

# Fourier térbeli analízis, inverz probléma

Orvosi képdiagnosztika

2018 ősz

# 7. Előadás tartalma

- Spektrumszivárgás
- Képfeldolgozás frekvencia tartományban:
  - 2D Spektrum gépi ábrázolása
  - Szűrések frekvenciatartományban
  - Spektrumképek értelmezése

# Diszkrét Fourier Transzformáció (DFT)

- Diszkrétizált jelet  $N$  pontban ismerjük:

$$- X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\{-j \cdot n \cdot (k \cdot 2\pi/N)\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\{-j \cdot n \cdot k \cdot \Delta\omega\}$$

$$- x[n] = (1/N) \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot \exp\{j \cdot 2\pi kn/N\}$$

- Kapcsolat a DTFT-vel:

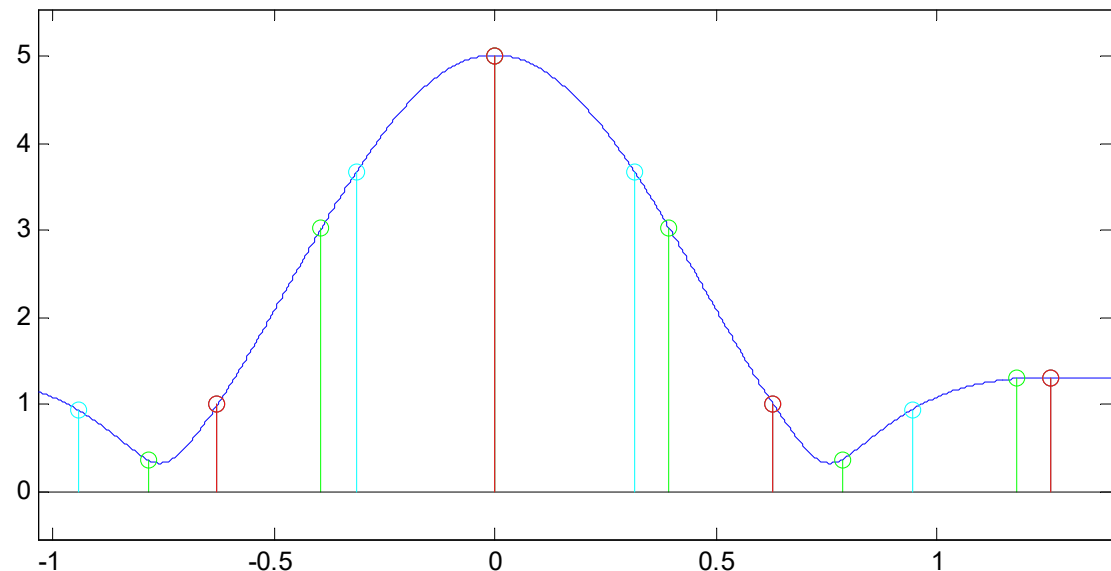
$$- x[n] = \begin{cases} y[n] & n \in [0, 1, \dots, N-1] \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad \text{megfigyelési ekvivalens}$$

- DFT mintavételezi a megfigyelési ekvivalens DTFT spektrumát:  $Y_k = X(k \cdot \Delta\omega)$

- $C^N$  feletti ortogonális transzformáció, mi a mátrixa?

# DFT pontszáma

- Megfigyelési ekvivalens DTFT spektrumát tetszőleges felbontással mintavételezhetjük:
  - Ha  $M$  minta érdekel, akkor  $M-N$  db 0-val paddelünk
  - A fizikai (folytonos) jel spektrumáról ezáltal nem tudunk meg többet!
  - 2-Radix FFT



# DFT és a DFS kapcsolata

- A DFT által meghatározott spektrum diszkrét:

$$\begin{aligned}x[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot \exp\{j \cdot 2\pi kn/N\} = \\&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot \exp\{j \cdot 2\pi kn/N + 2\pi k\} = x[n + N]\end{aligned}$$

– Lényegében **Diszkrét Fourier Sorfejtés (DFS)**

- DFT kapcsolata a Diszkrét Fourier Sorfejtéssel:
  - DFT időtartományban véges idejű diszkrét jelet vár
  - DFS periodikus, végtelen idejű diszkrét jelet vár
  - Ezt leszámítva identikusak.

# DFT és FFS kapcsolata

- Vizsgáljuk a mintavételezett jelet folytonos időben:

$$- x_s(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t) \text{ és } x_s(t + N \cdot \Delta t) = x_s(t)$$

$$- c_k = \frac{1}{N \cdot \Delta t} \int_{0-0}^{N\Delta t-0} x_s(t) \cdot \exp \left\{ -j \cdot t \cdot k \cdot \frac{2\pi}{N \cdot \Delta t} \right\} dt =$$
$$= \frac{1}{N \cdot \Delta t} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp \left\{ -j \cdot n \cdot \frac{k \cdot 2\pi}{N} \right\} \propto \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp \{ -j \cdot n \cdot k \cdot 2\pi / N \}$$

- Mintavételezés hatásai:

- DFT felbontása:  $\Delta f = f_s / N = 1 / (N \cdot \Delta t)$   $\omega_k = 2\pi \cdot k \cdot \Delta f$
- Aliasing (már volt)

# DFT és FFS kapcsolata

- Vizsgáljuk a mintavételi időben:

A megfigyelt jelrészlet egy periódusa egy folytonos periodikus jelnek.

$$- x_s(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t) \text{ és } x_s(t + N \cdot \Delta t) = x_s(t)$$

FFS

$$- c_k = \frac{1}{N \cdot \Delta_x} \int_{0-0}^{N\Delta_x-0} x_s(t) \cdot \exp\left\{-j \cdot t \cdot k \cdot \frac{2\pi}{N \cdot \Delta_x}\right\} dt =$$

$$= \frac{1}{N \cdot \Delta_x} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\left\{-j \cdot n \cdot \frac{k \cdot 2\pi}{N}\right\} \propto \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\{-j \cdot n \cdot k \cdot 2\pi/N\}$$

DFT

- Mintavételezés hatásai:

- DFT felbontása:  $\Delta f = f_s / N = 1 / (N \cdot \Delta x)$   $\omega_k = 2\pi \cdot k \cdot \Delta f$
- Aliasing (már volt)

# Spektrumszivárgás - ablakozás

- DFT kapcsolata a DTFT-vel és a DFS-el:
  - Impliciten cirkuláris jelet feltételez (DFS)
  - Tegyük fel, hogy az eredeti jelünk (végtelen terjedelmű) véges részét tudtuk mintavételezni:

$$h[n] = \text{rect}_T[n], \quad y[n] = y_\infty[n] \cdot h[n]$$

- Ideális esetben:  $Y_{(k)} = Y_\infty(k \cdot \Delta\omega)$
- A valóságban:  $Y_{(k)} = 1/2\pi \cdot (Y_\infty * H)(k \cdot \Delta\omega)$
- Cél lenne a DTFT spektrumot szivárgás nélkül mintavételezni:  $Y_{(k)} := Y_\infty(k \cdot \Delta\omega)$



# Spektrumszivárgás - ablakozás

- DFT kapcsolata a DTFT-vel és a DFS-el:

- Impliciten cirkuláris jelet feltételez (DFS)

- $\sum_{k=1}^T \delta[n-k]$ , hogy Végtelen kiterjedésű mintavételezett jel (megfigyelési ekvivalens) ni:

$$h[n] = \text{rect}_T[n], \quad y[n] = y_\infty[n] \cdot h[n]$$

- Ideális esetben:  $Y_{(k)} = Y_\infty(k \cdot \Delta\omega)$
- A valóságban:  $Y_{(k)} = 1/2\pi \cdot (Y_\infty * H)(k \cdot \Delta\omega)$
- Cél lenne a DTFT spektrumot szivárgás nélkül mintavételezni:  $Y_{(k)} := Y_\infty(k \cdot \Delta\omega)$

# Spektrumszivárgás - ablakozás

– Tehát a megfigyelt jel DFT spektruma:

$$Y_k = 1/2\pi \cdot (Y * H)(k \cdot \Delta\omega)$$

–  $h[n]$  az úgynevezett ablak függvény

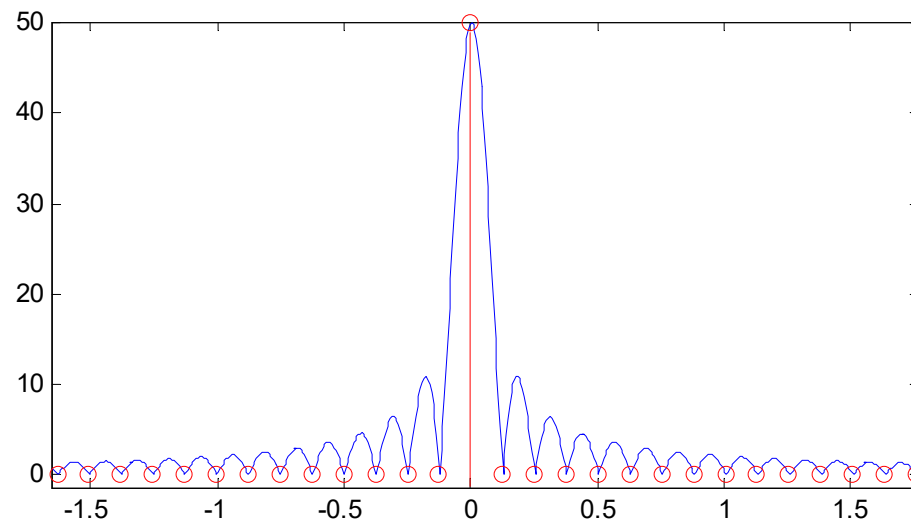
- Ha expliciten nem ablakozunk, akkor:  $h[n] = \text{rect}_T[n]$

