

Fourier térbeli analízis, inverz probléma

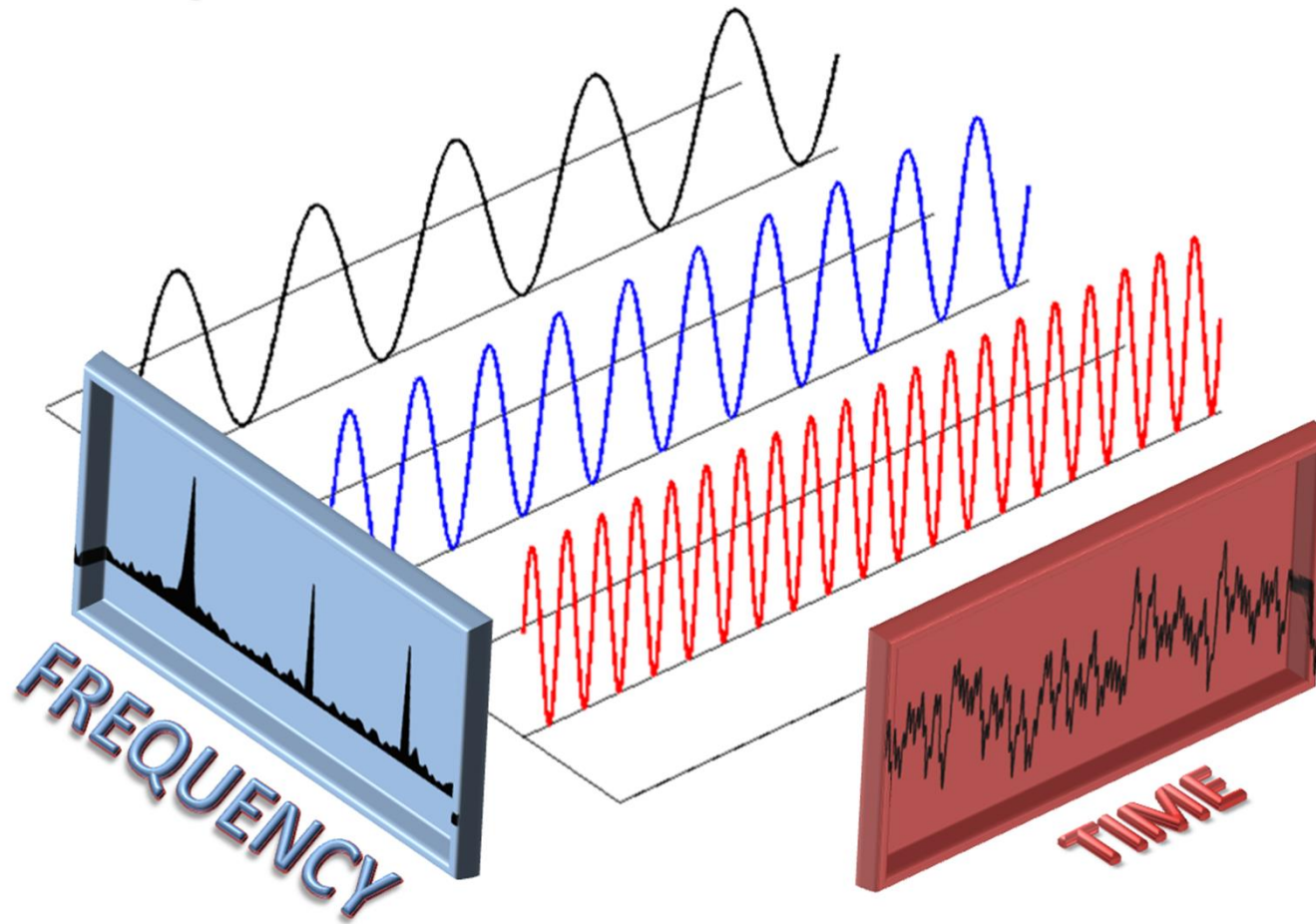
Orvosi képdiagnosztika

2018 ősz

Előadás témái

- Fourier transzformációk és kapcsolataik:
 - FS, FT, DTFT, DFT, DFS
 - Mintavételezés, interpoláció

