

Rekonstrukciós eljárások

Orvosi képdiagnosztika

2017 ősz

Előadások témája

- Röntgen tomográfia fizikai és matematikai alapjai – 2D Radon transzformáció, szűrt visszavetítés:
 - Fan – beam / Cone – beam felvételi elrendezések esete
- Általánosított (3D) röntgen tomográfia alapjai – ART rekonstrukciós eljárások
- Pozitron emissziós tomográfia alapjai – ML-EM statisztikai rekonstrukciós eljárás
- Modell alapú / CS rekonstrukciós eljárások
- Tomoszintézis felvételi elrendezés – MITS rekonstrukció
- Rekonstrukciós eljárások minősítése

Röntgen tomográfia alapjai

- Általánosított Beer-Lambert törvény:


$$\mathbf{I}_{(x_0, y_0)} = \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} I_0(E) \cdot \exp \left\{ - \int_{P(x_0, y_0)} \mu(E, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \right\} dE :$$

- $I_0(E)$: röntgensövet elhagyó E energiájú fotonok intenzitása (üres térfogat esetén a detektor által érzékelt fotonok száma)
- $P(x, y)$: pontszerű sugárforrást a detektor (x, y) koordinátájú pontjával összekötő szakasza a *3d térnek*
- $\mu(E, \mathbf{x})$: a vizsgált térfogat \mathbf{x} koordinátájú pontjának lineáris csillapítási együtthatója E energián
- Egyszerűsített Beer-Lambert törvény: $I_0(E) \cdot \exp \left\{ - \int_{P(x_0, y_0)} \mu(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right\}$
(monokróm spektrum esete)

Röntgen tomográfia alapjai

- Monokróm spektrumú sugárzás esete:
 - Általánosan alkalmazott feltételezés
 - Rekonstrukció célja a lin. csillapítási együtthatók meghatározása az alábbi összefüggés invertálásával:

$$-\ln\left(\mathbf{I}_{(x,y)}/I_0\right) = \int_{P(x_0,y_0)} \mu(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

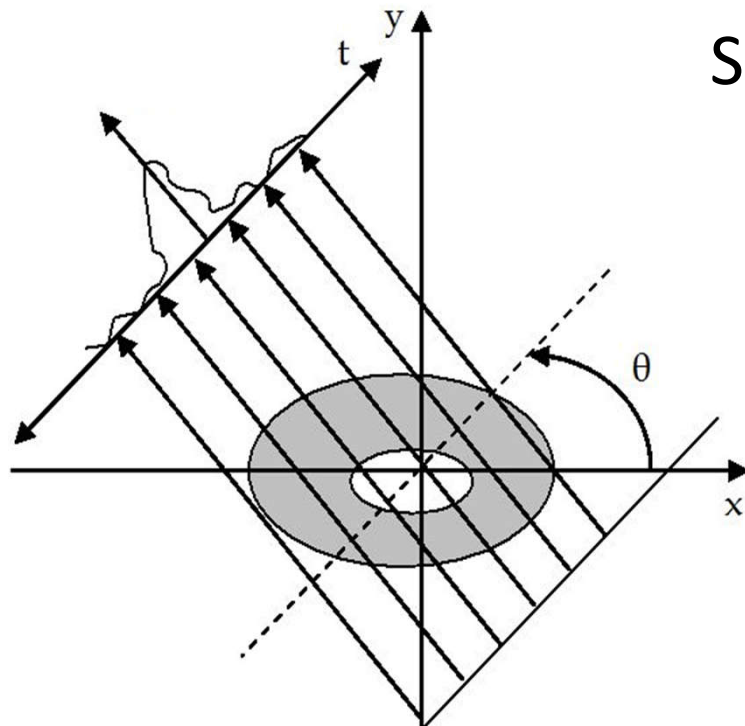
- Valódi röntgensugarak ezzel szemben:
 - Polikromatikusak  sugárkeményedés problémája
 - Szóródnak: nem igaz, hogy csak a vetítősugár mentén elhelyezkedő képletek számítanak.
 - Projekciók egyéb zajjal is terheltek : kis intenzitásnál rossz SNR

Röntgen alapú képalkotás

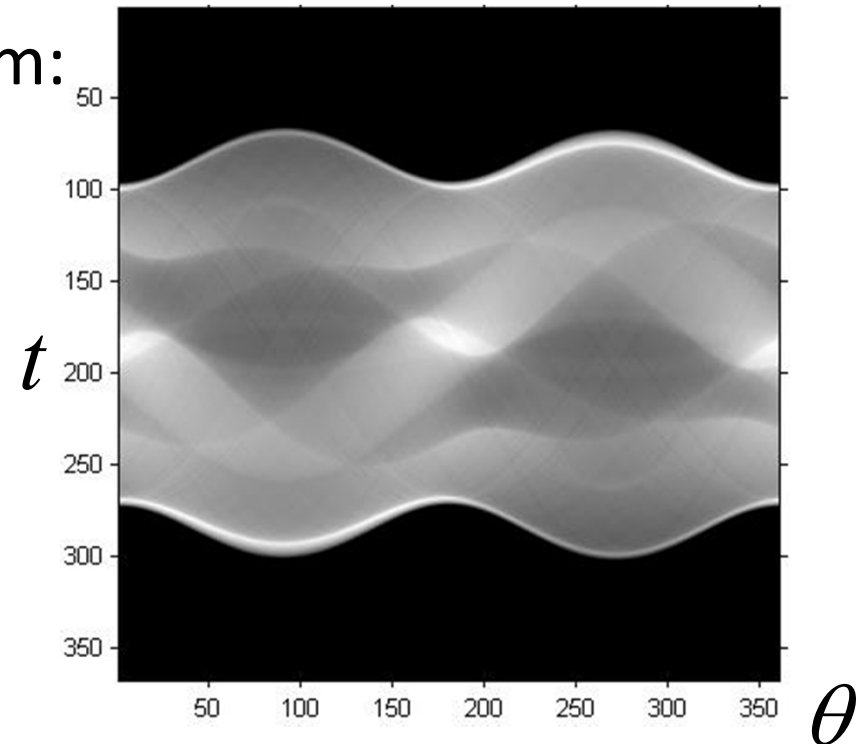
- Konvencionális P-A röntgen:
 - Nincs rekonstrukció
- Számítógépes tomográfia (CT):
 - Párhuzamos vetítősugarakon alapuló eljárások (kevés ilyen eszköz van csak forgalomban), cserébe egyszerű elmélet
 - Legyező (Fan-beam) helikális CT – leggyakoribb típus
 - Cone-beam CT, ennek speciális változata a Tomoszintézis
- Orvosi képdiagnosztika alapvető eszköze:
 - Mivel a röntgen sugárzás ionizál, illetve maga a vizsgálat itthon mércével drága, ezért csak indokolt esetben végzik

2D Radon transzformáció:

- Radon transzformáció (2D szelet 1D projekciók):
 - Input: 2D Descartes - koordinátarendszerbeli kép
 - Output: sinogram – 2D polár-koordinátarendszerbeli kép



Sinogram:



Radon transzformáció – Fourier vetítősík tétel

- Radon transzformáció (2D szelet 1D projekciók):

- Vetítősugarak merőlegesek az x tengellyel θ szöget bezáró egyenesre: $t = x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta)$

- Vetítősugarak mentén integráljuk a szelet elemeit:

$$P_{\theta}(t) = \iint_{x,y} f(x, y) \cdot \delta(x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta) - t) dx dy$$

- Legyen $S_{\theta}(\rho) = FT_{\rho}\{P_{\theta}(t)\} = \int P_{\theta}(t) \cdot \exp(-2\pi j \cdot t \rho) dt$

