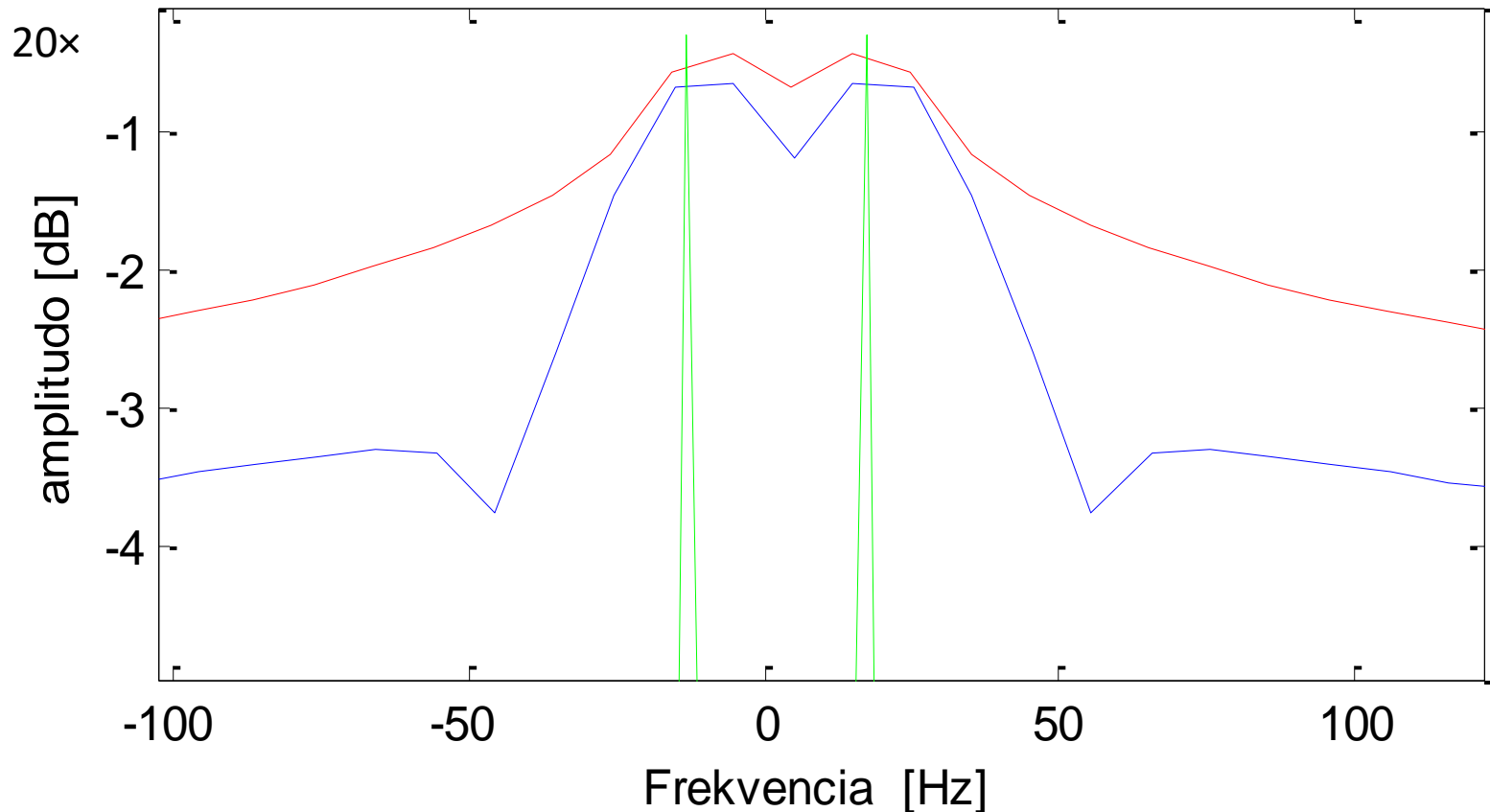
- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
 - Koherensen mintavételezzük (y_{200}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 200$
 - Megfigyelési ekvivalens spektruma: $Y_{200} \propto Y_\infty * H_{rect}$



Piros: folytonos jel
spektruma

Kék: $N=200$
mintavétellel előálló
jel spektruma

Koherensen mintavett / ablakozott, nem koherensen mintavett jelek spektruma



Zöld: koherensen mintavételezett jel spektruma, kék: Hamming ablakos, piros: téglalap ablakos spektrum

2D DFT

Többi transzformáció esetén is hasonló a többdimenziós eset

- Analízis irány:

$$F_{u,v} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f[m,n] \exp\{-2\pi j \cdot (u \cdot m/M + v \cdot n/N)\} =$$
$$= \sum_{m=0}^{M-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} f[m,n] \cdot \exp\{-2\pi j \cdot (v \cdot n/N)\} \right) \exp\{-2\pi j \cdot (u \cdot m/M)\}$$

- Tulajdonságok:

– Periodikus: $[M,N]$ szerint

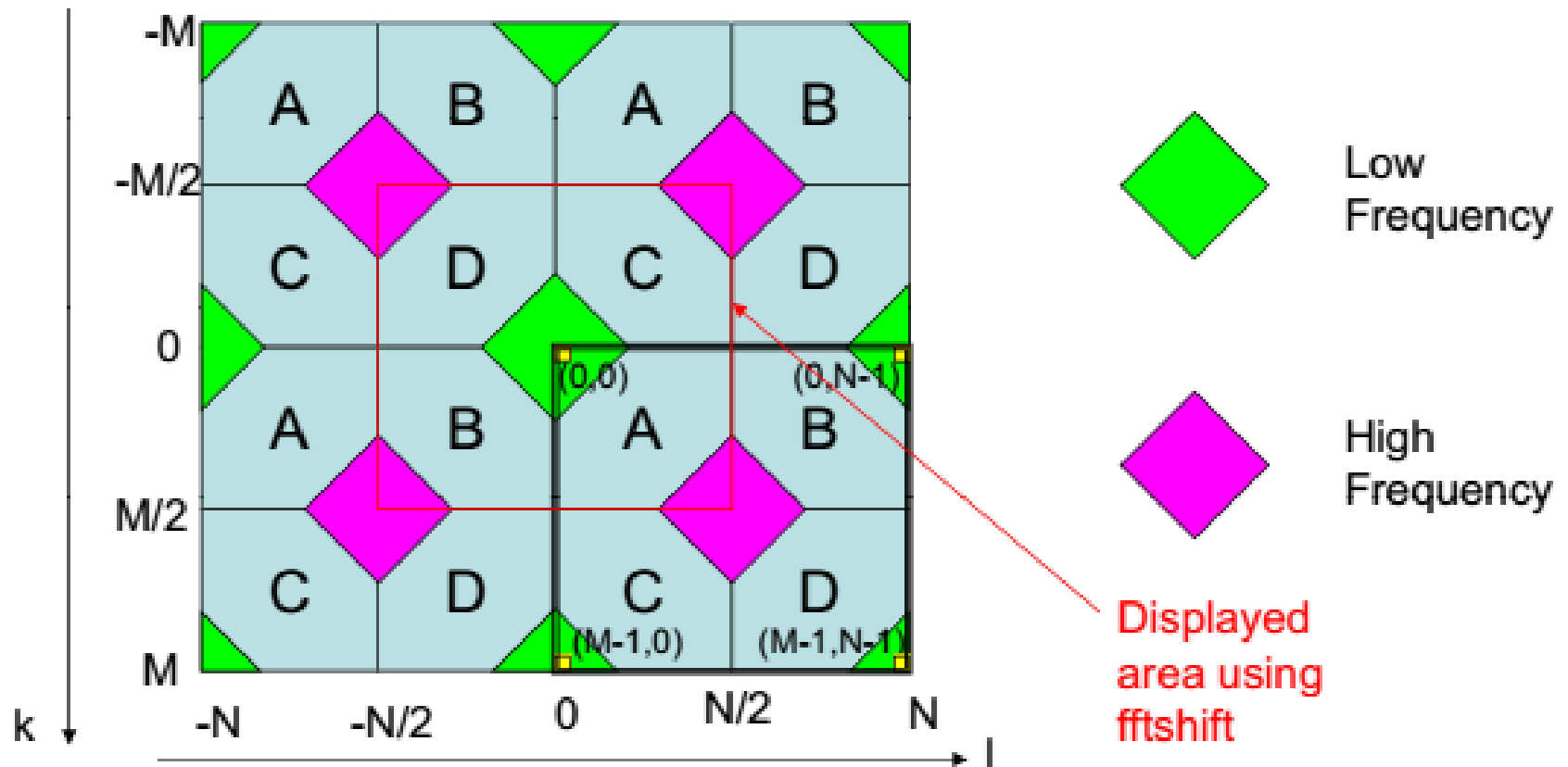
– Valós jel esetén: $F_{u,v} = \overline{F_{-u,-v}} = \overline{F_{M-u,N-v}}$

• Ha M, N páros: $F_{M/2+u,N/2+v} = F_{M/2-u,N/2-v}$

- Spektrum hullámfrontos interpretációja

2D DFT spektrum

- Spektrum blokkjai:



2D DFT spektrum gépi ábrázolása

- Konjugált szimmetria valós jelek esetén:

0	1	2	3	4	3	2	1
5	6	7	8	9	33	32	31
10	11	12	13	14	30	29	28
15	16	17	18	19	27	26	25
20	21	22	23	24	23	22	21
15	25	26	27	19	18	17	16
10	28	29	30	14	13	12	11
5	31	32	33	9	8	7	6