Folytonos Fourier Transzformáció



Folytonos Fourier Transzformáció

- Lineáris transzformáció a véges energiájú, folytonos függvények tere felett:

$$- F(\omega) = FT\{f\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\{-j \cdot x \cdot \omega\} dx$$

$$- f(x) = FT^{-1}\{F\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp\{j \cdot x \cdot \omega\} d\omega$$

- Legfontosabb tulajdonságai:

$$- \text{Konvolúció tétele: } (f * g) = FT^{-1}\{(F \cdot G)(\omega)\}$$

$$- \text{Fordított konvolúció: } ((f \cdot g)(x)) = \frac{1}{2\pi} FT^{-1}\{F * G\}|_x$$

$$- \text{Parseval tétele: } E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

Folytonos Fourier Transzformáció

– Valós jel spektruma: $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$

– Páros, valós jel spektruma:

$$F(-\omega) = \operatorname{Re}\{F(-\omega)\} = \operatorname{Re}\{F(\omega)\} = F(\omega)$$

– Páratlan, valós jel spektruma:

$$F(-\omega) = \operatorname{Im}\{F(-\omega)\} \cdot j = \operatorname{Im}\{F(\omega)\} \cdot (-j) = \overline{F(\omega)}$$

– Periodikus jel spektruma diszkrét:

$$F(\omega) = 0, \text{ ha } \omega \neq k \cdot (2\pi \cdot f) \Big|_{k \in \mathbb{Z}}$$

– Ekvivalens egy unitér transzformációval:

- Ez pl. maga után vonja a bijektivitást

Folytonos Fourier Sorfejtés

- Lineáris transzformáció a periodikus folytonos függvények tere felett:

$$- c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cdot \exp(-j \cdot x \cdot 2\pi n/T) dx; \quad n \in Z$$

$$- f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \exp\{j \cdot x \cdot 2\pi n/T\}$$

- Kapcsolat a folytonos FT-val:
 - Mintavételezi a spektrumot: $c_n \propto F(2\pi \cdot n/T)$
 - Periodikus jel \Leftrightarrow diszkrét spektrum
 - Egyéb tulajdonságokat örökli a folytonos FT-től

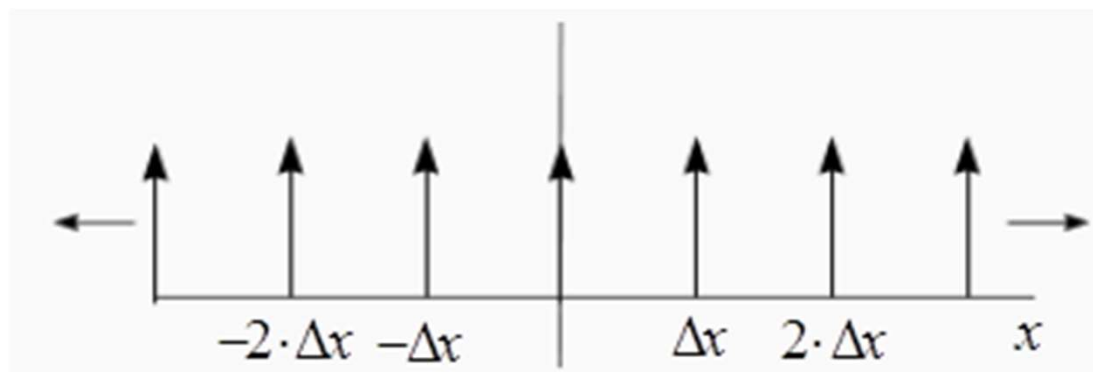
Diszkrét idejű Fourier Transzformáció (DTFT)

- Adott egy mintavételezéssel előállt végtelen hosszú, abszolút összegezhető jel: $f[n]$
- Definíció:
 - $X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] \exp\{-j \cdot \omega \cdot n\}$
 - $x[n] = 1/2\pi \cdot \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) \exp\{j \cdot \omega \cdot n\} d\omega$
- Alapvető tulajdonságok:
 - $n \in Z$, de $\omega \in R$
 - $X(\omega + 2 \cdot k \cdot \pi) \Big|_{k \in Z} = X(\omega)$
 - Egyéb tulajdonságait örökli a folytonos FT-től

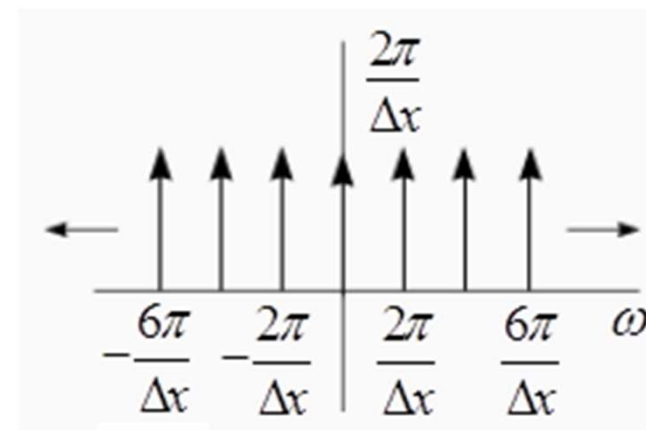
Matematikai mintavételezés

Folytonos FT és DTFT kapcsolata

- Végtelen impulzus fésű:
 - Matematikai mintavételezés: folytonos jel elemenkénti szorzata az impulzus fésűvel.
 - Időtartománybeli szorzás \Leftrightarrow Spektrumok konvolúciója



Impulzuszésű az időtartományban



frekvenciatartományban

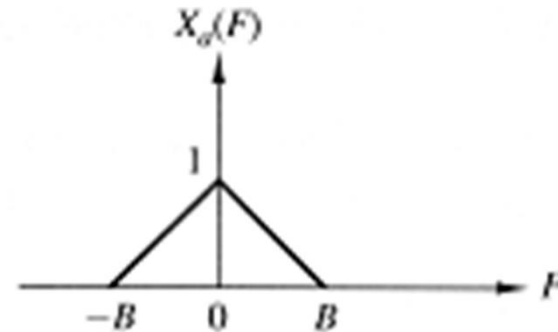
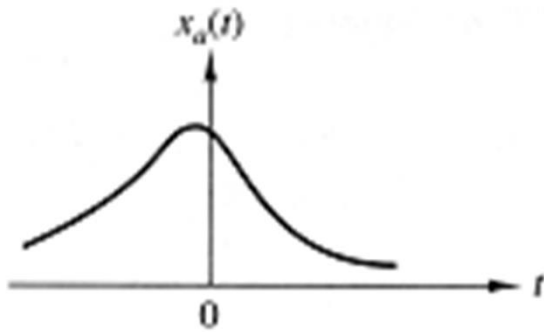
Mintavett jel spektruma

- Formálisan a mintavett jel spektruma:

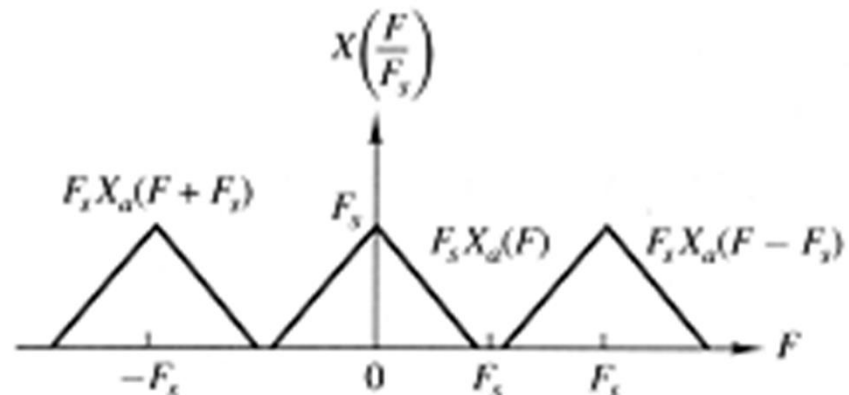
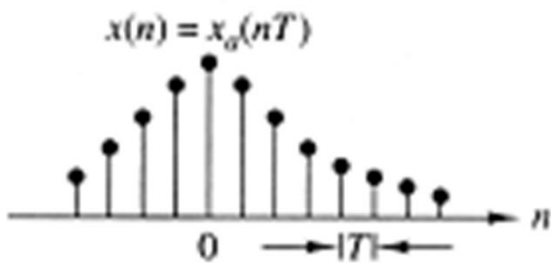
$$X_s(\omega) = \frac{2\pi}{\Delta x} X(\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{\Delta x}\right) = \frac{2\pi}{\Delta x} \sum_k X\left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{\Delta x}\right)$$