Pl.:  $T = 50$

Kék görbe: rect ablak DTFT  
spektrum amplitúdója

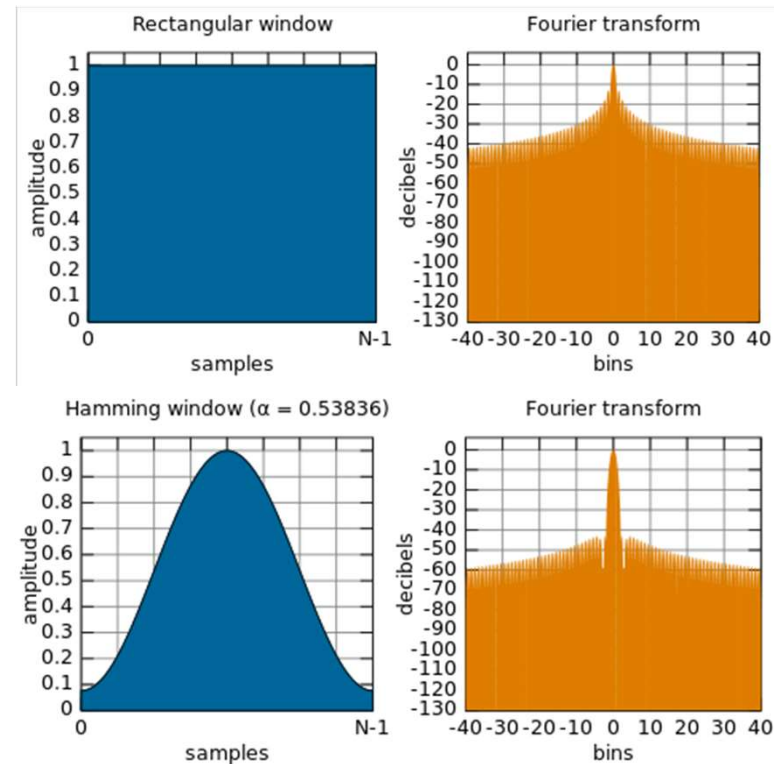
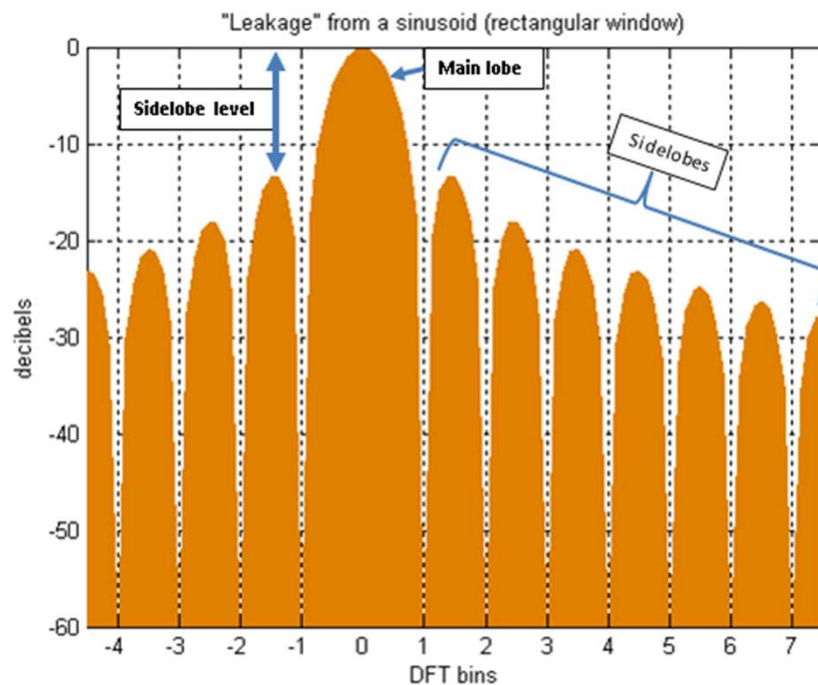
Piros pontsor: rect ablak DFT  
spektrum amplitúdója

Mikor nincs spektrumszivárgás?



# Spektrumszivárgás - ablakozás

- DFT előtti ablakozás:
  - Képtérben az általunk definiált  $h[n]$ -el szorzunk
  - Ablakfüggvények tulajdonságai:

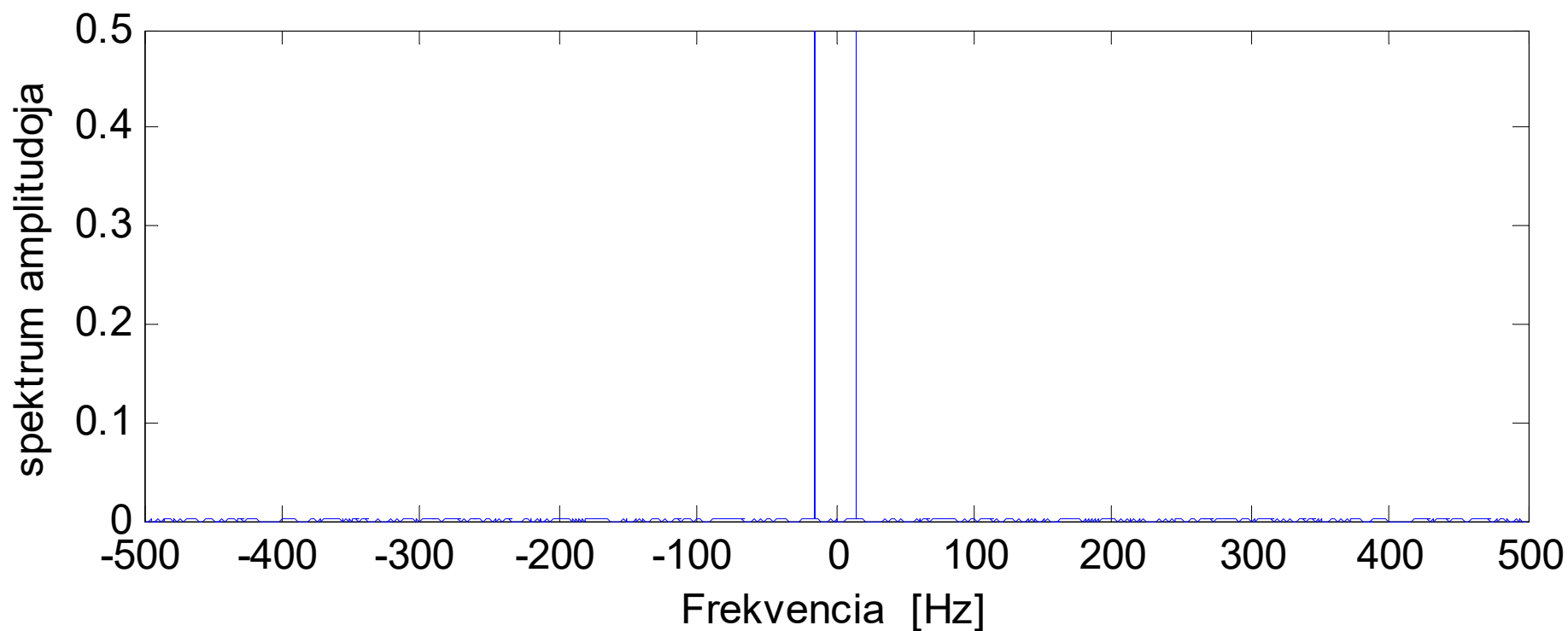


# Koherens mintavételezés

- Periodikus jelből egész számú periódusnyit mintavételezünk  $(y_N) : N/f_s = k/f, k \in \mathbb{Z}_+$ 
  - $f$ : periodikus jelünk frekvenciája,  $N$ : minták száma
  - $N$  pontos négyzetes ablak DTFT spektruma:
    - $H_{rect} = \sin(\omega/\Delta\omega)/(\omega/\Delta\omega)$
    - $H_{rect}(k \cdot \Delta\omega) = \delta_{k,0}$  ha  $k \in \mathbb{Z}$
    - $Y_s(\omega) = 0$ , ha  $\omega \neq k \cdot \Delta\omega \big|_{k \in \mathbb{Z}}$
  - Tehát a DFT által mintavételezett frekvenciákon nem torzul az ablakozás miatt a DTFT spektruma
  - Különben Spektrumszivárgás.

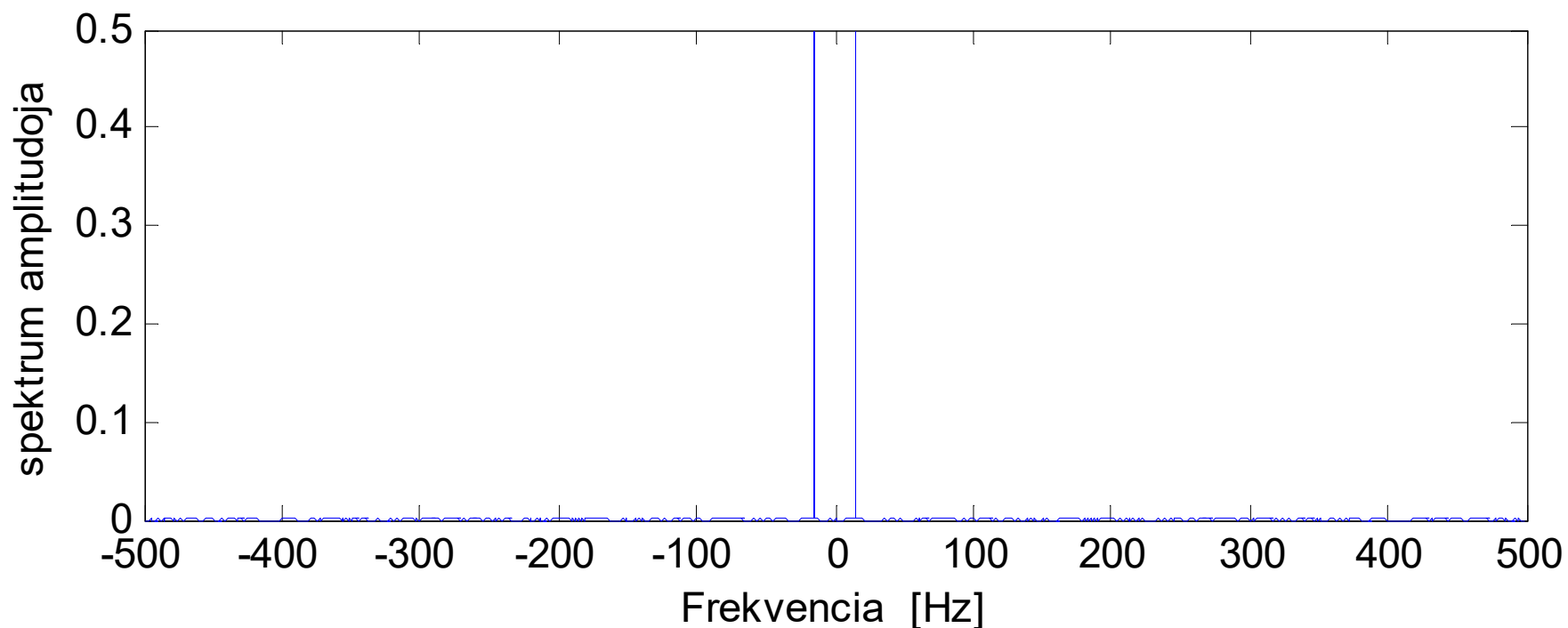
# Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