M=N=8

real x Conjugate pairs

Nyquist frekvenciához tartozó komponens

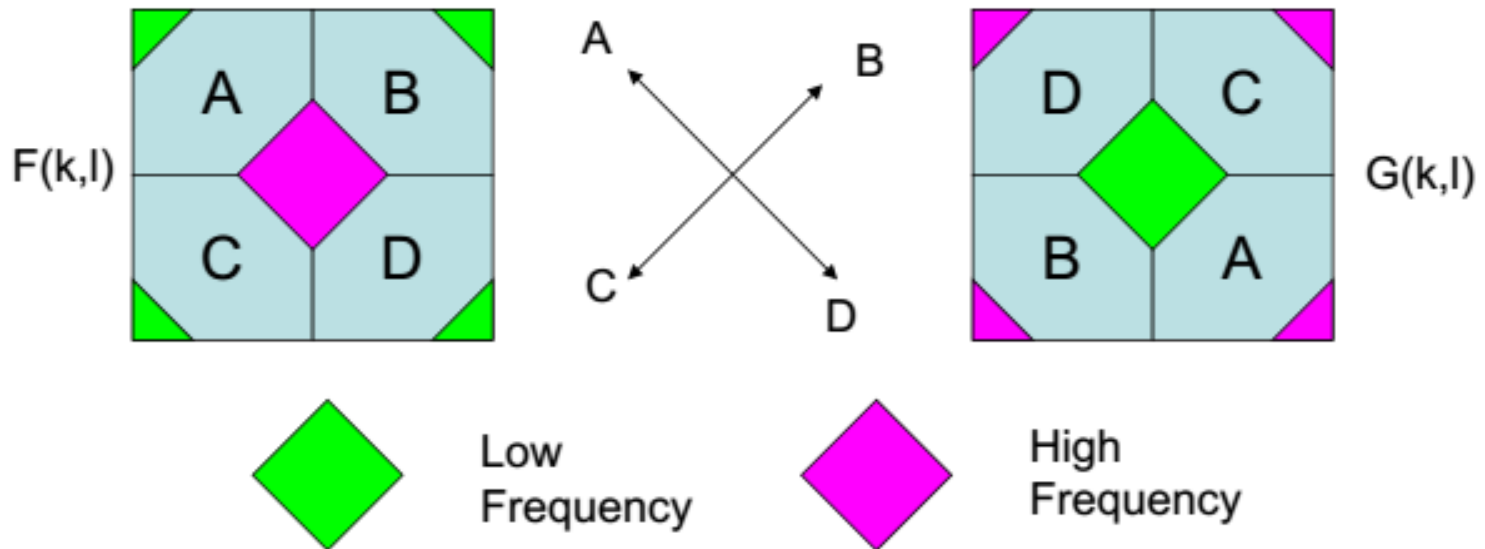
0	1	2	3	4	4	3	2	1
5	6	7	8	9	40	39	38	37
10	11	12	13	14	36	35	34	33
15	16	17	18	19	32	31	30	29
20	21	22	23	24	28	27	26	25
20	25	26	27	28	24	23	22	21
15	29	30	31	32	19	18	17	16
10	33	34	35	36	14	13	12	11
5	37	38	39	40	9	8	7	6

M=N=9

2D DFT spektrum

- Általában a DC komponenst „csavarjuk” középre:

– Ampl. moduláció: $g[m,n] = f[m,n] \cdot (-1)^{(m+n)}$

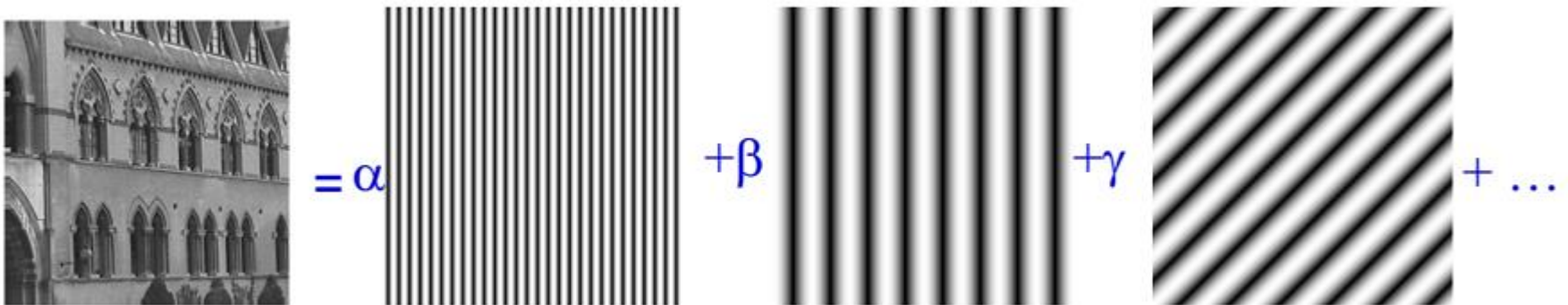


2D DFT Számolási tulajdonságok

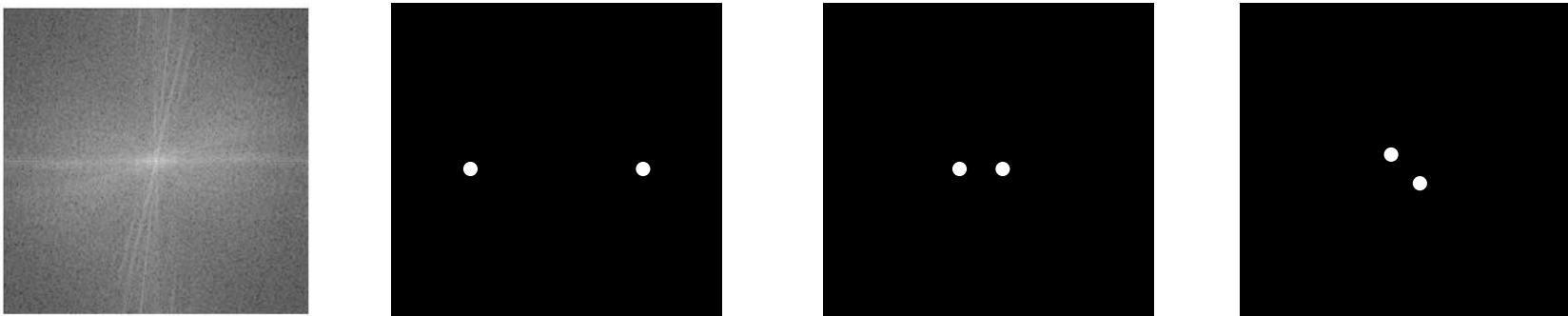
- 1D DFT komplexitása:
 - Direkt módszer: $O(N^2)$
 - FFT: $O(N \times \log(N))$, hatékonyan számítható, ha N 2 hatvány (radix-2 Cooley-Tukey)
- 2D DFT komplexitása ($N \times N$ -es képre):
 - Direkt számítás: $O(N^4)$
 - Szeparálással: $O(N^3)$
 - Szeparálás + FFT: $O(N^2 \times \log(N))$
- Half Complex ábrázolással helyben tárolható!

2D DFT Vizuális értelmezés

- Lényegében egy bázis transzformáció ortogonális bázisokra (szinuszos hullámok)

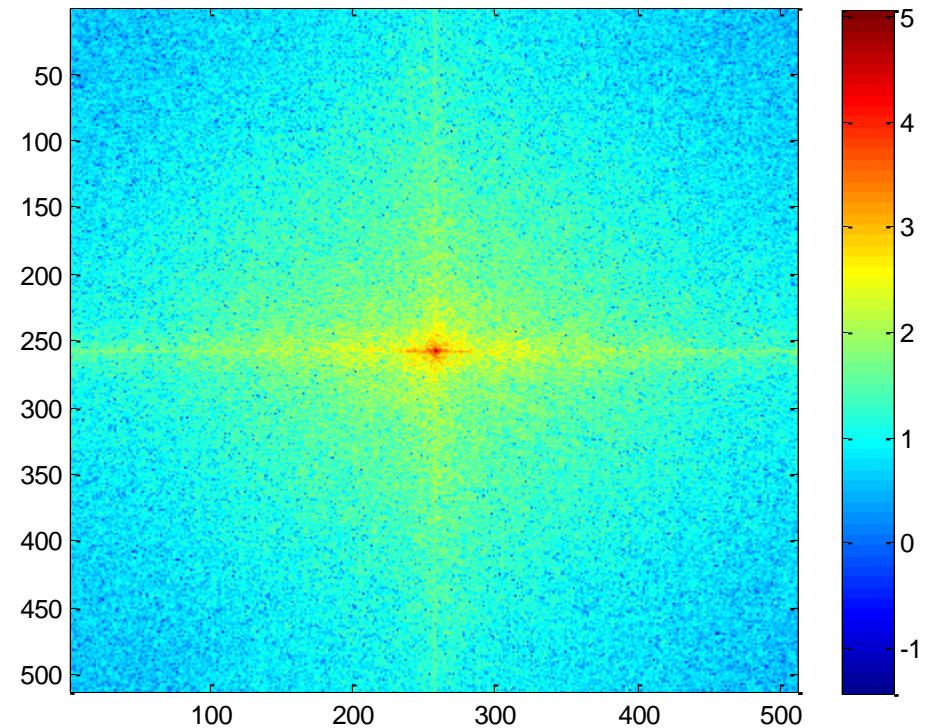


Spektrum amplitudója:



Képek spektrumának jellemzői

- Alacsony frekvenciákon nagy energia:



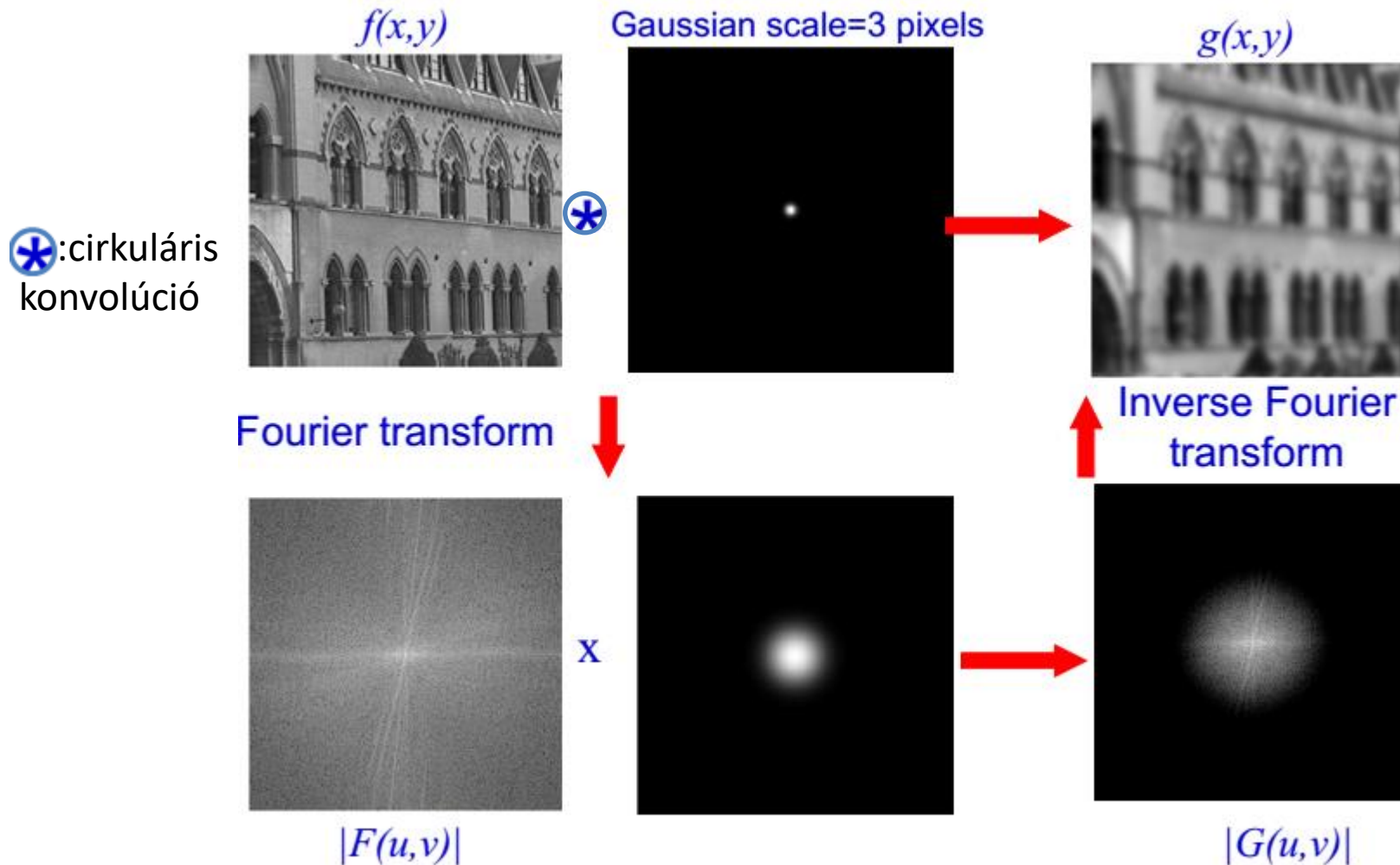
Spektrum amplitúdója logaritmus skálán

2D DFT konvolúciós tétele:

- DFS- es analógia – cirkularitás:
 - $(f \otimes g)[n] = \sum_{m=0}^N f[m] \cdot g[\text{mod}_N(n-m)] = (f' * g')[n]$
 - $f'[n] = f[\text{mod}_N(n)]$, míg $g'[m] = g[\text{mod}_N(m)]$
- Mit tegyünk, ha $f * g$ -t akarjuk DFT-vel számolni?
 - Terjesszük ki f és g méretét $[N+M]$ hosszúra:
 - Ezt időtartomány / síktartományban is meg kell tenni
 - Általános módszerek: 0-val paddelés, kép széleire tükrözés, alul-áteresztő szűréseknél súlyozás, kiterjesztés a kép szélső pixelének intenzitásával, stb.
 - 5×5-ös kernel esetén már gyorsabb

Konvolúció tétel fontossága

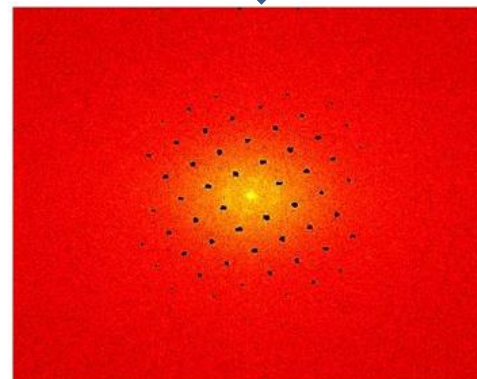
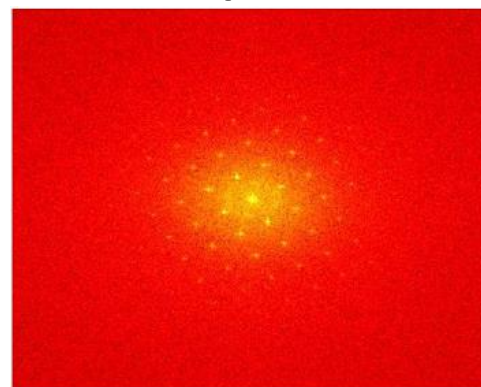
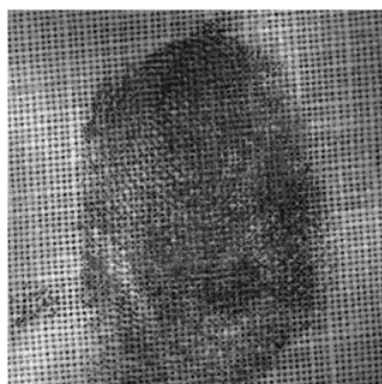
- Lineáris szűrések frekvenciatérben:



2D DFT Példa – periodikus textúra

ampl. moduláció

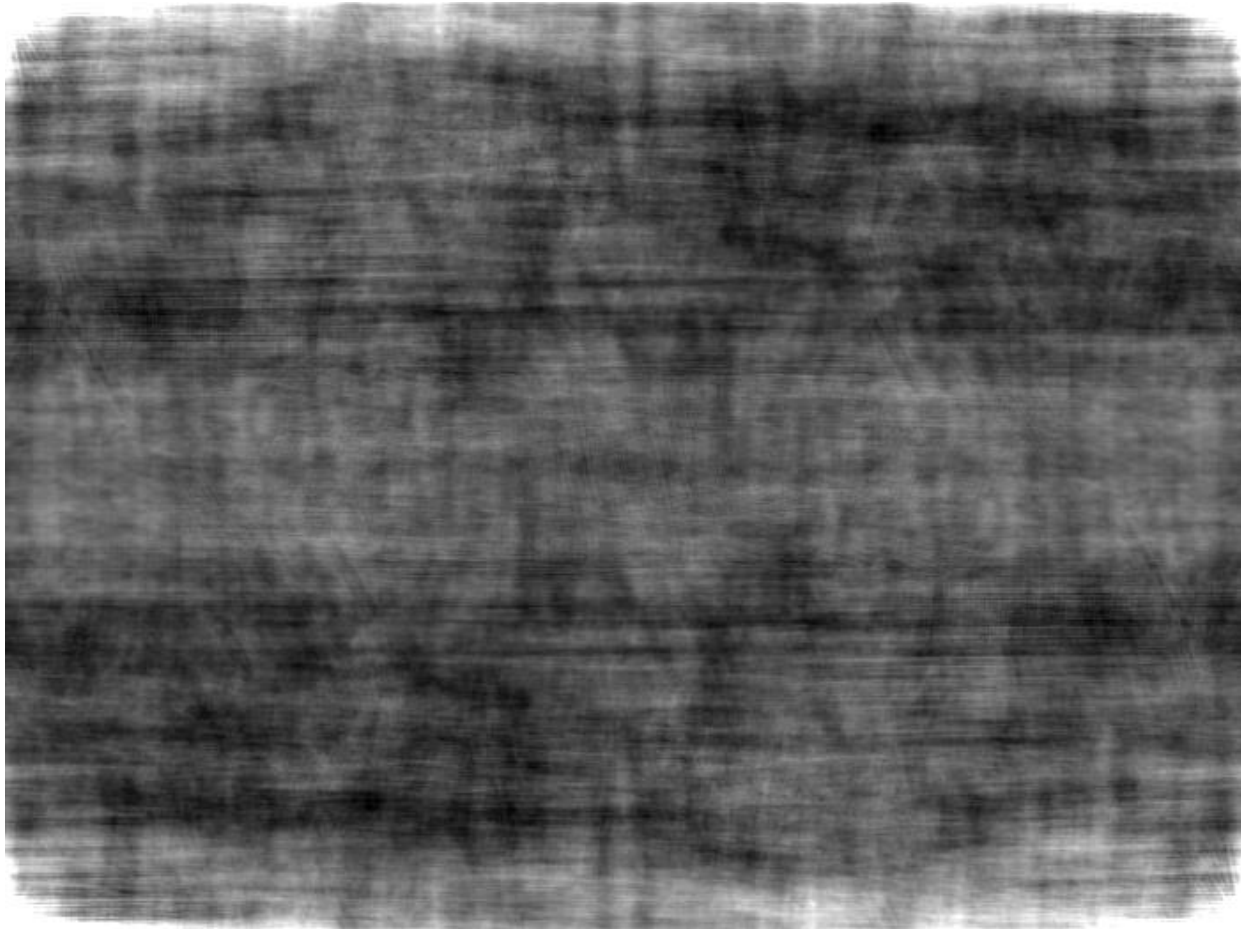
- Periodikus mintázat \Leftrightarrow csúcsok a spektrumban:



2D DFT példa – rekonstrukció spektrum amplitúdóból és fázisból



2D DFT példa – spektrum amplitúdójából rekonstruált kép



2D DFT példa – spektrum fázisából rekonstruált kép

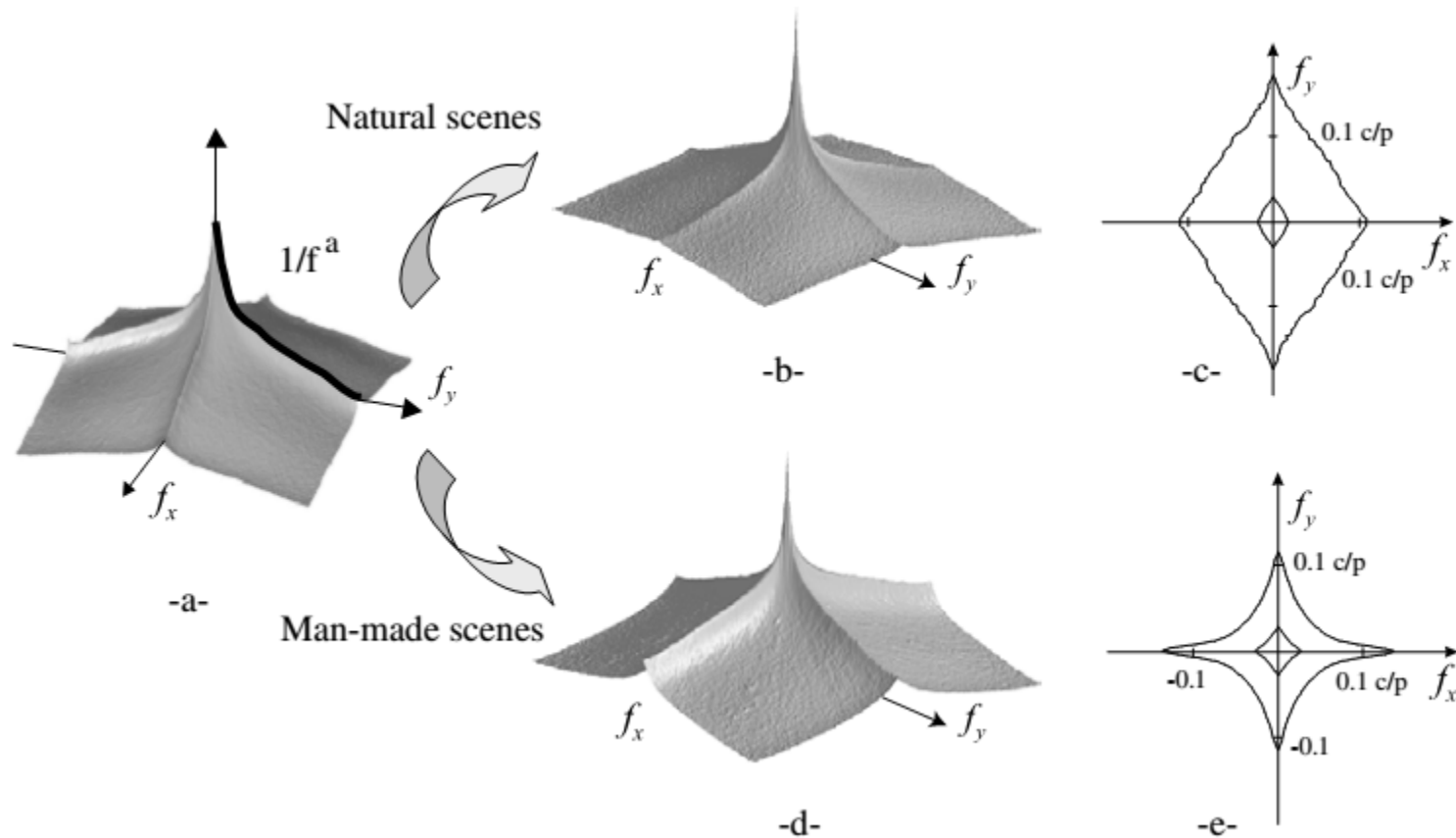


Polár koordinátás DFT

- Motiváció:
 - Radon transzformáció és annak invertálása
 - Regisztráció: elforgatás és eltolás könnyen számolhatóvá válik
- Számítása – folytonos eset:
 - $F\{\theta, \rho\} = \iint_{x,y} f(x, y) \cdot \exp(-2\pi j \cdot \rho \cdot (x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta))) dydx$
 - Nem szeparábilis
 - Fourier vetítősík tétel
 - Spektrum vonal profiljai \Leftrightarrow Radon transzformáció 1D Fourier transzformáltjai

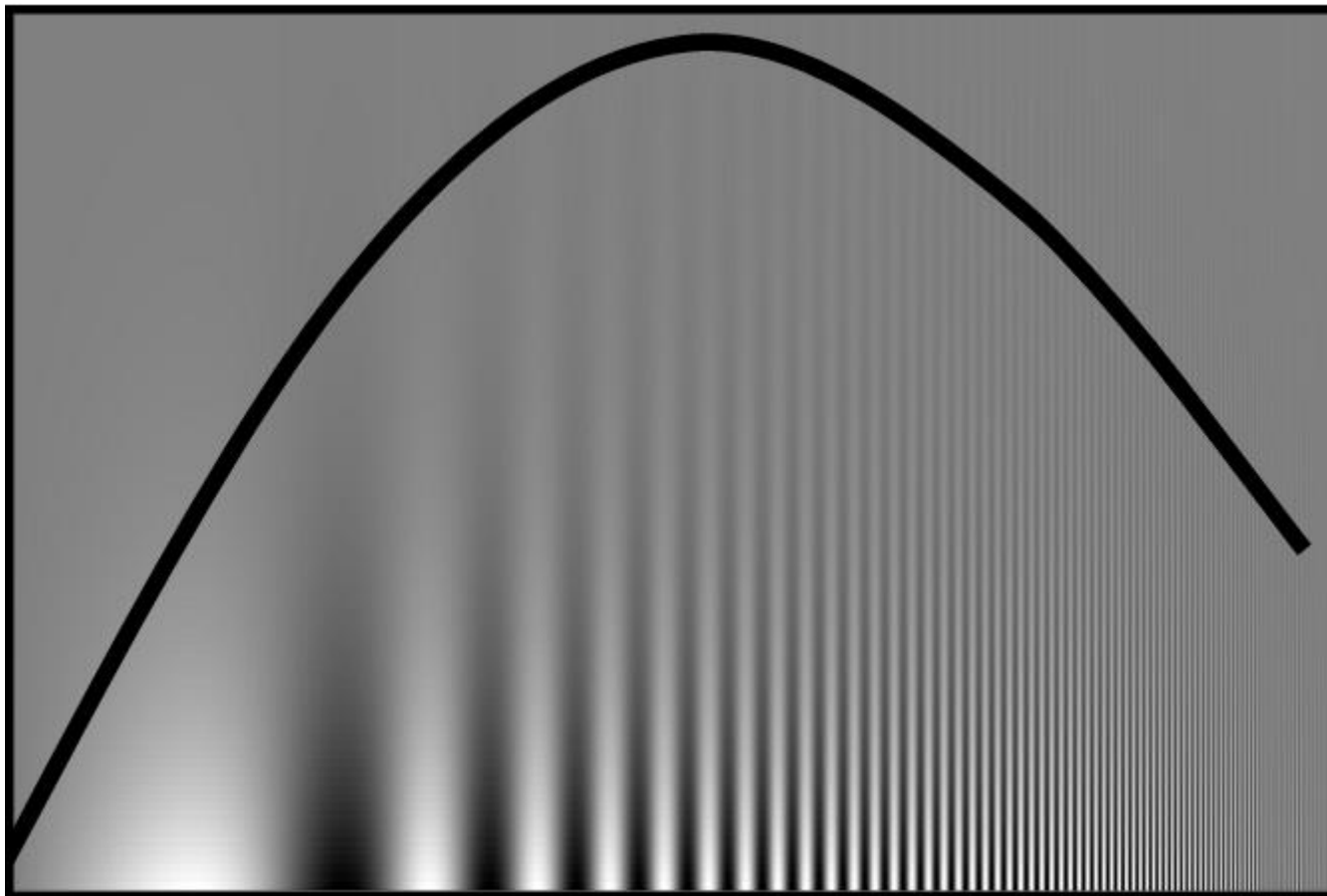
Majd a rekonstrukciónál
bizonyítjuk is!

Digitális képek átlagos energiaspektruma



Frekvenciatartomány és emberi látás

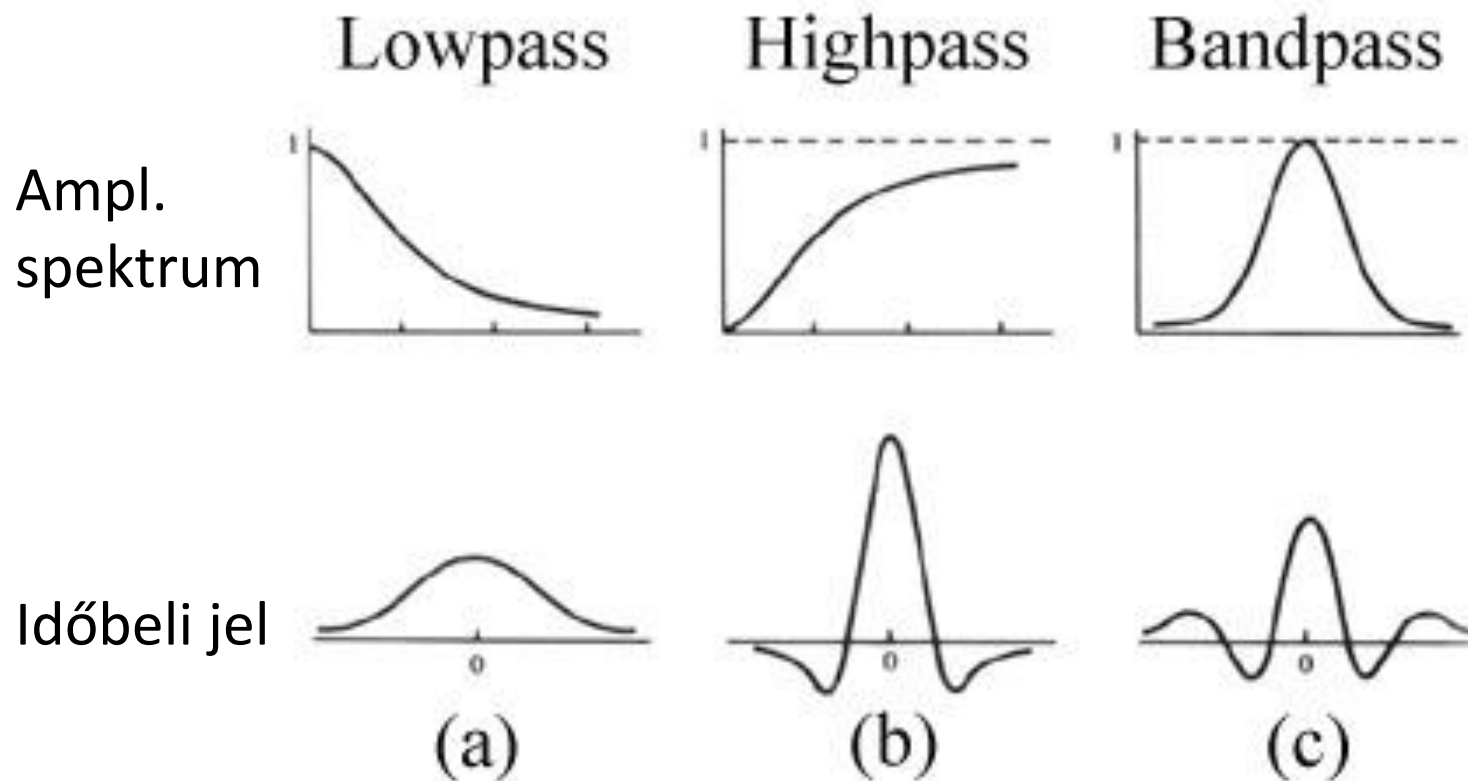
- Campbell-Robson kontraszt érzékenységi görbe:



8. Előadás tartalma

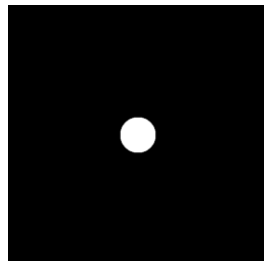
- Lineáris szűrők:
 - Klasszikus szűrők súly és átviteli függvénye
 - Gibbs jelenség
- Inverz probléma – dekonvolúció:
 - Inverz probléma formális felírása
 - Dekonvolúció nehézsége
 - Közismert algoritmusok: Wiener inverz szűrés, RLA/ ML-EM, MAP becslés, és ezek kapcsolataik