- Δx : mintavételezések távolsága
 - $X(\omega)$: folytonos idejű jel spektruma
 - $X_s(\omega)$: mintavételezett jel spektruma
- Nyquist mintavételi törvény:
 - $bw\{x\} < (1/2) \cdot f_s; \square f_s = (1/\Delta x)$
 - Ha nem tartjuk be alul mintavételezés: $K \cdot X_s(\omega) \neq X(\omega)$

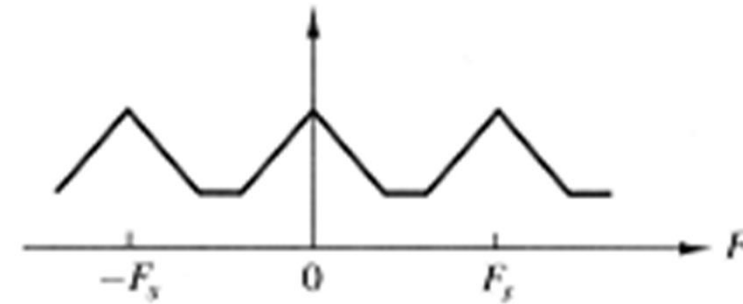
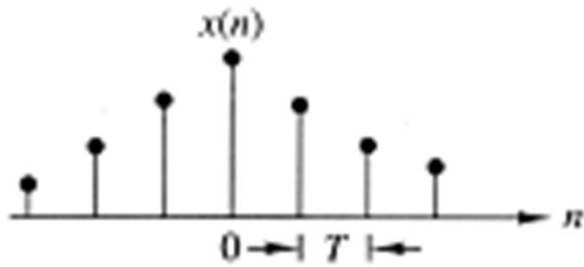
Helyesen mintavételezés interpretációja



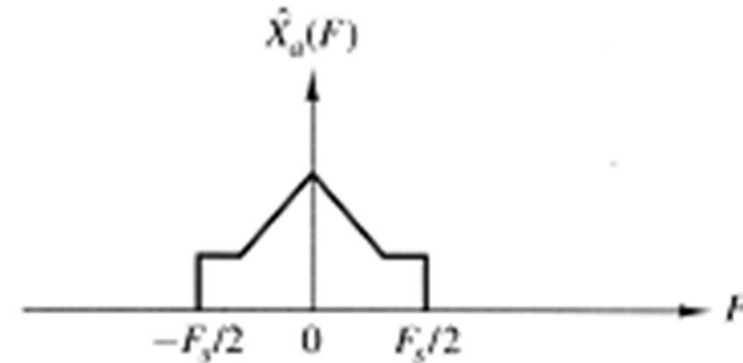
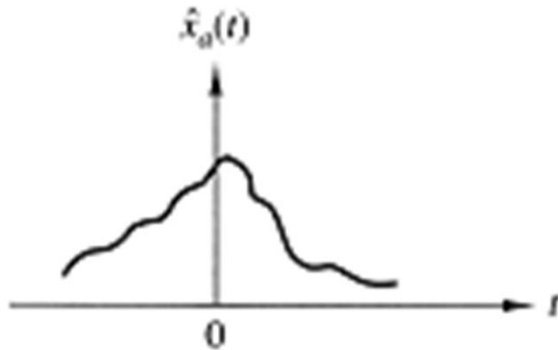
(a)



Alul mintavételezés interpretációja spektrum átlapolódása



(d)



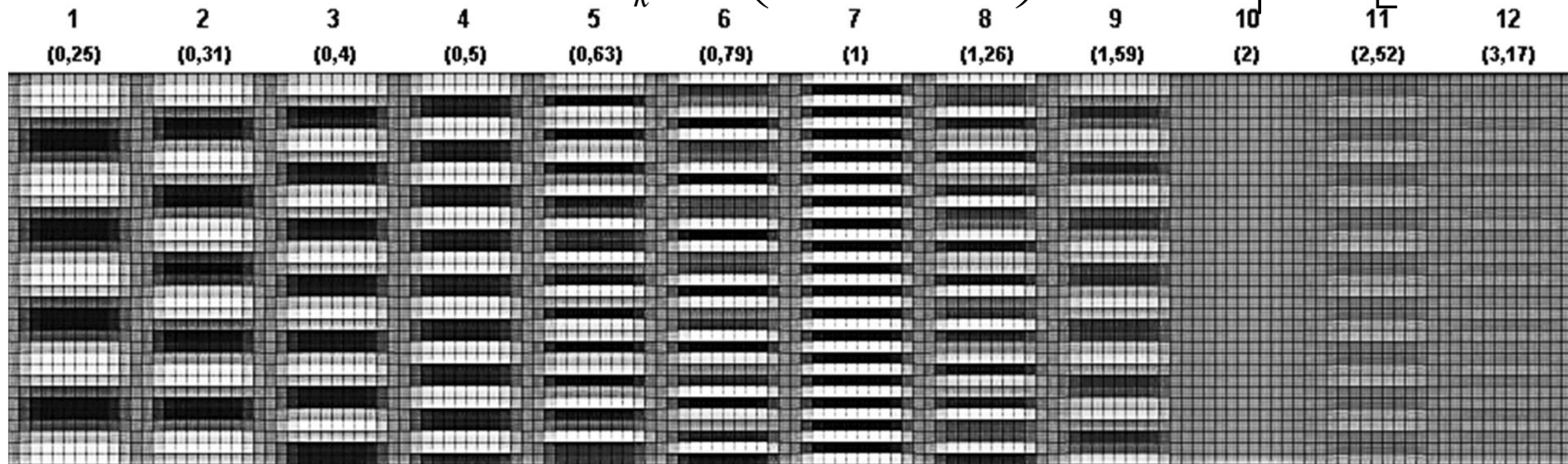
Spektrum átlapolódása moire / aliasing

- Spektrum átlapolódása által generált jeltorzulás



Spektrum átlapolódása - aliasing

- Aliasing : $X_s(\omega) \propto \sum_k X\left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{\Delta x}\right) \neq X(\omega) \Big| \omega \in \left[-\frac{\pi}{\Delta x}, \frac{\pi}{\Delta x}\right]$



- Anti-aliasing filter – mintavételezés előtti alul-áteresztő szűrés:
 - Pl. Bayer szűrős fényképezőgépeknél optikai szűrő
 - Radiológiában az elkent PSF-ek miatt elhagyható

Mintavett jel rekonstrukciója

- Rekonstrukció (interpoláció):
 - Cél: a mintavételezett jel értékének előállítása két mintavételezési pont között
 - Ha sérült a mintavételezési törvény, akkor lehetetlen
 - LTI rendszerrel: $x_R = x_S * h_R$
 - Ideális interpolációs kernel:
 - $H_R(\omega) = \begin{cases} K & |-\omega_L \leq \omega \leq \omega_L \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad \omega_L = 2\pi \cdot f_S / 2$
 - $h_R \propto \text{sinc}(\omega_L \cdot x)$

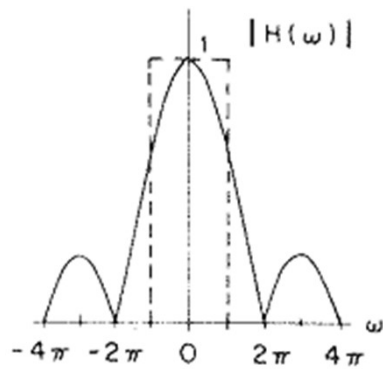
Interpoláció hibái

- Megfigyelt tartomány széle:
 - Súlyfüggvény „kilóg” a megfigyelt tartományból
- $|H_R(\omega)| \neq 0 \quad |\omega| > f_s/2$ esete:
 - Lényegesen jelentősebb hibaforrás
 - Mintavett jel rekonstrukciója:
 - $X_R(\omega) = H_R(\omega) \cdot X_S(\omega) \propto \sum_k H_R(\omega) \cdot X\left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{\Delta x}\right)$
 - $X_R(\omega) \neq X(\omega)$, ha $|\omega| > f_s/2$
 - Példa rá a Nearest Neighbour interpoláció (ZOH)