- Adott folytonos jel:  $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$



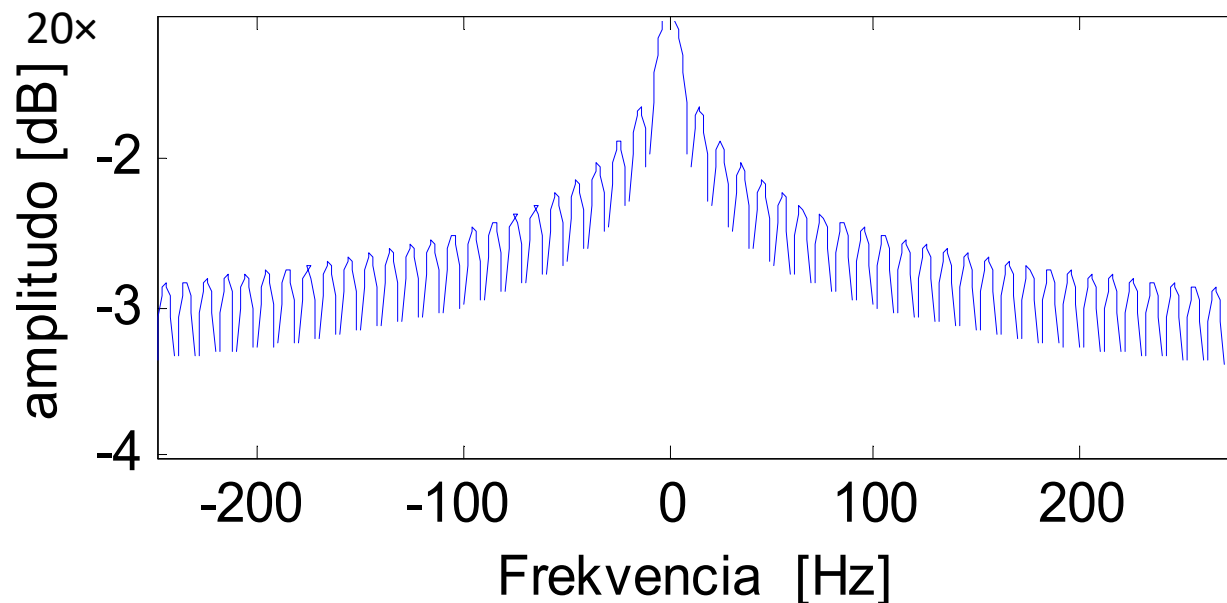
# Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

- Adott folytonos jel:  $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$ 
  - Mintavételezzük ( $y_\infty [\cdot]$ ):  $f_s = 1\text{kHz}$ ,  $N = \infty$
  - Mivel a mintavételi törvényt nem sértjük meg:



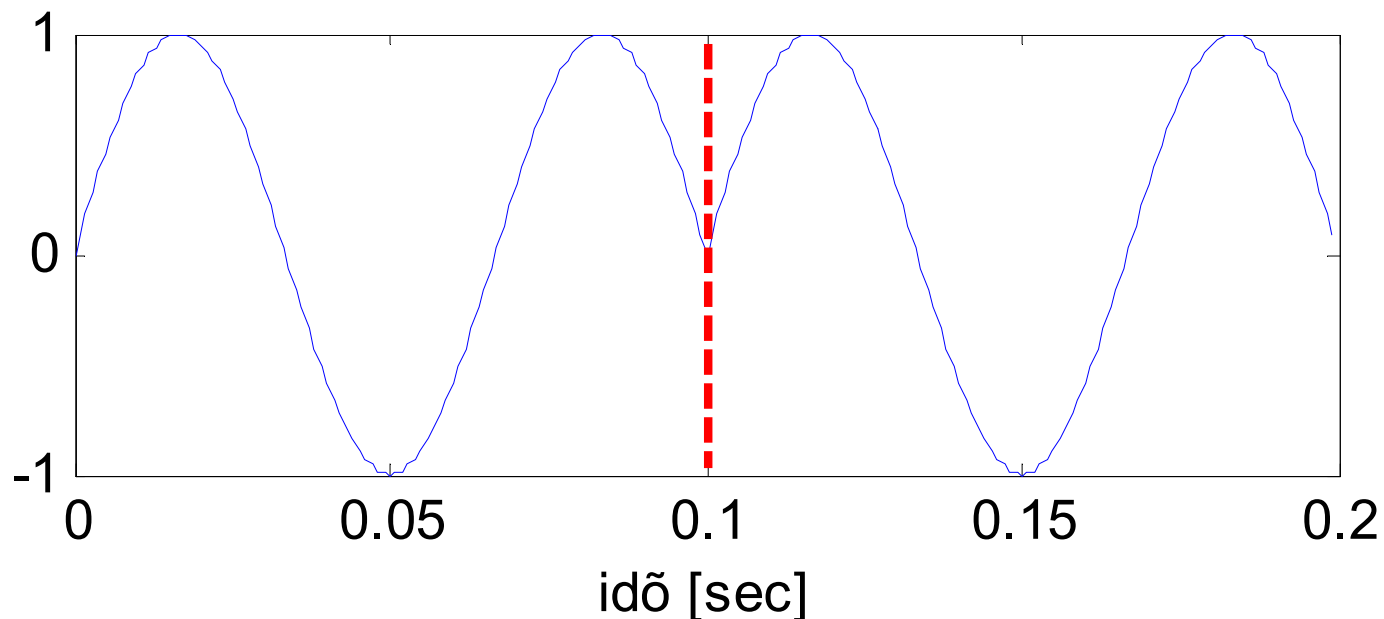
# Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

- Adott folytonos jel:  $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$ 
  - Mintavételezzük ( $y_{100}$ ):  $f_s = 1\text{kHz}$ ,  $N = 100$
  - Megfigyelési ekvivalens:  $(y_\infty \cdot \text{rect}_{100})[\cdot]$
  - Implicit ablak DTFT spektrumának részlete:



# Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

- Adott folytonos jel:  $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$ 
  - Mintavételezzük (  $y_{100}$  ):  $f_s = 1\text{kHz}$ ,  $N = 100$
  - DFT által „látott” jel:  $y_{100}[n] = (y_\infty \cdot h_{Rect})[\text{mod}_{100}(n)]$





# Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

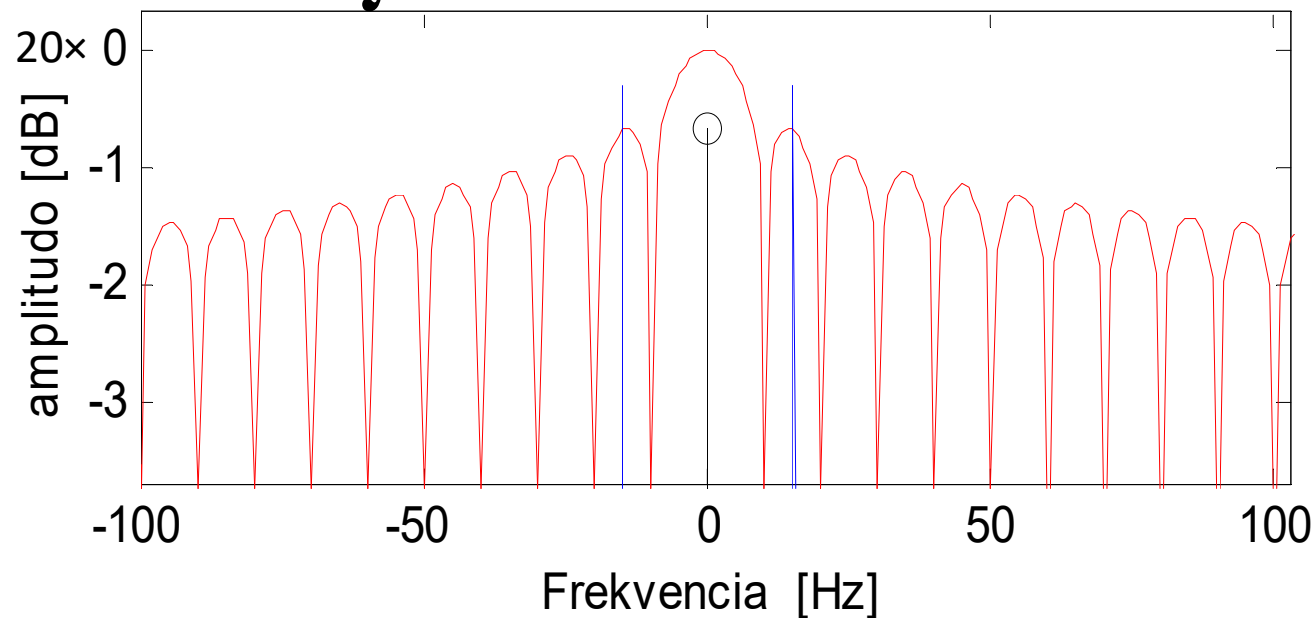
- Adott folytonos jel:  $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$ 
  - Mintavételezzük ( $y_{100}$ ):  $f_s = 1\text{kHz}$ ,  $N = 100$
  - Megfigyelési ekvivalens spektruma:  $Y_{100} \propto Y_\infty * H_{rect}$

$$Y_{100}(0) = \int Y_\infty(\tau) \cdot \frac{1}{2\pi} H_{rect}(0 - \tau) d\tau$$