Szűrők idő és frekvencia tartományban



Ideális szűrők

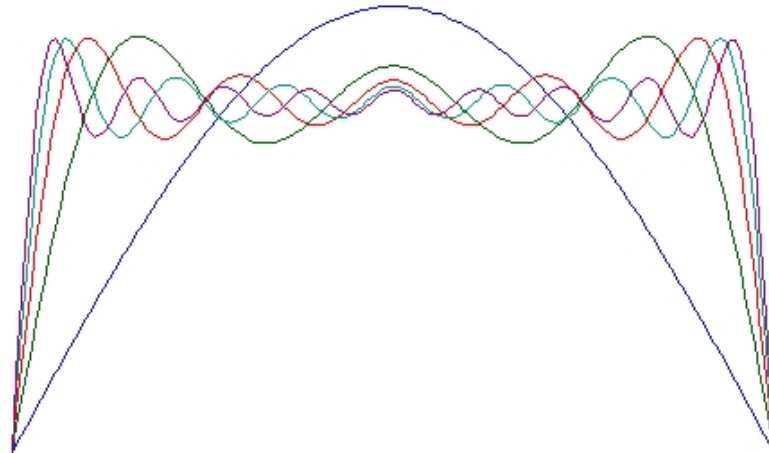
- Amplitúdó éles vágásánál Gibbs jelenség:



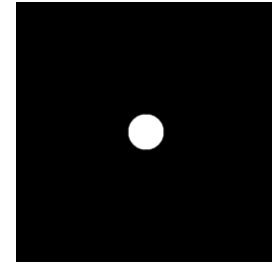
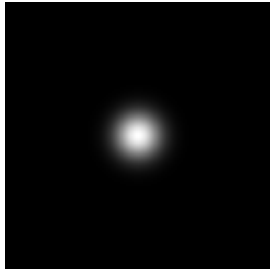
Gibbs gyűrű effektus

- Gibbs jelenség elkerülhető „sima” átmenetű szűrőkkel:
 - Butterworth szűrő: adott sávkorlát mellett a legsimább ampl. spektrumú lineáris szűrő
 - Gauss szűrő: alkalmazásával nincs Gibbs artefekt

Reconstruction of the periodic square waveform with 1, 3, 5, 7, 9 sinusoids



Gibbs gyűrű effektus



Inverz probléma

- Megfigyelési modell (zajos LTI): $g = h * f + \eta$
 - h -t (avagy a PSF-t) mi befolyásolhatja?
 - Páciens bemozdulása a felvételek készítése alatt
 - Out-of-focus elrendezés
 - Szóródó fotonok képek rögzítése során
 - Jelen előadás során $f, g \in R_+^2$ és $\eta \in R^2$:
 - f a vizsgált 3D objektum projekciója
- Alapötlet – direkt módszer:
 - Dekonvolúció frekvenciatérben: $F_{(u)} = (G / H)_{(u)}$

Inverz probléma statisztikai interpretációja

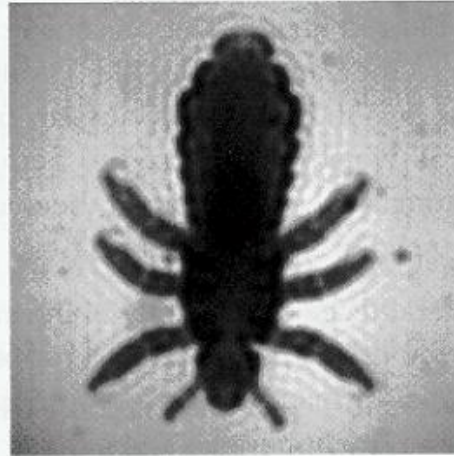
- Cél megbecsülni $P\{f\}$ -et:
 - Maximum likelihood módszer:
 - $f_{ML}^* = \arg \max_f \{P\{g|f\}\}$
 - Gyakorlatban majdnem mindig $P\{g|f\} = P_\eta\{g - h * f\}$ és az $f_{ML}^* = \arg \min_f \{-\log\{P\{g|f\}\}\}$ -t szoktuk keresni
 - Maximum a posterior (MAP) becslés:
 - $f_{ML}^* = \arg \max_f \{P\{f|g\}\} = \arg \max_f \{P\{g|f\} \cdot P\{f\}\}$
 - Gyakorlatban ezeket a szélsőérték keresési problémákat is negatív logaritmálás után oldjuk meg.

Direkt dekonvolúció zajérzékenysége

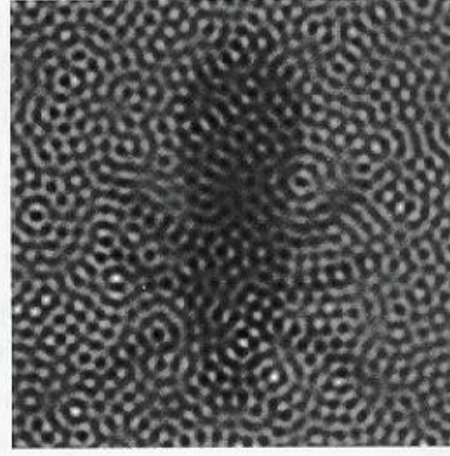
- Problémák a direkt módszerrel:
 - PSF-et nem ismerjük pontosan $\tilde{H} \neq H$
 - $\tilde{F} = G / \tilde{H} = F \circ (H / \tilde{H}) + N / \tilde{H} \neq F$
 - a PSF általában alul-áteresztő jellegű
 - magas frekvenciákon $N. / \tilde{H}$ dominál (~ 0 -val osztás)



a



b



c

a: elmosott kép

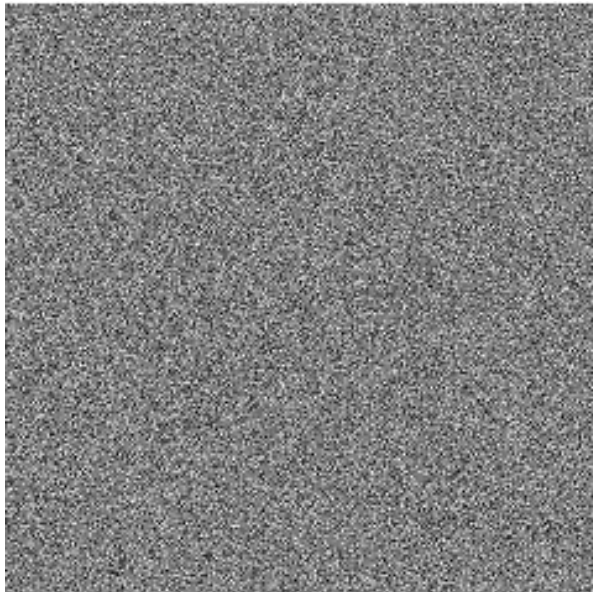
b: direkt dekonvolúció eredménye, ha nincs additív zaj

c: eredmény ha van additív zaj

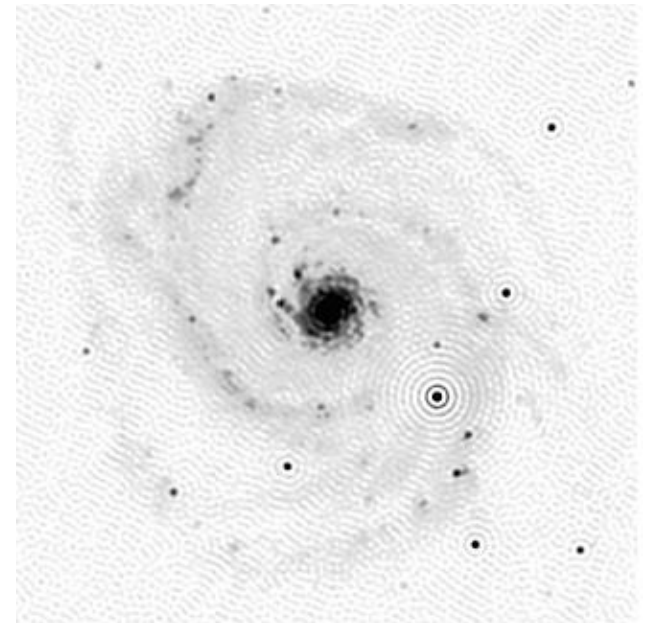
Csonkolt dekonvolúció

- Azon frekvenciákon, melyeken az MTF alacsony 0 legyen az eredmény

$$- \tilde{F}_{(u)} = \begin{cases} G_{(u)} / H_{(u)} & |H_{(u)}| > \varepsilon \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$



Direkt dekonvolúció eredménye



Csonkolt dekonvolúció eredménye

Wiener inverz-szűrés

- Várható értékben legpontosabb szűrő:

- $F_{(u)}^{Wiener} = H_{(u)}^{Wiener} \cdot G_{(u)}$

- $f^{Wiener} = \arg \min \left\{ \mathbf{E} \left\{ \left\| f^{Wiener} - f^{valódi} \right\|_2^2 \right\} \right\}$

- A matematikai levezetést hanyagolva:

$$H_{(u)}^{Winer} = \frac{H_{(u)}^*}{\left| H_{(u)} \right|^2 + \mathbf{E} \left\{ \left| N_{(u)} \right|^2 \right\} / \mathbf{E} \left\{ \left| F_{(u)} \right|^2 \right\}}$$

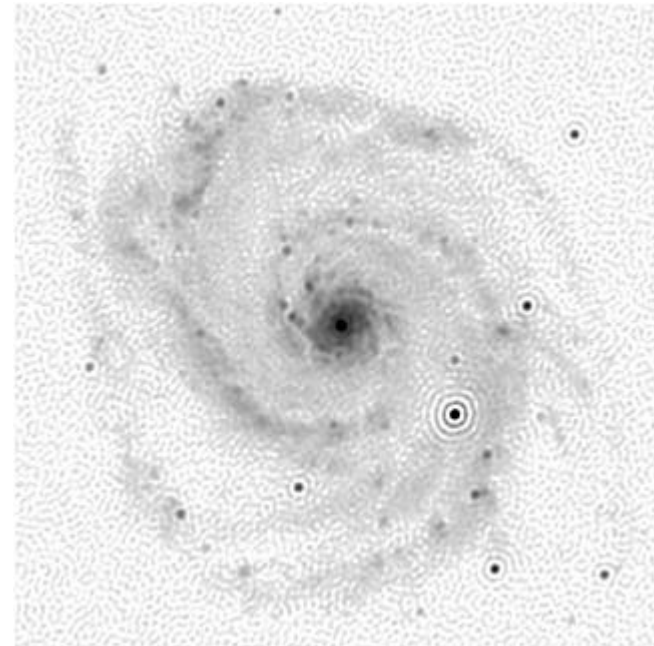
- Interpretáció:

$$H_{(u)}^{Winer} \approx \begin{cases} 1 / H_{(u)} & |SNR_{(u)} \gg 1 \\ 0 & |SNR_{(u)} \ll 1 \end{cases} \quad SNR_{(u)} = \sqrt{\frac{\left| H_{(u)} \right|^2 \mathbf{E} \left\{ \left| F_{(u)} \right|^2 \right\}}{\mathbf{E} \left\{ \left| N_{(u)} \right|^2 \right\}}}$$