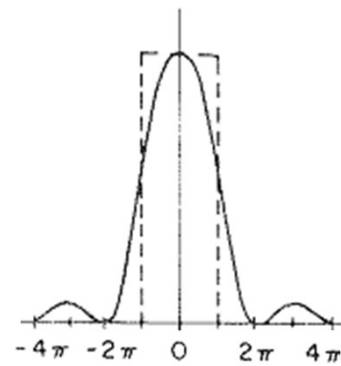
Interpolációk összehasonlítása

- Átviteli/súlyfüggvényük analízisével:

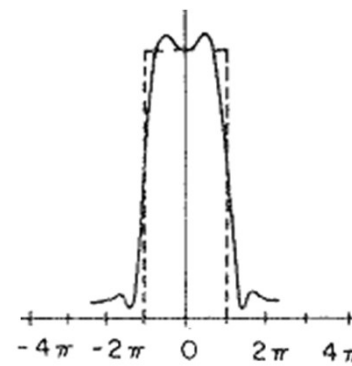
Nearest Neighbour



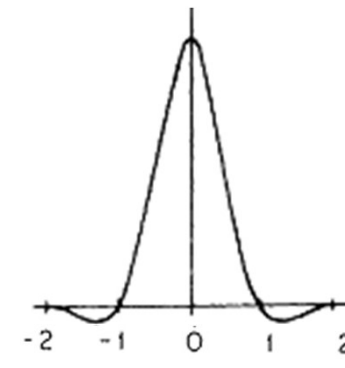
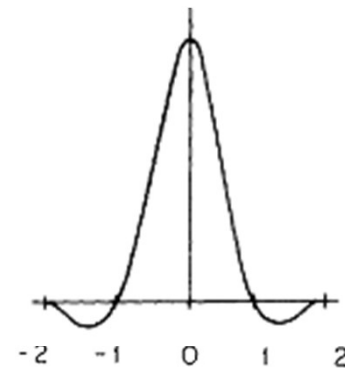
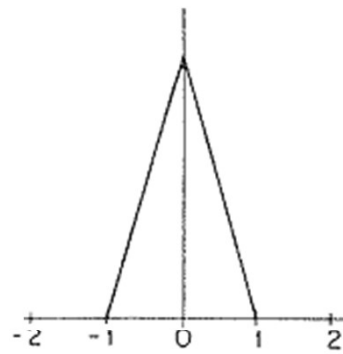
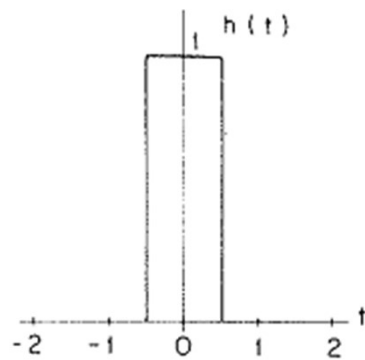
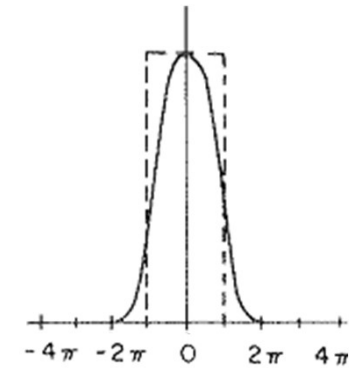
Lineáris



Köbös Spline



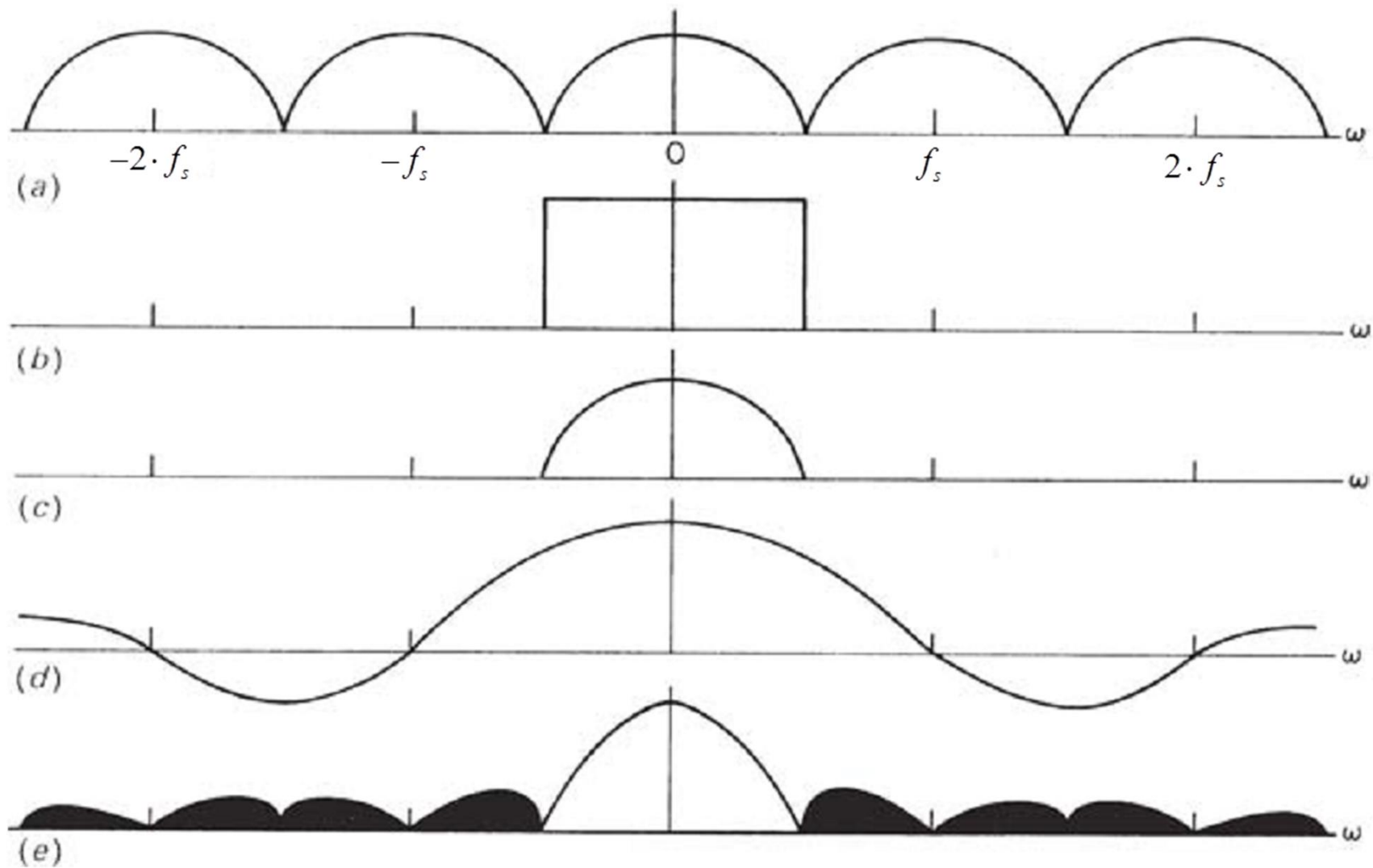
Köbös B-Spline



Átviteli függvény

Súlyfüggvény

(Hibás) interpoláció vizualizációja



Integráló mintavételezés

- Érzékelők integrálják a foton fluxust:
 - Érzékelőelemek **homogén** súlyfüggvénye: $p(x)$
 - Adekvát az alábbi modell:

1. Megszűrjük a folytonos jelet az érzékelők súlyfüggvényével
2. Elvégezzük a matematikai mintavételezést

$$X_s(\omega) \propto (X(\omega) \cdot P(\omega)) * \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{\Delta x}\right) \right)$$

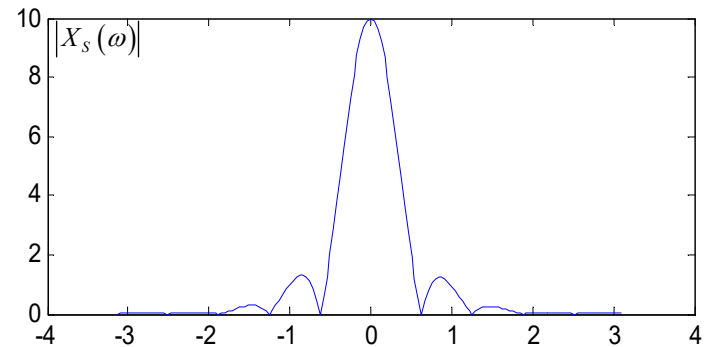
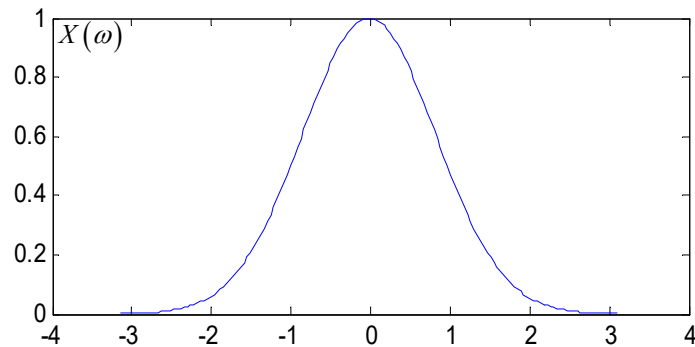
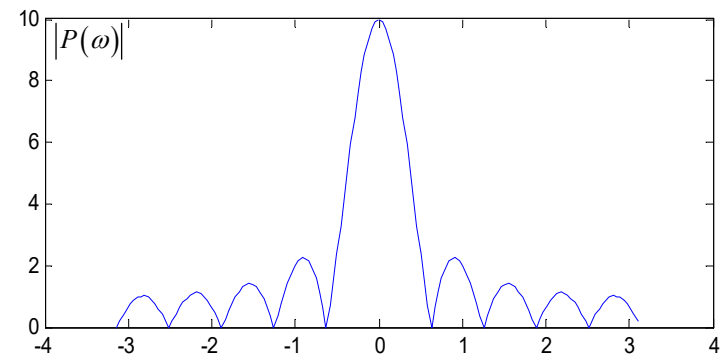
- Ha az érzékelőelemek súlyfüggvénye nem homogén, akkor nem modellezhető LTI rendszerrel

Integráló mintavételezés - példa

- Ideális, integráló mintavételezés esete:

$$- p(x) = \begin{cases} 1/\Delta_x & ||x| < \Delta_x/2 \\ 0 & ||x| > \Delta_x/2 \end{cases}$$

$$- P(\omega) = \Delta x \cdot \text{sinc}(\Delta x \cdot \omega/2)$$



Diszkrét Fourier Transzformáció (DFT)

- Diszkrétizált jelet N pontban ismerjük:

$$- X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\{-j \cdot n \cdot (k \cdot 2\pi/N)\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\{-j \cdot n \cdot k \cdot \Delta\omega\}$$

$$- x[n] = (1/N) \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot \exp\{j \cdot 2\pi kn/N\}$$

- Kapcsolat a DTFT-vel:

$$- x[n] = \begin{cases} y[n] & n \in [0, 1, \dots, N-1] \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad \text{megfigyelési ekvivalens}$$

- DFT mintavételezi a megfigyelési ekvivalens DTFT spektrumát: $Y_k = X(k \cdot \Delta\omega)$

- C^N feletti ortogonális transzformáció, mi a mátrixa?

DFT pontszáma

- Megfigyelési ekvivalens DTFT spektrumát tetszőleges felbontással mintavételezhetjük:
 - Ha M minta érdekel, akkor $M-N$ db 0-val paddelünk
 - A fizikai (folytonos) jel spektrumáról ezáltal nem tudunk meg többet!
 - 2-Radix FFT