Piros: ablak normált  
spektruma

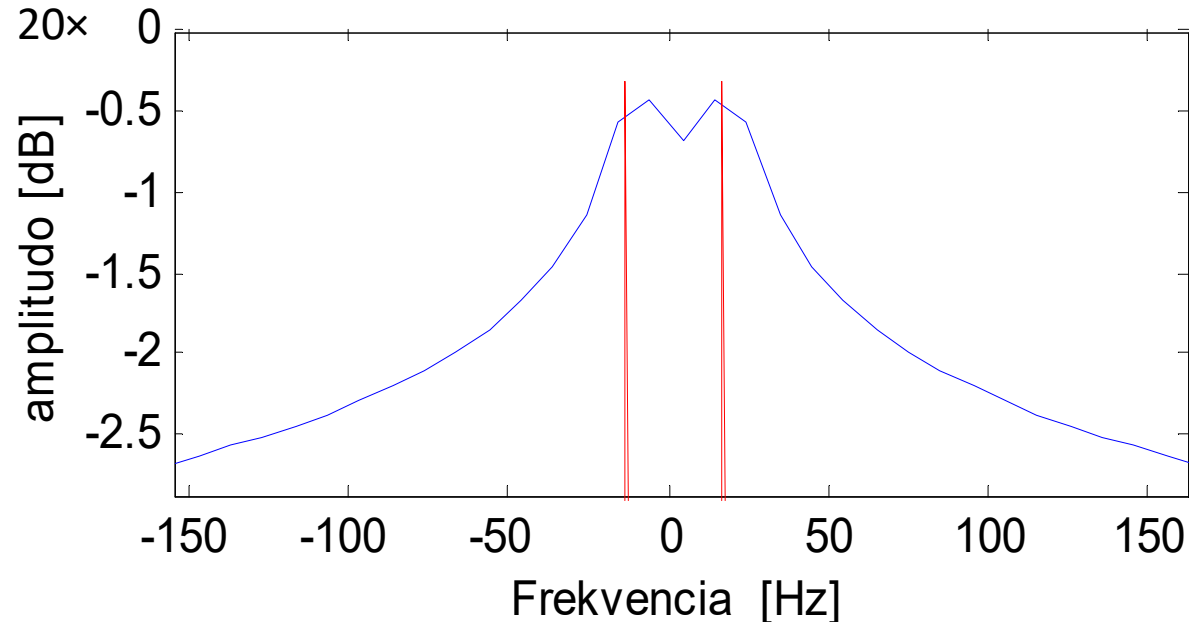
Kék: folytonos jel  
spektruma

Fekete: N=100  
mintavétellel előálló  
jel spektrumának DC  
komponense



# Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

- Adott folytonos jel:  $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$ 
  - Mintavételezzük (  $y_{100}$  ):  $f_s = 1\text{kHz}$ ,  $N = 100$
  - Megfigyelési ekvivalens spektruma:  $Y_{100} \propto Y_\infty * H_{rect}$

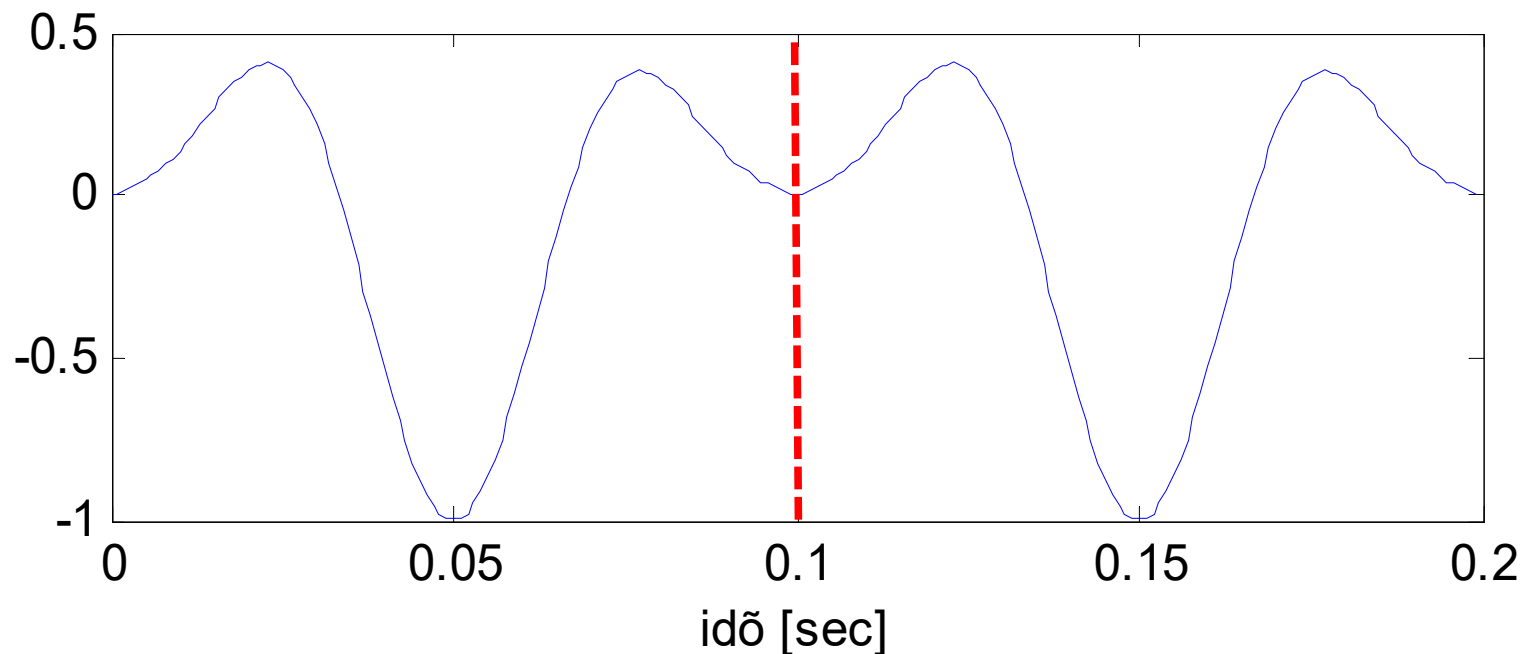


Piros: folytonos jel  
spektruma

Kék: N=100  
mintavétellel előálló  
jel spektruma

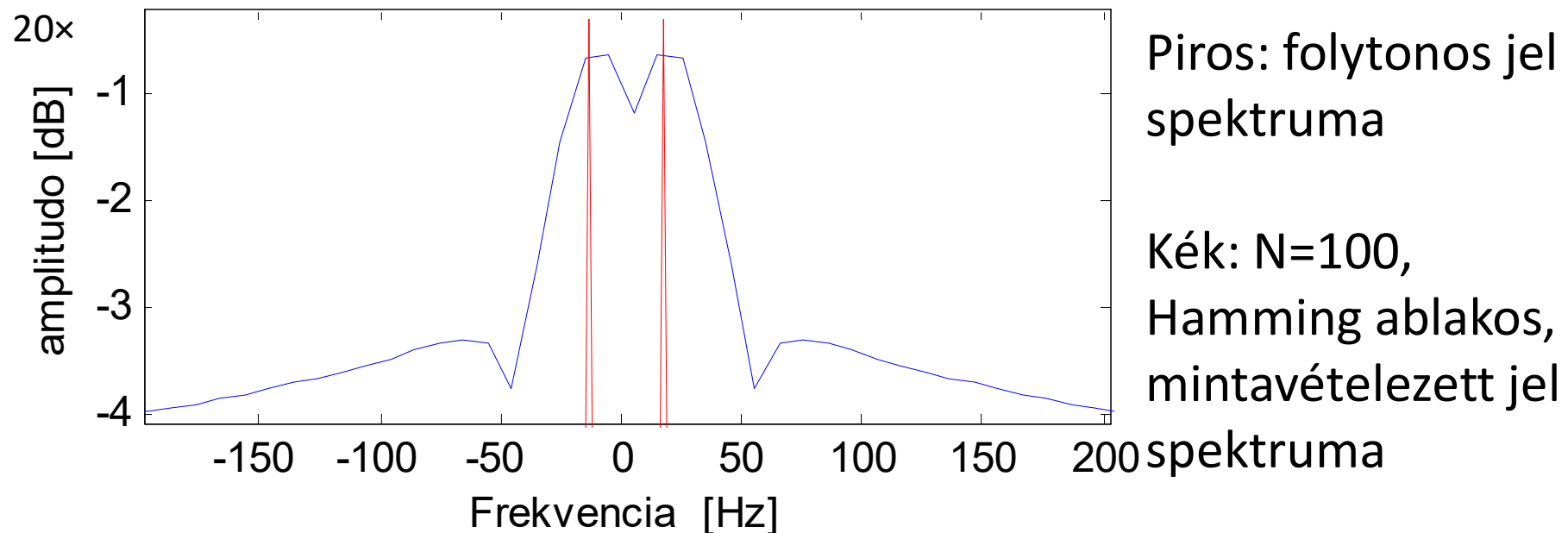
# Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés, Hamming ablak

- Adott folytonos jel:  $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$ 
  - Mintavételezzük (  $y_{100}$  ):  $f_s = 1\text{kHz}$ ,  $N = 100$
  - DFT által „látott” jel:  $y_{100}[n] = (y_\infty \cdot h_{Ham})[\text{mod}_{100}(n)]$



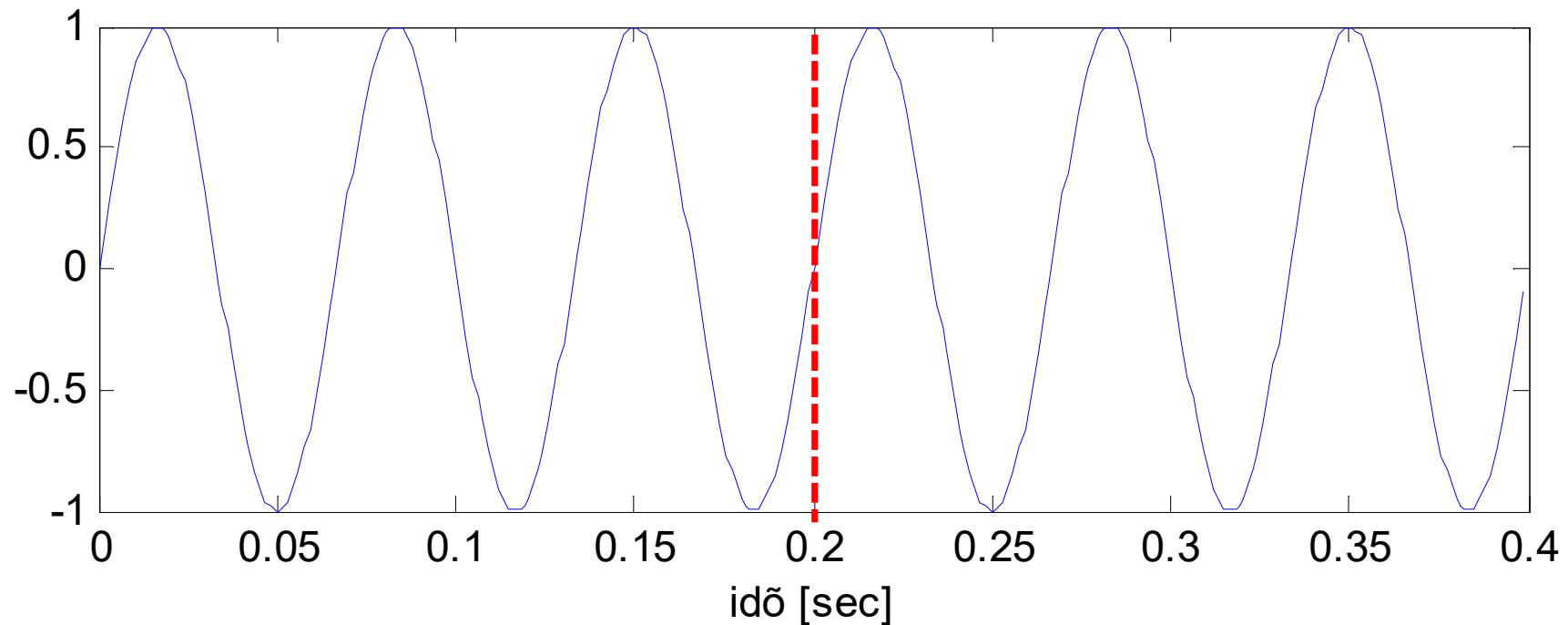
# Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés, Hamming ablak