Wiener inverz szűrés

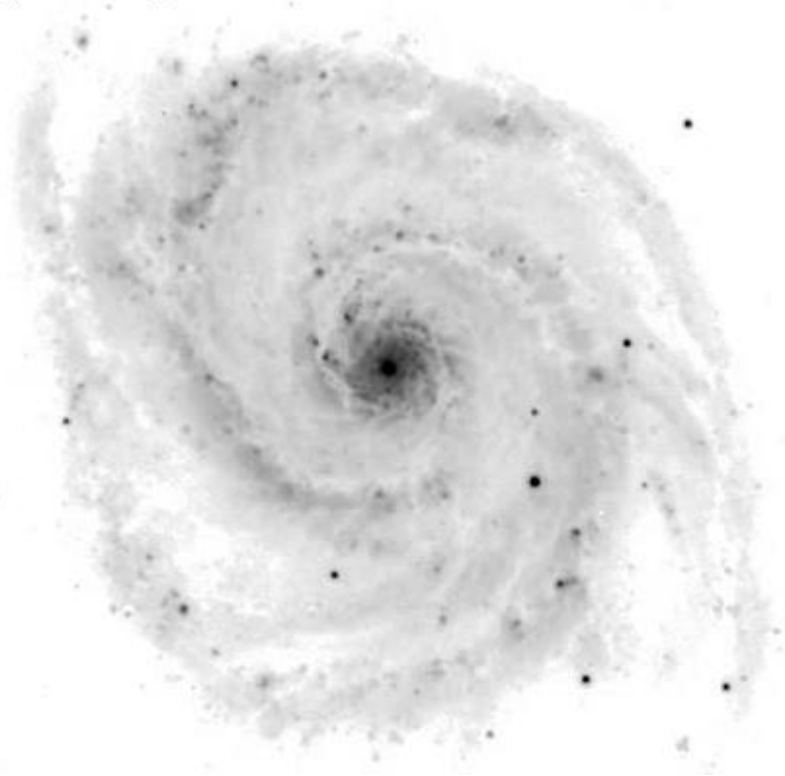
- Az eredmény (f^{Wiener}) gyakran nem realiztikus:
 - Negatív intenzitások is előfordulnak (negatív fluxus?)
 - Nagyfrekvencián a hirtelen romló SNR Gibbs artefektet generál
- SNR gyakran nem mérhető ki

Wiener szűrés eredménye: jobb részletgazdagság, de a gyűrűk egy része megmaradt

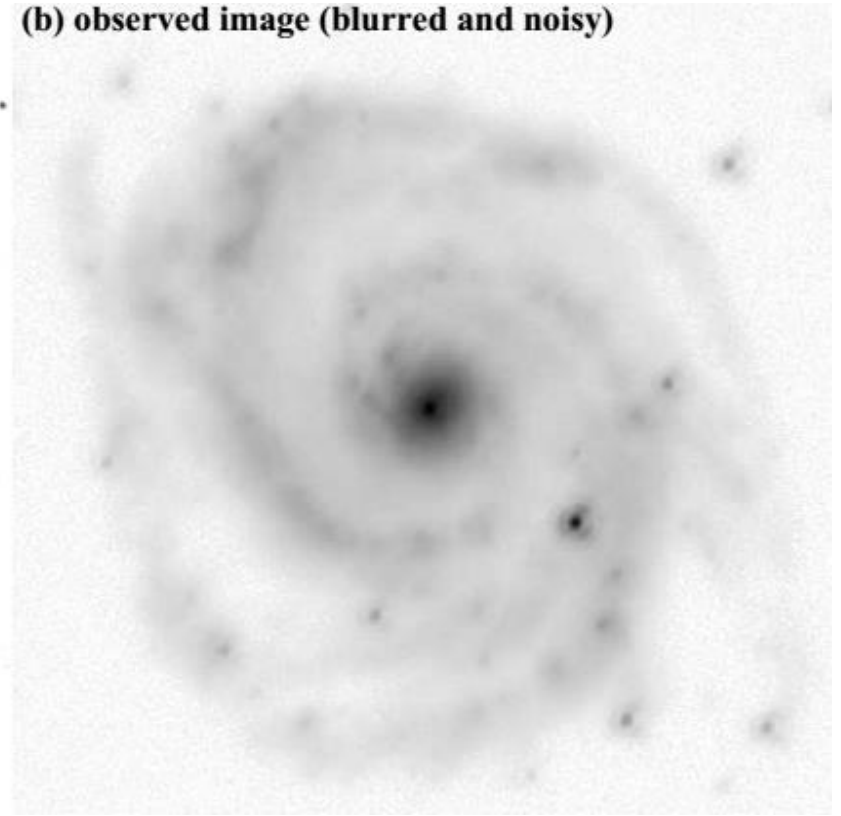


Eljárások illusztrálása -0-

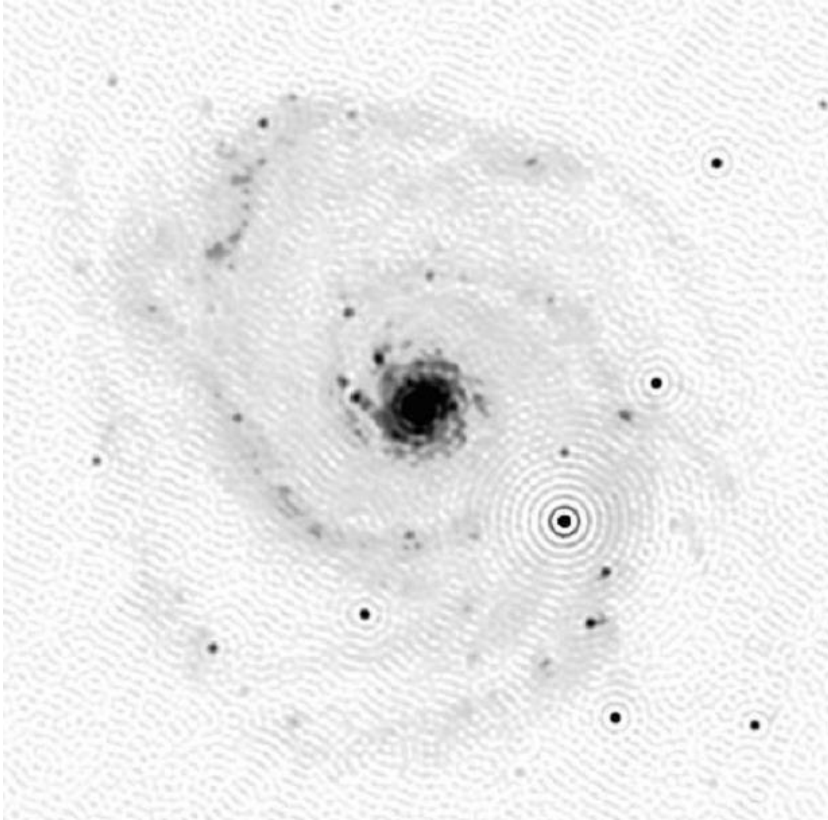
(a) true brightness distribution



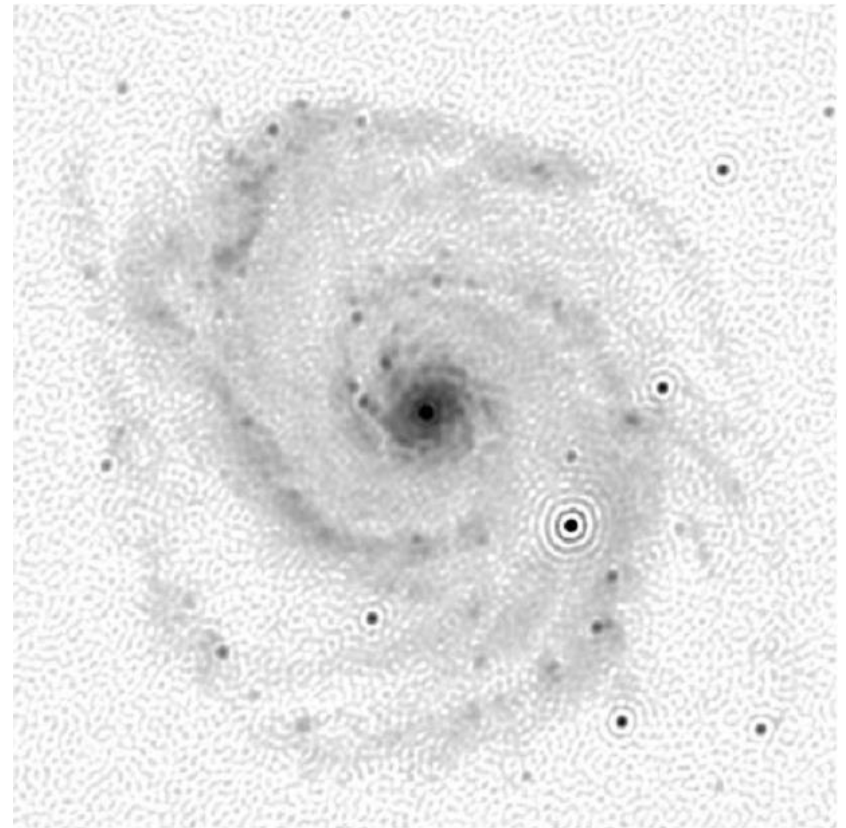
(b) observed image (blurred and noisy)



Eljárások illusztrálása -1-



Csonkolt dekonvolúció



Wiener inverz szűrés

Kényszermentes ML becslés

- Additív Gauss zaj esete ($\eta \in \mathcal{N}(0, W^{-1})$):
 - $f_{ML}^* = \arg \max_f \left\{ K \cdot \exp \left(- (g - H' \cdot f)^T \cdot W / 2 \cdot (g - H' \cdot f) \right) \right\}$
 - H' a rendszer torzításának mátrixa, tehát: $h * f = H' \cdot f$
 - Minimalizáljuk a negatív log likelihood függvényt:
 - $L(f) = (g - H' \cdot f)^T \cdot W / 2 \cdot (g - H' \cdot f)$
 - Mivel $H'^T \cdot W \cdot H$ pozitív szemidefinit, ezért $L(\cdot)$ konvex.
 - Tehát $\nabla L(f_{ML}^*) = 0$ kényszer definiálja az optimum helyet
 - $f_{ML}^* = (H'^T \cdot W \cdot H')^{-1} \cdot H'^T \cdot W \cdot g$ ún. súlyozott LS becslés