- Fourier vetítősík tétel származtatása:

$$S_{\theta}(\rho) = \iiint_{x,y,t} f(x, y) \cdot \delta(x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta) - t) \cdot \exp(-2\pi j \cdot \rho t) dt dy dx$$

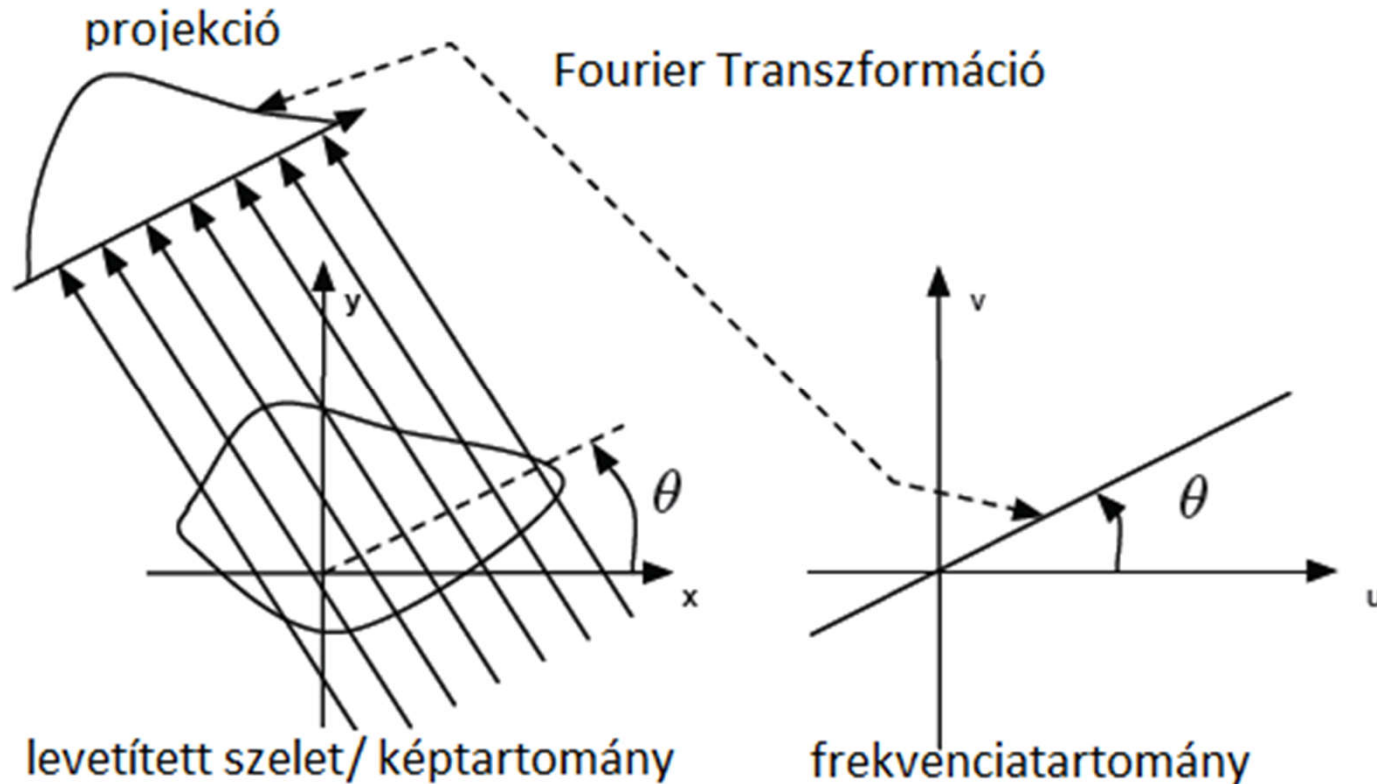
$$S_{\theta}(\rho) = \iint_{x,y} f(x, y) \cdot \exp(-2\pi j \cdot \rho \cdot (x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta))) dy dx$$

Fourier vetítősík tétel

– Lényegében f spektrumának egy szakaszát kaptuk meg:

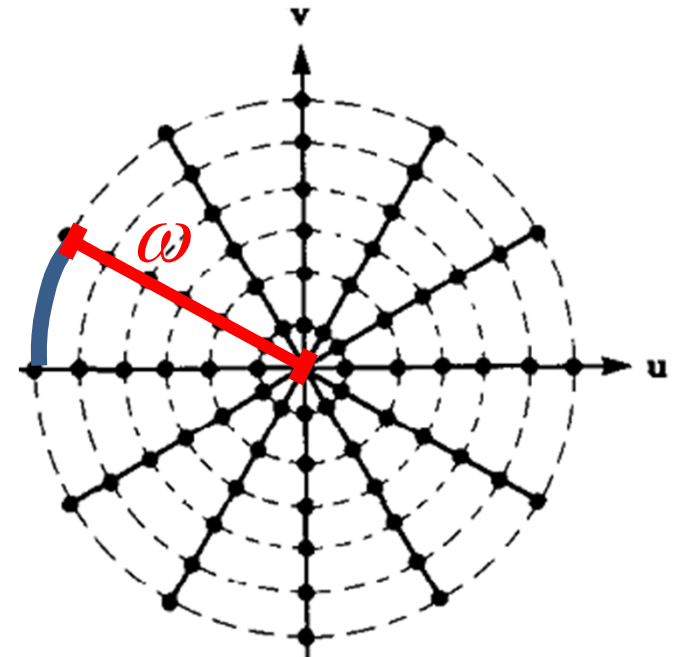
$$S_{\theta}(\rho) = F(\rho \cdot \cos(\theta), \rho \cdot \sin(\theta))$$

- Vizuális interpretáció:



Rekonstrukció – FBP alapötlete

- Rekonstrukció célja: Radon Transzf. invertálása
- Fourier vetítősík tétel értelmében a vizsgált szelet spektrumainak bizonyos részeit ismerjük:
 - Az ismert részeket „illesszük” egy üres spektrumba
 - Polár koordinátás frekvencia sugarának függvényében a spektrum mintavételi helyeinek eltérő a távolsága:
$$K(\omega) = 2 \cdot |\omega| \cdot \pi \cdot (2\pi / \Delta\theta)$$
 - Korrekció: spektrumba illesztés előtt $|\omega|$ -val súlyozzunk frekvenciatérben (ez az ún. rámpaszűrés).



Szűrt visszavetítés (FBP) származtatása

- FT inverze: $f(x, y) = \iint_{u,v} F(u, v) \cdot \exp(j2\pi(ux + vy)) dvdu$
- Fourier vetítősík miatt a spektrumot polárkoordináta-rendszerben ismerjük: $u = \omega \cdot \cos(\theta)$; $v = \omega \cdot \sin(\theta)$

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega, \theta) \cdot \exp(j2\pi \cdot \omega(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))) \cdot J d\omega d\theta$$

$$- J = \begin{vmatrix} \partial u / \partial \omega & \partial u / \partial \theta \\ \partial v / \partial \omega & \partial v / \partial \theta \end{vmatrix} = \dots = \omega, \quad du dv = J d\omega d\theta$$

– Továbbiakban $k := x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$

- $f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega, \theta) \cdot \exp(j2\pi \cdot \omega k) \cdot \omega d\omega d\theta$

Szűrt visszavetítés (FBP) származtatása

- Vágjuk szét a külső integrált:

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega, \theta) \cdot e^{j2\pi \cdot \omega k} \omega d\omega d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega, \theta) \cdot e^{j2\pi \cdot \omega k} \omega d\omega d\theta$$

- $f(\cdot, \theta)$ a sinogram egy oszlopa, melynek definíciójából (Radon transzf.) következik, hogy $F(\omega, \theta) = F(-\omega, \theta + \pi)$, hiszen:

$$F(\omega, \theta + \pi) = \int_{t=-\infty}^{\infty} P_{\theta+\pi}(t) \cdot \exp(-j2\pi\omega t) dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} P_{\theta}(-t) \cdot \exp(-j2\pi\omega t) dt$$

$$F(\omega, \theta + \pi) = \int_{l=-\infty}^{-\infty} P_{\theta}(l) \cdot \exp(-j2\pi(-\omega)l) \frac{\partial t}{\partial l} dl = F(-\omega, \theta) \quad l = -t$$

- Felhasználtuk, hogy $k = x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$, illetve $\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$ és $\sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$

Szűrt visszavetítés (FBP) származtatása

- Vágjuk szét a külső integrált:

$$P_{\theta}(l) \triangleq f(l, \theta) \int_{-\infty}^{\infty} f(l, \theta) \cdot e^{j2\pi \cdot \omega k} \omega d\omega d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega, \theta) \cdot e^{j2\pi \cdot \omega k} \omega d\omega d\theta$$

- $f(\cdot, \theta)$ a sinogram egy oszlopából $S_{\theta}(\omega) \triangleq F(\omega, \theta)$ síciójából (Radon transzf.) következik, hogy $F(\omega, \theta) = F(-\omega, \theta + \pi)$, hiszen:

$$F(\omega, \theta + \pi) = \int_{t=-\infty}^{\infty} P_{\theta+\pi}(t) \cdot \exp(-j2\pi\omega t) dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} P_{\theta}(-t) \cdot \exp(-j2\pi\omega t) dt$$

$$F(\omega, \theta + \pi) = \int_{l=-\infty}^{\infty} P_{\theta}(l) \cdot \exp(-j2\pi(-\omega)l) \frac{\partial t}{\partial l} dl = F(-\omega, \theta) \quad l = -t$$

- Felhasználtuk, hogy $k = x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$, illetve $\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$ és $\sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$

Szűrt visszavetítés (FBP) származtatása

- Alakítsuk át egyszerű behelyettesítésekkel a második integrált:

$$\int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega, \theta) \cdot e^{j2\pi \cdot \omega k} \omega d\omega d\theta \Big|_{\theta=-\Theta} = \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} F(-\omega, \Theta) \cdot e^{-j2\pi \cdot \omega k} \omega d\omega d\Theta$$

$$k = \cos(\theta)x + \sin(\theta)y$$

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\infty} F(-\omega, \Theta) \cdot e^{-j2\pi \cdot \omega k} \omega d\omega d\Theta \Big|_{\omega=-\Omega} = \int_0^{\pi} \int_0^{-\infty} F(\Omega, \Theta) \cdot e^{j2\pi \cdot \Omega k} (-\Omega) \cdot (-1) d\Omega d\Theta$$

$$\int_0^{\pi} \int_0^{-\infty} F(\Omega, \Theta) \cdot e^{j2\pi \cdot \Omega k} (-\Omega) \cdot (-1) d\Omega d\Theta = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^0 F(\Omega, \Theta) \cdot e^{j2\pi \cdot \Omega k} (-\Omega) d\Omega d\Theta$$

Szűrt visszavetítés (FBP) származtatása

- Lássuk mit sikerült kifőznünk:

$$f(x, y) = \int_0^\pi \int_0^\infty F(\omega, \theta) \cdot e^{j2\pi \cdot \omega k} \omega d\omega d\theta + \int_0^\pi \int_{-\infty}^0 F(\omega, \theta) \cdot e^{j2\pi \cdot \omega k} (-\omega) d\omega d\theta$$

$$f(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty F(\omega, \theta) \cdot |\omega| \cdot \exp(j2\pi k\omega) d\omega d\theta = \int_0^\pi Q_\theta(k) d\theta:$$

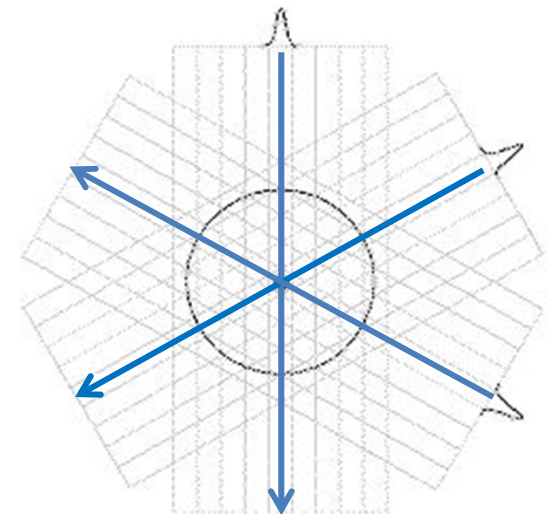
$$- Q_\theta(k) = \int_{\omega=-\infty}^\infty S_\theta(\omega) \cdot |\omega| \cdot \exp(j2\pi k\omega) d\omega \text{ ekvivalens a projekciók}$$

(sinogram oszlopai) rámpa szűrővel

történő szűrésével

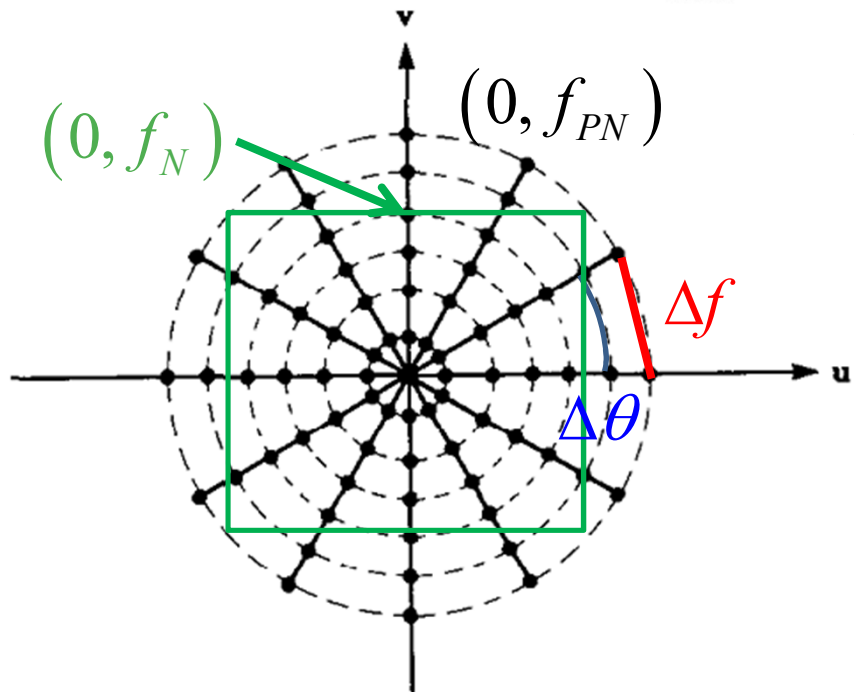
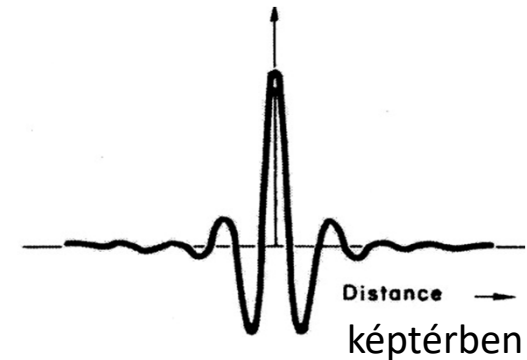
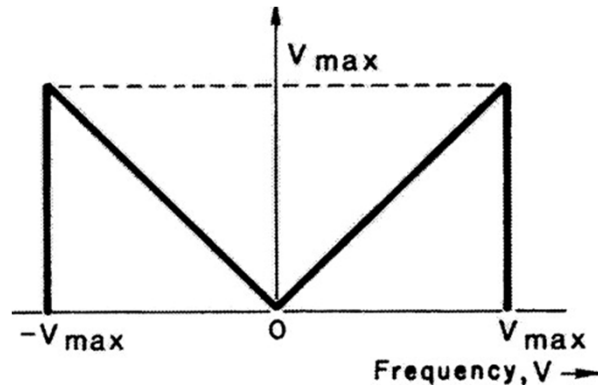
$$- f(x, y) = \int_0^\pi Q_\theta(x \cos(\theta) + y \sin(\theta)) d\theta:$$

az ú.n. visszavetítés



Szűrt visszavetítés értékelése

- Rámpaszűrő:




„Ideális” rekonstrukció feltételei:

- 180° -ból rögzített projekciók
- $\Delta \theta \leq \arcsin(\Delta f / f_{PN})$
- Projekciók felbontása elegendően nagy: $f_{PN} \geq \sqrt{2} f_N$ tipikus az 1cyc/mm
- Zajt az eljárás expliciten nem kezeli, ez jelentős problémaforrás.

Szűrt visszavetítés implementációja

- Rámpaszűrés frekvenciatérben történik:
 - 5×5 -ös szűrő esetén már a frekvenciatartománybeli szűrés a gyorsabb (ennek főleg régebben volt jelentősége).
- Visszavetítés kép / időtartományban:
 - Frekvenciatartományban interpolálnunk kellene a spektrum ismert egyeneseiből a DFT által mintavett frekvenciák értékét (mely messze nem triviális).
- Szűrések, projekciók visszavetítése egyenként (sugaranként) jól párhuzamosítható

Szűrt visszavetítés zajérzékenysége

- Detektorok DQE-je a frekvencia függvényében monoton csökken  zajos magas frekvencia (PET esetén a röntgenes esetnél jóval rosszabb).
- Ráadásul magas frekvencián „távolabb vannak” a spektrum ismert értékei (ezért kell a rámpa szűrés is).
- Legegyszerűbb megoldás az alul-áteresztés:
 - Az alul-áteresztés és a visszavetítés sorrendje tetszőleges
 - Erőforrásigény miatt érdemes a rámpa szűrőt megszűrni:

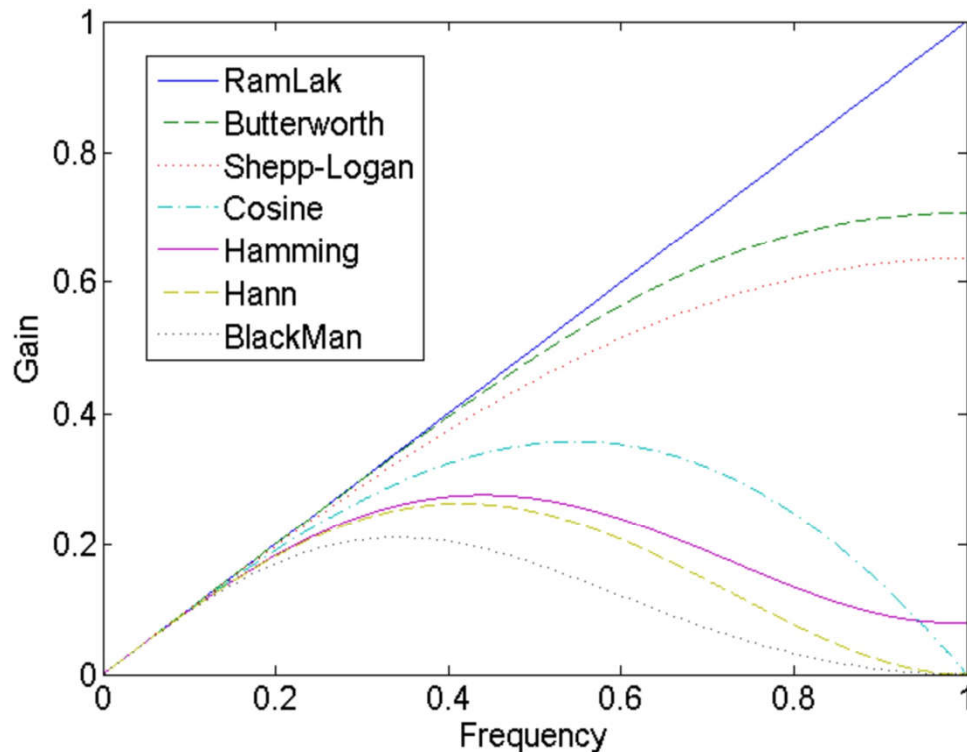
$$\left(P_{\theta} * h_{Ramp} \right) * h_{Lowpass} = P_{\theta} * \left(h_{Ramp} * h_{Lowpass} \right)$$

Klasszikus inverz problémák mely algoritmusaira hasonlít az eljárás?

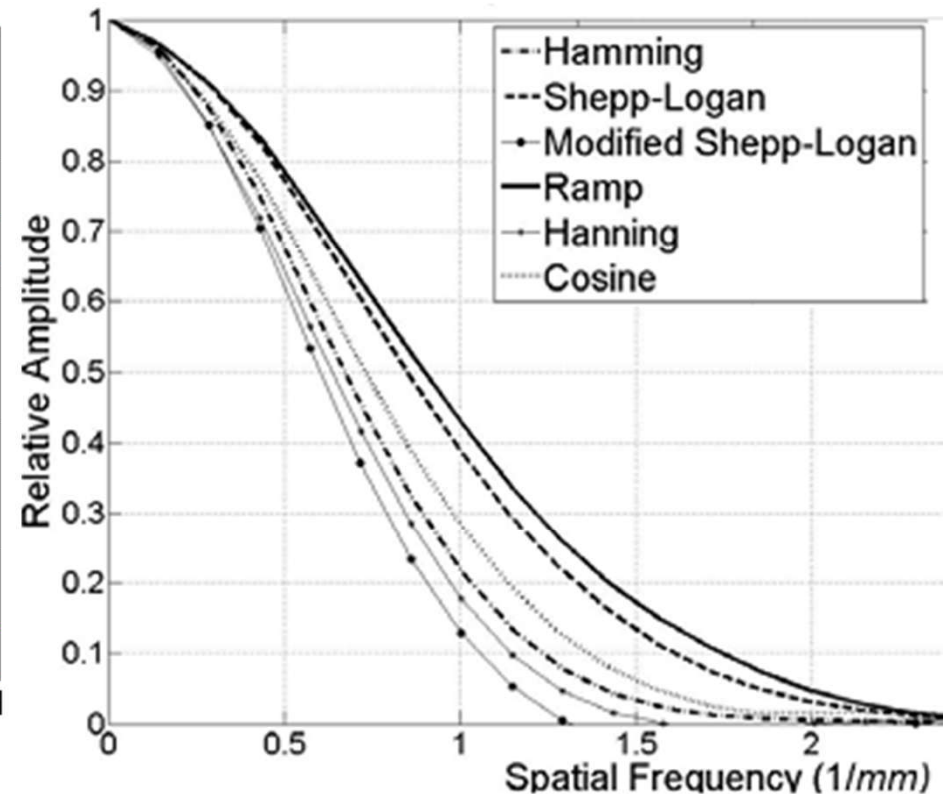
Szűrt visszavetítés zajérzékenysége

- Rámpa szűrő módosítottjaival szűrünk:

Szűrők átviteli függvényének abszolút értéke:



Egy CAT MTF-je a szűrők függvényében (példa):

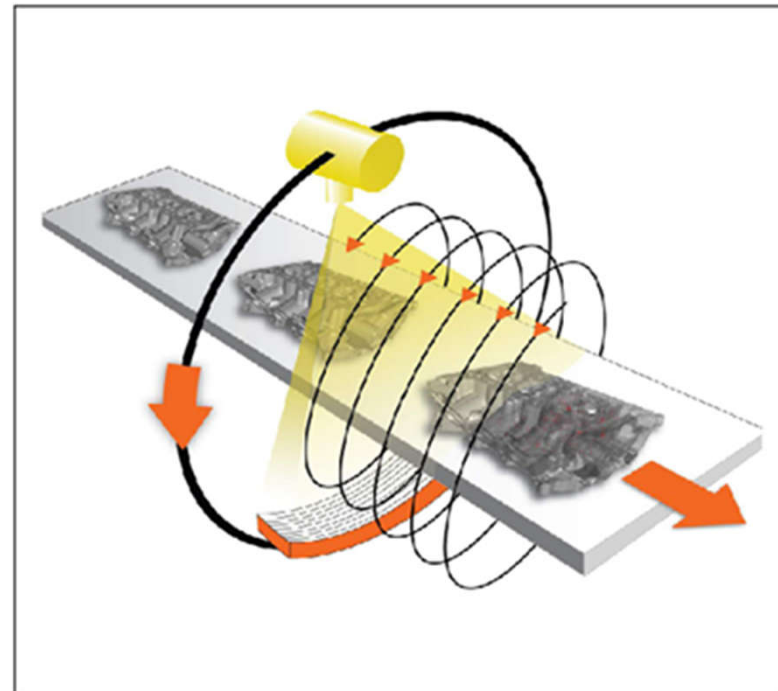
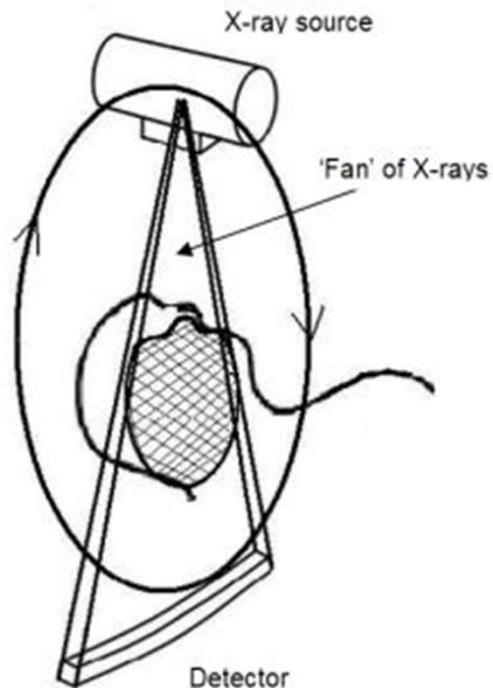


Szűrt visszavetítés működése

- Demo videó az FBP rekonstrukciójáról:
<https://www.youtube.com/watch?v=ddZeLNh9aac>
 - A szinogramban oszlop-folytonosan helyezkednek az 1D projekciók.
- A videón jól követhető a limitált szögtartomány által okozott artifakt:
 - Magas frekvenciás komponensek (pl. fantom széle) kis szögtartományból is jól rekonstruálódik.
 - Alacsony frekvenciás komponensek viszont erősen szétmosódtak (jellegzetesen „V” alakban) .
 - Vetítésugarakra merőleges élek rekonstruálhatóak jól.

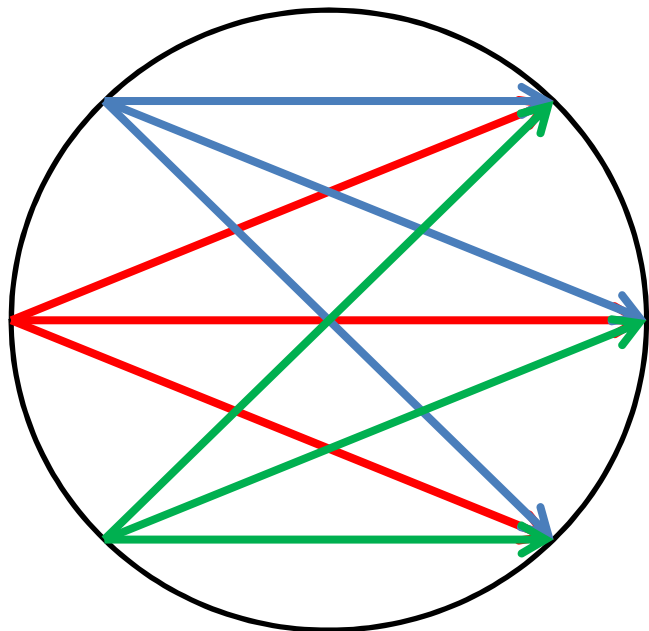
FBP Fan-beam geometria esetén

- Eddig párhuzamosak voltak a vetítősugarak:
 - Gyakorlatban egy ilyen CT nem igazán realizálható
- Fan-beam vetítősugaras helikális CT (ú.n. CAT):

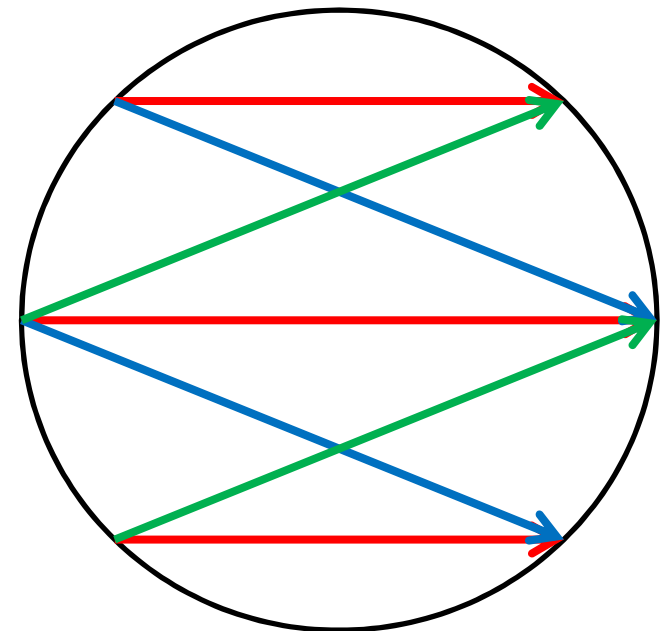


FBP Fan-beam geometria esetén

- Alapötlet: a mért intenzitások átcsoportosítása párhuzamos vetítősugár alapú geometria szerint:
 - Lényegében új, párhuzamos vetítősugár szerinti virtuális projekciókat állítunk elő a fan-beam projekciókból.



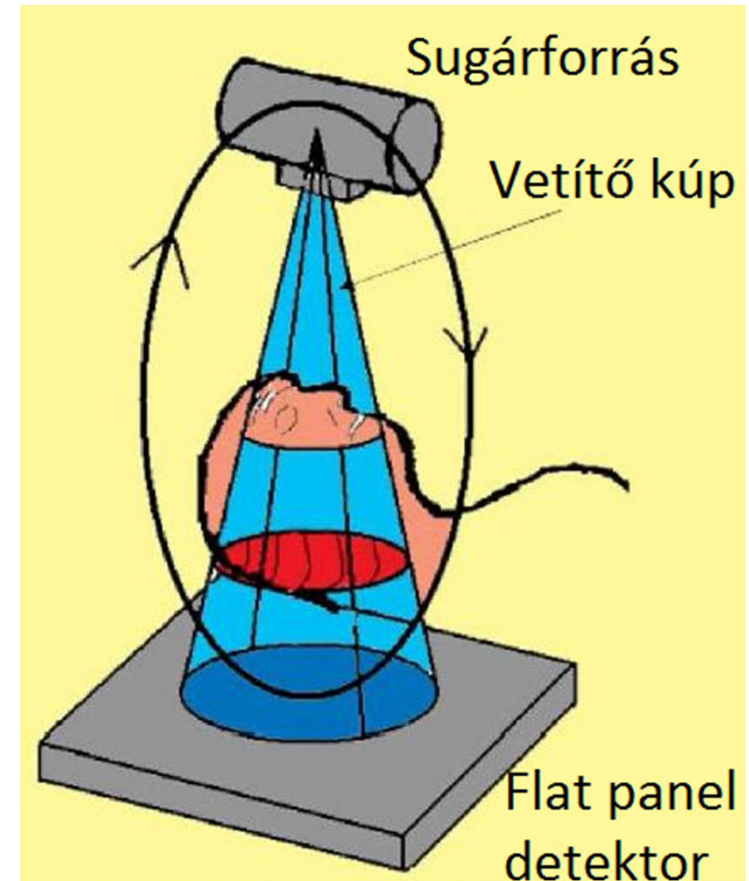
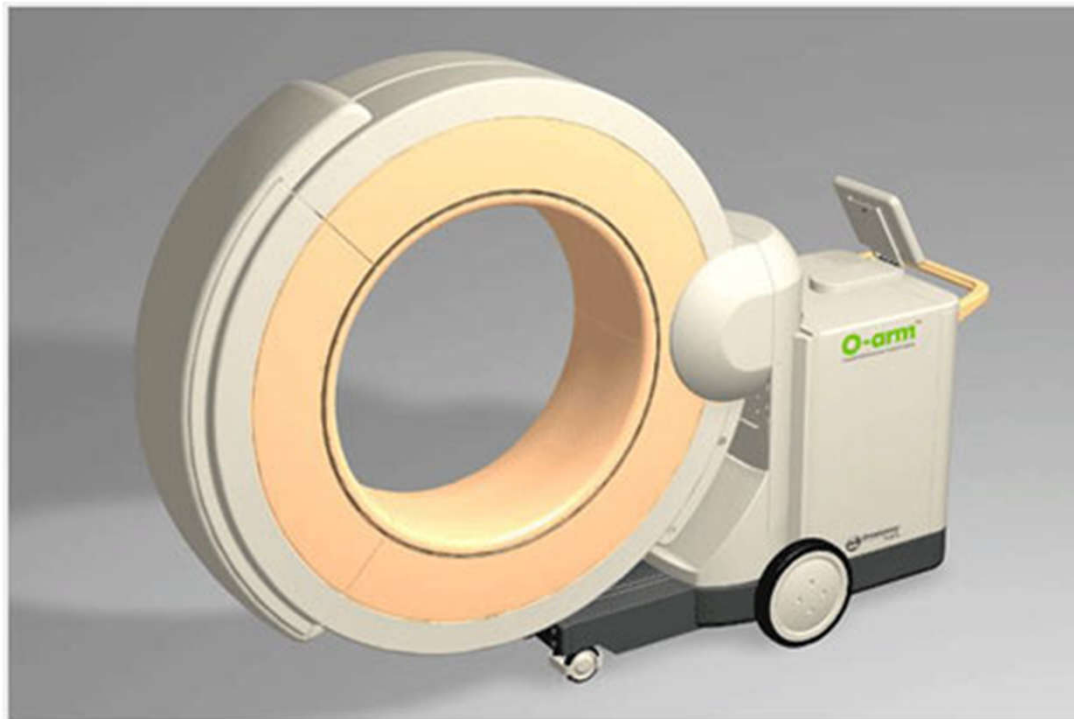
Fan-beam projekciók



Virtuális párhuzamos projekciók

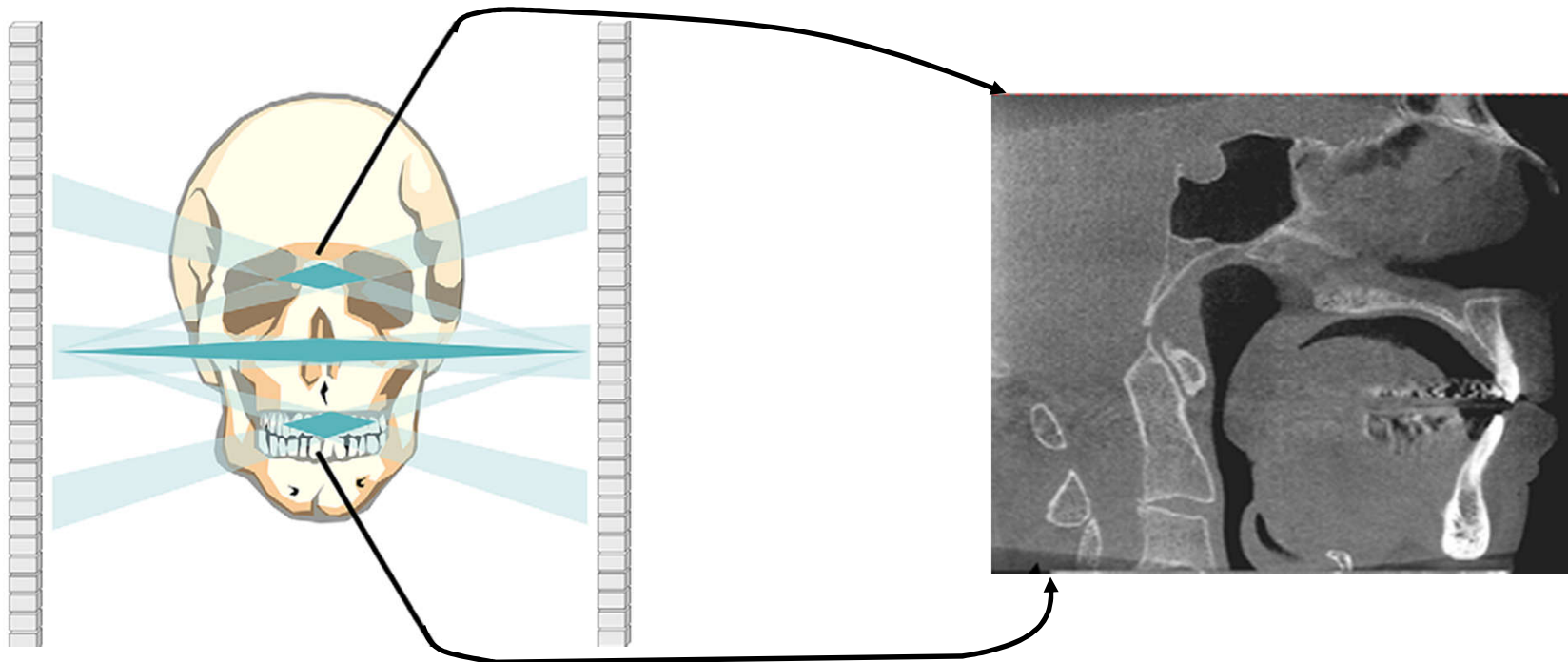
FBP Cone-beam geometria esetén

- CBCT rendszerek - Cone-Beam geometria:
 - Flat-panel detektort használ, a sugarak kúpszerűen (innen az elnevezés) vetülnek a detektorra:



Cone-beam geometria szerinti vetületek FBP rekonstrukciója - FDK

- Feldkamp, Davis, Kress CBCT-s algoritmus:
 - Klasszikus szűrt visszavetítéssel rekonstruál
 - Közelítően helyes algoritmus – ideális esetben sem tökéletes
- Ideális rekonstrukció esetén is Cone-beam artifakt



Projekciók keletkezésének általános 3D modellje

- Általános modellje a (röntgen) képalkotásnak:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\gamma=0}^{\infty} h(x, y; \alpha, \beta, \gamma) \cdot f(\alpha, \beta, \gamma) d\gamma d\alpha d\beta + \eta(x, y)$$

- Mérésekkel rendelkezünk: $g(x, y)$
- Teoretikusan ismerjük a rendszer PSF-jét: Beer- Lambert törvény szerint, ami nem modellez sem szóródást, sem a fotoelektromos kölcsönhatás során keletkező divergáló sugarakat.
- Rekonstrukció célja $f(\alpha, \beta, \gamma)$ meghatározása
- Érdeemes megjegyezni, hogy a Beer-Lambert törvélynél ez egy általánosabb modell, de monokróm sugarakat feltételez, gyakorlatban nem tudunk vele dolgozni túl nagy komplexitás.

Projekciók keletkezésének általános 3D modellje

- Megfigyelési modell diszkretizáltja $\mathbf{g} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{f} + \boldsymbol{\eta}$:
 - \mathbf{g} tartalmazza az összes vetítősugár fotodiódákon mért intenzitások negatív logaritmáltját (tehát minden projekció minden pixeléhez tartozó intenzitását tartalmazó vektor).
 - \mathbf{H} a vetítő mátrix, $\mathbf{H}_{(i,j)}$: i -edik pixelbe csapódó fotonok a j -edik voxeltől mennyire csillapodnak (ez anyag független).
 - $\boldsymbol{\eta}$ az additív zaj – nem modellezett hatások determinálják
- Lényegében ez is inverz probléma:
 - Ugyanúgy jelentős a zajérzékenység, mint 2D esetben
 - Ellentétben nagyságrendekkel több változó (akár $1E7$)

Projekciók keletkezésének általános 3D modellje

Ez így túl általános, de jobban modellezi a valóságot.

- Gyakorlatban viszont $\mathbf{H}_{(i,j)}$ az i -edik pixelbe csapódó fotonok által a j -edik voxelben megtett útjának a hossza (csak primer sugárzás). Ezzel a megkötéssel \mathbf{H} egy ritka, ún. sávmátrix-á válik.
 - \mathbf{H} a vetítő mátrix, $\mathbf{H}_{(i,j)}$: i -edik pixelbe csapódó fotonok a j -edik voxelben lévő anyagtól mennyire csillapodnak.
 - $\boldsymbol{\eta}$ az additív zaj – nem modellezett hatások determinálják
- Lényegében ez is inverz probléma:
 - Ugyanúgy jelentős a zajérzékenység, mint 2D esetben
 - Ellentétben nagyságrendekkel több változó (akár $1E7$)

Algebrai rekonstrukciós technika (Gordon ART)

- Kaczmarz iterációval történik $\mathbf{g} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}$ megoldása:
 - Rekonstrukciónál a $\mathbf{f} = \mathbf{H}^\dagger \cdot \mathbf{g}$ megoldás lenne az „ideális”, de:
 - Túl nagy \mathbf{H} mérete a ma elérhető számítási teljesítményhez
 - Ráadásul \mathbf{H} nagyon ritka, melyet általános algebrai módszerek nem képesek hatékonyan kihasználni
 - Eljárás alapötlete: $\mathbf{g} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}$ lényegében N db (vetítősugarak száma), M dimenziós hipersík egyenlete
 - Ha létezik egzakt inverz, akkor a hipersíkok az M dimenziós tér ugyanazon pontjában metszik egymást.
 - Ha túlhatározott, akkor nincs metszéspont, ha alulhatározott akkor az M dimenziós teret egy résztartományra szűkítik.

Algebrai rekonstrukciós technika (Gordon ART)

– Az eljárás $k+1$. iterációban merőlegesen vetíti az aktuális \mathbf{f} -et $\mathbf{g}_{(i)} = \mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{f}$ hipersíkra ($i \equiv k \pmod{N}$):

- \mathbf{f} a $\mathbf{H}_{(i,:)}$ -re merőleges azon síkon helyezkedik el, mely távolsága az origótól $\mathbf{g}_{(i)} / \|\mathbf{H}_{(i,:)}\|_2$

- Tehát $\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} - \alpha \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}^T$, a merőleges vetítés után $\mathbf{g}_{(i)} = \mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \left(\mathbf{f}^{(k)} - \alpha \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}^T \right)$ teljesül, amiből kifejezve:

$$\alpha = \left(\mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{g}_{(i)} \right) / \left(\mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}^T \right), \text{ behelyettesítve:}$$

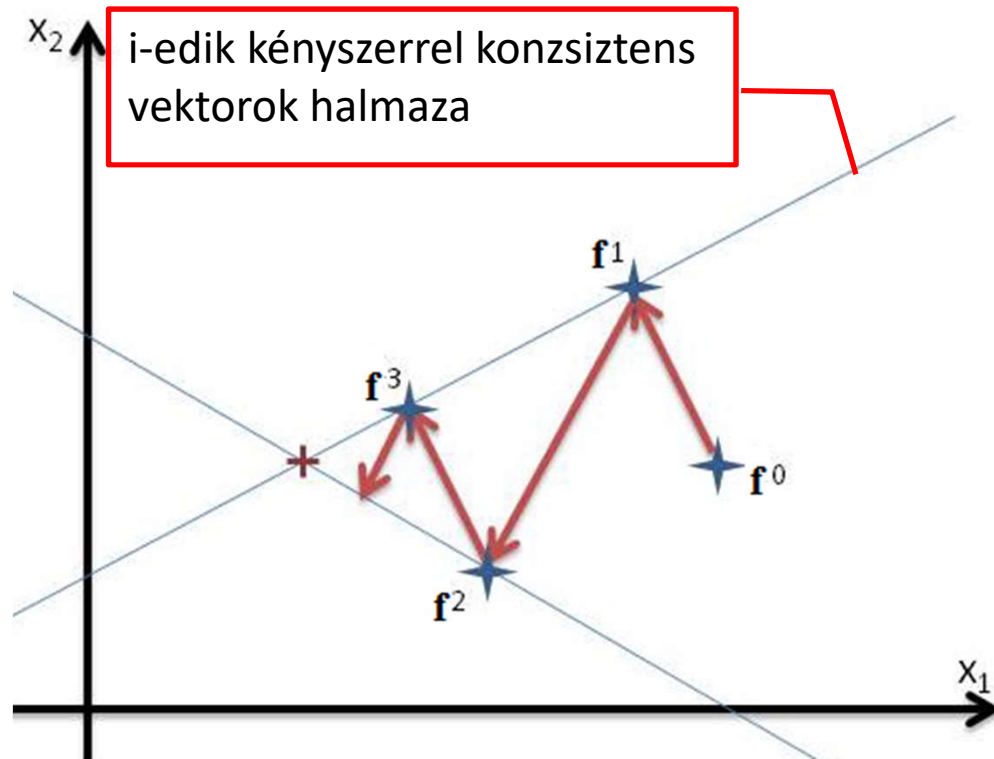
$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} - \left(\mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{g}_{(i)} \right) \cdot \frac{\mathbf{H}_{(i,:)}^T}{\mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}^T}$$

Algebrai rekonstrukciós technika (Gordon ART)

- $\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \left(\mathbf{g}_{(i)} - \mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)} \right) \frac{\mathbf{H}_{(i,:)}^T}{\mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}^T}$ interpretációja:
 - $\mathbf{g} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}^{(k)}$ a rögzített projekciók és az aktuális ($\mathbf{f}^{(k)}$) rekonstrukció modell szerinti vetületének a különbsége (vetületi hiba)
 - $\mathbf{H}_{(i,:)}^T / \left(\mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}^T \right)$: a vetületi hibát vetíti vissza
- Eljárás tulajdonságai:
 - Sok, könnyen számolható iteráció, melyek nem párhuzamosíthatóak
 - Konvergál, ha megfigyeléseink konzisztensek, ellentétben limit hurokba szorul, mely belsejében helyezkedik el az $\mathbf{f}^* = \mathbf{H}^\dagger \cdot \mathbf{g}$.
 - Hátránya, hogy nem kezeli a projekciók zaját, ezért túlilleszkedésre hajlamos (lényegében egy ML becslés Gauss eloszlású likelihood-dal)
 - Szükség van egy $\mathbf{f}^{(0)}$ -ra: gyakran FBP / BP eredménye

Kaczmarz iteráció példa

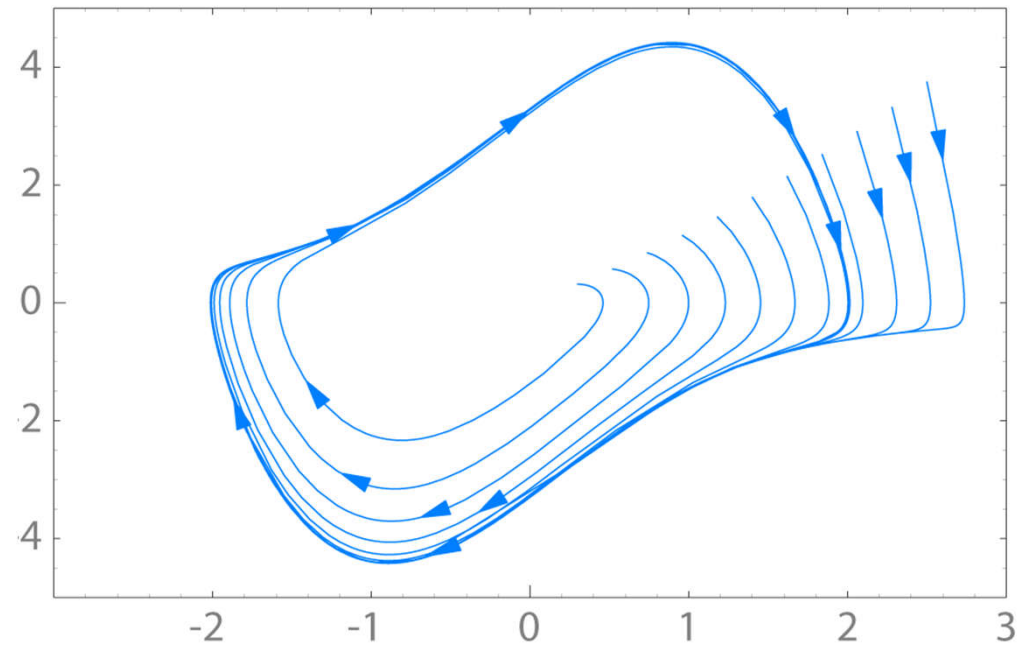
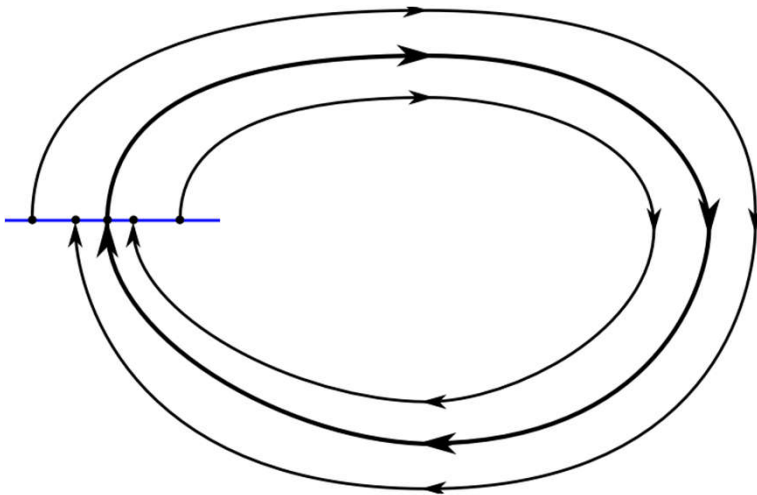
- $N=2$, $M=2$ esete:



- Ha a két merőleges hipersík egymásra merőleges, akkor két iteráció alatt megvan a metszéspont
- Ha a hipersíkok párhuzamosak, akkor az iteráció nem áll le (limit hurokba kerül)
- Minél nagyobb a két egyenes által bezárt szög, annál gyorsabb a konvergencia.

Limit hurok viselkedés

- Gordon ART inkonzisztens projekciók esetén limit hurokba lép:



Stabil limit hurkok viselkedés: a rendszer állapotváltozója hurok trajektóriába ragad

Algebrai rekonstrukciós technika (Simultaneous ART)

- Egyidejű ART (SART):

- Hibaképzés nem vetítősugaranként, hanem projekciónként:

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \lambda \cdot \sum_{j \in S_i} \left(\mathbf{g}_{(j)} - \mathbf{H}_{(j,:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)} \right) \frac{\mathbf{H}_{(j,:)}^T}{\mathbf{H}_{(j,:)} \cdot \mathbf{H}_{(j,:)}^T}$$

- S_i : i -edik projekció pixeleit előállító vetítősugarak halmaza

- Tetszőleges $\mathbf{f}^{(0)}$ esetén is konvergál egy LS becslőhöz:

- Ha több LS becslő van, akkor az $\mathbf{f}^{(0)}$ -hoz L2 szerinti legközelebbihez

- Jól párhuzamosítható:

- Azonos projekcióhoz tartozó vetítősugarak menti levetítés és visszavetítés egymástól független

- Zajra túlilleszkedés tulajdonsága változatlanul megmaradt

- Ez az eljárás is ekvivalens egy ML becsléssel

Algebrai rekonstrukciós technika

(Simultaneous Iterative Reconstructive Technique)

- Egyidejű Iteratív Rekonstrukciós eljárás:
 - Összes projekció, összes pixele szerint egyszerre képez hibát:

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \lambda \cdot \sum_j \left(\mathbf{g}_{(j)} - \mathbf{H}_{(j,:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)} \right) \frac{\mathbf{H}_{(j,:)}^T}{\mathbf{H}_{(j,:)} \cdot \mathbf{H}_{(j,:)}^T}$$

- Hasonló konvergencia tulajdonságok, mint az SART-nél:
 - Pontosan ugyanazon becsléshez konvergál
- Jól párhuzamosítható, de:
 - Egyszerre csak egy projekció le / visszavetítése nem módosítja többször u.a. voxel (egyébként versenyhelyzet).
 - Gyakorlatban több számolás szükséges a konvergenciához, mint a másik két ART-nél
- Létezik olyan változat, mely kezeli a polikróm energia spektrum miatt kialakuló sugárkeményedés artifaktumot.

Algebrai rekonstrukciós technika (Multiplikatív ART)

- Eddig Additív ART-ket néztünk:
 - Kezdeti iterációk során lassabban haladnak
 - Pozitivitási kényszert nem lehet kikényszeríteni
- Multiplikatív ART-k:
 - Hibát multiplikatív módon származtatják
 - pl.:
$$\mathbf{f}_{(i)}^{(k)} = \mathbf{f}_{(i)}^{(k-1)} \cdot \mu \cdot \left(1 - \frac{\mathbf{g}_{(j)}}{\mathbf{H}_{(j,:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)}} \right)^{H_{(j,i)}}$$
 - A hibát $1 - \mathbf{g}_{(j)} / \mathbf{H}_{(j,:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)}$ értéke méri
 - Kezdeti iterációk hatékonyabbak, de gyakran divergál, vagy a végén túlságosan lelassul.