- Adott folytonos jel:  $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$ 
  - Mintavételezzük (  $y_{100}$  ):  $f_s = 1\text{kHz}$ ,  $N = 100$
  - Megfigyelési ekvivalens spektruma:  $Y_{100} \propto Y_\infty * H_{Ham}$



# Koherens mintavételezés

- Adott folytonos jel:  $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$ 
  - Koherensen mintavételezzük ( $y_{200}$ ):  $f_s = 1\text{kHz}$ ,  $N = 200$
  - DFT által „látott” jel:  $y_{200}[n] = y_\infty[\text{mod}_{200}(n)] = y_\infty[n]$

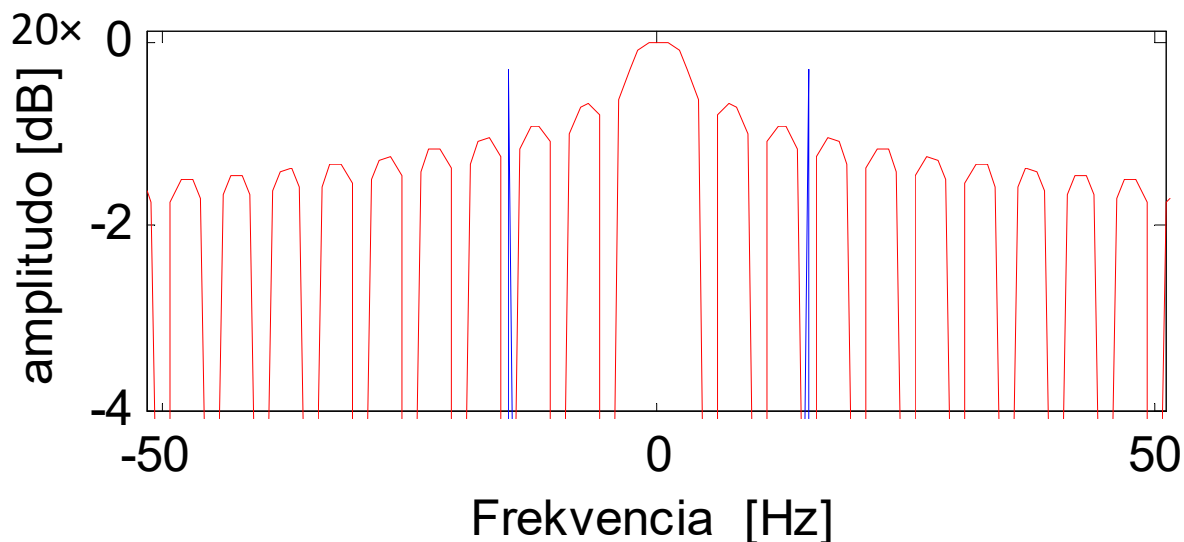


# Spektrum koherens mintavételezés esetén

- Adott folytonos jel:  $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$ 
  - Mintavételezzük ( $y_{200}$ ):  $f_s = 1\text{kHz}$ ,  $N = 200$
  - Megfigyelési ekvivalens spektruma:  $Y_{200} \propto Y_\infty * H_{rect}$

$$Y_{200}(0) = \int Y_\infty(\tau) \cdot \frac{1}{2\pi} H_{rect}(0 - \tau) d\tau$$

Piros: ablak normált spektruma

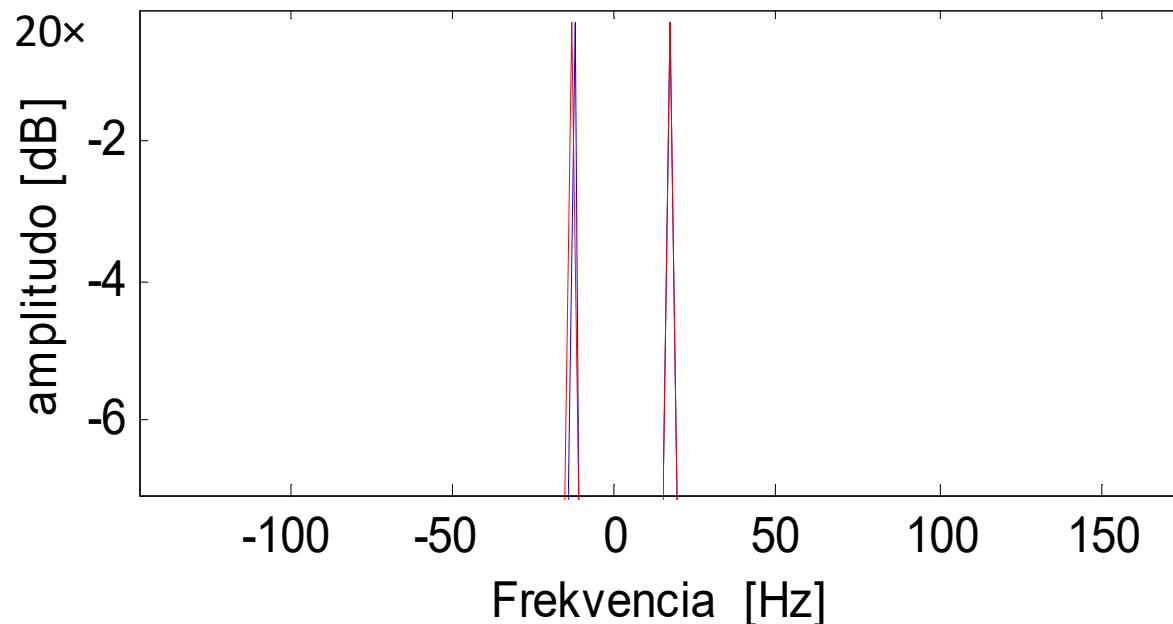


Kék: folytonos jel spektruma

Fekete:  $N=200$  mintavétellel előálló jel spektrumának DC komponense ( $\log(0)$ )

# Spektrum koherens mintavételezés esetén

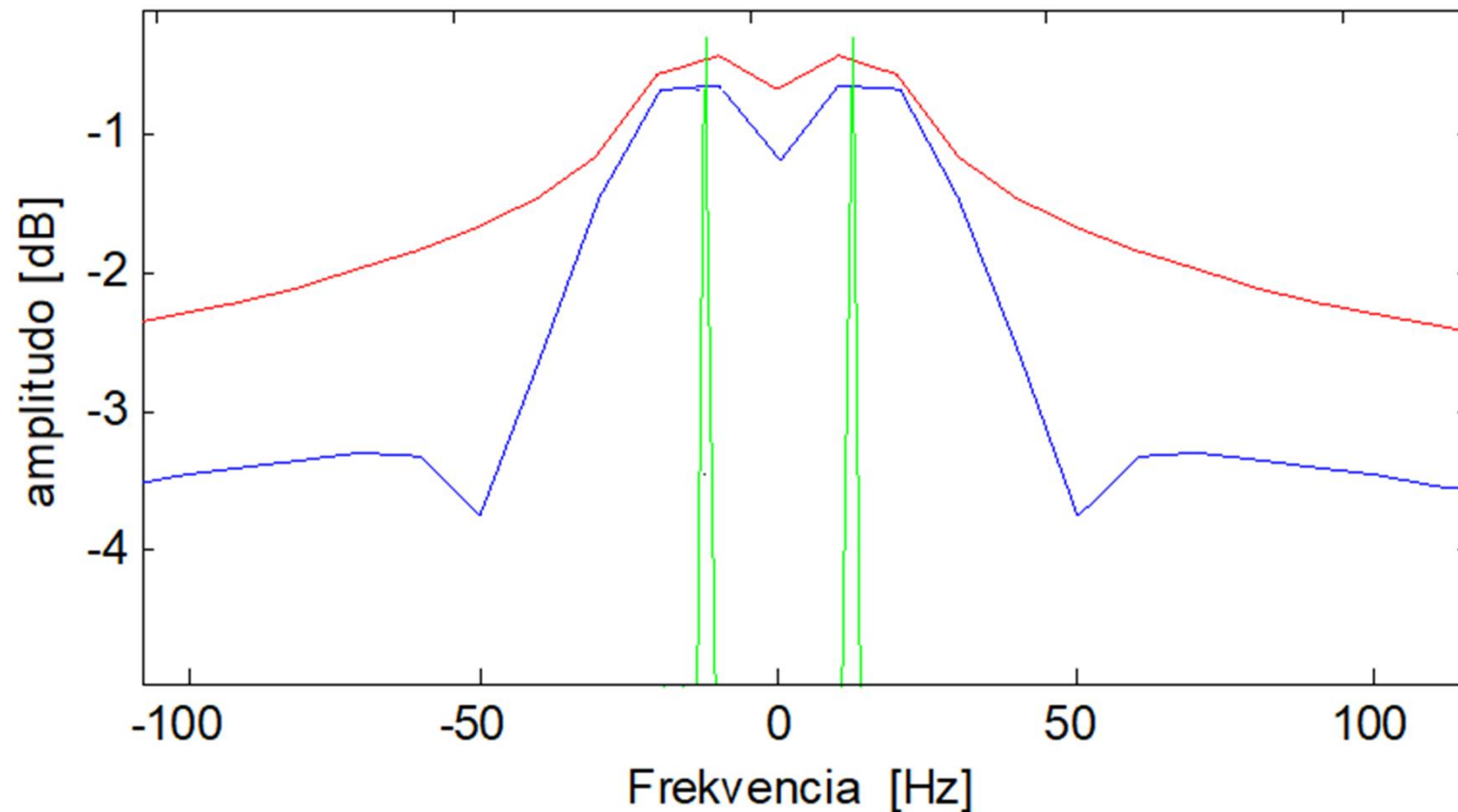
- Adott folytonos jel:  $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$ 
  - Koherensen mintavételezzük ( $y_{200}$ ):  $f_s = 1\text{kHz}$ ,  $N = 200$
  - Megfigyelési ekvivalens spektruma:  $Y_{200} \propto Y_\infty * H_{rect}$