Kényszermentes ML becslés példa

- Stacionárius, 0 várható értékű Gauss megfigyelési zaj esete :

- $Cov(g) = \sigma^2 \cdot I$, tehát $W = \sigma^{-2} \cdot I$

- $f_{ML}^* = (H'^T \cdot W \cdot H')^{-1} \cdot H'^T \cdot W \cdot g = (H'^T \cdot H')^{-1} \cdot H'^T \cdot g$

- Vizsgáljuk meg f_{ML}^* spektrumát:

- $F_{ML(u)}^* = \frac{H_{(u)}^* \cdot G_{(u)}}{H_{(u)}^* \cdot H_{(u)}} = \frac{H_{(u)}^* \cdot G_{(u)}}{|H_{(u)}|^2} = \frac{G_{(u)}}{H_{(u)}} = (G/H)_{(u)}$

- **Konzekvencia: ML eljárással nem lehet a rosszul kondicionált inverz problémát megoldani.**

ML becslés pozitívítási kényszerrel

- Nem negativitási kényszer: $f \in R_+$
- Jó esetben konvex optimalizálási probléma:

$$\begin{array}{ccc} \max. & P\{g|f\} & \xrightarrow{-\log} & \min. & L_g(f) \\ \text{s.t.} & f \geq 0 & & \text{s.t.} & f \geq 0 \end{array}$$

- Konvex a probléma, ha $\Pr\{g|f\}$ log-konkáv.
- Nem adható rá analitikus megoldás
- Milyen eloszlású lehet valójában az additív zaj:
 - Poisson: fotonok inherens zaja
 - Gauss: termikus zaj
 - Uniform: kvantálási zaj (A/D átalakítás)

Richardson Lucy algoritmus (+)

- Interpretáljuk a képpontok intenzitását fotonok becsapódási valószínűségeivel:
 - $P\{f_{(i)}\}$: P(„egy fotonon a detektor i-edik érzékelőelemébe csapódik, ha nincs zaj és torzítás”)
 - $P\{g_{(k)}\}$: P(„egy fotonon a detektor k-adik érzékelőelemébe csapódott a megfigyelt kép rögzítése során”)
 - $P\{g_{(k)} \mid f_{(i)}\}$: P(„ideális esetben az i-edik érzékelőelembe csapódó foton a k-adik érzékelőelembe csapódik bele – a képképző LTI rendszer torzítása miatt”)

Richardson Lucy algoritmus

- Lényegében egy Bayes-i becslés:

– Bayes szabály:
$$P\{f_{(i)} | g_{(k)}\} = \frac{P\{g_{(k)} | f_{(i)}\} \cdot P\{f_{(i)}\}}{\sum_j P\{g_{(k)} | f_{(j)}\} \cdot P\{f_{(j)}\}}$$

– Dekomponálás:
$$P\{f_{(i)}\} = \sum_k P\{f_{(i)} | g_{(k)}\} \cdot P\{g_{(k)}\}$$

– Tehát:
$$P\{f_{(i)}\} = \sum_k \frac{P\{g_{(k)} | f_{(i)}\} \cdot P\{f_{(i)}\} \cdot P\{g_{(k)}\}}{\sum_j P\{g_{(k)} | f_{(j)}\} \cdot P\{f_{(j)}\}}$$

Richardson Lucy algoritmus

– Bevett gyakorlat: iteráljunk a célváltozó felett:

$$P_{(r+1)} \{f_{(i)}\} = \sum_k \frac{P \{g_{(k)} | f_{(i)}\} \cdot P \{g_{(k)}\}}{\sum_j P \{g_{(k)} | f_{(j)}\} \cdot P_{(r)} \{f_{(j)}\}} \cdot P_{(r)} \{f_{(i)}\}$$

– Oldjuk fel a valószínűségi értelmezést:

- $P \{f_{(i)}\} = f_{(i)} / (f^T \cdot 1)$; $P \{g_{(i)}\} = g_{(i)} / (g^T \cdot 1)$
- $P \{g_{(k)} | f_{(i)}\} = h_{(i-k)}$
- T.f.h $h^T \cdot 1 = 1$; $h \geq 0$ ezekből következik: $g^T \cdot 1 \leftrightarrow f^T \cdot 1$

Richardson Lucy algoritmus (+)

- $P\{f_{(i)}\} = f_{(i)} / (f^T \cdot 1)$: dekonvolvált kép i -edik pixelének normált intenzitása
- $P\{g_{(i)}\} = g_{(i)} / (g^T \cdot 1)$: képalkotó rendszer (LTI + zaj) által torzított kép i -edik pixelének relatív intenzitása
- $P\{g_{(k)} | f_{(i)}\} = h_{(i-k)}$: csak az LTI rendszerrel leírható torzítást modellezzük
- $h^T \cdot 1 = 1$: minden olyan foton, mely a torzítatlan rendszer esetén a detektorba csapódna be a torzított rendszer esetén is a detektorba csapódik be (maximum más érzékelőelembe)
- Végig monokróm spektrumú fotonokat feltételezve a detektált intenzitás (fluxus) egyenesen arányos a becsapódó fotonok számával

Richardson Lucy algoritmus

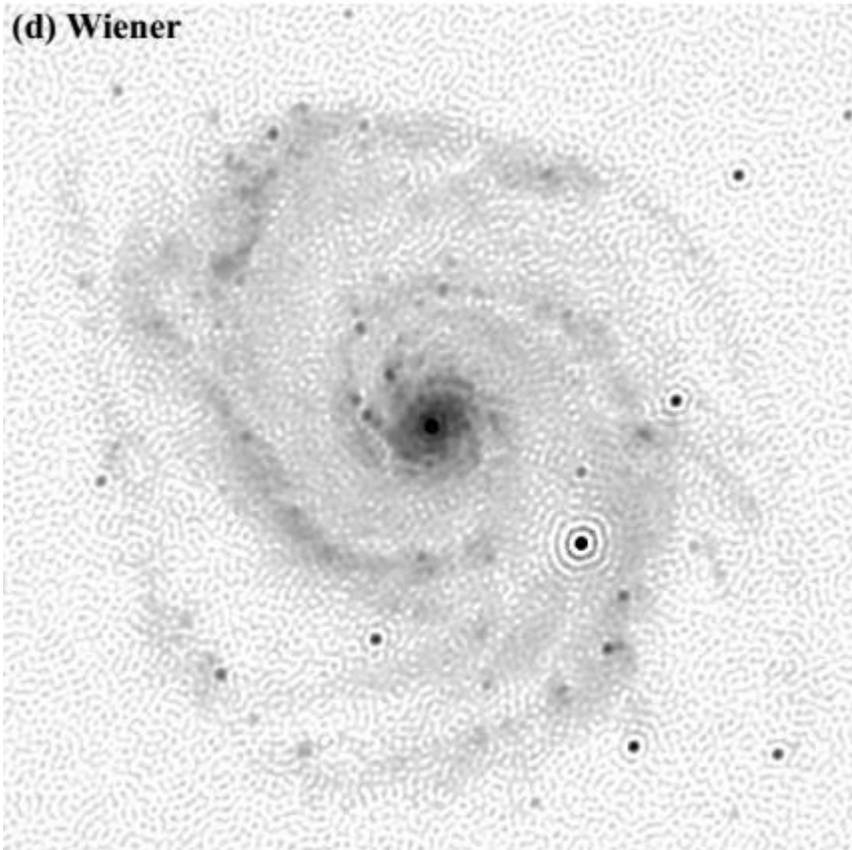
- Végezzük el a behelyettesítést:

$$- f_{(i)}^{(r+1)} = \sum_k \frac{h_{(i-k)} \cdot g_{(k)}}{\sum_j h_{(j-k)} \cdot f_{(j)}^{(r)}} \cdot f_{(i)}^{(r)} = \sum_k \frac{h_{(i-k)} \cdot g_{(k)}}{\left(h * f^{(r)}\right)_{(k)}} \cdot f_{(i)}^{(r)}$$

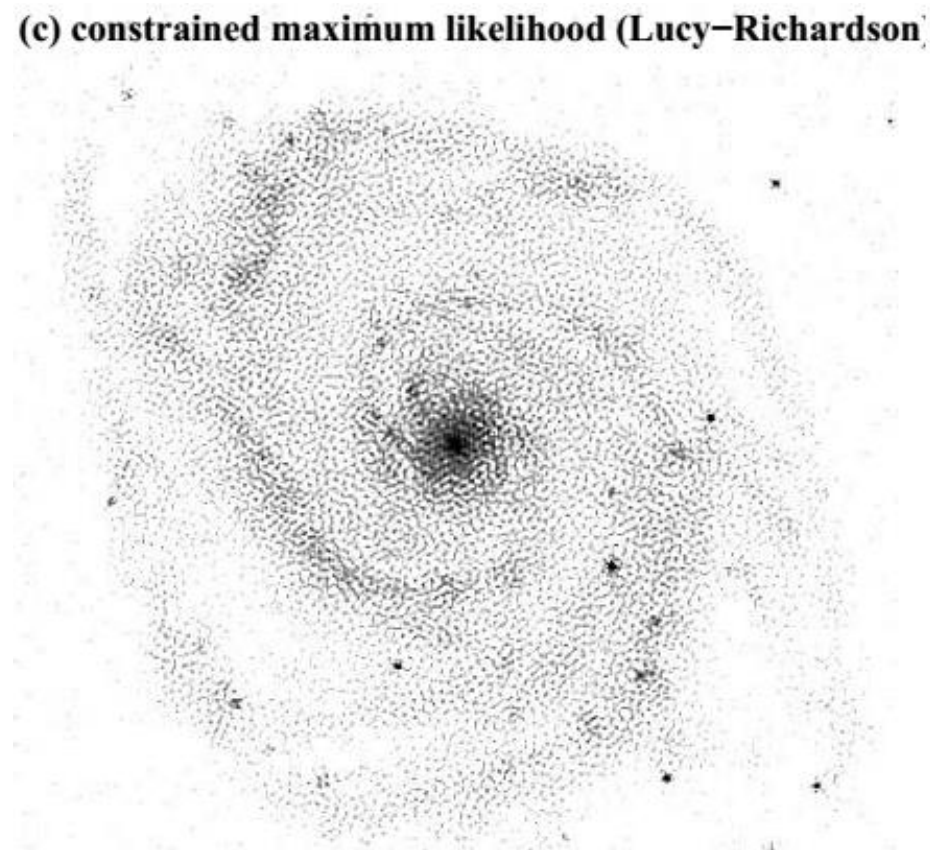
- Érdeemes észrevenni, hogy ha $f^{(0)} \geq 0$, akkor minden iterációban $f^{(r)} \geq 0$, tehát teljesül a nem-negativitási kényszer
- Eljárás konvergenciája bizonyítható.
- Ekvivalens a pozitívitási kényszeres ML becsléssel, Poisson zaj modell esetén.

Eljárások illusztrálása -2-

(d) Wiener



(c) constrained maximum likelihood (Lucy-Richardson)



ML becslések összegzése

- Jelentősen felerősítik a zajt:
 - A probléma rosszul kondicionált jellegét nem képesek megfelelően kezelni.
 - Kivétel az iteratív algoritmusok köre, ha $f^{(0)}$ elegendően sima, és konvergencia előtt leállunk!
- Explicit regularizáció szükséges:
 - Definiáljuk $f^{(0)}$ a-priori eloszlását, és azt rögzítsük a minimalizálandó célfüggvényünkben
 - Megj.: RLA-nál szerepelt prior, de annak más a szerepe, értelmezése...

MAP becslések

- Bayes becsléselmélet:

- max. $P\{f|g\} \propto (P\{g|f\} \cdot P\{f\})$

- Másképpen : min. $-\log(P\{f|g\}) = \Phi_{ML}(f) + \Phi_{prior}(f) + K$

- $\Phi_{ML}(f) = -\log(P\{g|f\})$: bünteti a mérések és a zaj nélkül becsült, torzított kép eltérését: $\|g - \tilde{g}\| = \|g - h * f\|$

- $\Phi_{prior}(f) = -\log(P\{f\})$: meghatározza, hogy milyen dekonvolvált képet preferálunk (pl. zajmentesség, pozitivitás, simaság, stb.).

- Analitikai értelmezés: regularizált becslés

MAP becslés példa – stacionárius Gauss zaj, frekvenciatérbeli prior

- Prior frekvenciatartományban: $\Phi_{prior}(F) = \mu \cdot \sum_u W_{(u)} \cdot |F_{(u)}|^2$
- Gauss, stacionárius zaj: $\Phi_{ML}(f) = \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum_j \left(g_{(j)} - (H' \cdot f)_{(j)} \right)^2$
 - Parseval tétel szerint: $\Phi_{ML}(F) = \frac{1}{2N \cdot \sigma^2} \sum_u |G_{(u)} - H_{(u)} \cdot F_{(u)}|^2$
- Összegezve: $\Phi(F) = \frac{1/2}{N \cdot \sigma^2} \sum_u |G_{(u)} - H_{(u)} \cdot F_{(u)}|^2 + \mu \cdot \sum_u W_{(u)} \cdot |F_{(u)}|^2$
 - Mivel $\Phi(\cdot)$ konvex, ezért $\nabla \Phi(F^{opt}) = 0$, tehát:

$$F_{(u)}^{opt} = \frac{H_{(u)}^* \cdot G_{(u)}}{|H_{(u)}|^2 + 2 \cdot \mu \cdot N \cdot \sigma^2 \cdot W_{(u)}}$$

MAP becslés példa – stacionárius Gauss zaj, simasági prior

– $W_{(u)} = \left(\mathbf{E} \left\{ |N_{(u)}|^2 \right\} / \mathbf{E} \left\{ |F_{(u)}|^2 \right\} \right) / (2\mu \cdot N \cdot \sigma^2)$ esetén:

$$\bullet F_{(u)}^{opt} = \frac{H_{(u)}^* \cdot G_{(u)}}{|H_{(u)}|^2 + \mathbf{E} \left\{ |N_{(u)}|^2 \right\} / \mathbf{E} \left\{ |F_{(u)}|^2 \right\}}$$

• Tehát a Wiener dekonvolúció is egy MAP becslés

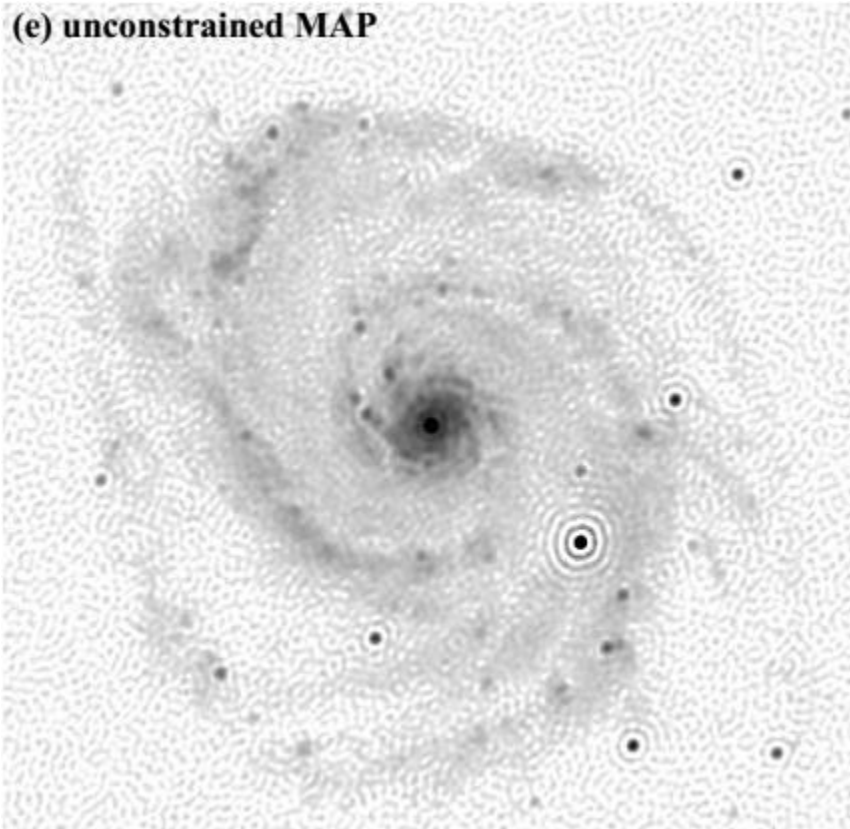
– $\mathbf{E} \left\{ |N_{(u)}|^2 \right\} / \mathbf{E} \left\{ |F_{(u)}|^2 \right\}$ gyakorlatban nem határozható meg

– Gyakran fehér zaj, és $W_{(u)} = 1 / \mathbf{E} \left\{ |F_{(u)}|^2 \right\} \propto u^\beta$

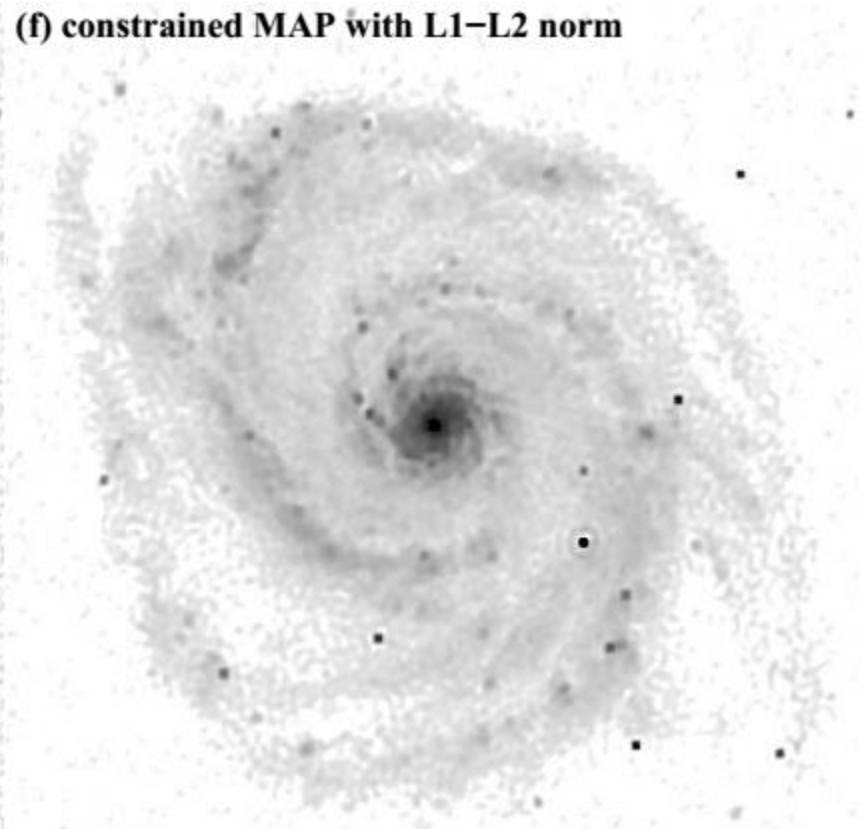
• μ értéke szabályozza, hogy mennyire domináljon a prior (magas frekvenciás komponensekért mennyire büntetünk).

Eljárások illusztrálása -3-

(e) unconstrained MAP



(f) constrained MAP with L1-L2 norm



Ismertetett módszerek csoportosítása

ML becslés:

- Csak a megfigyelési zaj osztályát ismerjük
- **Zajérzékenység** jelentős probléma, csak a konzisztenciára figyel

Példák:

- Direkt dekonvolúció (additív Gauss zajos ML becslés)
- Richardson – Lucy (additív Poisson zajos, pozitívítási kényszeres ML becslés)

MAP becslés:

- Explicit módon definiáljuk, hogy milyen jellegű képet akarunk
- Ha jól **regularizálunk**, akkor a zajérzékenység redukálódik, de az eredmény kevésbé konzisztens

Példák:

- Csonkolt dekonvolúció
- Wiener dekonvolúció (additív Gaussz zaj + frekvencia függő energia minimalizáció)
- Egyéb, regularizált dekonvolúciók

MAP és ML becslés összehasonlítása

- Stabilitás:
 - MAP-nál a regularizáció célja ennek kikényszerítése (pl. sima, kevésbé zajos, stb. dekonvolvált kép előállítás)
 - ML becslésnél ez legfeljebb impliciten kényszeríthető ki (pl. iteratív becsléseknél konvergencia előtti leállítás).
- Becslés inkonzisztenciája ($\|g - h * f\|$):
 - Likelihood tag minimalizálásával redukálható
 - ML becsléseknél ennek az értéke kisebb – ez viszont a zajos input képhez (g) a becsült torzítatlan kép **túlilleszkedést** vonja maga után (rosszabb képminőség)