Rekonstrukciós eljárások

Orvosi képdiagnosztika

2017 ősz

Modell alapú rekonstrukciós eljárások (Röntgen alapú képalkotás)

- Cél a pácienst érő sugárterhelés minimalizálása:
  - Viszont kisebb dózis zajosabb projekciókat eredményez
  - Limitált szögtartomány problémája jelentősen alul-határozottá teszi a z inverz problémát ($\mathbf{g} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}$)
- MAP becslés alkalmazása szükséges:
  - Emlékeztetőül $\mathbf{f}^* = \arg\max_{\mathbf{f}} \left\{ \mathrm{P}\left\{ \mathbf{f} \middle| \mathbf{g} \right\} \right\} \propto \arg\max_{\mathbf{f}} \left\{ \left(\mathrm{P}\left\{ g \middle| f \right\} \cdot \mathrm{P}\left\{ f \right\} \right) \right\}$
  - $-\log\left(\mathrm{P}\left\{ \mathbf{g} \middle| \mathbf{f} \right\} \right) = \Phi_{Likelihood}\left(\mathbf{f} \right)$ bünteti az eltérést
  - $-\log\left(\mathrm{P}\left\{ \mathbf{f} \right\} \right) = \Phi_{\mathrm{Prior}}\left(\mathbf{f} \right)$ apriori ismeretek alapján regularizál

Modell alapú rekonstrukciós eljárások (Röntgen alapú képalkotás)

- Likelihood tag megválasztása:
  - PET-nél Poisson modellt alkalmazzuk (ritka esemény törvény)
  - Röntgen esetén negatív logaritmálást követően Gauss modell

$$\Phi_{Likelihood}\left(\mathbf{f}\right)=1/2\cdot\left(\mathbf{g}-\mathbf{H}\cdot\mathbf{f}\right)^{T}\cdot\mathbf{\Sigma}^{\mathbf{-1}}\cdot\left(\mathbf{g}-\mathbf{H}\cdot\mathbf{f}\right)$$

  - $\mathbf{\Sigma}$ gyakran diagonális, ekkor $\mathbf{\Sigma}_{(i,i)}=\sigma^2_{(i)}$:
    - Lényegében az i-edik vetítősugár NSR-jének a négyzete
    - Megfelelő megválasztása nehéz, aktívan kutatott feladat
  - Kvadratikus függvény, minimalizációja analitikus

Modell alapú rekonstrukciós eljárások (Röntgen alapú képalkotás)

- Regularizációs tag megválasztása:
  - Logikusnak tűnik a gradiens energiáját büntetni:
    $\Phi_{\mathrm{Prior}}(\mathbf{f}) = \alpha \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{f}$, $\mathbf{S} = \mathbf{D}^T \cdot \mathbf{D}$, ahol $\mathbf{D}$ a deriválás mtx.-ja
    - Belátható, hogy ekvivalens egy regularizáció nélküli rekonstrukció alul-áteresztettjével.
    - Tehát ez a regularizáció csökkenti az effektív felbontást (mind a rekosntruált szeleteken belül, mind azok között a modalitástól függetlenül).
  - Inkább él őrző regularizációk alkalmazása javallott pl. Teljes Variancia minimalizáció, Huber büntetőfüggvény …

Compressive Sensing

- Nyquist mintavételnek megfelelő interpoláció:
  - Régebben láttuk a kernelét
  - De ez csak egy interpolációs lehetőség
- Compressive Sensing alapú megközelítés:
  - Nem szükséges Nyquist tétel szerint mintavételezni
  - Két általános megvalósítása létezik:
    - Megszorítjuk a rekonstruálni kívánt jel bázisát (erre lesz példa a Mátrix Inverziós Tomoszintézis)
    - Keresünk egy olyan operátort / ábrázolást ami felett ritka a rekonstruálni kívánt jel (pl. TV minimalizációs)

Teljes variancia minimalizáció

- Rekonstrukció, mint optimalizálási feladat:

$$\mathbf{f}^* = \arg\min_{\mathbf{f}} \left\{ \left\| \mathbf{g} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{f} \right\|_2^2 + \lambda \cdot \left\| \mathbf{D} \cdot \mathbf{f} \right\|_2 \right\}$$

  – $\mathbf{D}$ diszkrét differencia / wavelet transzformációk mátrxia

  – Lényegi változás, hogy a regularizáció L2 norma szerinti

- Alternating Direction Methode: $\mathbf{z} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{f}$ változóval

$$\Phi(\mathbf{f}, \mathbf{z}) \triangleq \left\| \mathbf{g} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{f} \right\|_2^2 + \lambda \cdot \left\| \mathbf{z} \right\|_1 + \beta \cdot \left\| \mathbf{z} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{f} \right\|_2^2$$

  – Alternálva minimalizáljuk $\mathbf{f}$-et és $\mathbf{z}$-t iterációnként:

$$\mathbf{f}^{(n+1)} = \arg\min_{\mathbf{f}} \left\{ \Phi\left(\mathbf{f}, \mathbf{z}^{(n)}\right) \right\} = \arg\min_{\mathbf{f}} \left\{ \left\| \mathbf{g} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{f} \right\|_2^2 + \beta \cdot \left\| \mathbf{z}^{(n)} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{f} \right\|_2^2 \right\}$$

$$\mathbf{z}^{(n+1)} = \arg\min_{\mathbf{z}} \left\{ \Phi\left(\mathbf{f}^{(n+1)}, \mathbf{z}\right) \right\} = \arg\min_{\mathbf{z}} \left\{ \lambda \cdot \left\| \mathbf{z} \right\|_1 + \beta \cdot \left\| \mathbf{z} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{f}^{(n+1)} \right\|_2^2 \right\}$$

Teljes variancia minimalizáció

– Az iterációk első lépése kicsit átalakítva:

$$\min_{\mathbf{f}} . \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{g}^T & \sqrt{\beta}\cdot\mathbf{z}^{(n)^T} \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T & \sqrt{\beta}\cdot\mathbf{D}^T \end{bmatrix}^T \cdot \mathbf{f} \right\|_2^2$$

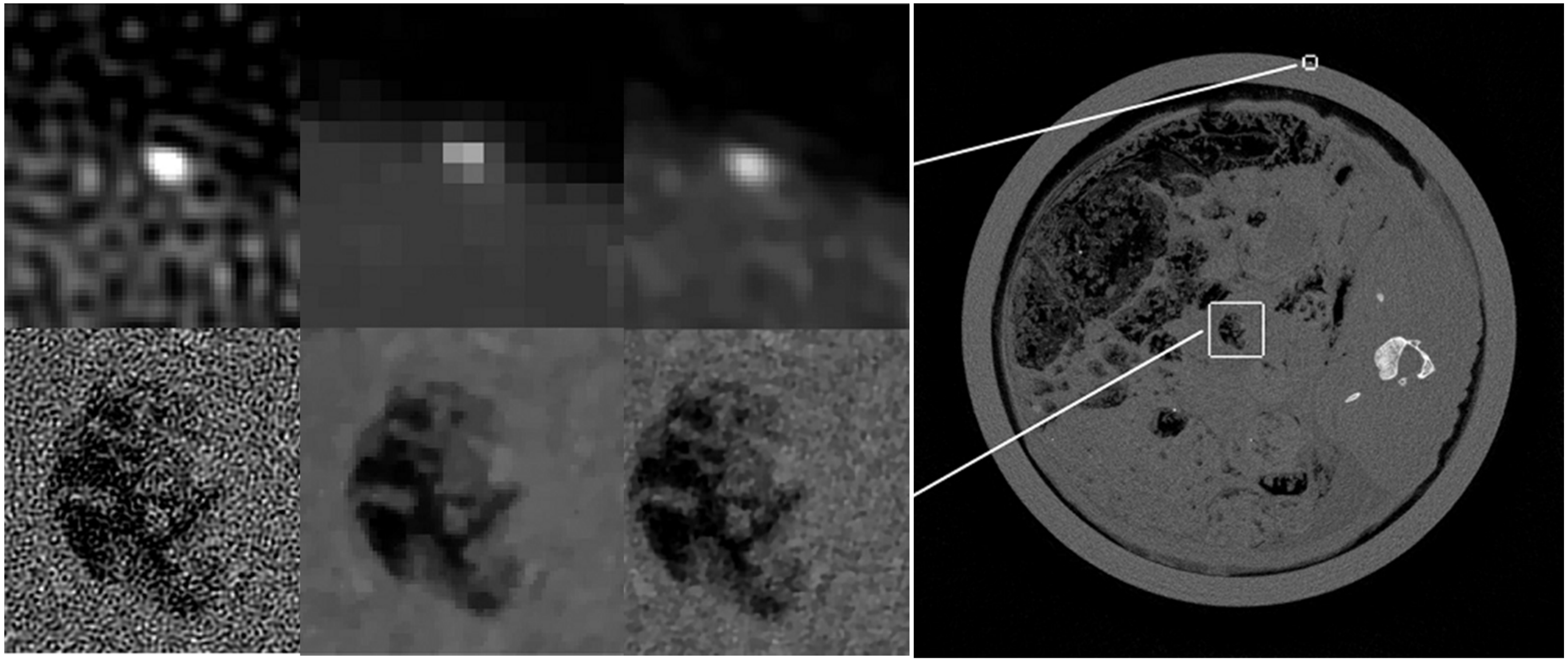
- Formálisan visszajutottunk az alapproblémához, csak most már biztosan túl-határozott (additív ART probléma)
- Minimalizálása erőforrásigény miatt sokszor SART-vel

– Iterációk második lépésének optimuma egy lépésben, analitikusan meghatározható: $\arg\min_{\mathbf{z}} \left\{ \lambda \cdot \|\mathbf{z}\|_1 + \beta \cdot \left\| \mathbf{z} - \mathbf{D}\cdot\mathbf{f}^{(n+1)} \right\|_2^2 \right\}$

- Az úgynevezett lágy küszöb operátor használatával
- A minimalizálás voxelenként történik

Teljes variancia minimalizáció

- Jobb SNR az ML-EM és az FBP-hez képest:
  - FBP-nél kevésbé zajos, de hasonló kontrasztú kép
  - ML-EM-nél jelentősen jobb kontraszt



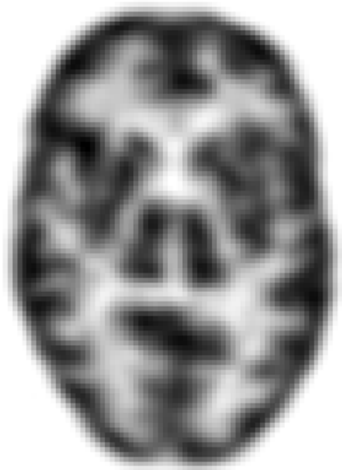
FBP ML-EM TV-ART

Huber büntetőfüggvény

- Huber büntetőfüggvénnyel regularizálunk:

$$\Phi_{\text{Prior}}(\mathbf{f}) = \alpha \cdot L_{Huber}\{\mathbf{D}\cdot\mathbf{f}\} \qquad L_{Huber}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \|\mathbf{x}\|_2^2 / 2 & \|\mathbf{x}\|_2 \le \varepsilon \\ \varepsilon \cdot \|\mathbf{x}\|_2 - \varepsilon^2/2 & \|\mathbf{x}\|_2 > \varepsilon \end{cases}$$

Pet fantom

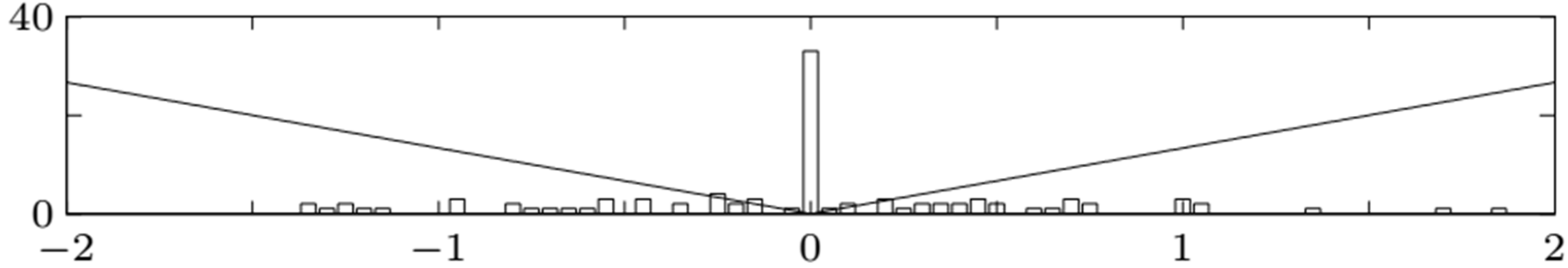


MAP L2 prior

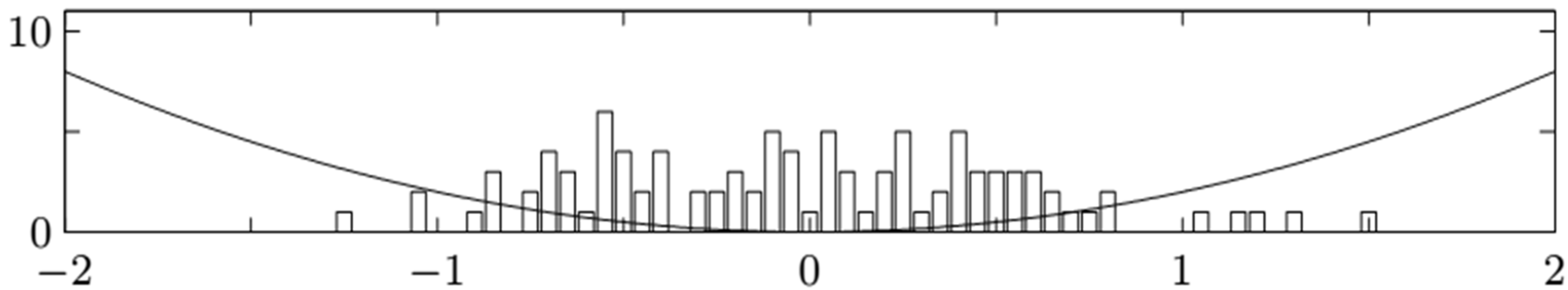
MAP Huber prior

Kvadratikus és abszolútérték hiba/büntetőfüggvény

- Két hibafüggvény jelentősen eltérő eloszlást kényszerít ki:



Abszolútérték büntetőfüggvény



Kvadratikus büntetőfüggvény