Piros: folytonos jel  
spektruma

Kék:  $N=200$   
mintavétellel előálló  
jel spektruma

# Koherensen mintavett / ablakozott, nem koherensen mintavett jelek spektruma



Zöld: koherensen mintavételezett jel spektruma, kék: Hamming ablakos, piros: téglalap ablakos spektrum



# 2D DFT

Többi transzformáció esetén is hasonló a többdimenziós eset

- Analízis irány:

$$F_{u,v} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f[m,n] \exp\{-2\pi j \cdot (u \cdot m/M + v \cdot n/N)\} =$$
$$= \sum_{m=0}^{M-1} \left( \sum_{n=0}^{N-1} f[m,n] \cdot \exp\{-2\pi j \cdot (v \cdot n/N)\} \right) \exp\{-2\pi j \cdot (u \cdot m/M)\}$$

- Tulajdonságok:

– Periodikus:  $[M,N]$  szerint

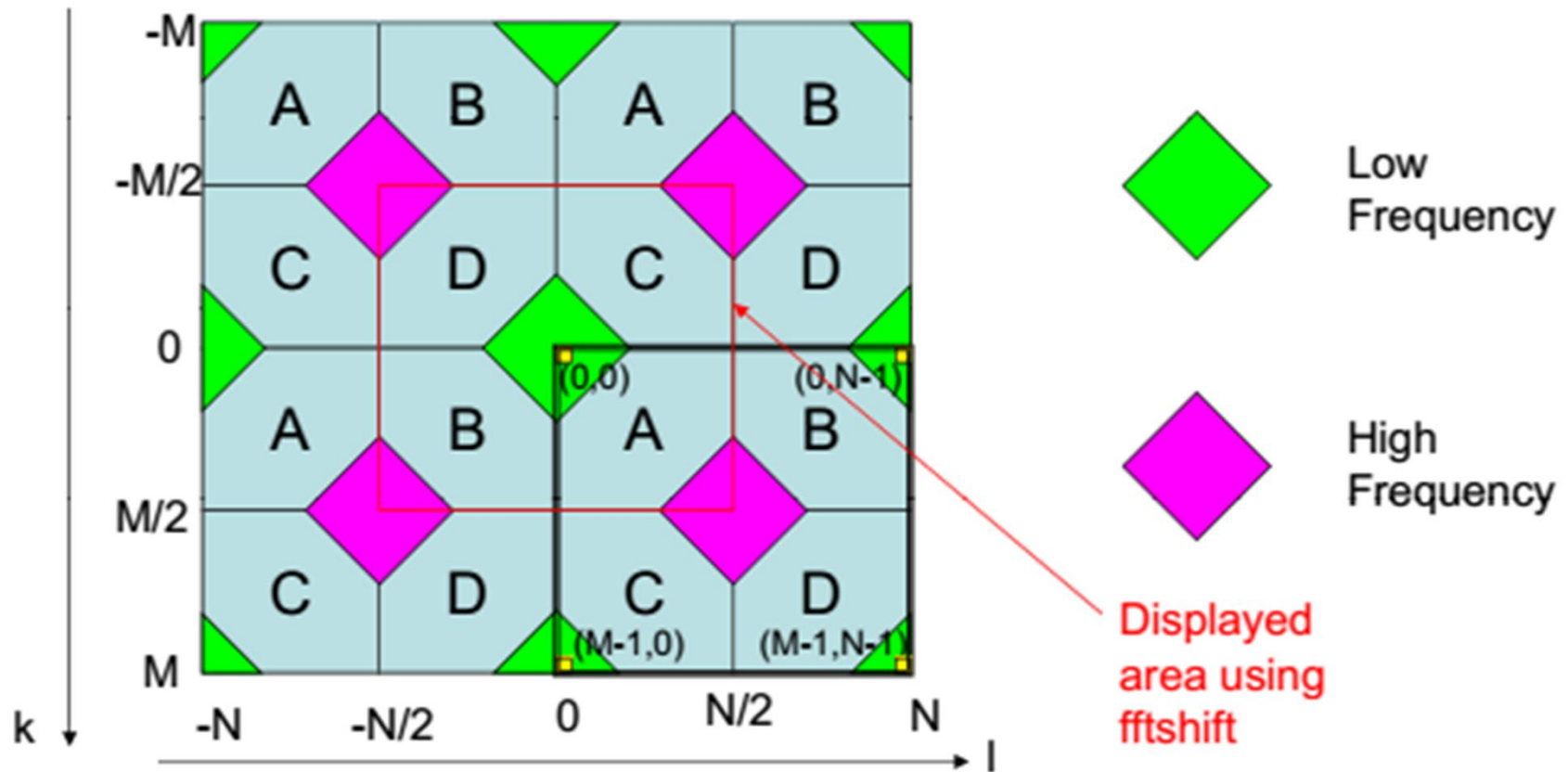
– Valós jel esetén:  $F_{u,v} = \overline{F_{-u,-v}} = \overline{F_{M-u,N-v}}$

• Ha  $M, N$  páros:  $F_{M/2+u,N/2+v} = F_{M/2-u,N/2-v}$

- Spektrum hullámfrontos interpretációja

# 2D DFT spektrum

- Spektrum blokkjai:



# 2D DFT spektrum gépi ábrázolása

- Konjugált szimmetria valós jelek esetén:

0	1	2	3	4	3	2	1
5	6	7	8	9	33	32	31
10	11	12	13	14	30	29	28
15	16	17	18	19	27	26	25
20	21	22	23	24	23	22	21
15	25	26	27	19	18	17	16
10	28	29	30	14	13	12	11
5	31	32	33	9	8	7	6

M=N=8

 real      Conjugate pairs

 Nyquist frekvenciához tartozó komponens

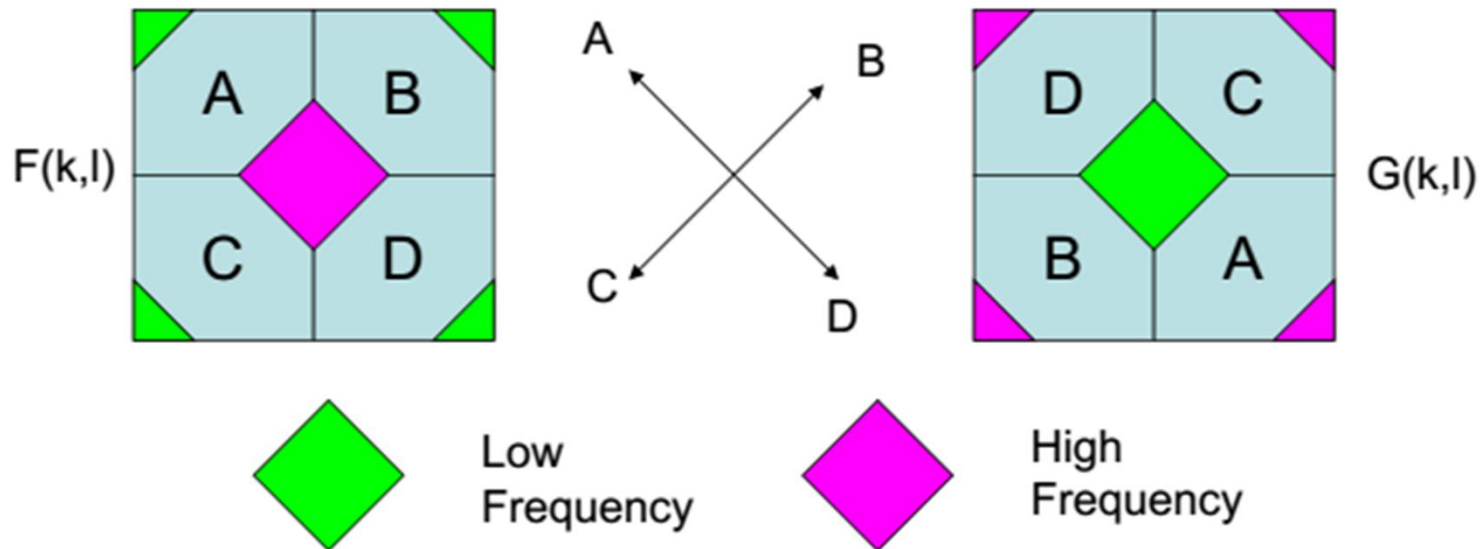
0	1	2	3	4	4	3	2	1
5	6	7	8	9	40	39	38	37
10	11	12	13	14	36	35	34	33
15	16	17	18	19	32	31	30	29
20	21	22	23	24	28	27	26	25
20	25	26	27	28	24	23	22	21
15	29	30	31	32	19	18	17	16
10	33	34	35	36	14	13	12	11
5	37	38	39	40	9	8	7	6

M=N=9

# 2D DFT spektrum

- Általában a DC komponenst „csavarjuk” középre:

– Ampl. moduláció:  $g[m,n] = f[m,n] \cdot (-1)^{(m+n)}$

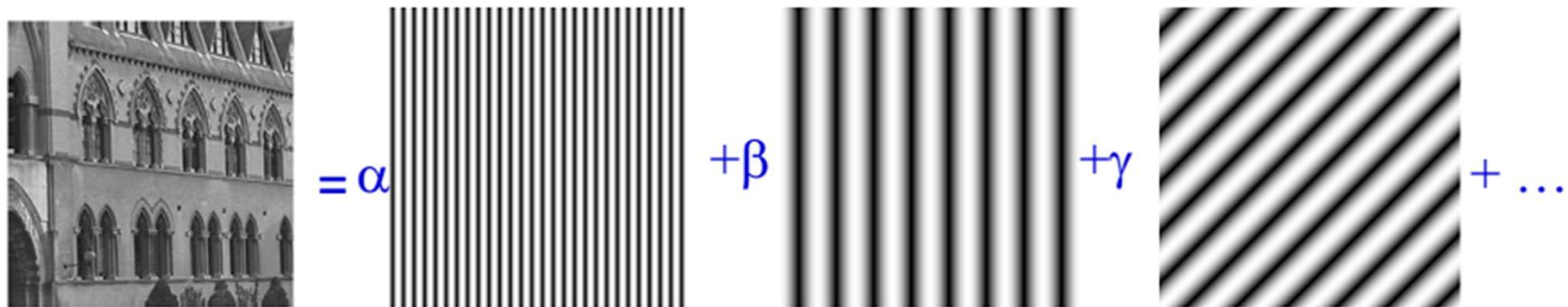


# 2D DFT Számolási tulajdonságok

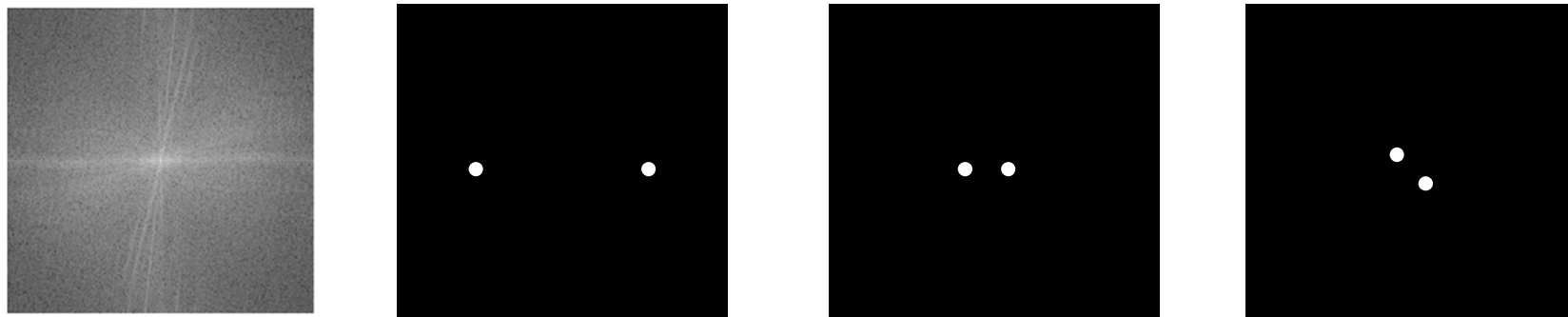
- 1D DFT komplexitása:
  - Direkt módszer:  $O(N^2)$
  - FFT:  $O(N \times \log(N))$ , hatékonyan számítható, ha  $N$  2 hatvány (radix-2 Cooley-Tukey)
- 2D DFT komplexitása ( $N \times N$ -es képre):
  - Direkt számítás:  $O(N^4)$
  - Szeparálással:  $O(N^3)$
  - Szeparálás + FFT:  $O(N^2 \times \log(N))$
- Half Complex ábrázolással helyben tárolható!

# 2D DFT Vizuális értelmezés

- Lényegében egy bázis transzformáció ortogonális bázisokra (szinuszos hullámok)

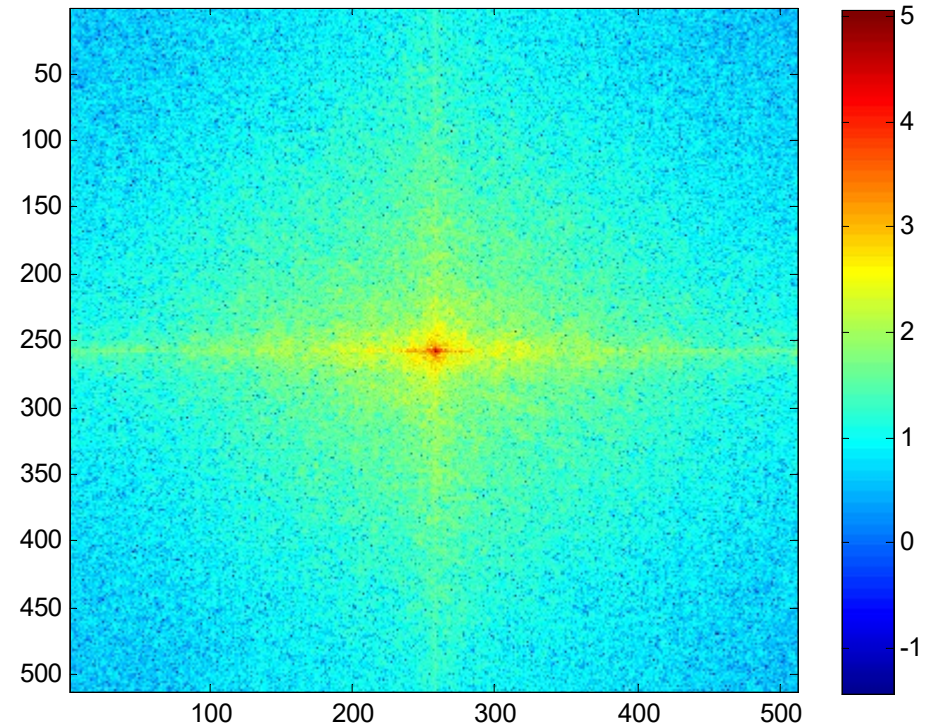


Spektrum amplitudója:



# Képek spektrumának jellemzői

- Alacsony frekvenciákon nagy energia:



Spektrum amplitúdója logaritmikus skálán

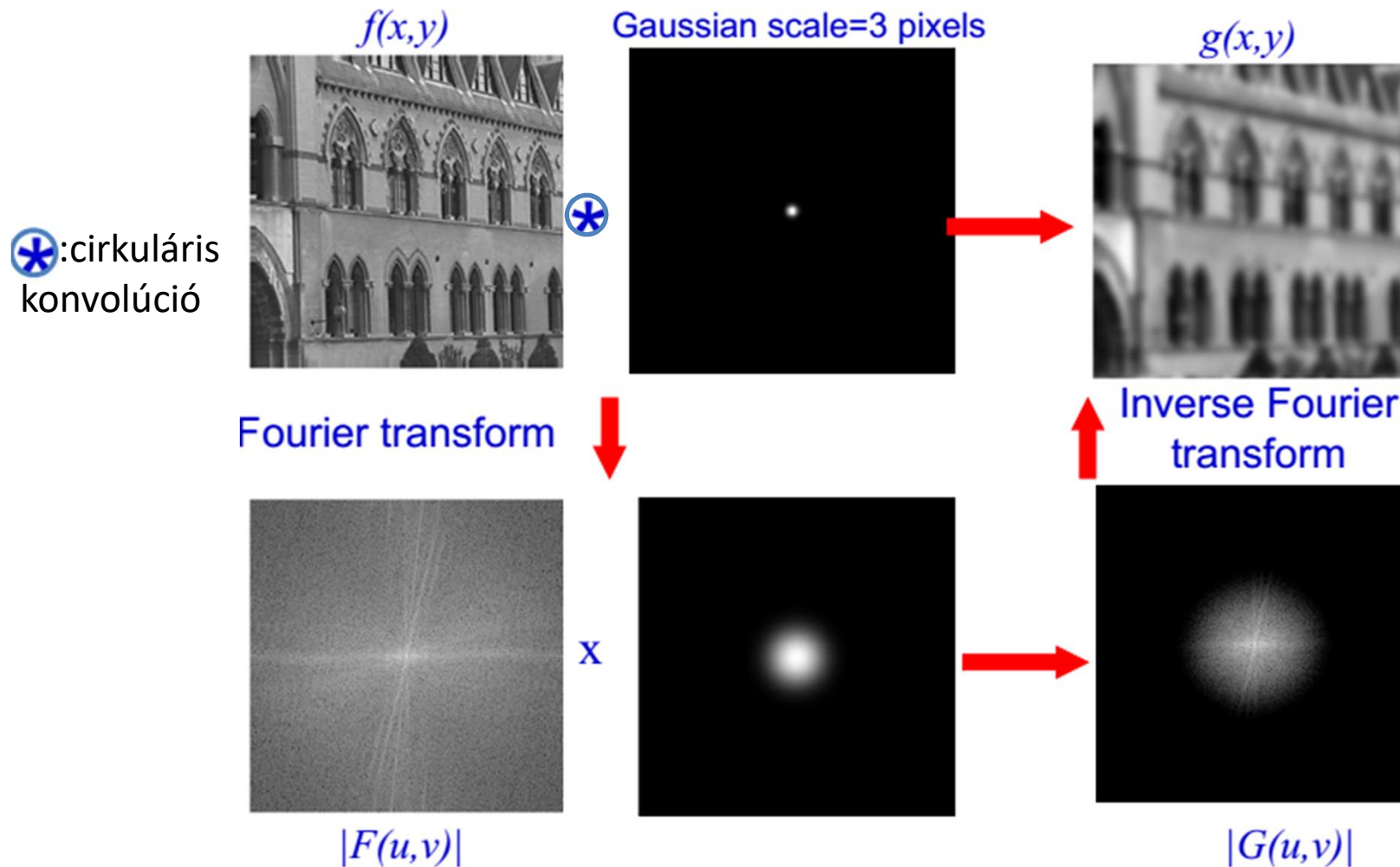
# 2D DFT konvolúciós tétele:

- DFS- es analógia – cirkularitás:
  - $(f \otimes g)[n] = \sum_{m=0}^N f[m] \cdot g[\text{mod}_N(n-m)] = (f' * g')[n]$
  - $f'[n] = f[\text{mod}_N(n)]$ , míg  $g'[m] = g[\text{mod}_N(m)]$
- Mit tegyünk, ha  $f * g$ -t akarjuk DFT-vel számolni?
  - Terjesszük ki  $f$  és  $g$  méretét  $[N+M]$  hosszúra:
    - Ezt időtartomány / síktartományban is meg kell tenni
    - Általános módszerek: 0-val paddelés, kép széleire tükrözés, alul-áteresztő szűréseknél súlyozás, kiterjesztés a kép szélső pixelének intenzitásával, stb.
  - $5 \times 5$ -ös kernel esetén már gyorsabb



# Konvolúció tétel fontossága

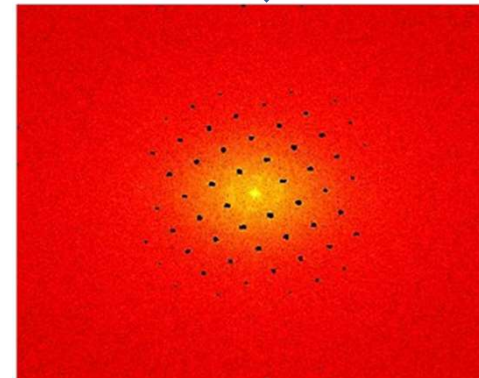
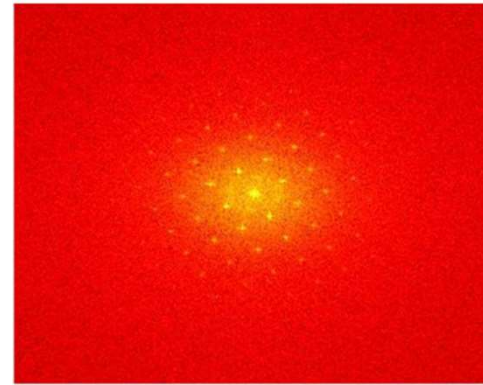
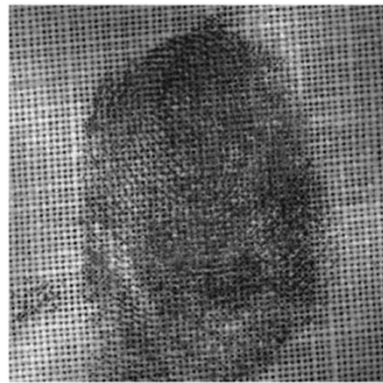
- Lineáris szűrések frekvenciatérben:



# 2D DFT Példa – periodikus textúra

ampl. moduláció

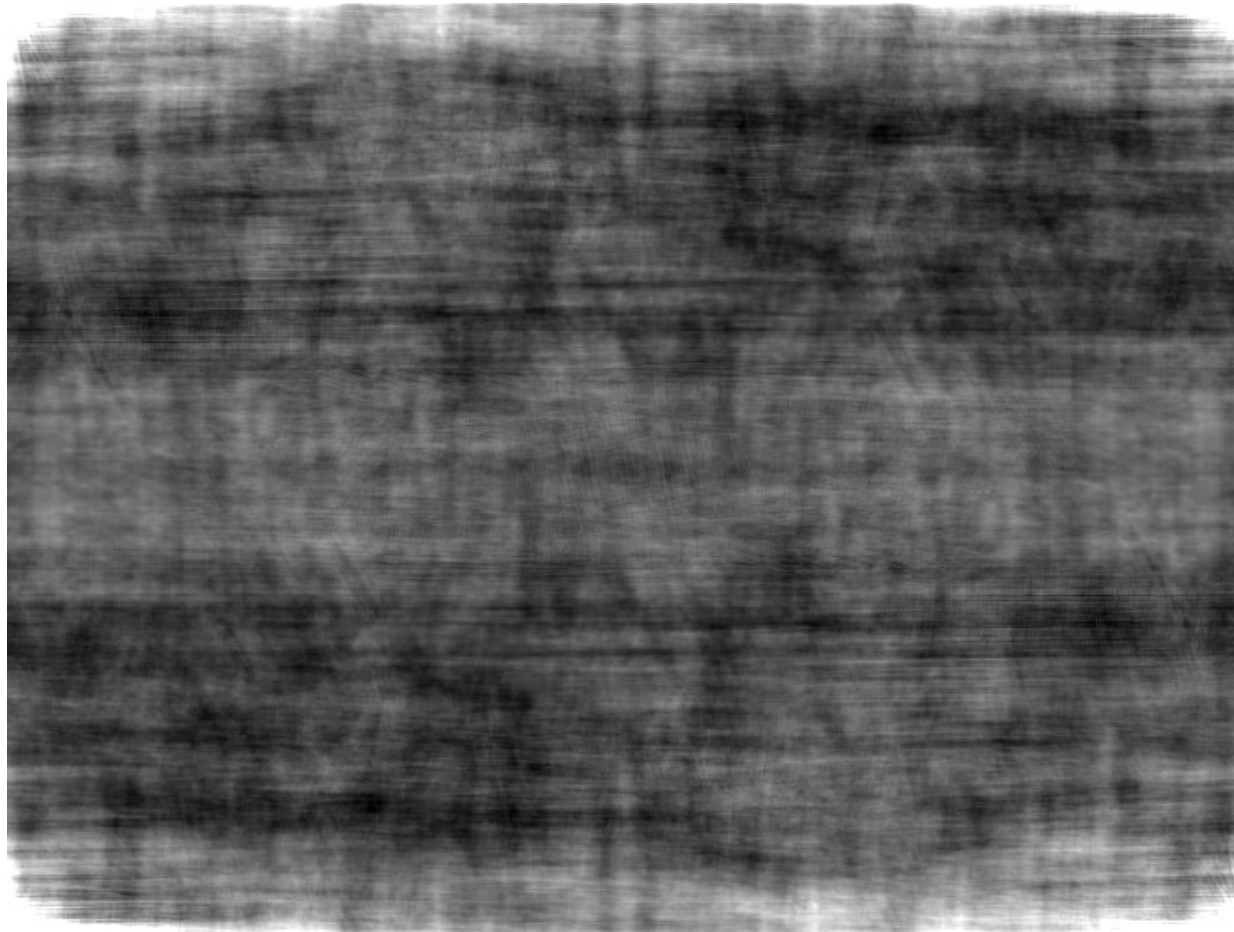
- Periodikus mintázat  $\Leftrightarrow$  csúcsok a spektrumban:



# 2D DFT példa – rekonstrukció spektrum amplitúdóból és fázisból



2D DFT példa – spektrum  
amplitúdójából rekonstruált kép



# 2D DFT példa – spektrum fázisából rekonstruált kép

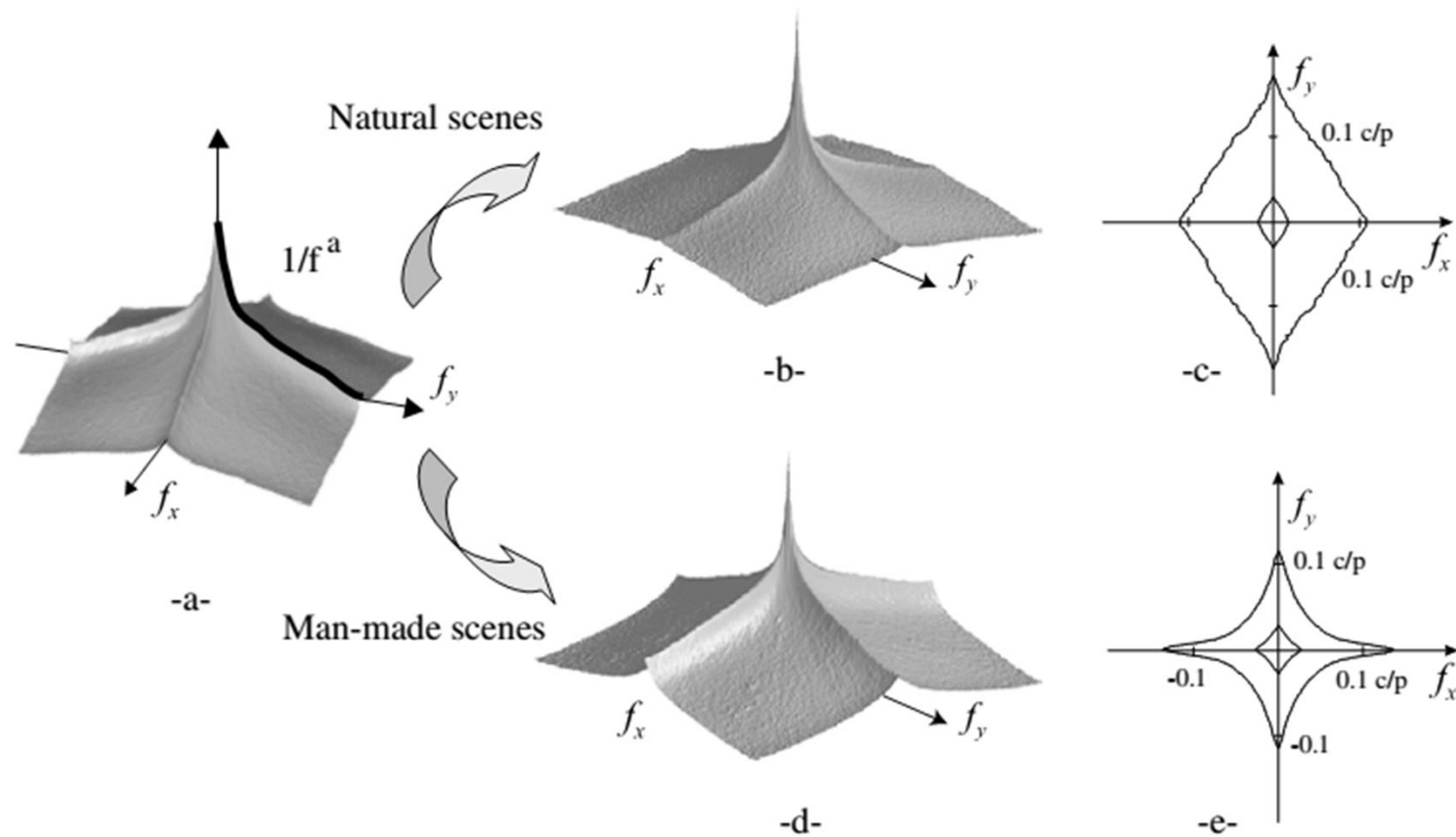


# Polár koordinátás DFT

- Motiváció:
  - Radon transzformáció és annak invertálása
  - Regisztráció: elforgatás és eltolás könnyen számolhatóvá válik
- Számítása – folytonos eset:
  - $F\{\theta, \rho\} = \iint_{x,y} f(x, y) \cdot \exp(-2\pi j \cdot \rho \cdot (x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta))) dydx$
  - Nem szeparábilis
  - Fourier vetítősík tétel
    - Spektrum vonal profiljai  $\Leftrightarrow$  Radon transzformáció 1D Fourier transzformáltjai

Majd a rekonstrukciónál  
bizonyítjuk is!

# Digitális képek átlagos energiaspektruma



# Frekvenciatartomány és emberi látás

- Campbell-Robson kontraszt érzékenységi görbe:

