

# Rekonstrukciós eljárások

Orvosi képdiagnosztika

2018 ősz

# Előadások témája

- Röntgen tomográfia fizikai és matematikai alapjai – 2D Radon transzformáció, szűrt visszavetítés:
  - Fan – beam / Cone – beam felvételi elrendezések esete
- Általánosított (3D) röntgen tomográfia alapjai – ART rekonstrukciós eljárások
- Pozitron emissziós tomográfia alapjai – ML-EM statisztikai rekonstrukciós eljárás
- Modell alapú / CS rekonstrukciós eljárások
- Tomoszintézis felvételi elrendezés – MITS rekonstrukció
- Rekonstrukciós eljárások minősítése

# Röntgen tomográfia alapjai

- Általánosított Beer-Lambert törvény:

$$\mathbf{I}_{(x_0, y_0)} = \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} I_0(E) \cdot \exp \left\{ - \int_{P(x_0, y_0)} \mu(E, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \right\} dE :$$

- $I_0(E)$ : röntgensövet elhagyó  $E$  energiájú fotonok intenzitása (üres térfogat esetén a detektor által érzékelt fotonok száma)
- $P(x, y)$ : pontszerű sugárforrást a detektor  $(x, y)$  koordinátájú pontjával összekötő szakasza a  $3d$  térnek
- $\mu(E, \mathbf{x})$ : a vizsgált térfogat  $\mathbf{x}$  koordinátájú pontjának lineáris csillapítási együtthatója  $E$  energián
- Egyszerűsített Beer-Lambert törvény:  $I_0(E) \cdot \exp \left\{ - \int_{P(x_0, y_0)} \mu(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right\}$  (monokróm spektrum esete)


# Röntgen tomográfia alapjai

- Monokróm spektrumú sugárzás esete:

- Általánosan alkalmazott feltételezés
- Rekonstrukció célja a lin. csillapítási együtthatók meghatározása az alábbi összefüggés invertálásával:

$$-\ln\left(\mathbf{I}_{(x,y)}/I_0\right) = \int_{P(x_0,y_0)} \mu(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

- Valódi röntgensugarak ezzel szemben:

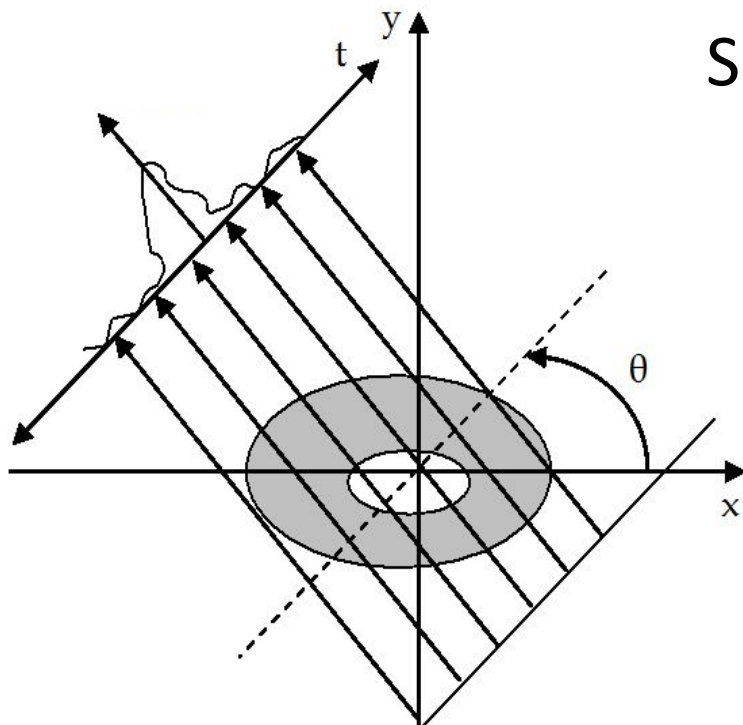
- Polikromatikusak  sugárkeményedés problémája
- Szóródnak: nem igaz, hogy csak a vetítősugár mentén elhelyezkedő képletek számítanak.
- Projekciók egyéb zajjal is terheltek : kis intenzitásnál rossz SNR

# Röntgen alapú képalkotás

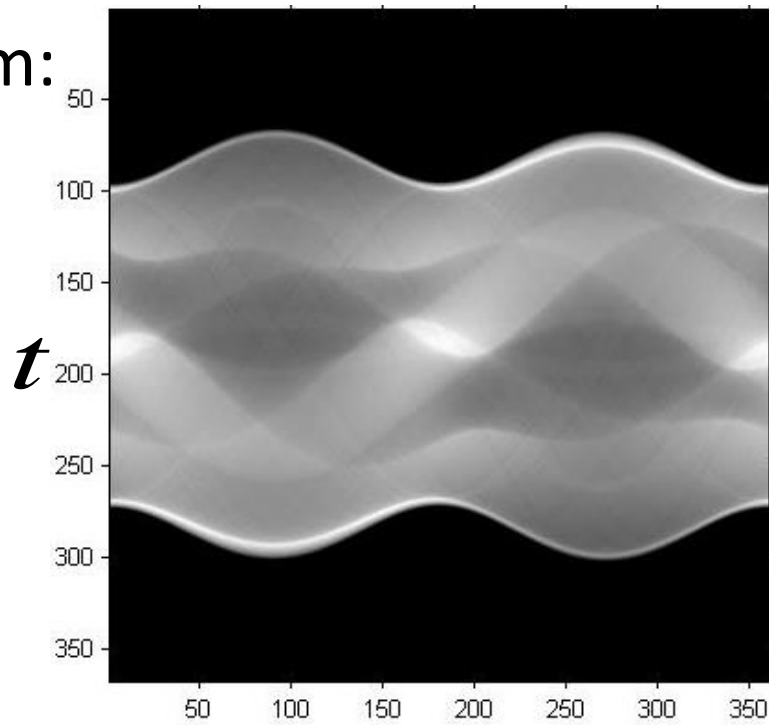
- Konvencionális P-A röntgen:
  - Nincs rekonstrukció
- Számítógépes tomográfia (CT):
  - Párhuzamos vetítősugarakon alapuló eljárások (kevés ilyen eszköz van csak forgalomban), cserébe egyszerű elmélet
  - Legyező (Fan-beam) helikális CT – leggyakoribb típus
  - Cone-beam CT, ennek speciális változata a Tomoszintézis
- Orvosi képdiagnosztika alapvető eszköze:
  - Mivel a röntgen sugárzás ionizál, illetve maga a vizsgálat itthon mércével drága, ezért csak indokolt esetben végzik

# 2D Radon transzformáció:

- Radon transzformáció (2D szelet 1D projekciók):
  - Input: 2D Descartes - koordinátarendszerbeli kép
  - Output: sinogram – 2D polár-koordinátarendszerbeli kép



Sinogram:



# Radon transzformáció – Fourier vetítősík tétel

- Radon transzformáció (2D szelet 1D projekciók):

- Vetítősugarak merőlegesek az x tengellyel  $\theta$  szöget bezáró egyenesre:  $t = x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta)$

- Vetítősugarak mentén integráljuk a szelet elemeit:

$$P_{\theta}(t) = \iint_{x,y} f(x, y) \cdot \delta(x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta) - t) dx dy$$

- Legyen  $S_{\theta}(\rho) = FT_{\rho} \{P_{\theta}(t)\} = \int P_{\theta}(t) \cdot \exp(-2\pi j \cdot t \rho) dt$

- Fourier vetítősík tétel származtatása:

$$S_{\theta}(\rho) = \iiint_{x,y,t} f(x, y) \cdot \delta(x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta) - t) \cdot \exp(-2\pi j \cdot \rho t) dt dy dx$$

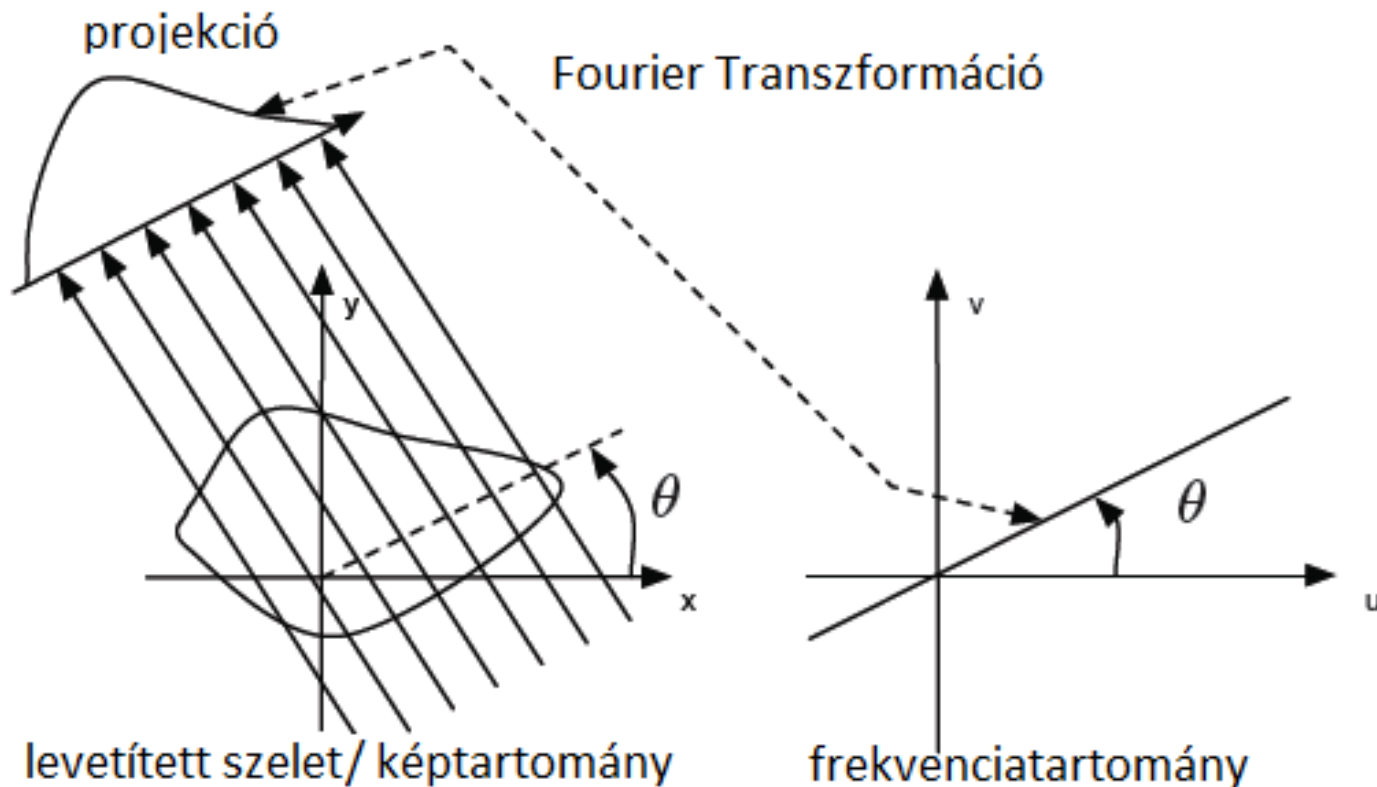
$$S_{\theta}(\rho) = \iint_{x,y} f(x, y) \cdot \exp(-2\pi j \cdot \rho \cdot (x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta))) dy dx$$

# Fourier vetítősík tétele

– Lényegében  $f$  spektrumának egy szakaszát kaptuk meg:

$$S_{\theta}(\rho) = F(\rho \cdot \cos(\theta), \rho \cdot \sin(\theta))$$

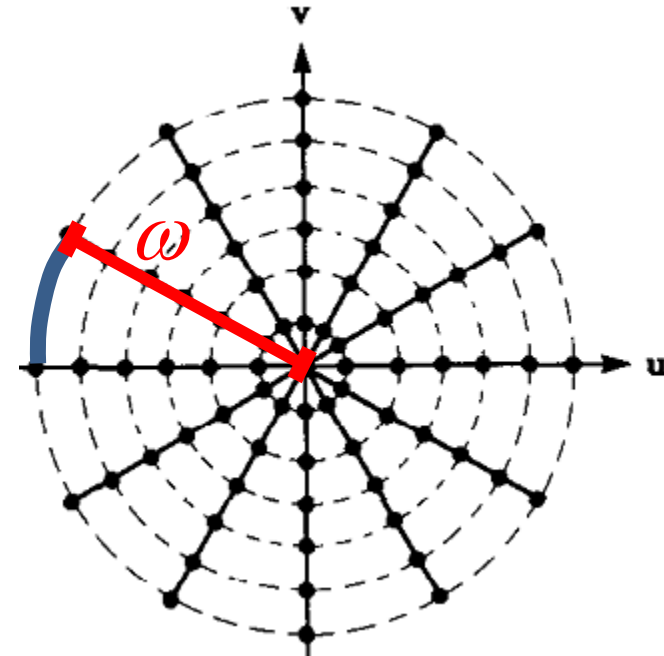
- Vizuális interpretáció:





# Rekonstrukció – FBP alapötlete

- Rekonstrukció célja: Radon Transzf. invertálása
- Fourier vetítősík tétel értelmében a vizsgált szelet spektrumainak bizonyos részeit ismerjük:
  - Az ismert részeket „illesszük” egy üres spektrumba
  - Polár koordinátás frekvencia sugarának függvényében a spektrum mintavételi helyeinek eltérő a távolsága:
$$K(\omega) = 2 \cdot |\omega| \cdot \pi \cdot (2\pi / \Delta\theta)$$
  - Korrekció: spektrumba illesztés előtt  $|\omega|$ -val súlyozunk frekvenciatérben (ez az ún. rámpaszűrés).



# Szűrt visszavetítés (FBP) származtatása

- FT inverze:  $f(x, y) = \iint_{u, v} F(u, v) \cdot \exp(j2\pi(ux + vy)) dv du$

- Fourier vetítősík miatt a spektrumot polárkoordináta-rendszerben ismerjük:  $u = \omega \cdot \cos(\theta)$ ;  $v = \omega \cdot \sin(\theta)$

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega, \theta) \cdot \exp(j2\pi \cdot \omega(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))) \cdot J d\omega d\theta$$

$$- J = \begin{vmatrix} \partial u / \partial \omega & \partial u / \partial \theta \\ \partial v / \partial \omega & \partial v / \partial \theta \end{vmatrix} = \dots = \omega, \quad du dv = J d\omega d\theta$$

– Továbbiakban  $k := x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$

- $f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega, \theta) \cdot \exp(j2\pi \cdot \omega k) \cdot \omega d\omega d\theta$

# Szűrt visszavetítés (FBP) származtatása

- Vágjuk szét a külső integrált:

$$f(x, y) = \int_0^\pi \int_0^\infty F(\omega, \theta) \cdot e^{j2\pi \cdot \omega k} \omega d\omega d\theta + \int_\pi^{2\pi} \int_0^\infty F(\omega, \theta) \cdot e^{j2\pi \cdot \omega k} \omega d\omega d\theta$$

- $f(\cdot, \theta)$  a sinogram egy oszlopa, melynek definíciójából (Radon transzf.) következik, hogy  $F(\omega, \theta) = F(-\omega, \theta + \pi)$ , hiszen:

$$F(\omega, \theta + \pi) = \int_{t=-\infty}^{\infty} P_{\theta+\pi}(t) \cdot \exp(-j2\pi\omega t) dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} P_\theta(-t) \cdot \exp(-j2\pi\omega t) dt$$

$$F(\omega, \theta + \pi) = \int_{l=-\infty}^{-\infty} P_\theta(l) \cdot \exp(-j2\pi(-\omega)l) \frac{\partial t}{\partial l} dl = F(-\omega, \theta) \quad l = -t$$

- Felhasználtuk, hogy  $k = x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$ , illetve  $\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$  és  $\sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$

# Szűrt visszavetítés (FBP) származtatása

- Vágjuk szét a külső integrált:

$$P_{\theta}(l) \triangleq f(l, \theta) \int_{-\infty}^{\infty} f(l, \theta) \cdot e^{j2\pi \cdot \omega k} \omega d\omega d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega, \theta) \cdot e^{j2\pi \cdot \omega k} \omega d\omega d\theta$$

- $f(\cdot, \theta)$  a sinogram egy oszlopának a Radon transzf.  $S_{\theta}(\omega) \triangleq F(\omega, \theta)$  ciójából (Radon transzf.) következik, hogy  $F(\omega, \theta) = F(-\omega, \theta + \pi)$ , hiszen:

$$F(\omega, \theta + \pi) = \int_{t=-\infty}^{\infty} P_{\theta+\pi}(t) \cdot \exp(-j2\pi\omega t) dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} P_{\theta}(-t) \cdot \exp(-j2\pi\omega t) dt$$

$$F(\omega, \theta + \pi) = \int_{l=-\infty}^{\infty} P_{\theta}(l) \cdot \exp(-j2\pi(-\omega)l) \frac{\partial t}{\partial l} dl = F(-\omega, \theta) \quad l = -t$$

- Felhasználtuk, hogy  $k = x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$ , illetve  $\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$  és  $\sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$

# Szűrt visszavetítés (FBP) származtatása

- Alakítsuk át egyszerű behelyettesítésekkel a második integrált:

$$\int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega, \theta) \cdot e^{j2\pi \cdot \omega k} \omega d\omega d\theta \Big|_{\theta=-\Theta} = \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} F(-\omega, \Theta) \cdot e^{-j2\pi \cdot \omega k} \omega d\omega d\Theta$$

$$k = \cos(\theta) x + \sin(\theta) y$$

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\infty} F(-\omega, \Theta) \cdot e^{-j2\pi \cdot \omega k} \omega d\omega d\Theta \Big|_{\omega=-\Omega} = \int_0^{\pi} \int_0^{-\infty} F(\Omega, \Theta) \cdot e^{j2\pi \cdot \Omega k} (-\Omega) \cdot (-1) d\Omega d\Theta$$

$$\int_0^{\pi} \int_0^{-\infty} F(\Omega, \Theta) \cdot e^{j2\pi \cdot \Omega k} (-\Omega) \cdot (-1) d\Omega d\Theta = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^0 F(\Omega, \Theta) \cdot e^{j2\pi \cdot \Omega k} (-\Omega) d\Omega d\Theta$$

# Szűrt visszavetítés (FBP) származtatása

- Lássuk mit sikerült kifőznünk:

$$f(x, y) = \int_0^\pi \int_0^\infty F(\omega, \theta) \cdot e^{j2\pi \cdot \omega k} \omega d\omega d\theta + \int_0^\pi \int_{-\infty}^0 F(\omega, \theta) \cdot e^{j2\pi \cdot \omega k} (-\omega) d\omega d\theta$$

$$f(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty F(\omega, \theta) \cdot |\omega| \cdot \exp(j2\pi k \omega) d\omega d\theta = \int_0^\pi Q_\theta(k) d\theta:$$

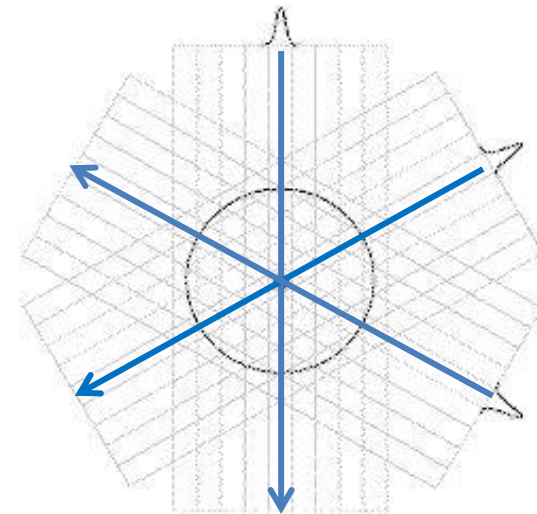
$$- Q_\theta(k) = \int_{\omega=-\infty}^\infty S_\theta(\omega) \cdot |\omega| \cdot \exp(j2\pi k \omega) d\omega \text{ ekvivalens a projekciók}$$

(sinogram oszlopai) rámpa szűrővel

történő szűrésével

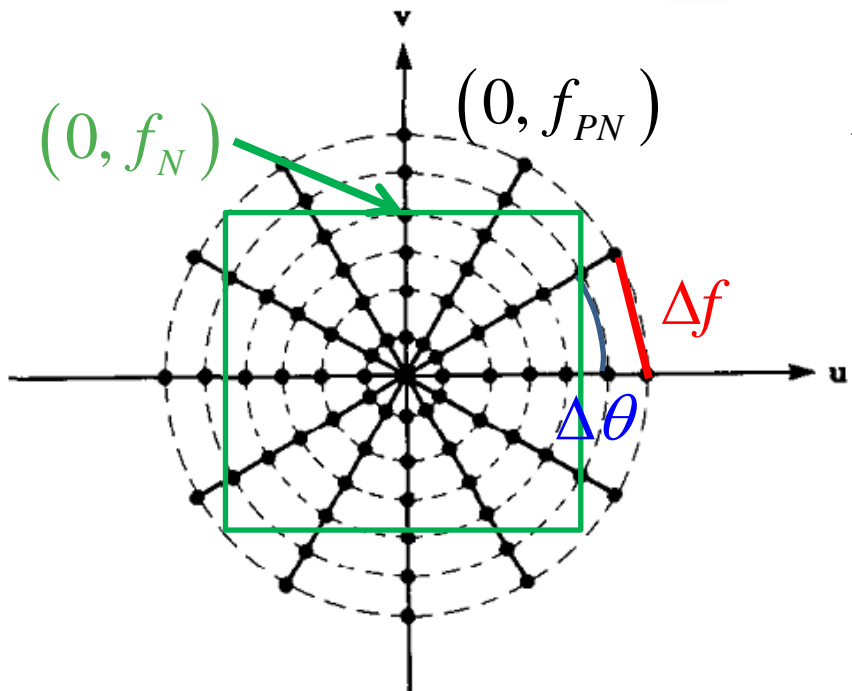
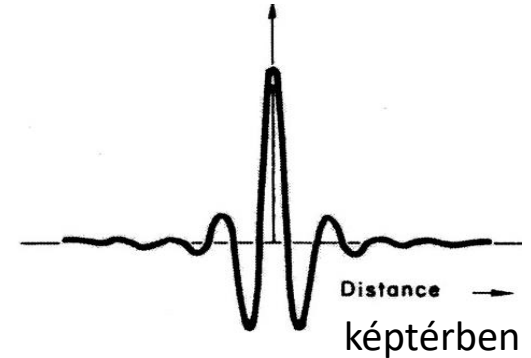
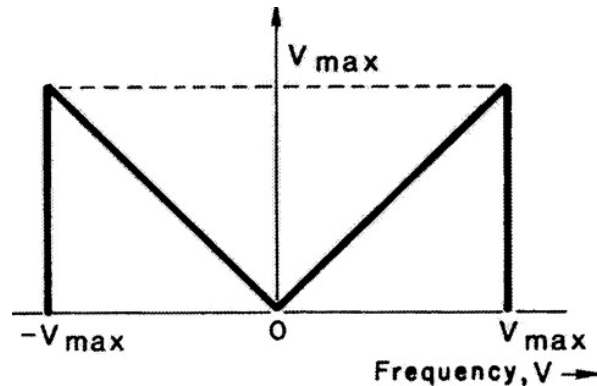
$$- f(x, y) = \int_0^\pi Q_\theta(x \cos(\theta) + y \sin(\theta)) d\theta:$$

az ú.n. visszavetítés



# Szűrt visszavetítés értékelése

- Rámpaszűrő:



„Ideális” rekonstrukció feltételei:


- 180°-ból rögzített projekciók
- $\Delta\theta \leq \arcsin(\Delta f / f_{PN})$
- Projekciók felbontása elegendően nagy:  $f_{PN} \geq \sqrt{2} f_N$  tipikus az 1cyc/mm
- Zajt az eljárás expliciten nem kezeli, ez jelentős problémaforrás.

# Szűrt visszavetítés implementációja

- Rámpaszűrés frekvenciatérben történik:
  - $5 \times 5$ -ös szűrő esetén már a frekvenciatartománybeli szűrés a gyorsabb (ennek főleg régebben volt jelentősége).
- Visszavetítés kép / időtartományban:
  - Frekvenciatartományban interpolálnunk kellene a spektrum ismert egyeneseiből a DFT által mintavett frekvenciák értékét (mely messze nem triviális).
- Szűrések, projekciók visszavetítése egyenként (sugaranként) jól párhuzamosítható



# Szűrt visszavetítés zajérzékenysége

- Detektorok DQE-je a frekvencia függvényében monoton csökken  zajos magas frekvencia (PET esetén a röntgenes esetnél jóval rosszabb).
- Ráadásul magas frekvencián „távolabb vannak” a spektrum ismert értékei (ezért kell a rámpa szűrés is).
- Legegyszerűbb megoldás az alul-áteresztés:
  - Az alul-áteresztés és a visszavetítés sorrendje tetszőleges
  - Erőforrásigény miatt érdemes a rámpa szűrőt megszűrni:

$$\left( P_{\theta} * h_{Ramp} \right) * h_{Lowpass} = P_{\theta} * \left( h_{Ramp} * h_{Lowpass} \right)$$

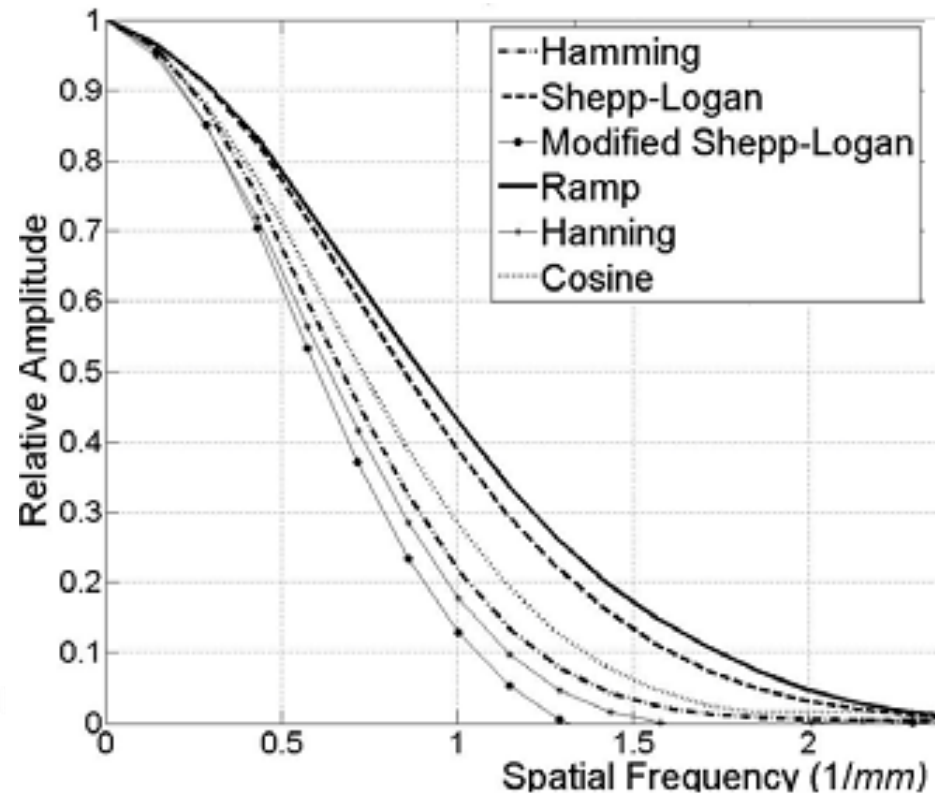
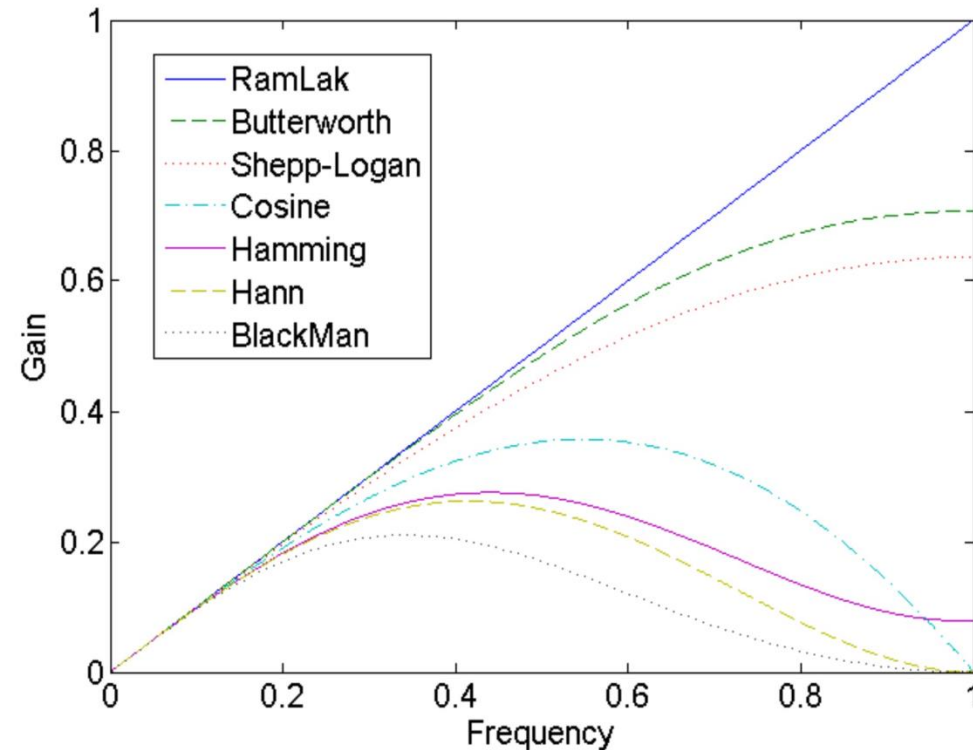
Klasszikus inverz problémák mely algoritmusaira hasonlít az eljárás?

# Szűrt visszavetítés zajérzékenysége

- Rámpa szűrő módosítottjaival szűrünk:

Szűrők átviteli függvényének abszolút értéke:

Egy CAT MTF-je a szűrők függvényében (példa):

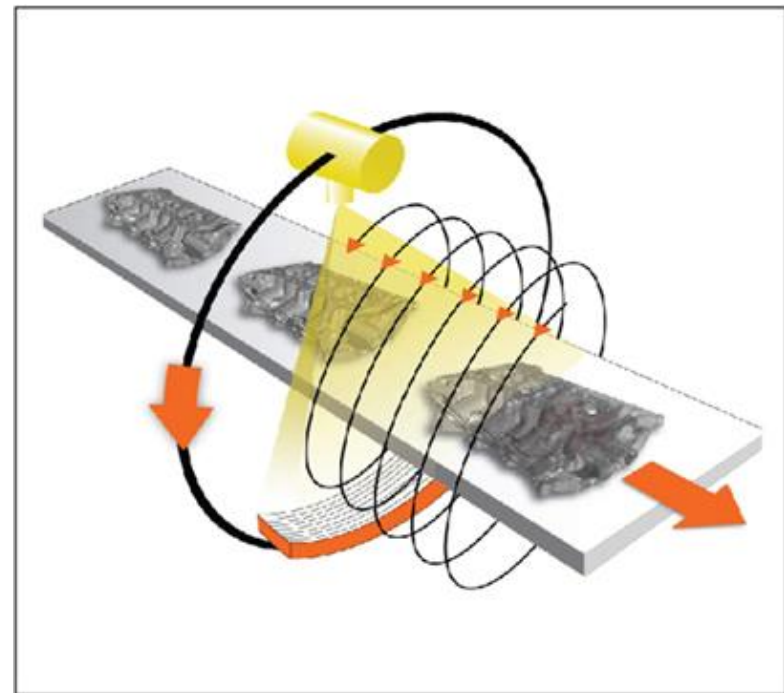
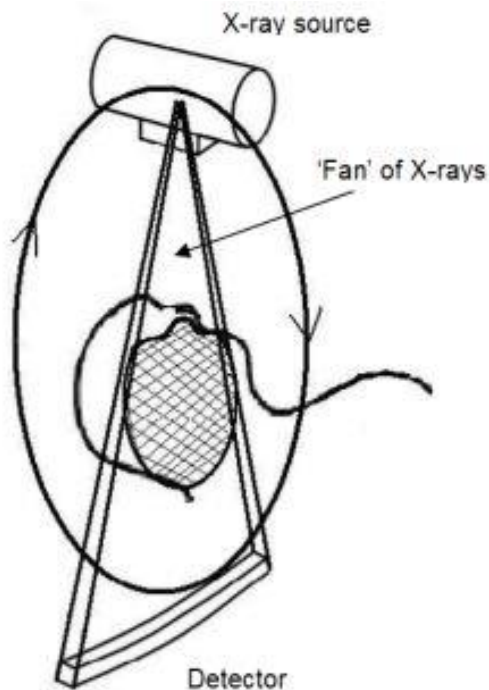


# Szűrt visszavetítés működése

- Demo videó az FBP rekonstrukciójáról:  
<https://www.youtube.com/watch?v=ddZeLNh9aac>
  - A szinogramban oszlop-folytonosan helyezkednek az 1D projekciók.
- A videón jól követhető a limitált szögtartomány által okozott artifakt:
  - Magas frekvenciás komponensek (pl. fantom széle) kis szögtartományból is jól rekonstruálódik.
  - Alacsony frekvenciás komponensek viszont erősen szétmosódtak (jellegzetesen „V” alakban) .
  - Vetítősugarakra merőleges élek rekonstruálhatóak jól.

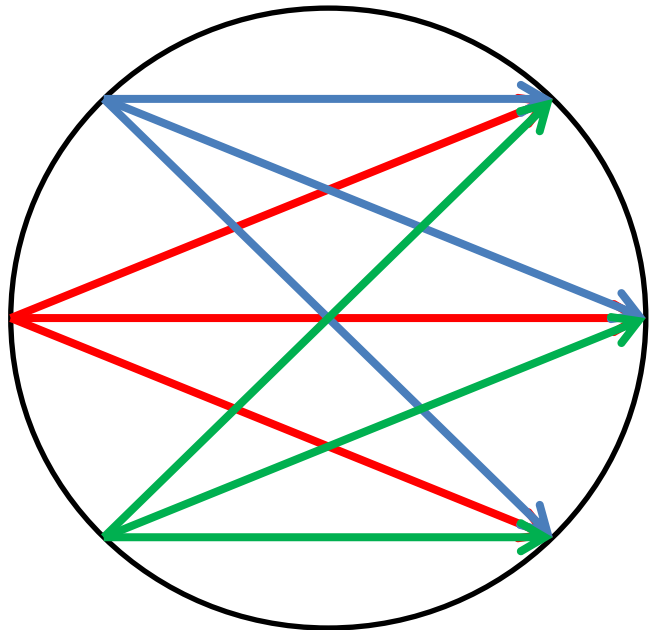
# FBP Fan-beam geometria esetén

- Eddig párhuzamosak voltak a vetítősugarak:
  - Gyakorlatban egy ilyen CT nem igazán realizálható
- Fan-beam vetítősugaras helikális CT (ú.n. CAT):

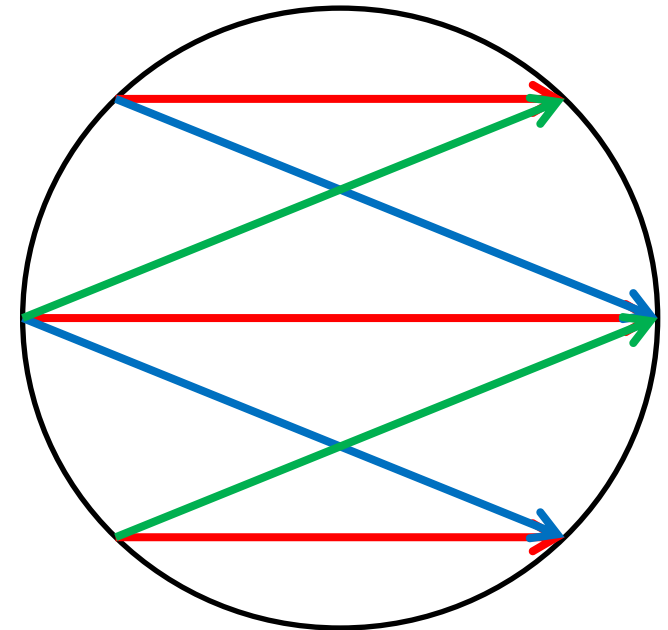


# FBP Fan-beam geometria esetén

- Alapötlet: a mért intenzitások átcsoportosítása párhuzamos vetítősugár alapú geometria szerint:
  - Lényegében új, párhuzamos vetítősugár szerinti virtuális projekciókat állítunk elő a fan-beam projekciókból.



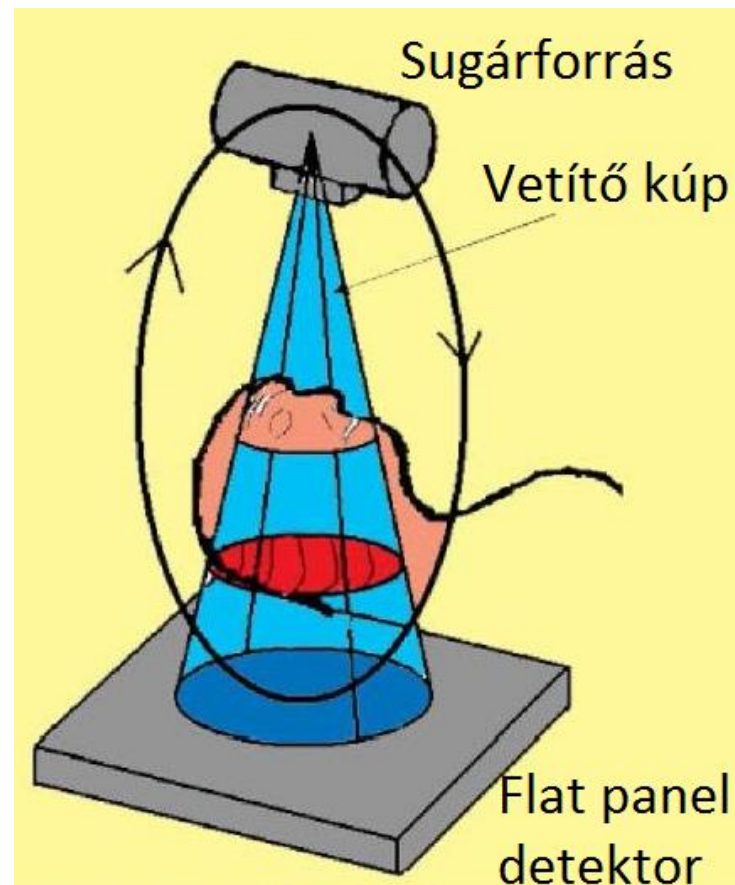
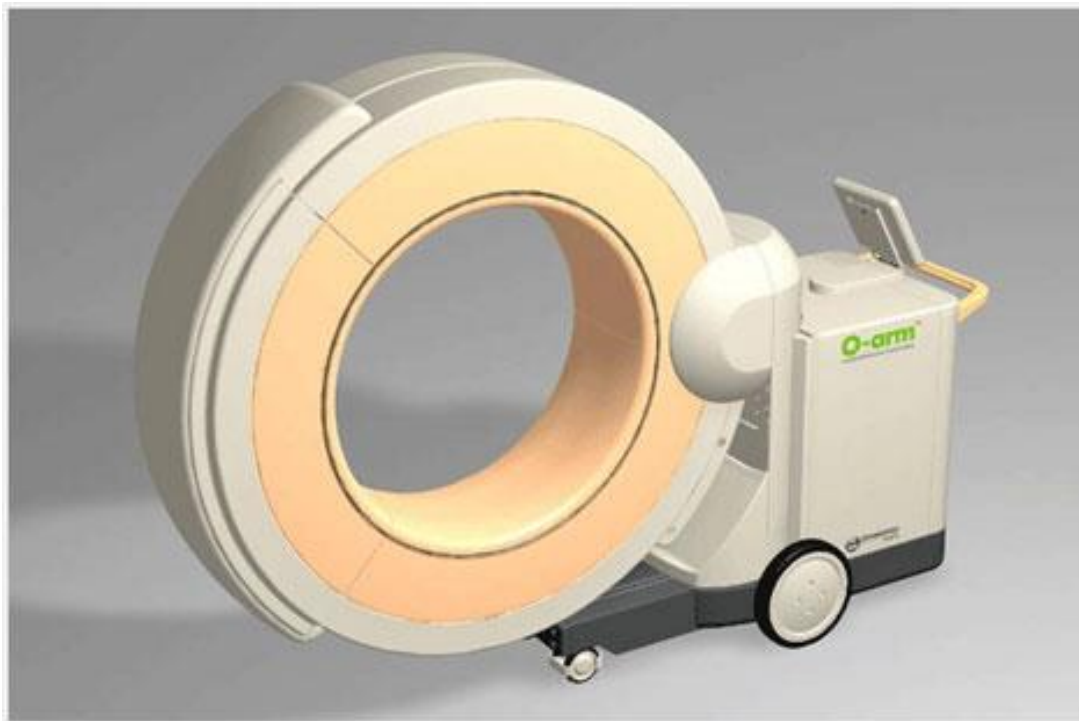
Fan-beam projekciók



Virtuális párhuzamos projekciók

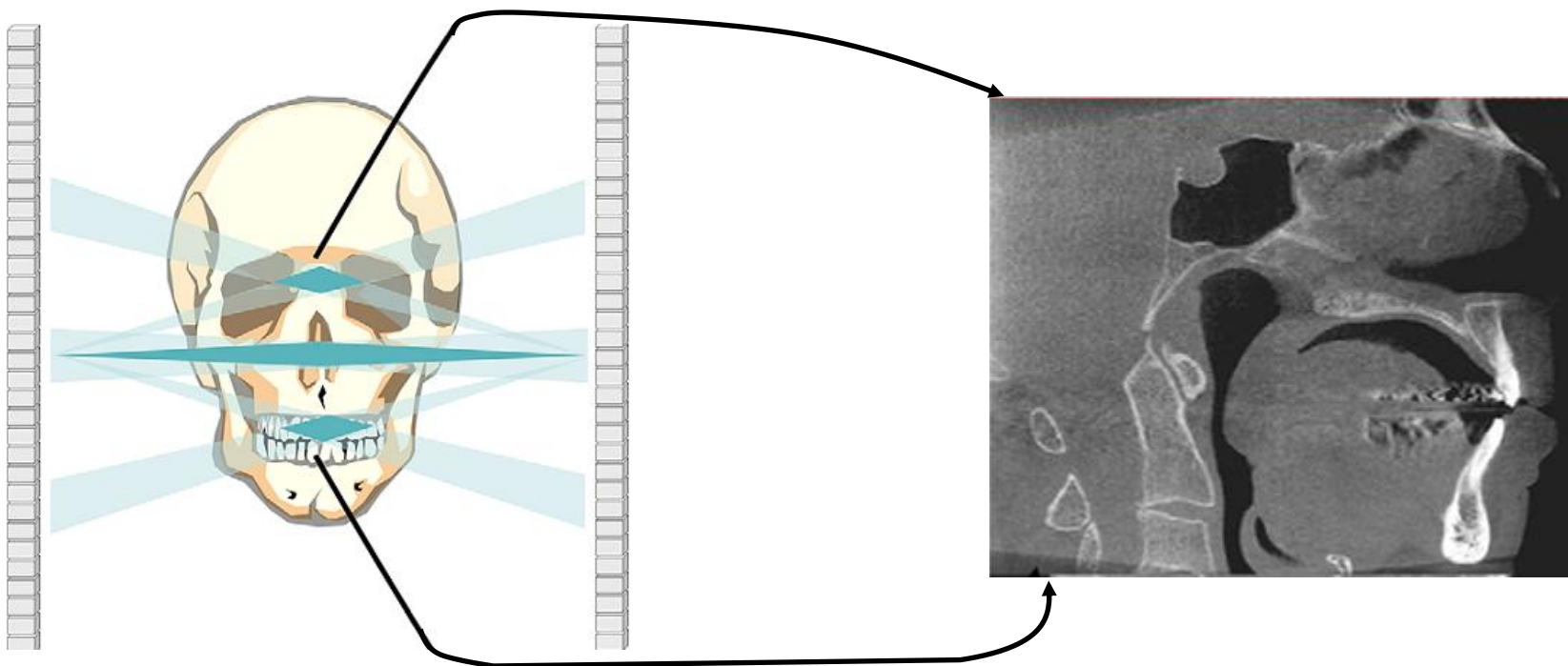
# FBP Cone-beam geometria esetén

- CBCT rendszerek - Cone-Beam geometria:
  - Flat-panel detektort használ, a sugarak kúpszerűen (innen az elnevezés) vetülnek a detektorra:



# Cone-beam geometria szerinti vetületek FBP rekonstrukciója - FDK

- Feldkamp, Davis, Kress CBCT-s algoritmus:
  - Klasszikus szűrt visszavetítéssel rekonstruál
  - Közelítően helyes algoritmus – ideális esetben sem tökéletes
- Ideális rekonstrukció esetén is Cone-beam artifakt



# Projekciók keletkezésének általános 3D modellje

- Általános modellje a (röntgen) képalkotásnak:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\gamma=0}^{\infty} h(x, y; \alpha, \beta, \gamma) \cdot f(\alpha, \beta, \gamma) d\gamma d\alpha d\beta + \eta(x, y)$$

- Mérésekkel rendelkezünk:  $g(x, y)$
- Teoretikusan ismerjük a rendszer PSF-jét: Beer- Lambert törvény szerint, ami nem modellez sem szóródást, sem a fotoelektromos kölcsönhatás során keletkező divergáló sugarakat.
- Rekonstrukció célja  $f(\alpha, \beta, \gamma)$  meghatározása
- Érdeemes megjegyezni, hogy a Beer-Lambert törvélynél ez egy általánosabb modell, de monokróm sugarakat feltételez, gyakorlatban nem tudunk vele dolgozni túl nagy komplexitás.



# Projekciók keletkezésének általános 3D modellje

- Megfigyelési modell diszkretizáltja  $\mathbf{g} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{f} + \boldsymbol{\eta}$  :
  - $\mathbf{g}$  tartalmazza az összes vetítősugár fotodiódákon mért intenzitások negatív logaritmáltját (tehát minden projekció minden pixeléhez tartozó intenzitását tartalmazó vektor).
  - $\mathbf{H}$  a vetítő mátrix,  $\mathbf{H}_{(i,j)}$ :  $i$ -edik pixelbe csapódó fotonok a  $j$ -edik voxeltől mennyire csillapodnak (ez anyag független).
  - $\boldsymbol{\eta}$  az additív zaj – nem modellezett hatások determinálják
- Lényegében ez is inverz probléma:
  - Ugyanúgy jelentős a zajérzékenység, mint 2D esetben
  - Ellentétben nagyságrendekkel több változó (akár  $1E7$ )

# Projekciók keletkezésének általános 3D modellje

Ez így túl általános, de jobban modellezi a valóságot.

- Gyakorlatban viszont  $\mathbf{H}_{(i,j)}$  az  $i$ -edik pixelbe csapódó fotonok által a  $j$ -edik voxelben megtett útnak a hossza (csak primer sugárzás). Ezzel a megkötéssel  $\mathbf{H}$  egy ritka, ú.n. sávmátrixá válik.
  - $\mathbf{H}$  a vetítő mátrix,  $\mathbf{H}_{(i,j)}$ :  $i$ -edik pixelbe csapódó fotonok a  $j$ -edik voxelben lévő anyagtól mennyire csillapodnak.
  - $\boldsymbol{\eta}$  az additív zaj – nem modellezett hatások determinálják
- Lényegében ez is inverz probléma:
  - Ugyanúgy jelentős a zajérzékenység, mint 2D esetben
  - Ellentétben nagyságrendekkel több változó (akár  $1E7$ )

# Algebrai rekonstrukciós technika (Gordon ART)

- Kaczmarz iterációval történik  $\mathbf{g} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}$  megoldása:
  - Rekonstrukciónál a  $\mathbf{f} = \mathbf{H}^\dagger \cdot \mathbf{g}$  megoldás lenne az „ideális”, de:
    - Túl nagy  $\mathbf{H}$  mérete a ma elérhető számítási teljesítményhez
    - Ráadásul  $\mathbf{H}$  nagyon ritka, melyet általános algebrai módszerek nem képesek hatékonyan kihasználni
  - Eljárás alapötlete:  $\mathbf{g} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}$  lényegében N db (vetítősugarak száma), M dimenziós hipersík egyenlete
    - Ha létezik egzakt inverz, akkor a hipersíkok az M dimenziós tér ugyanazon pontjában metszik egymást.
    - Ha túlhatározott, akkor nincs metszéspont, ha alulhatározott akkor az M dimenziós teret egy résztartományra szűkítik.

# Algebrai rekonstrukciós technika (Gordon ART)

- Az eljárás  $k+1$ . iterációban merőlegesen vetíti az aktuális  $\mathbf{f}$  -et  $\mathbf{g}_{(i)} = \mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{f}$  hipersíkra ( $i \equiv k \pmod{N}$ ):
- $\mathbf{f}$  a  $\mathbf{H}_{(i,:)}$ -re merőleges azon síkon helyezkedik el, mely távolsága az origótól  $\mathbf{g}_{(i)} / \|\mathbf{H}_{(i,:)}\|_2$
  - Tehát  $\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} - \alpha \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}^T$ , a merőleges vetítés után  $\mathbf{g}_{(i)} = \mathbf{H}_{(i,:)} \cdot (\mathbf{f}^{(k)} - \alpha \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}^T)$  teljesül, amiből kifejezve:  
$$\alpha = \left( \mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{g}_{(i)} \right) / \left( \mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}^T \right),$$
 behelyettesítve:  
$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} - \left( \mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{g}_{(i)} \right) \cdot \frac{\mathbf{H}_{(i,:)}^T}{\mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}^T}$$

# Algebrai rekonstrukciós technika (Gordon ART)

–  $\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \left( \mathbf{g}_{(i)} - \mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)} \right) \frac{\mathbf{H}_{(i,:)}^T}{\mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}^T}$  interpretációja:

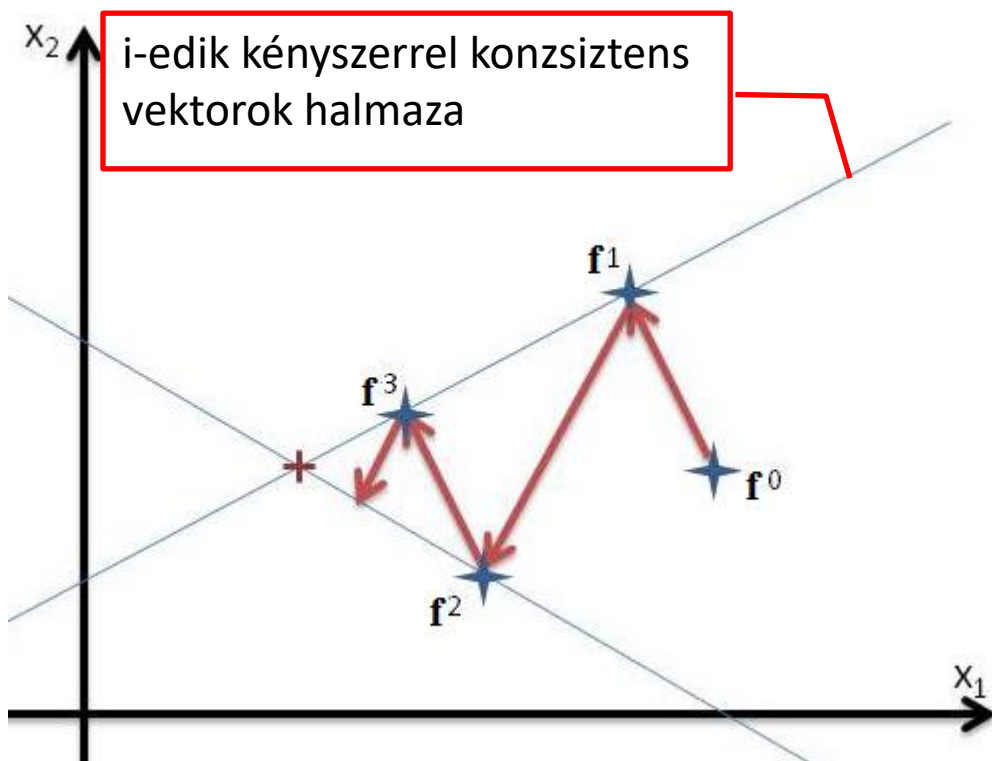
- $\mathbf{g} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}^{(k)}$  a rögzített projekciók és az aktuális ( $\mathbf{f}^{(k)}$ ) rekonstrukció modell szerinti vetületének a különbsége (vetületi hiba)
- $\mathbf{H}_{(i,:)}^T / \left( \mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}^T \right)$ : a vetületi hibát vetíti vissza

– Eljárás tulajdonságai:

- Sok, könnyen számolható iteráció, melyek nem párhuzamosíthatóak
- Konvergál, ha megfigyeléseink konzisztensek, ellentétben limit hurokba szorul, mely belsejében helyezkedik el az  $\mathbf{f}^* = \mathbf{H}^\dagger \cdot \mathbf{g}$ .
- Hátránya, hogy nem kezeli a projekciók zaját, ezért túlilleszkedésre hajlamos (lényegében egy ML becslés Gauss eloszlású likelihood-dal)
- Szükség van egy  $\mathbf{f}^{(0)}$ -ra: gyakran FBP / BP eredménye

# Kaczmarz iteráció példa

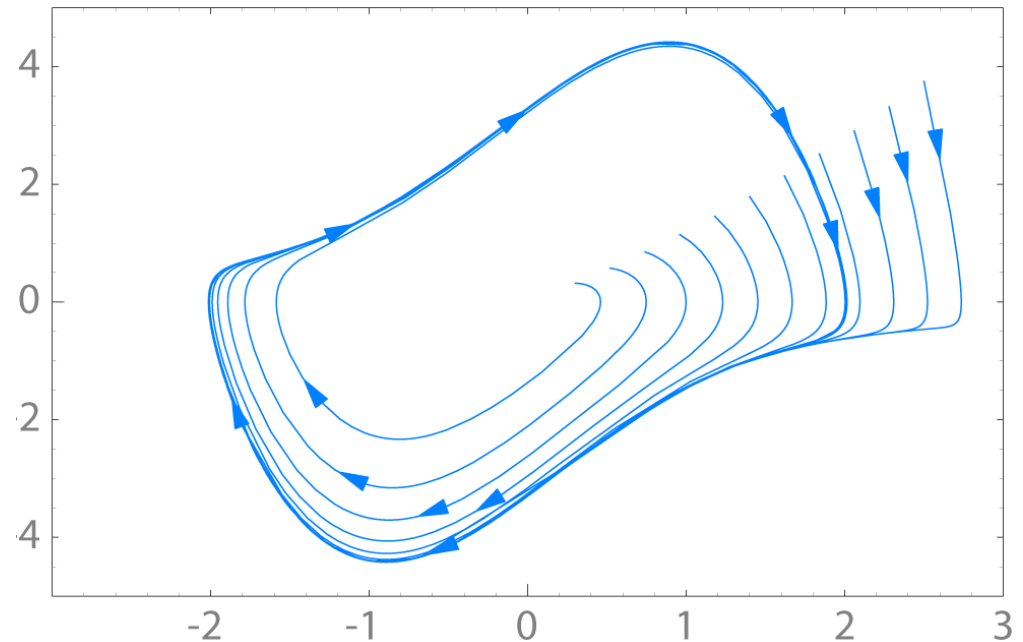
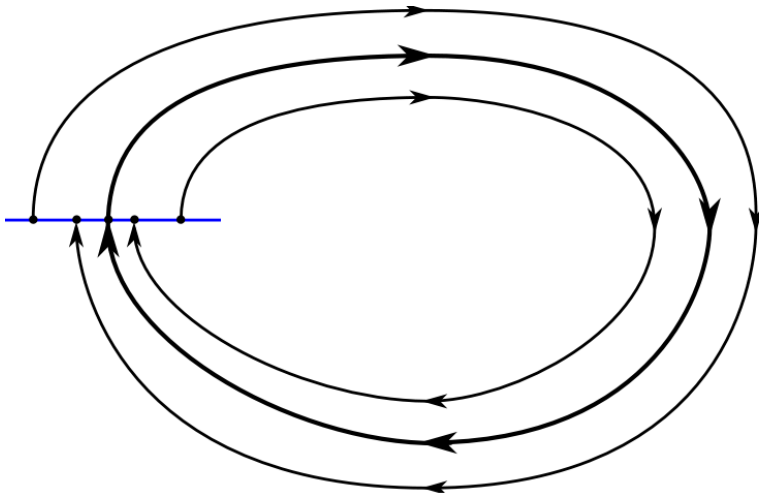
- $N=2, M=2$  esete:



- Ha a két merőleges hipersík egymásra merőleges, akkor két iteráció alatt megvan a metszéspont
- Ha a hipersíkok párhuzamosak, akkor az iteráció nem áll le (limit hurokba kerül)
- Minél nagyobb a két egyenes által bezárt szög, annál gyorsabb a konvergencia.

# Limit hurok viselkedés

- Gordon ART inkonzisztens projekciók esetén limit hurokba lép:



Stabil limit hurkok viselkedés: a rendszer állapotváltozója hurok trajektóriába ragad

# Algebrai rekonstrukciós technika (Simultaneous ART)

- Egyidejű ART (SART):

- Hibaképzés nem vetítősugaranként, hanem projekciónként:

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \lambda \cdot \sum_{j \in S_i} \left( \mathbf{g}_{(j)} - \mathbf{H}_{(j,:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)} \right) \frac{\mathbf{H}_{(j,:)}^T}{\mathbf{H}_{(j,:)} \cdot \mathbf{H}_{(j,:)}^T}$$

- $S_i$ :  $i$ -edik projekció pixeleit előállító vetítősugarak halmaza

- Tetszőleges  $\mathbf{f}^{(0)}$  esetén is konvergál egy LS becslőhöz:

- Ha több LS becslő van, akkor az  $\mathbf{f}^{(0)}$ -hoz L2 szerinti legközelebbihez

- Jól párhuzamosítható:

- Azonos projekcióhoz tartozó vetítősugarak menti levetítés és visszavetítés egymástól független

- Zajra túlilleszkedés tulajdonsága változatlanul megmaradt

- Ez az eljárás is ekvivalens egy ML becsléssel



# Algebrai rekonstrukciós technika

(Simultaneous Iterative Reconstructive Technique)

- Egyidejű Iteratív Rekonstrukciós eljárás:
  - Összes projekció, összes pixele szerint egyszerre képez hibát:

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \lambda \cdot \sum_j \left( \mathbf{g}_{(j)} - \mathbf{H}_{(j,:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)} \right) \frac{\mathbf{H}_{(j,:)}^T}{\mathbf{H}_{(j,:)} \cdot \mathbf{H}_{(j,:)}^T}$$

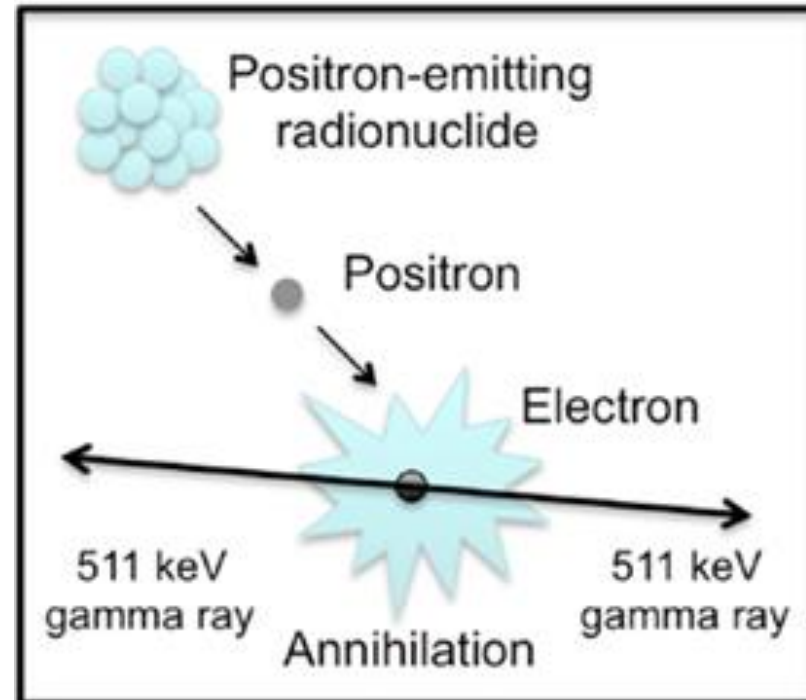
- Hasonló konvergencia tulajdonságok, mint az SART-nél:
  - Pontosan ugyanazon becsléshez konvergál
- Jól párhuzamosítható, de:
  - Egyszerre csak egy projekció le / visszavetítése nem módosítja többször u.a. voxel (egyébként versenyhelyzet).
  - Gyakorlatban több számolás szükséges a konvergenciához, mint a másik két ART-nél
- Létezik olyan változat, mely kezeli a polikróm energia spektrum miatt kialakuló sugárkeményedés artifaktumot.

# Algebrai rekonstrukciós technika (Multiplikatív ART)

- Eddig Additív ART-ket néztünk:
  - Kezdeti iterációk során lassabban haladnak
  - Pozitivitási kényszert nem lehet kikényszeríteni
- Multiplikatív ART-k:
  - Hibát multiplikatív módon származtatják
  - pl.: 
$$\mathbf{f}_{(i)}^{(k)} = \mathbf{f}_{(i)}^{(k-1)} \cdot \mu \cdot \left( 1 - \frac{\mathbf{g}_{(j)}}{\mathbf{H}_{(j,:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)}} \right)^{H_{(j,i)}}$$
    - A hibát  $1 - \mathbf{g}_{(j)} / \mathbf{H}_{(j,:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)}$  értéke méri
  - Kezdeti iterációk hatékonyabbak, de gyakran divergál, vagy a végén túlságosan lelassul.

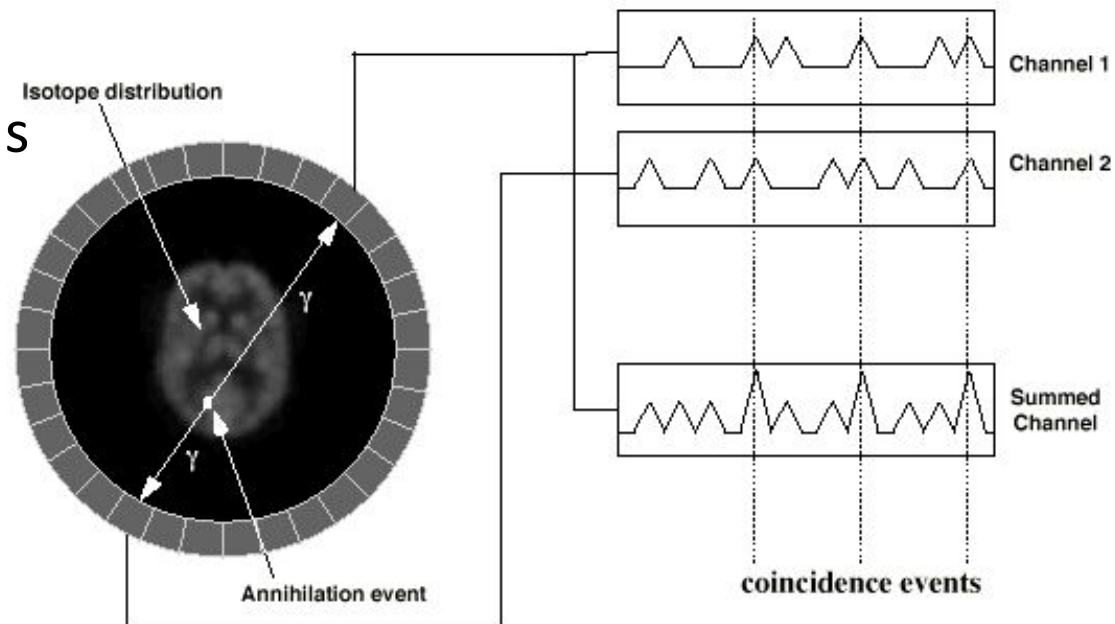
# Pozitron emissziós tomográfia alapelve

- Szervezetbe pozitron kibocsátására képes radioaktív izotópot tartalmazó anyagot visznek cukoroldatban.
- Sejtek tápanyagfelvétele miatt nagyobb energiaigényű (pl. gyulladt / daganatos) sejtek helyén több pozitron emisszió.
- Pozitron elektronnal ütközik:
  - Két db, egymással ellentétes irányú  $\gamma$  foton emittálódik.
  - Detektor ezeknek a beütését méri.



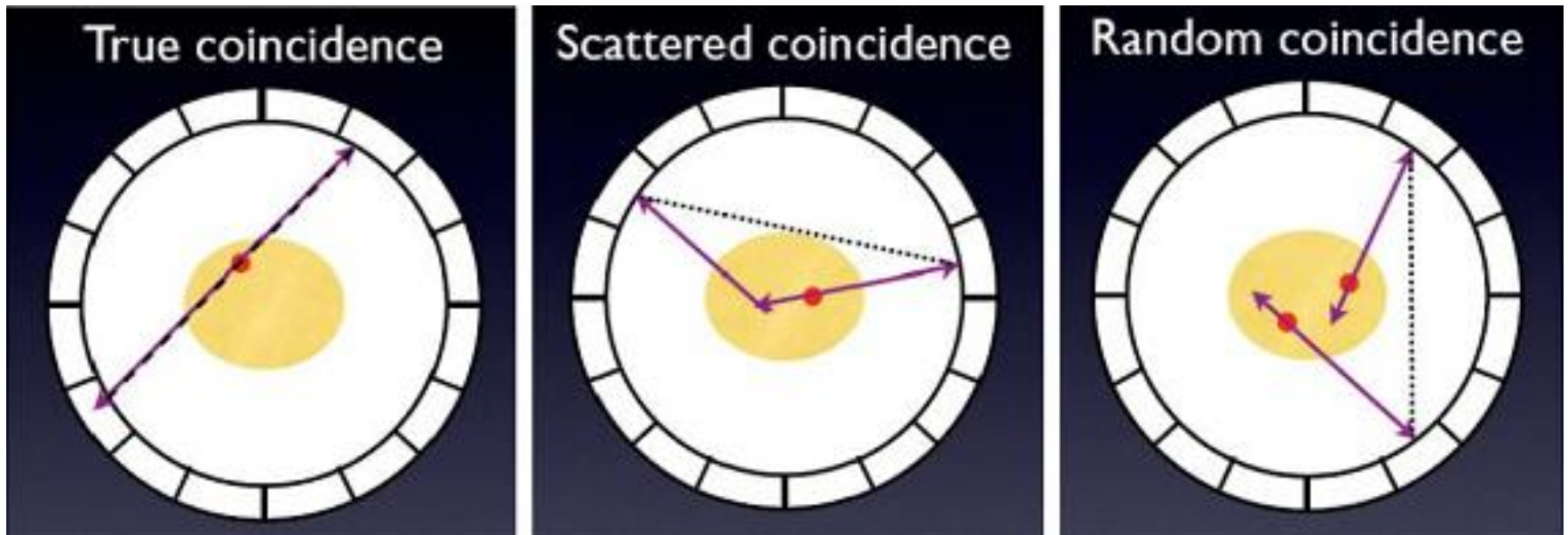
# Pozitron emissziós tomográfia rekonstrukciója

- Line of Response : ugyanazon bomló izotóp által kibocsátott  $\gamma$  fotonok beütési helyét összekötő szakasz
  - Érdeemes szem előtt tartani, hogy előre nem határozható meg, hogy egy-egy foton milyen irányba fog haladni
  - Elegendően sok kisugárzás esetén viszont hasonlóan viselkedik, mint akármilyen sugárforrás (Poisson folyamat).



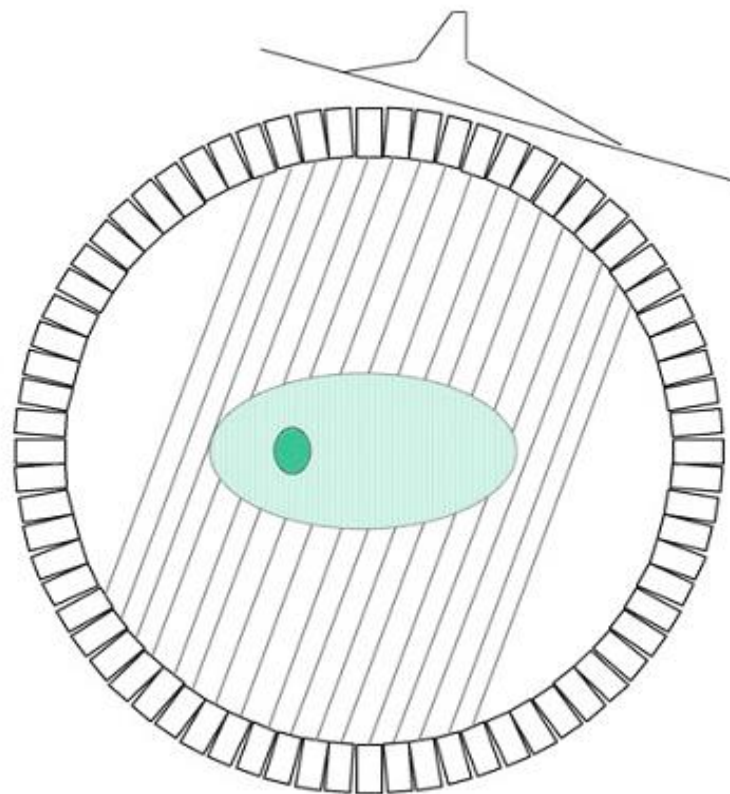
# Pozitron emissziós tomográfia projekciók zajának értelmezése

- Sokszor téves LOR-t mérünk:
  - Szóródás (rugalmas ütközés) miatt a térfogaton belül megváltoztatja irányát a  $\gamma$  foton.
  - Két, hozzávetőlegesen egy időben történő bomlás is fals látszólagos LOR-t eredményez.



# Pozitron emissziós tomográfia rekonstrukciója

- Rekonstrukció során a LOR-ok interpretálhatóak vetítősugaraknak is (intenzitás meg az adott LOR menti gyakorisága a  $\gamma$  beütéseknek).
- Elegendően sok beütés szükséges az eloszlás becsléséhez:
  - Egy scan kb. 20 perc
  - Nagyságrenddel rosszabb SNR, mint CT esetén



# ML-EM rekonstrukció (Emissziós tomográfiai értelmezés)

- EM eljárások alapelve:
  - Vannak megfigyelt adataink (méréseink), esetünkben a PET LOR-ok mentén érzékelt gamma beütési szám ( $y(d)$ )
  - Vannak becsülni kívánt adataink ( $x(b)$ ), jelenleg ez a vizsgált szövet pozitron emissziójának a gyakorisága
  - Létezik olyan v.v., mely ha ismert lenne leegyszerűsödne az egész feladat: a PET esetén  $p(b|d)$ : annak a valószínűsége, hogy a  $d$  LOR mentén beütő gamma részecskét a  $b$  képlet emittálta.
- Megoldás iteratív, iterációnként két lépés:
  - Expectation lépés:  $p(b|d)$  frissítése
  - Maximization lépés:  $x(b)$  ML becslése

# ML-EM rekonstrukció (Emissziós tomográfiai értelmezés)

- E lépés formálisan - Bayes tétel alkalmazása:

$$p^{(k+1)}(b|d) = \frac{p(d|b) \cdot x^{(k)}(b)}{\sum_{b'} p(d|b') \cdot x^{(k)}(b')}$$

- $p(b|d)$ : annak a valószínűsége, hogy a  $d$  LOR mentén érzékelt fotonok a  $b$  pozíciójú képletből származnak.
- $p(d|b)$ : annak a valószínűsége, hogy a  $b$  pozíciójú képlet által emittált fotonok a  $d$  LOR mentén ütnek be a detektorba. Ennek a tagnak a meghatározása előzetesen történik (nem a becslés feladata). Általában Monte-Carlo szimulációkkal becslik, pontos meghatározása fontos.



# ML-EM rekonstrukció (Emissziós tomográfiai értelmezés)

- M lépés célja a sűrűségbecslés frissítése:

$$x^{(k+1)}(b) = \arg \max_x \left\{ p^{(k+1)}(y|x) \right\}(b) = \frac{\sum_d y(d) \cdot p^{(k+1)}(b|d)}{\sum_d p(d|b)}$$

- Elvégezve  $p^{(k+1)}(b|d)$  behelyettesítését:

$$x^{(k+1)}(b) = x^{(k)}(b) \cdot \sum_d \frac{y(d) \cdot p(d|b)}{\sum_{b'} x^{(k)}(b') \cdot p(d|b')} \cdot \frac{1}{\sum_d p(d|b)}$$

- Eljárás előnye, hogy expliciten modellezi a zajt

# ML-EM rekonstrukció (Emissziós tomográfiai értelmezés)

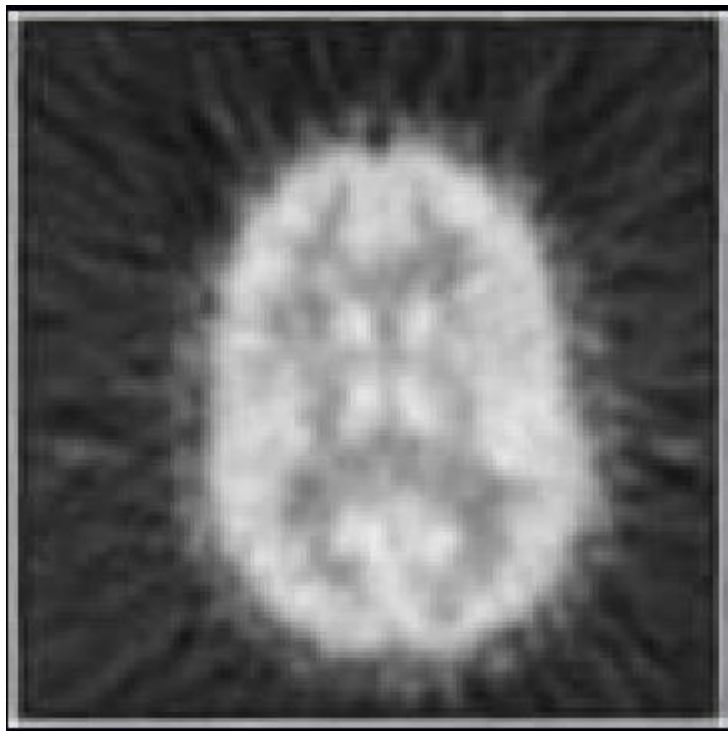
- Módosító összefüggés interpretációja:

$$x^{(k+1)}(b) = x^{(k)}(b) \cdot \sum_d \frac{y(d) \cdot p(d|b)}{\sum_{b'} x^{(k)}(b') \cdot p(d|b')} \cdot \frac{1}{\sum_d p(d|b)}$$

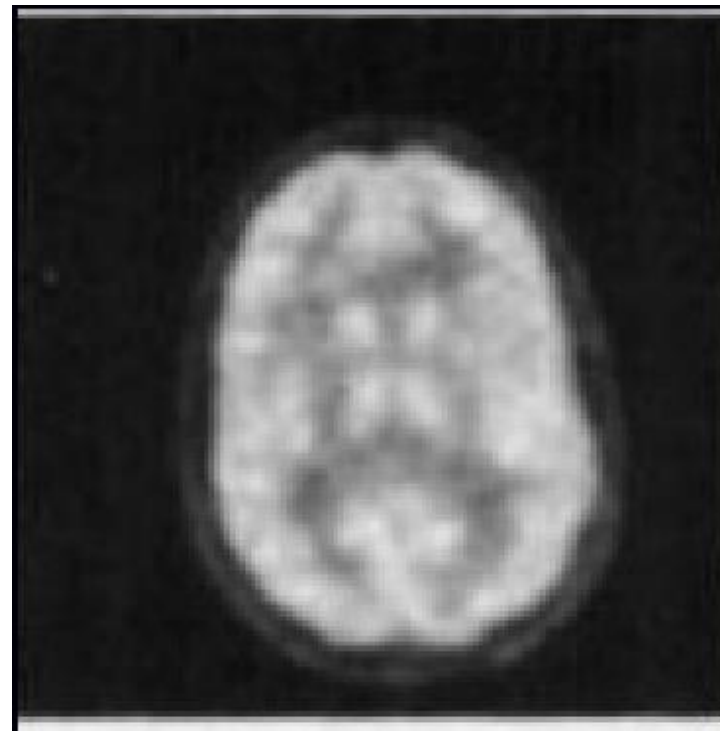
- $\sum_{b'} x^{(k)}(b') \cdot p(d|b')$ : aktuális rekonstrukció alapján becsült LOR beütések
- $y(d) / \sum_{b'} x^{(k)}(b') \cdot p(d|b')$ : d LOR menti beütések becslésének a hibája
- $\sum_d \frac{y(d) \cdot p(d|b)}{\sum_{b'} x^{(k)}(b') \cdot p(d|b')} \cdot \frac{1}{\sum_d p(d|b)}$ : hiba visszavetítése

# ML-EM és FBP összehasonlítása (Emissziós tomográfia – PET)

- Kis beütésszám miatt alacsony effektív felbontás
- Ráadásul jelentős nem Gauss-i zaj



FBP rekonstrukció



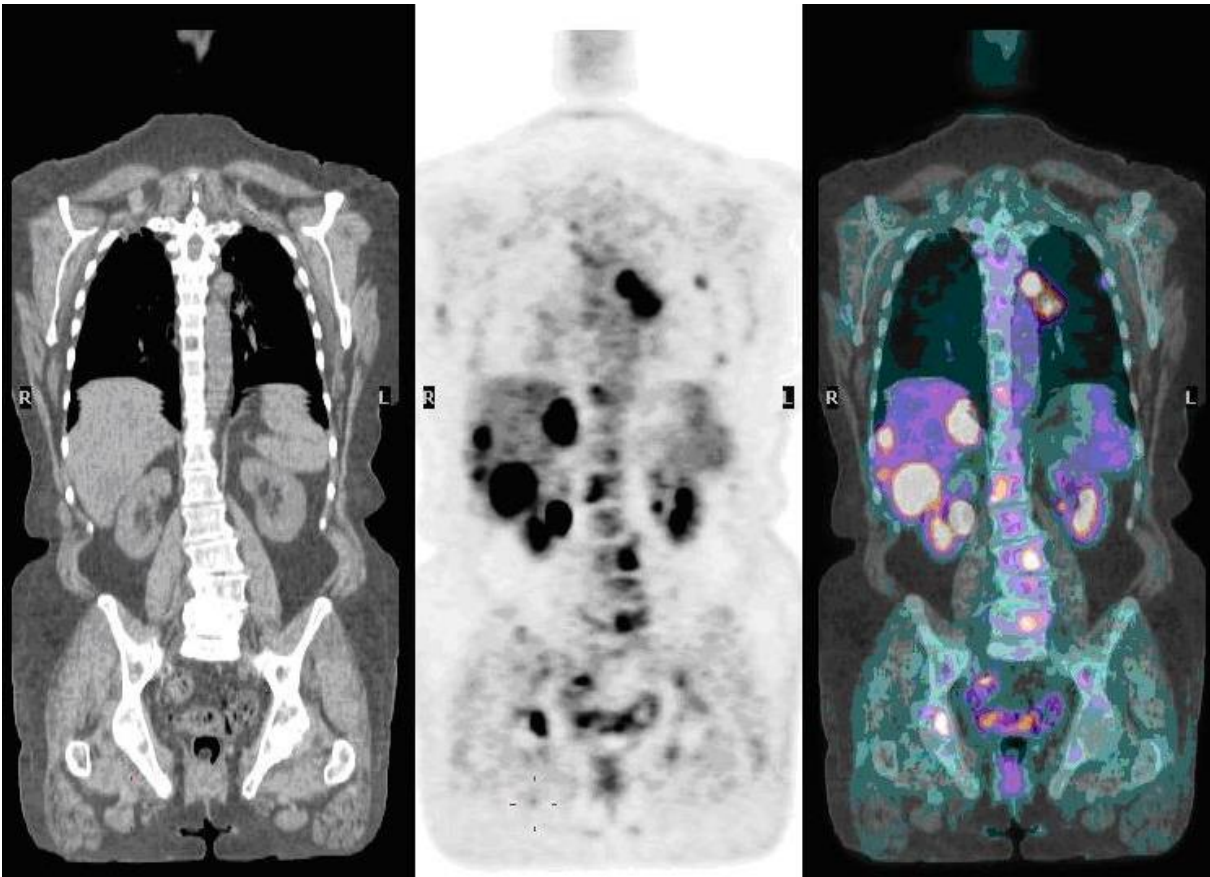
ML-EM rekonstrukció

# PET/CT modalitás

- PET funkcionális képet állít elő:
  - Lokalizálhatóak a nagy energiaigényű szövetek
  - Cserébe erősen zajos, rossz minőségű rekonstrukciók
  - Megfelelő zajmodell nélkül lehetetlen értelmezhető rekonstrukciót előállítani vele
- CT rekonstrukciók - morfológiai információ:
  - Kisméretű (korai stádiumú, ezért jó hatásfokkal kezelhető) tumorok nehezen különböztethetőek meg más képletektől.
  - Cserébe kevésbé zajos, felbontását tekintve részletgazdagabb felvételek

# PET/CT modalitás

- Rekonstrukció lényegében a PET, illetve a CT rekonstrukciók regisztrálását jelenti



Balról jobbra: CT, PET, regisztrátum

# Modell alapú rekonstrukciós eljárások (Röntgen alapú képalkotás)

- Cél a páciensre érő sugárterhelés minimalizálása:
  - Viszont kisebb dózis zajosabb projekciókat eredményez
  - Limitált szögtartomány problémája jelentősen alulhatározottá teszi a z inverz problémát ( $\mathbf{g} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}$ )
- MAP becslés alkalmazása szükséges:
  - Emlékeztetőül  $\mathbf{f}^* = \arg \max_{\mathbf{f}} \{P\{\mathbf{f}|\mathbf{g}\}\} \propto \arg \max_{\mathbf{f}} \{(P\{g|f\} \cdot P\{f\})\}$
  - $-\log(P\{\mathbf{g}|\mathbf{f}\}) = \Phi_{Likelihood}(\mathbf{f})$  bünteti az eltérést
  - $-\log(P\{\mathbf{f}\}) = \Phi_{Prior}(\mathbf{f})$  apriori ismeretek alapján regularizál

# Modell alapú rekonstrukciós eljárások (Röntgen alapú képalkotás)

- Likelihood tag megválasztása:
    - PET-nél Poisson modellt alkalmazunk (ritka esemény törvény)
    - Röntgen esetén negatív logaritmálást követően Gauss modell
- $$\Phi_{Likelihood}(\mathbf{f}) = 1/2 \cdot (\mathbf{g} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{f})^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (\mathbf{g} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{f})$$
- $\Sigma$  gyakran diagonális, ekkor  $\Sigma_{(i,i)} = \sigma_{(i)}^2$ :
    - Lényegében az i-edik vetítősugár NSR-jének a négyzete
    - Megfelelő megválasztása nehéz, aktívan kutatott feladat
  - Kvadratikus függvény, minimalizációja analitikus

# Modell alapú rekonstrukciós eljárások (Röntgen alapú képalkotás)

- Regularizációs tag megválasztása:
  - Logikusnak tűnik a gradiens energiáját büntetni:  
 $\Phi_{\text{Prior}}(\mathbf{f}) = \alpha \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{f}$ ,  $\mathbf{S} = \mathbf{D}^T \cdot \mathbf{D}$ , ahol  $\mathbf{D}$  a deriválás mtx.-ja
    - Belátható, hogy ekvivalens egy regularizáció nélküli rekonstrukció alul-áteresztettjével.
    - Tehát ez a regularizáció csökkenti az effektív felbontást (mind a rekonstruált szeleteken belül, mind azok között a modalitástól függetlenül).
  - Inkább él őrző regularizációk alkalmazása javallott pl. Teljes Variancia minimalizáció, Huber büntetőfüggvény ...



# Compressive Sensing

- Nyquist mintavételnek megfelelő interpoláció:
  - Régebben láttuk a kernelét
  - De ez csak egy interpolációs lehetőség
- Compressive Sensing alapú megközelítés:
  - Nem szükséges Nyquist tétel szerint mintavételezni
  - Két általános megvalósítása létezik:
    - Megszorítjuk a rekonstruálni kívánt jel bázisát (erre lesz példa a Matrix Inverziós Tomoszintézis)
    - Keresünk egy olyan operátort / ábrázolást ami felett ritka a rekonstruálni kívánt jel (pl. TV minimalizációs)

# Teljes variancia minimalizáció

- Rekonstrukció, mint optimalizálási feladat:

$$\mathbf{f}^* = \arg \min_{\mathbf{f}} \left\{ \|\mathbf{g} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}\|_2^2 + \lambda \cdot \|\mathbf{D} \cdot \mathbf{f}\|_2 \right\}$$

- $\mathbf{D}$  diszkrét differencia / wavelet transzformációk mátrixia
- Lényegi változás, hogy a regularizáció L2 norma szerinti

- Alternating Direction Methode:  $\mathbf{z} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{f}$  változóval

$$\Phi(\mathbf{f}, \mathbf{z}) \triangleq \|\mathbf{g} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}\|_2^2 + \lambda \cdot \|\mathbf{z}\|_1 + \beta \cdot \|\mathbf{z} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{f}\|_2^2$$

- Alternálva minimalizáljuk  $\mathbf{f}$ -et és  $\mathbf{z}$ -t iterációnként:

$$\mathbf{f}^{(n+1)} = \arg \min_{\mathbf{f}} \left\{ \Phi(\mathbf{f}, \mathbf{z}^{(n)}) \right\} = \arg \min_{\mathbf{f}} \left\{ \|\mathbf{g} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}\|_2^2 + \beta \cdot \|\mathbf{z}^{(n)} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{f}\|_2^2 \right\}$$

$$\mathbf{z}^{(n+1)} = \arg \min_{\mathbf{z}} \left\{ \Phi(\mathbf{f}^{(n+1)}, \mathbf{z}) \right\} = \arg \min_{\mathbf{z}} \left\{ \lambda \cdot \|\mathbf{z}\|_1 + \beta \cdot \|\mathbf{z} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{f}^{(n+1)}\|_2^2 \right\}$$

# Teljes variancia minimalizáció

– Az iterációk első lépése kicsit átalakítva:

$$\min_{\mathbf{f}} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{g}^T & \sqrt{\beta} \cdot \mathbf{z}^{(n)T} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T & \sqrt{\beta} \cdot \mathbf{D}^T \end{bmatrix} \cdot \mathbf{f} \right\|_2^2$$

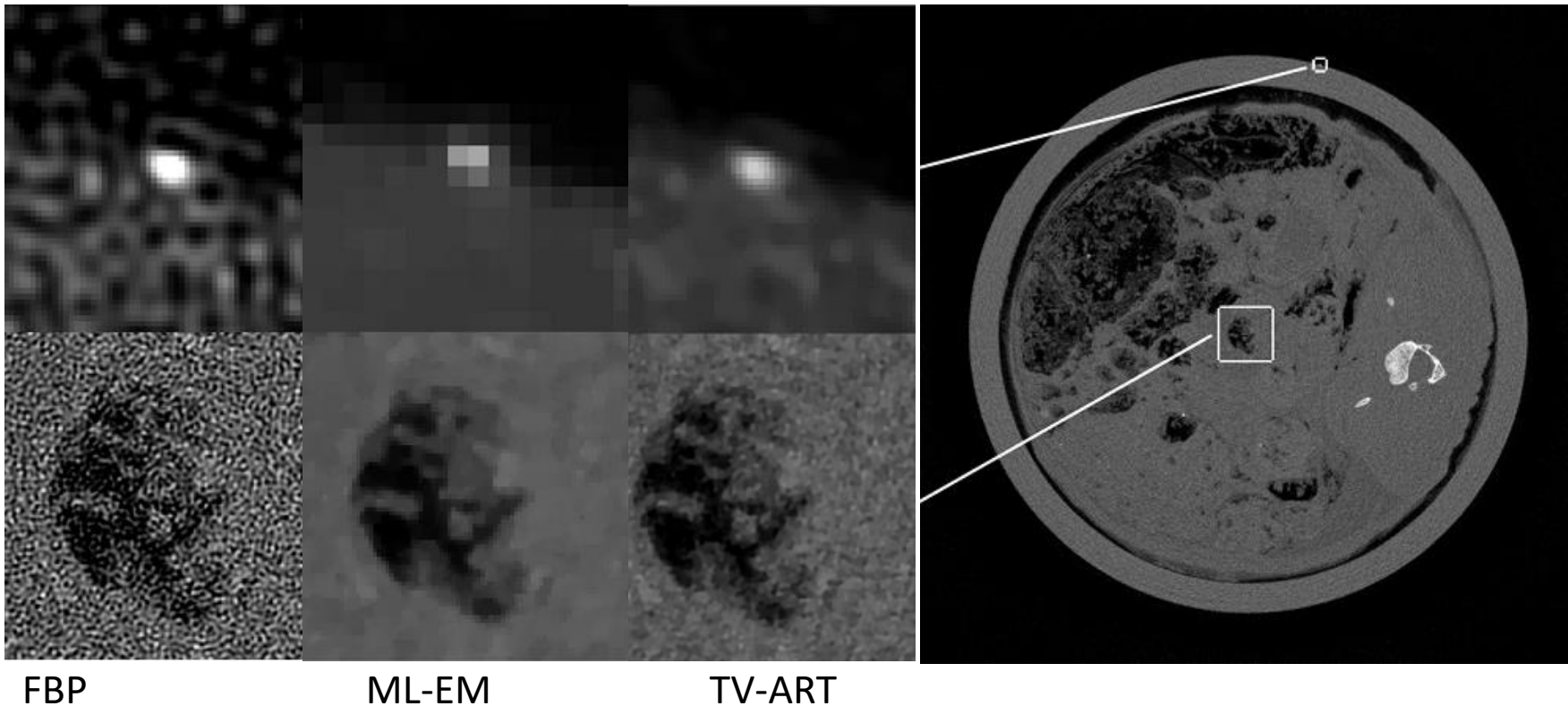
- Formálisan visszajutottunk az alapproblémához, csak most már biztosan túl-határozott (additív ART probléma)
- Minimalizálása erőforrásigény miatt sokszor SART-vel

– Iterációk második lépésének optimuma egy lépésben, analitikusan meghatározható:  $\arg \min_{\mathbf{z}} \left\{ \lambda \cdot \|\mathbf{z}\|_1 + \beta \cdot \left\| \mathbf{z} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{f}^{(n+1)} \right\|_2^2 \right\}$

- Az úgynevezett lágy küszöb operátor használatával
- A minimalizálás voxelenként történik

# Teljes variancia minimalizáció

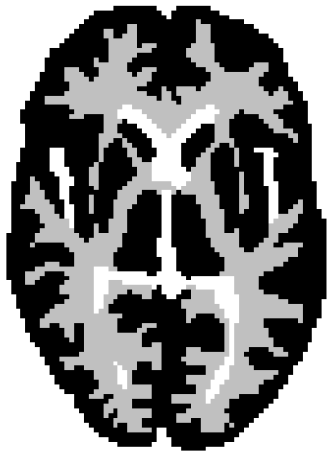
- Jobb SNR az ML-EM és az FBP-hez képest:
  - FBP-nél kevésbé zajos, de hasonló kontrasztú kép
  - ML-EM-nél jelentősen jobb kontraszt



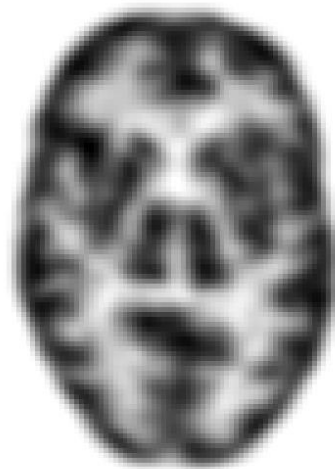
# Huber büntetőfüggvény

- Huber büntetőfüggvénnyel regularizálunk:

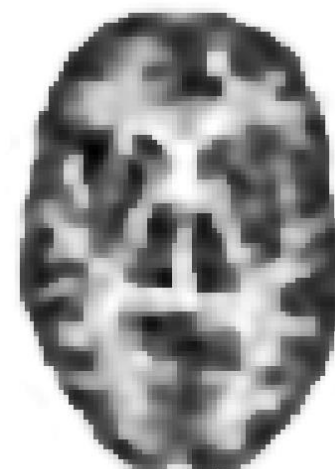
$$\Phi_{\text{Prior}}(\mathbf{f}) = \alpha \cdot L_{\text{Huber}}\{\mathbf{D} \cdot \mathbf{f}\} \quad L_{\text{Huber}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \|\mathbf{x}\|_2^2 / 2 & \|\mathbf{x}\|_2 \leq \varepsilon \\ \varepsilon \cdot \|\mathbf{x}\|_2 - \varepsilon^2 / 2 & \|\mathbf{x}\|_2 > \varepsilon \end{cases}$$



Pet fantom



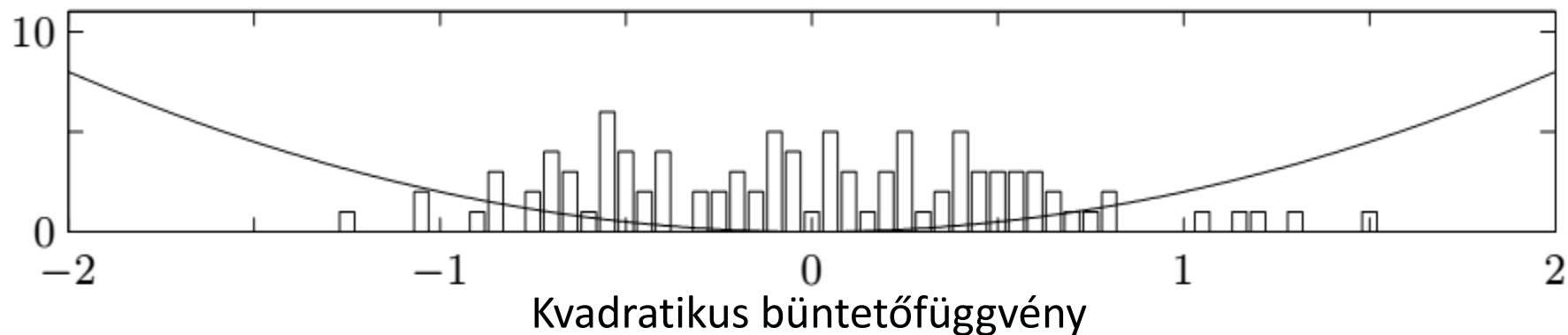
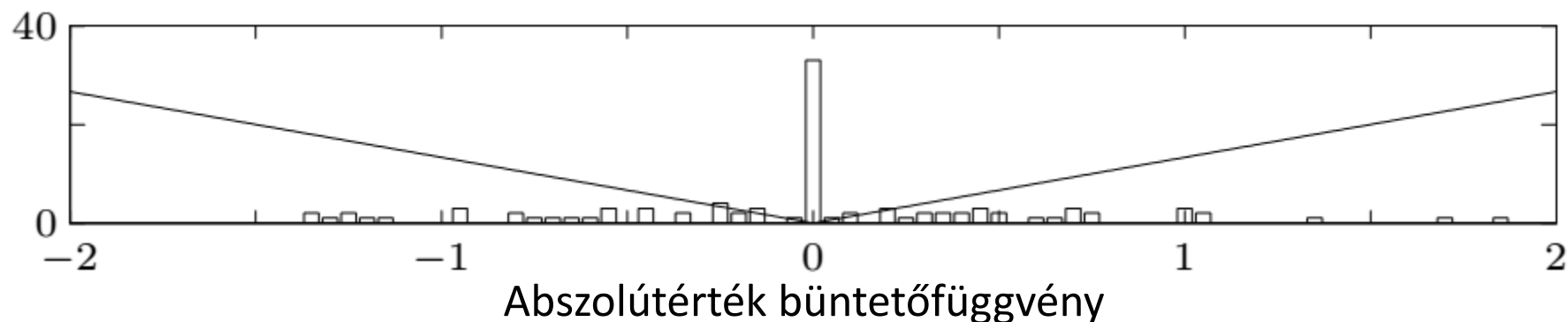
MAP L2 prior



MAP Huber prior

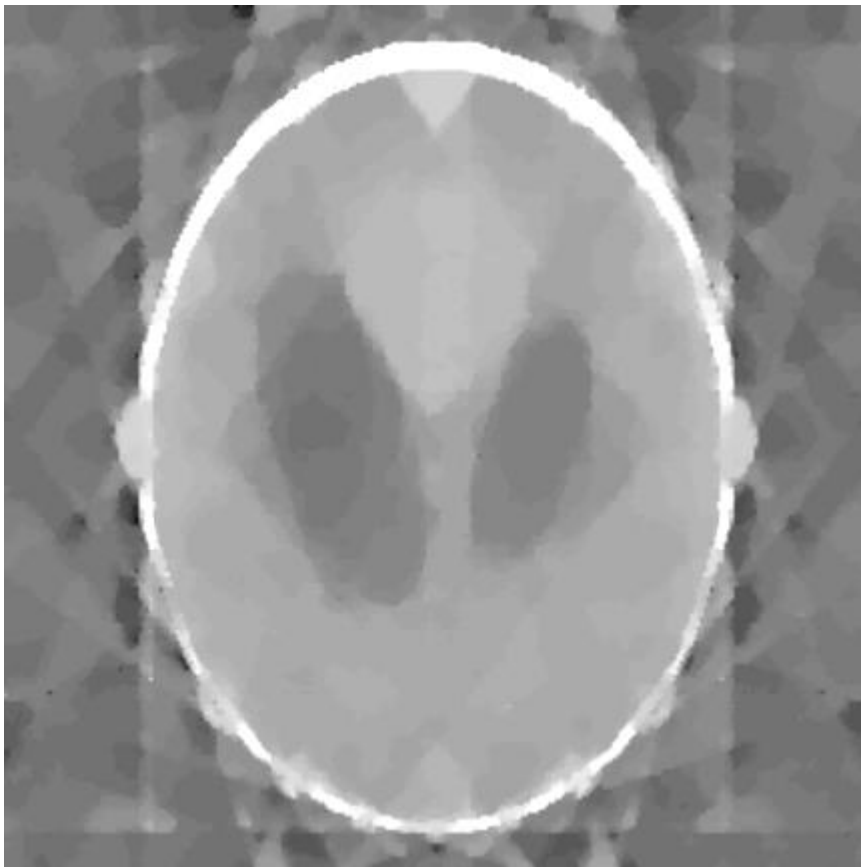
# Kvadratikus és abszolútérték hiba/büntetőfüggvény

- Két hibafüggvény jelentősen eltérő eloszlást kényszerít ki:



# Élet a konvex optimalizáción túl

- CT-s szimuláció, 10 projekcióból ( $\Delta\theta=18^\circ$ ):



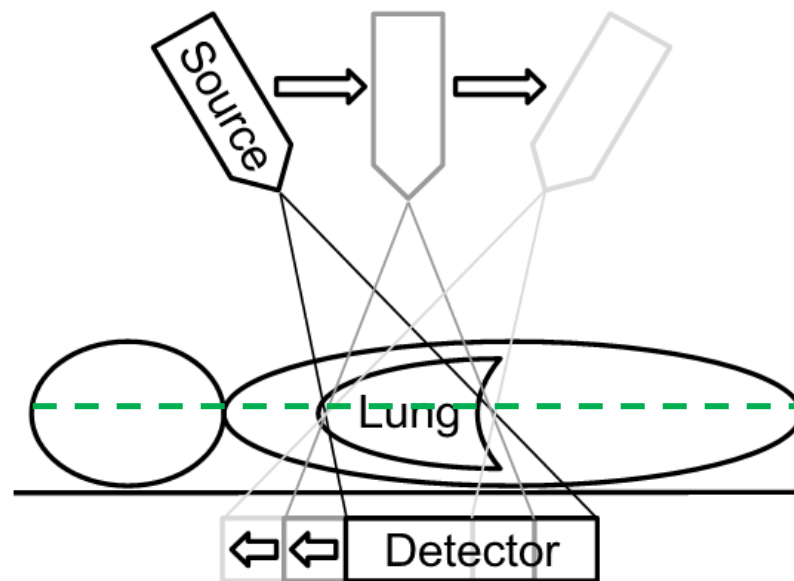
Konvex: L2-TV



Valóban ritkasági priorral

# Lineáris tomoszintézis

- Speciális CBCT változatnak tekinthető:
  - Detektor és a sugárforrás egymással és a flat-panel detektor oszlopaival párhuzamosan mozog.
  - Projekciók limitált szögtartományból ( $\pm 10^\circ$ - $40^\circ$ )
- Irányfüggő felbontás / képminőség:
  - Detektorral párhuzamos szeletek felbontása megegyezik a detektor felbontásával
  - Detektorra merőleges irányban nagyon rossz felbontás : limitált szögtartomány ára ...





# Shift And Add

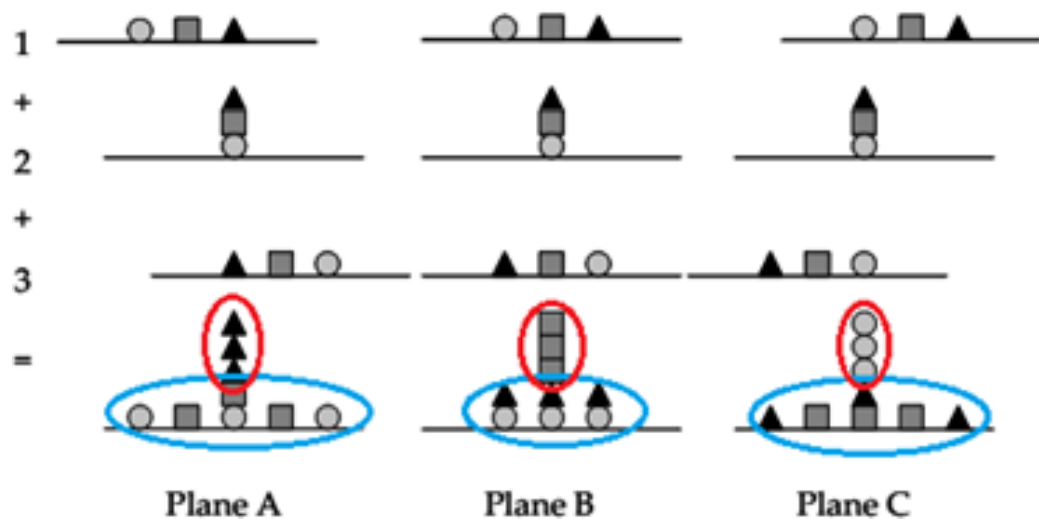
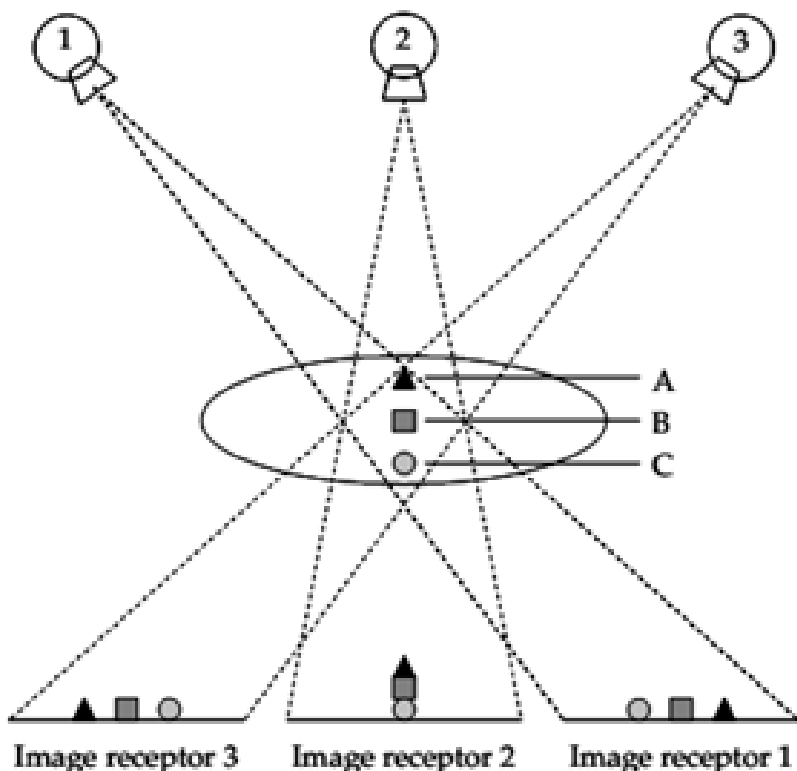
## (Lineáris tomoszintézis esetén)

- A térfogat 0 vastagságú szeleteinek vetületei a felvételi geometria és a szelet magasságának függvényében eltolódnak.
- SAA rekonstrukciója egy adott szeletnek:
  1. Projekciók eltolása úgy, hogy a rekonstruálni kívánt sík vetülete minden projekción azonos legyen
  2. Eltolt projekciók összegzése
- Mind az összegzés, mind az eltolás LTI művelet:
  - Soros kaszkádjuk, tehát a rekonstrukció egy MIMO LTI rendszer (bemenetek a projekciók, kimenetek a szeletek)
  - Létezik PSF/MTF-je, mellyel analitikusan minősíthető

# Shift And Add

## (Lineáris tomoszintézis esetén)

- SAA szeleteken fókuszbba kerülnek a rekonstruálni kívánt sík képleteinek vetületei
  - De jelentős átmosódás marad a térfogat többi síkjáról



Piros ellipszis: szeleten belüli képlet vetülete  
 Kék ellipszis: szeleten kívüli képletek bemosódása

# Mátrix Inverziós Tomoszintézis

- Alapötletet ugyanaz a megfigyelés adja, mint ami az SAA algoritmusét:

$$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(1)} = \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \mathbf{t}_{(1,1)} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(1,2)} + \dots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(1,n)}$$

$$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(2)} = \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \mathbf{t}_{(2,1)} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(2,2)} + \dots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(2,n)}$$

⋮

$$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(m)} = \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \mathbf{t}_{(m,1)} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(m,2)} + \dots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(m,n)}$$

$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(j)}$  j-edik projekció i-edik oszlopának intenzitásaiból képzett vektor

# Mátrix Inverziós Tomoszintézis

- Alapötletet ugyanaz a megfigyelés adja, mint ami az SAA algoritmusét:

$$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(1)} = \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \mathbf{t}_{(1,1)} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(1,2)} + \dots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(1,n)}$$

$$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(2)} = \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \mathbf{t}_{(2,1)} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(2,2)} + \dots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(2,n)}$$

⋮

$$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(m)} = \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \mathbf{t}_{(m,1)} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(m,2)} + \dots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(m,n)}$$

$\mathbf{f}_{(:,i)}^{(j)}$  j-edik modellezett és rekonstruálni kívánt 0 vastagságú szelet projekciójának i-edik oszlopának intenzitásaiból képzett vektor

# Mátrix Inverziós Tomoszintézis

- Alapötletet ugyanaz a megfigyelés adja, mint ami az SAA algoritmusét:

$$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(1)} = \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \mathbf{t}_{(1,1)} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(1,2)} + \dots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(1,n)}$$

$$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(2)} = \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \mathbf{t}_{(2,1)} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(2,2)} + \dots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(2,n)}$$

⋮

$$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(m)} = \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \mathbf{t}_{(m,1)} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(m,2)} + \dots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(m,n)}$$

$\mathbf{t}_{(j,i)}$  i-edik rekonstruálandó szelet vetületének j-edik projekcióbeli impulzusválaszát leíró vektor, mivel csak eltolást modellez, ezért egy dirac-delta diszkretizáltja.

# Mátrix Inverziós Tomoszintézis

- Jelentősen egyszerűsödik a feladat, ha a vektor egyenletrendszert frekvenciatérben vizsgáljuk:

$$\mathbf{g}_{(j)}(\omega) = \mathbf{T}(\omega) \cdot \mathbf{f}_{(j)}(\omega) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}_{(j)}(\omega) = \mathbf{T}(\omega)^\dagger \cdot \mathbf{g}_{(j)}(\omega)$$

$$- \mathbf{g}_{(j)}(\omega) = \left[ FT_\omega \left\{ \mathbf{g}_{(:,j)}^{(1)} \right\} \quad FT_\omega \left\{ \mathbf{g}_{(:,j)}^{(2)} \right\} \quad \dots \quad FT_\omega \left\{ \mathbf{g}_{(:,j)}^{(m)} \right\} \right]^T$$

$$- \mathbf{f}_{(j)}(\omega) = \left[ FT_\omega \left\{ \mathbf{f}_{(:,j)}^{(1)} \right\} \quad FT_\omega \left\{ \mathbf{f}_{(:,j)}^{(2)} \right\} \quad \dots \quad FT_\omega \left\{ \mathbf{f}_{(:,j)}^{(n)} \right\} \right]^T$$

$$- \mathbf{T}(\omega) = \left\{ FT_{(\omega)} \left\{ \mathbf{t}_{(j,i)} \right\} \right\}$$

- Összegezve a MITS alapötlete, hogy lineáris tomo esetén a frekvenciatérbeli felírás jelentősen kompaktabb az inverz probléma képtérbeli felírásánál.

# Mátrix Inverziós Tomoszintézis gyakorlati megvalósítása

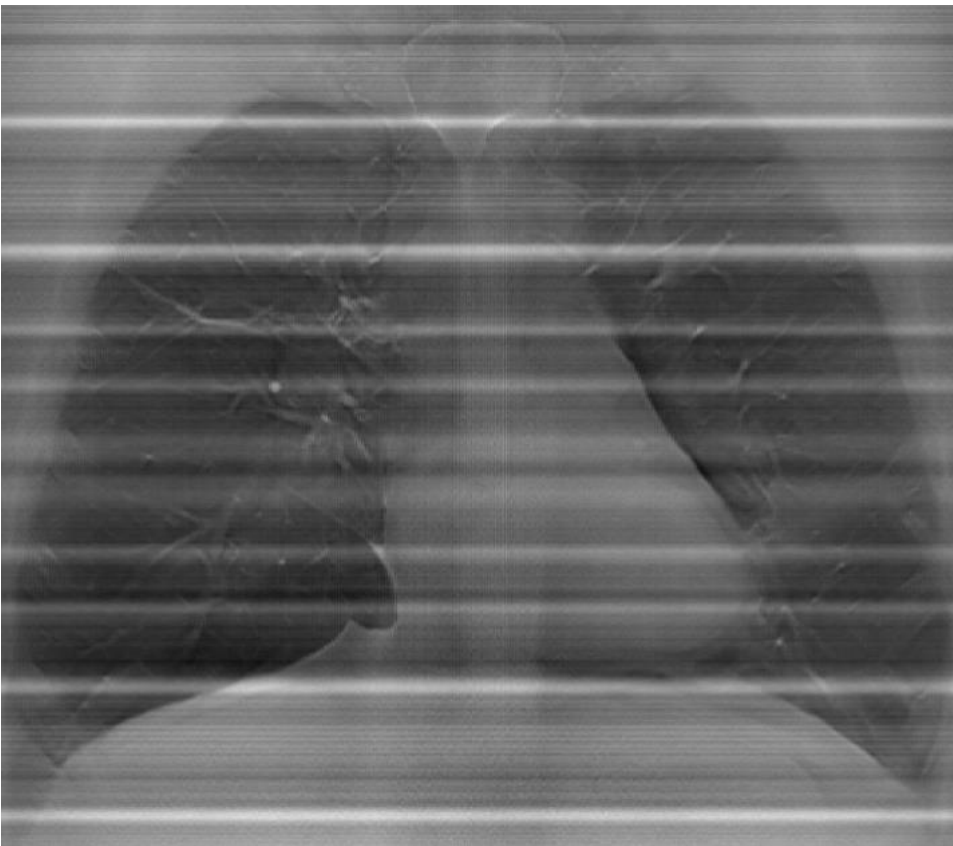
- Diszkretizálás és a DFT okozta problémák:
  - Mintavételezés:  $t_{(i,j)}$  mintavételezése az egész rendszer viselkedését jelentősen befolyásolja:
    - Energiája nem változhat a mintavételezés hatására, ellentétben jelentősen torzítunk...
    - Figyelembe véve a frekvenciatérbeli műveletvégzést, a mintavételezés frekvenciatartományban történik (ideális - sinc interpolációval ekvivalens képtérben).
  - DFT által okozott spektrumszivárgás is jelentős probléma:
    - Klasszikus megoldás, az ablakozás natívan nem adekvát.

# Mátrix Inverziós Tomoszintézis spektrumszivárgás

- Felvételi elrendezés miatt oszloponként történik az inverz szűrés, elegendő a függőleges cirkularitás:
  - Az projekciók extrapolációja nem úszható meg, ellenkező esetben a „csavarodás artefekt történik”.
  - Extrapoláció szükséges mértéke  $t_{(j,i)}$  tartóinak a maximuma, ezzel elérhető, hogy csak extrapolált terület csavarodhat be.
- Probléma projekciók extrapolálásával kezelhető:
  - Extrapoláció olyan képterülettel terjeszti ki a projekciókat, mely a „legsimább” átmenetet és cirkuláris projekciót generál.



# Mátrix Inverziós Tomoszintézis spektrumszivárgás



Extrapoláció nélkül



Extrapoláció alkalmazásával

# Mátrix Inverziós Tomoszintézis

## Dekonvolúció numerikus problémái

- $\mathbf{T}(\omega)^\dagger$  zajérzékenysége jelentős problémaforrás

– Kondíciós szám  $cond(\mathbf{T}(\omega)) = \sigma_{\max} / \sigma_{\min}$  származtatása:

$$cond(\mathbf{T}) = \max_{\mathbf{e}, \mathbf{b}} \left\{ \frac{\|\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{e}\|_2 / \|\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{e}\|_2 / \|\mathbf{b}\|_2} = \frac{\|\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{e}\|_2 / \|\mathbf{e}\|_2}{\|\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{b}\|_2 / \|\mathbf{b}\|_2} \right\}$$

- Legyen  $\mathbf{T} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^*$  SVD felbontás, ekkor  $\mathbf{T}^\dagger = \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Sigma}^\dagger \cdot \mathbf{U}^*$

- Mivel  $\mathbf{U}$  és  $\mathbf{V}$  oszlopvektorai ortonormált bázisok, ezért

$$\max_{\mathbf{e}} \left\{ \|\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{e}\|_2 / \|\mathbf{e}\|_2 \right\} = 1/\sigma_{\min} \quad \text{és} \quad \min_{\mathbf{b}} \left\{ \|\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{b}\|_2 / \|\mathbf{b}\|_2 \right\} = 1/\sigma_{\max}$$

- Zajcsökkentő regularizáció célja  $cond(\mathbf{T})$  minimalizálása

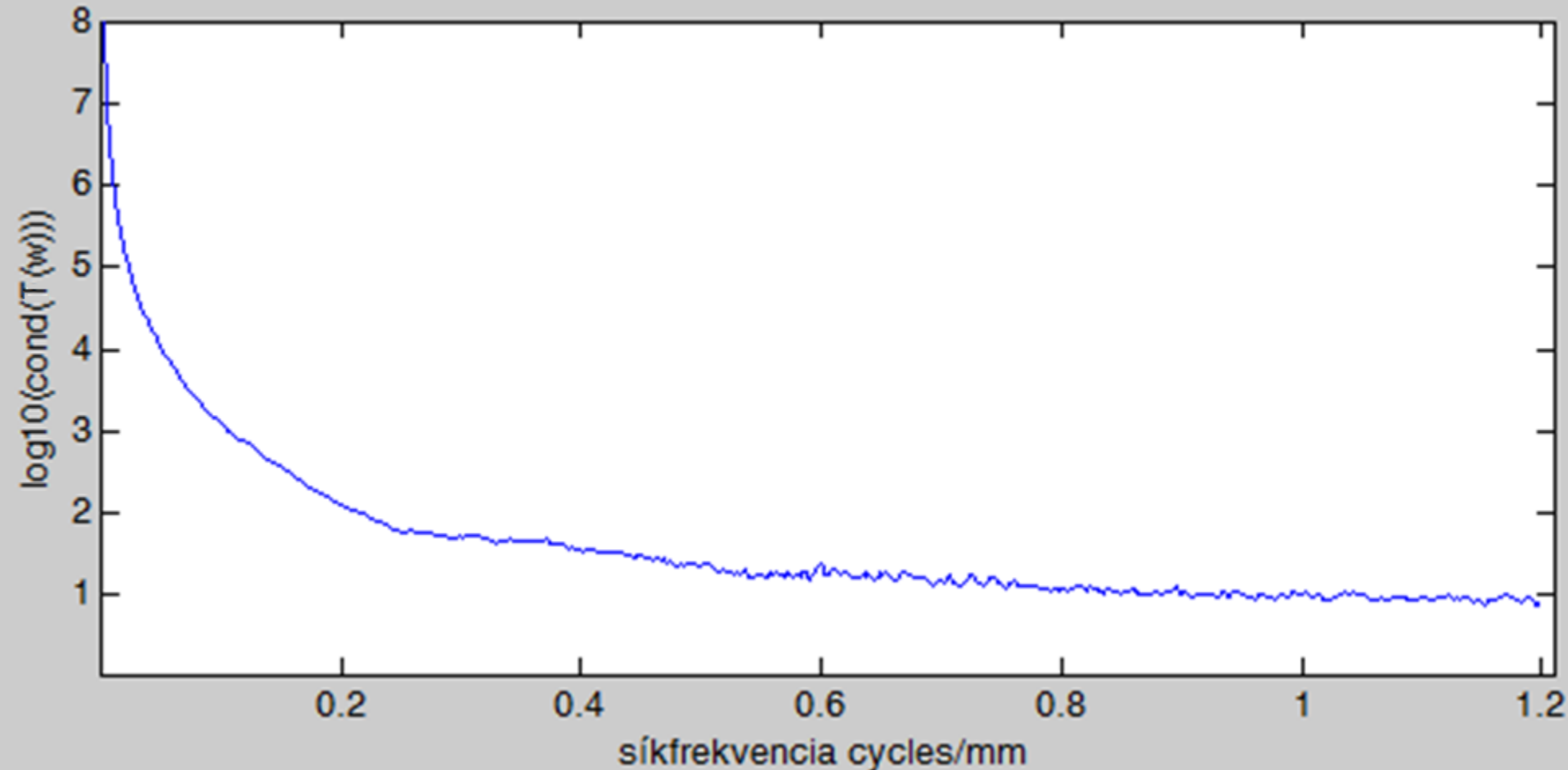
# Mátrix Inverziós Tomoszintézis

## Dekonvolúció zajérzékenysége

- $\mathbf{T}(\omega)^\dagger$  előállítása csonkolt SVD-vel:
  - $\mathbf{T}^\dagger = \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Sigma}^\dagger \cdot \mathbf{U}^*$ , ahol  $\mathbf{\Sigma}^\dagger_{(i,i)} = \begin{cases} 1/\sigma_i & |\sigma_i| > \varepsilon \\ 0 & |\sigma_i| \leq \varepsilon \end{cases}$
  - Kísértetiesen hasonlít a csonkolt dekonvolúcióra:
    - Joggal, a különbség annyi, hogy ott a DFT mátrixával diagonalizálunk, míg SVD esetén a bal, illetve jobboldali sajátvektor mtrx.-okkal „diagonalizálunk”
- $\mathbf{T}(\omega)$  regularizált Moore- Penrose pseudo inverze a Wiener dekonvolúció általánosítottja

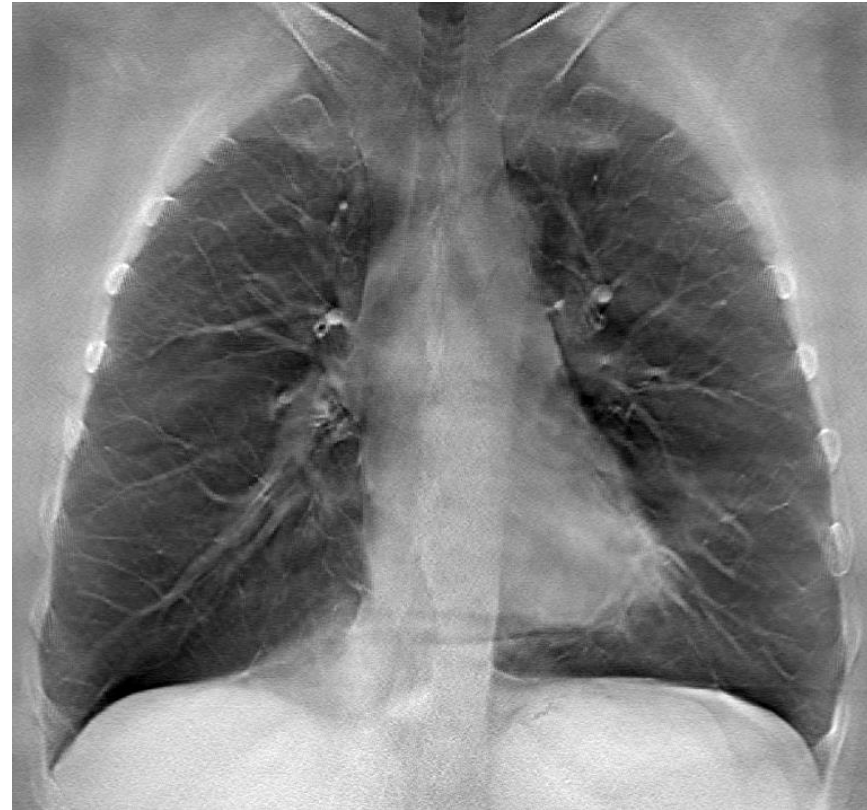
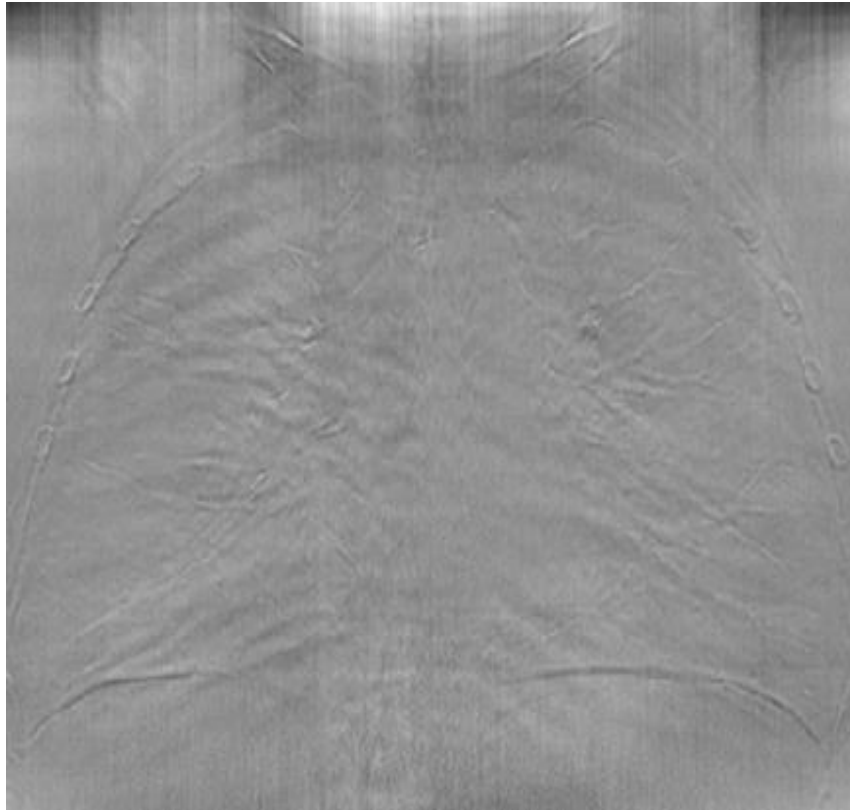
# Mátrix Inverziós Tomoszintézis

## Kondíció lineáris tomoszintézis esetén



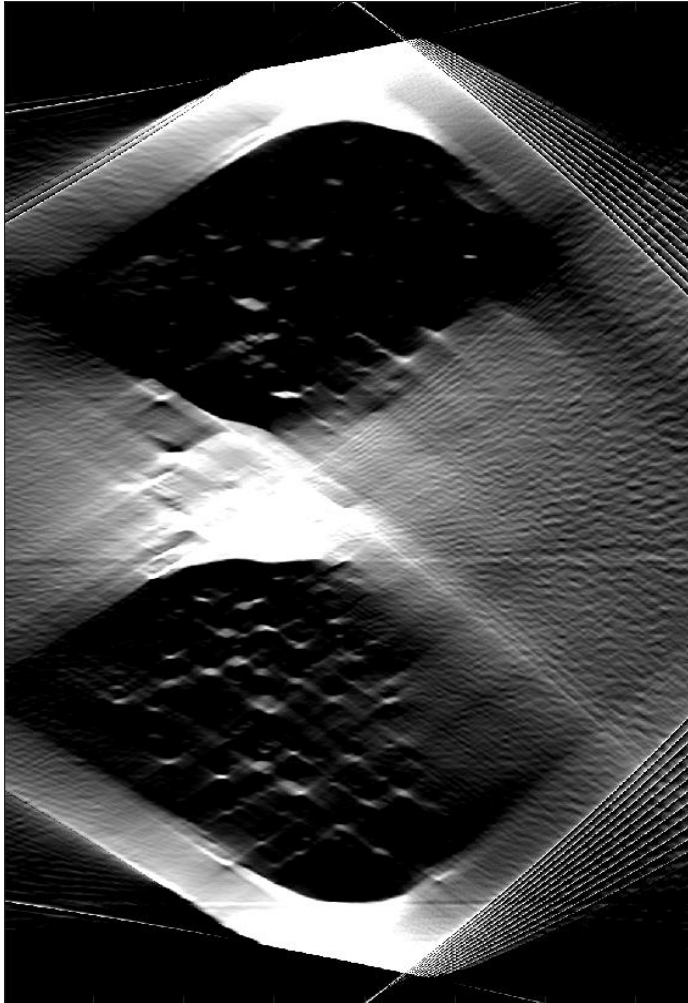
Korlátolt szögtartomány miatt alacsony frekvencia esetén a projekciókon kisebb a változás, aminek következménye a nagyobb zajérzékenység.

# Mátrix inverziós tomoszintézis Csonkolt SVD hatása

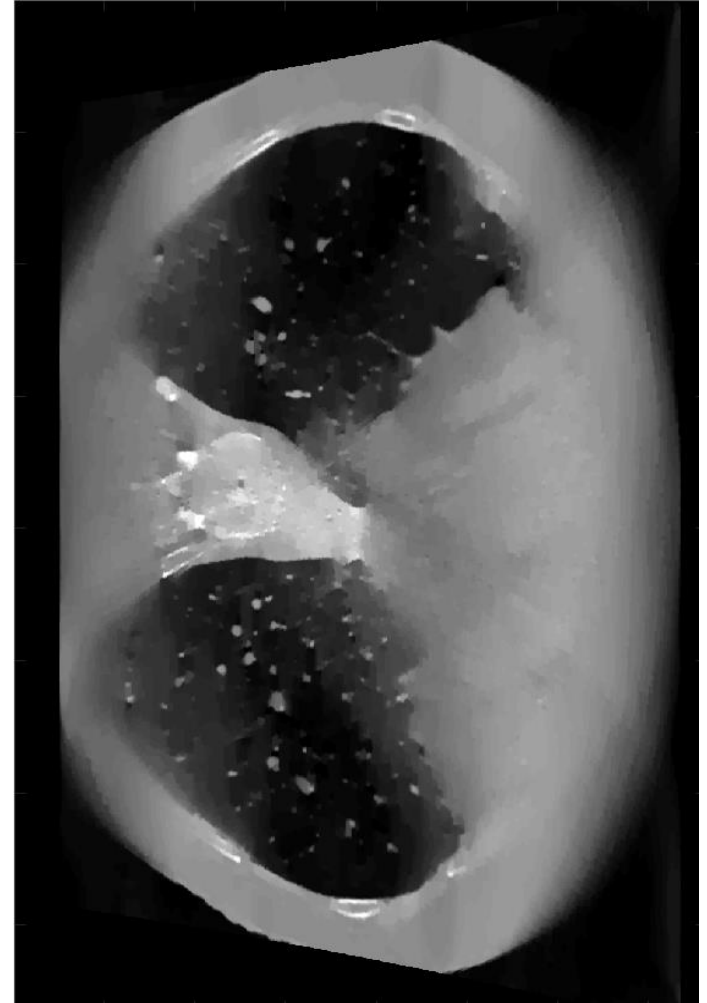


Jól látható, hogy a magasfrekvenciás tartomány zaja dominál a direkt dekonvolúciónál, míg a Csonkolt SVD jelentősen javít a helyzeten.

# Limitált szögtartomány ( $\pm 40^\circ$ , 50 projekció) - MAP becslés



FBP



Ritkasági regularizáció

# Rekonstrukciókkal szembeni elvárások

- Kvalitatív képet kapjunk:
  - Adott voxel / pixel intenzitása csak az ott jelenlévő szövet felépítésétől (CT, MRI) / viselkedésétől (PET, SPE(C)T) függjön.
  - Valójában ez sosem teljesül, de ez lenne a cél
- Hounsfield Unit
  - Röntgenes eset abszolút szürkességi skálája:

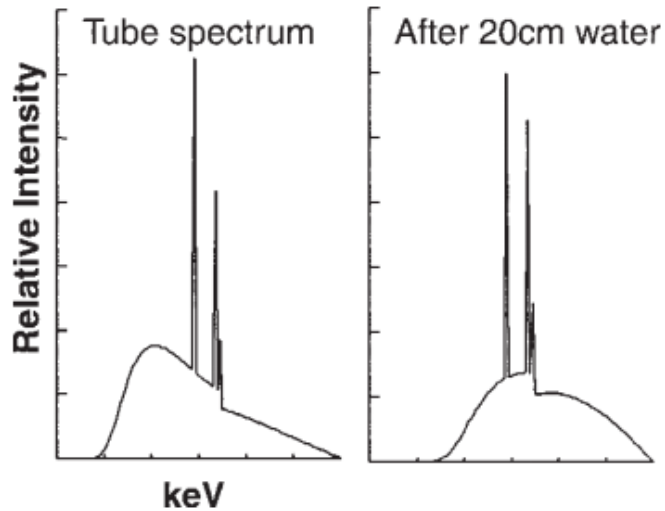
$$HU = \frac{\mu - \mu_{\text{víz}}}{\mu_{\text{víz}} - \mu_{\text{levegő}}} \cdot 1000$$

# Különböző anyagok lin. csill. Együtthatói HU-ban

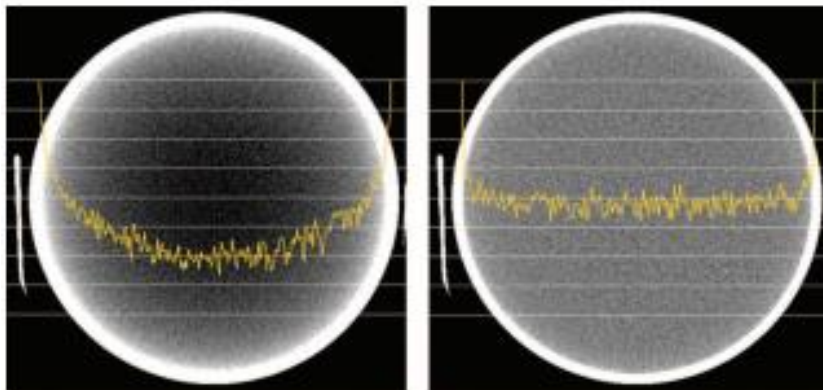
| Anyag neve               | [HU]         |
|--------------------------|--------------|
| Levegő                   | -1000        |
| Tüdő szövet              | -500         |
| Zsír                     | -100 – -50   |
| Víz                      | 0            |
| Agy-gerincvelői folyadék | 15           |
| Vese                     | 30           |
| Vér                      | +30 – +45    |
| Izom                     | +10 – +40    |
| Szürke állomány          | +37 – +45    |
| Fehér állomány           | +20 – +30    |
| Máj                      | +40 – +60    |
| Lágyrész                 | +100 – +300  |
| Csont                    | +700 – +3000 |



# Sugárkeményedés artifakt



Röntgensugár intenzitás spektruma



Csésze artifakt



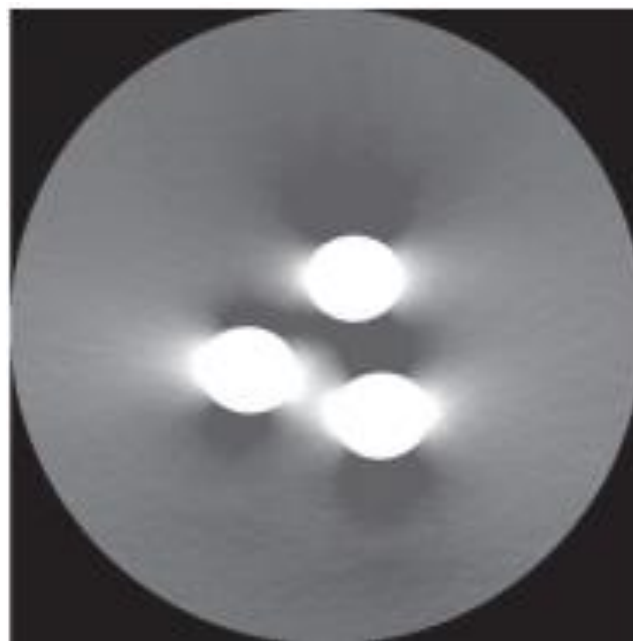
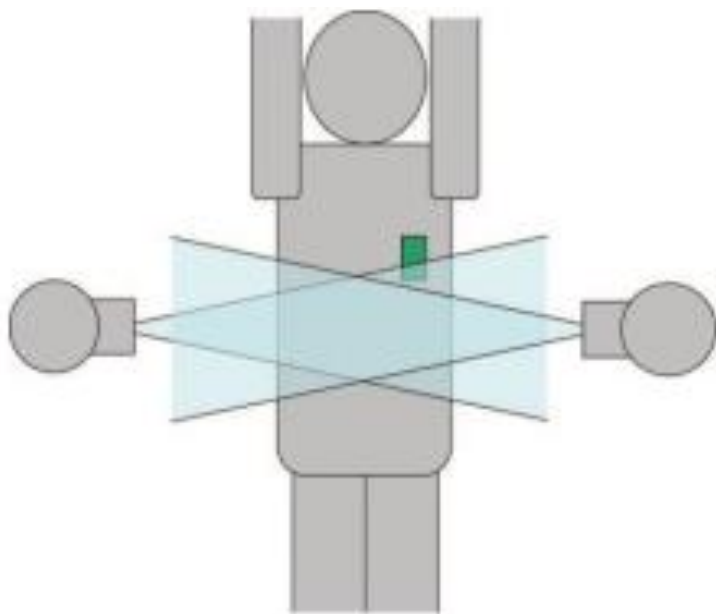
Sugárkeményedés miatti „streaking”

# Sugárkeményedés artifakt

- Kompenzációs módszerek:
  - Keményítő szűrő alkalmazása a sugárforráson
    - Tipikusan nagy csillapítású homogén fémekkel (ólom, réz, wolfram, stb.)
  - Kalibrálással
    - Pl. hengeres vízfantommal – valódi páciens sosem hengeres uniform víz...
  - Szoftveresen
    - Pl. csontok sugárkeményítésének modellezése levetítésnél (ez is csak közelítő módszer)

# Részleges térfogat artifakt

- Széles kollimálású nyalábnál csak a szelet projekciók egy részére vetül az objektum

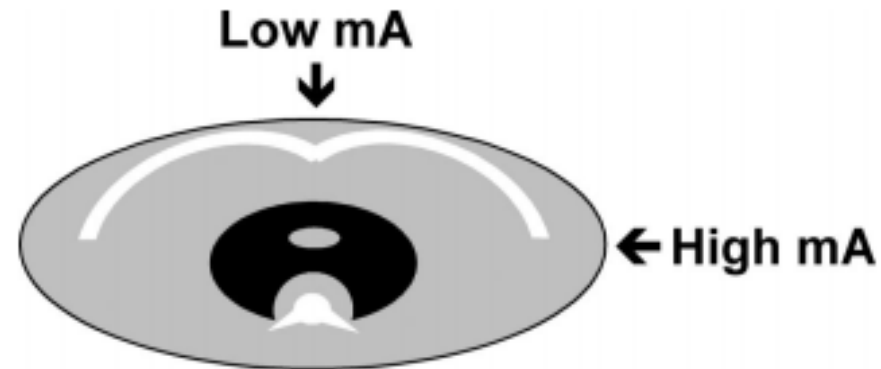


# Foton éhezés artifakt

- Vizsgált térfogaton belüli anyagok teljesen elnyelik a röntgen fotonokat (tipikusan fémek, sűrű csontok).



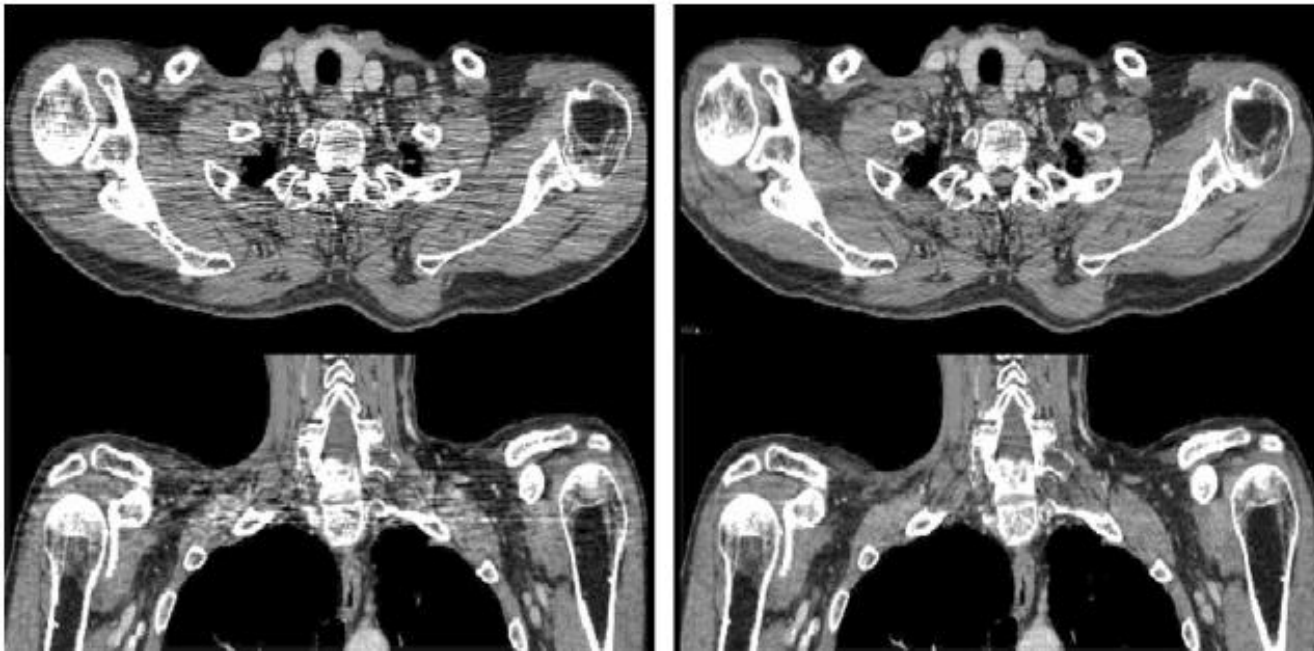
Streaking a rekonstruált szeleteken a kulcscsont miatt



Kompenzálás: problémásabb sugaraknál nagyobb csőáram (nagyobb dózis)

# Foton éhezés artifakt

- Szoftveres korrekciók:
  - Adaptív filtráció: problémás sugarakhoz tartozó voxelek csillapítási együtthatóinak elmosása
  - MAP becslés



Normál rekonstrukció

Adaptív filtráció

# Fém artifakt

- Probléma: fémek teljesen elnyelhetik a sugarat / keményen csillapíthatják / részleges térfogat /...
- Kompenzálása szoftveresen:
  - Pl. projekciókon a fémek szegmentálása, majd az intenzitásaik felülbecslése
  - MAP becslés erős regularizációval

# Fém artifakt



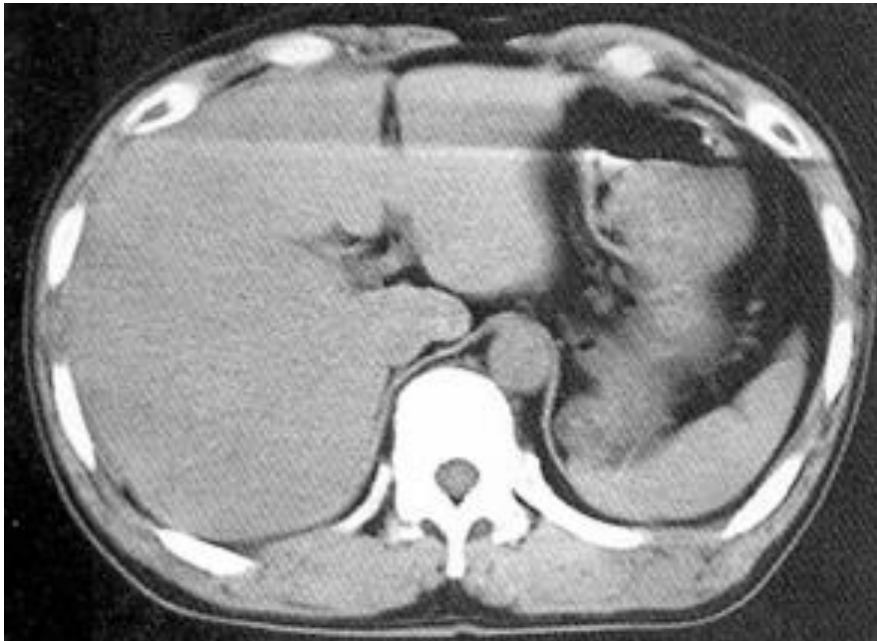
Gerinc implantátum és az ART



ART a szinogram kompenzációja után

# Páciens bemozdulása

- Szív, mellkas mozgása elkerülhetetlen
  - Létezik EKG kapuzott CT, illetve speciális anyaggal lelassítható maradandó károsodás nélkül a szív
  - Az utóbbi minimalizálható levegő visszatartással



A vízszintes streaking a páciens bemozdulásának a következménye



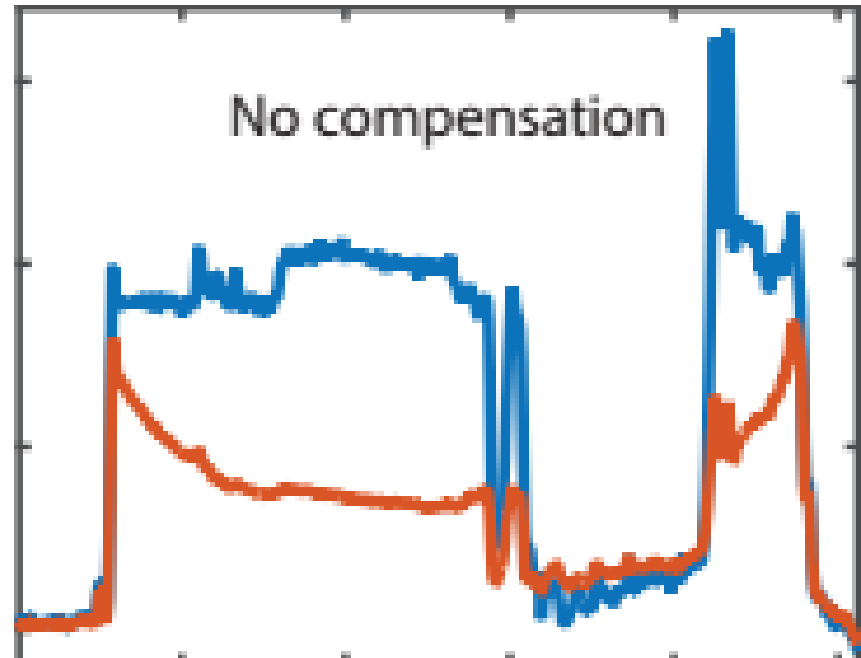
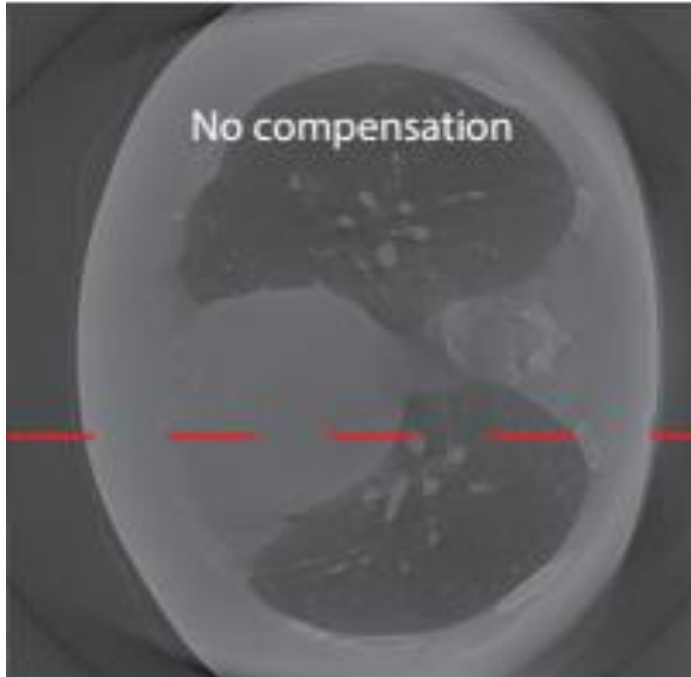
# Vizsgálati mezőn kívüli objektum

- A vizsgált páciens egy testrésze olyan területen van, melyet üresnek feltételez a rekonstrukció
  - Erősen inkozisztens projekciók
  - Elkerülhető a beállítások megfelelő módosításával



# Compton szóródás

- Flat panel detektornál, több soros detektornál
  - A szóródó fotonok detektorba csapódva kisebb relatív csillapodások érzékelését eredményezik
  - HW (moduláció alapú)/ SW (modell alapú) kompenzáció

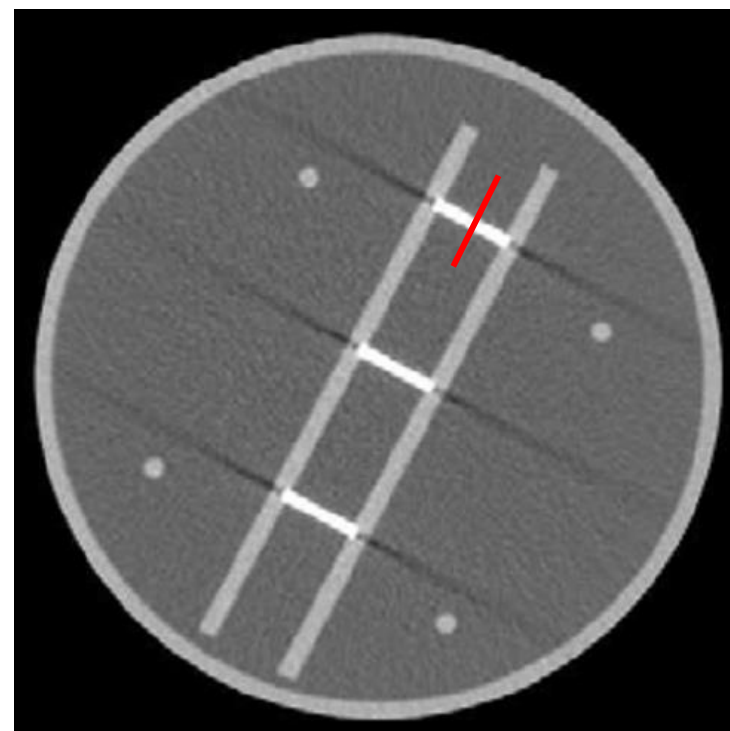
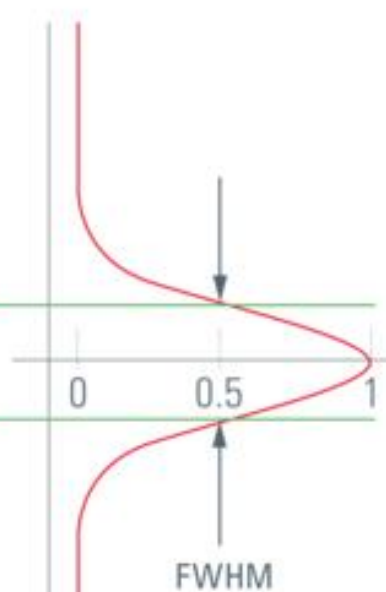
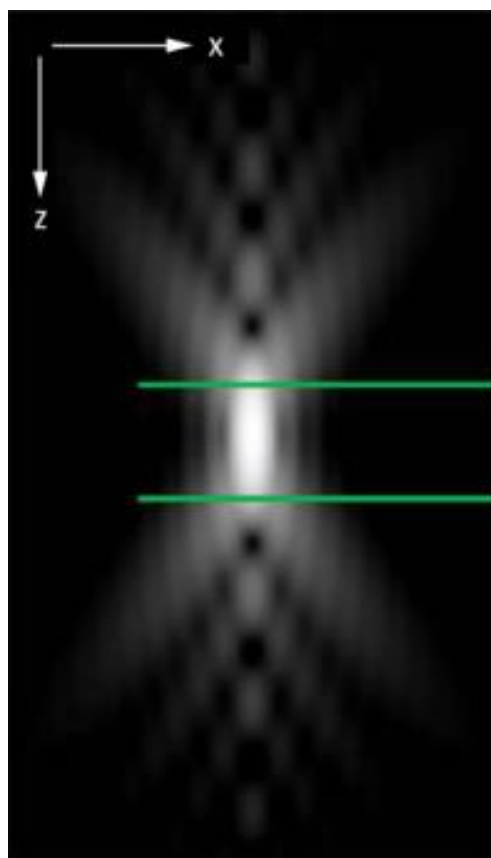
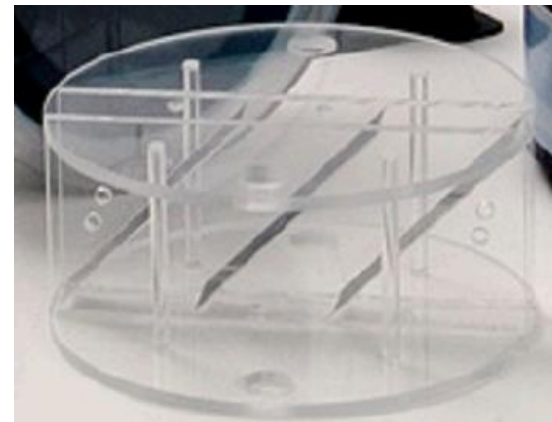


# 3D Röntgen tomográfia rekonstrukciós eljárásainak minősítése

- Rekonstrukció metrikái:
  - Szeleten belüli effektív felbontása (emlékeztetőül  $bw\{\mathbf{h}\}$ )
    - Irányfüggő átviteli függvény közelíthető az élpár fantom / él fantom rekonstrukciójából.
  - Szeletek effektív vastagsága:
    - Mind CT, mind Tomo esetén a rekonstruált szeletekre merőleges irány menti kiterjedése a szeleteknek.
    - Felhasználási területfüggő optimális értéke.
    - Minél kisebb, annál több szelet kell, hogy minden képlet láthatóvá váljon (legalább egy szeleten).
    - Mérése tipikusan ferde fémlémezzel / fémhuzallal.

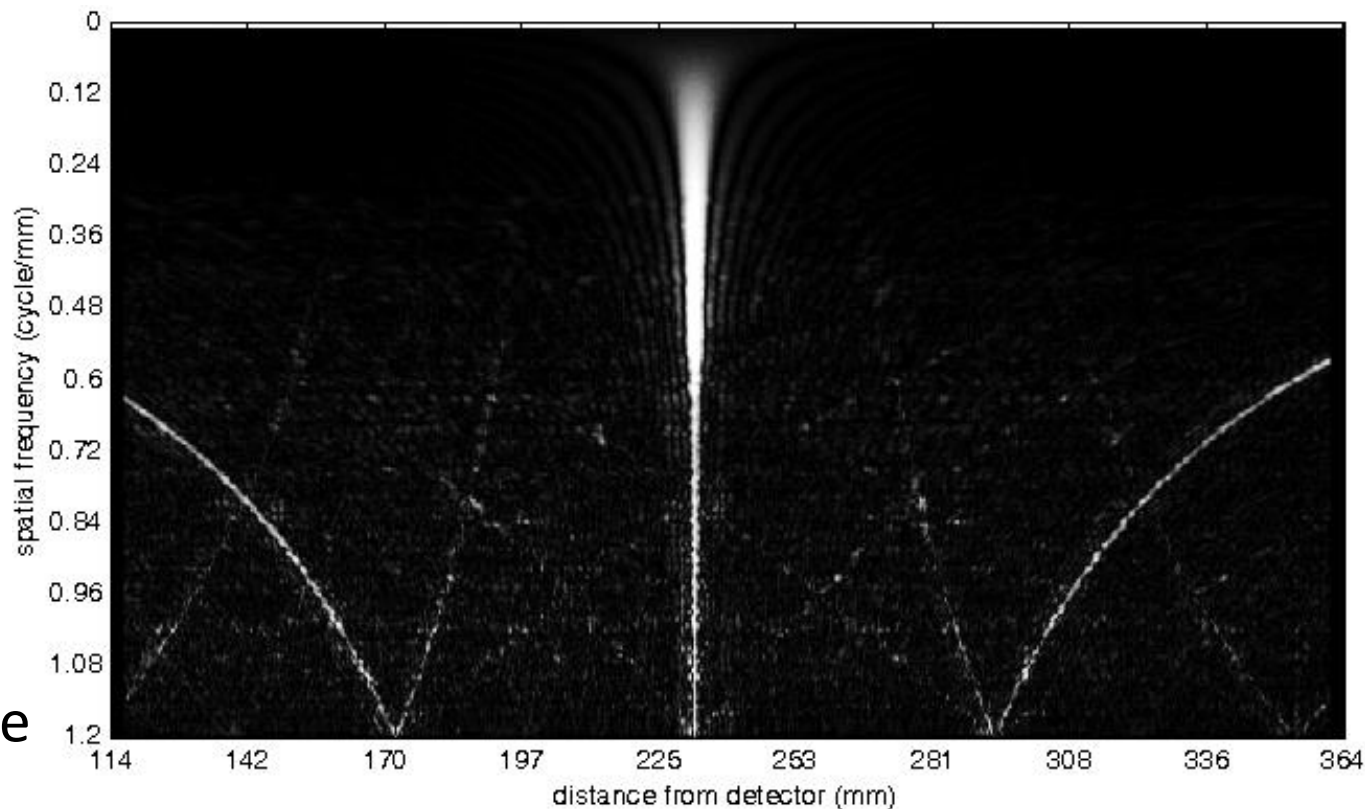
# CT Szeletvastagság

Slice Sensitivity Profile mérése a lemezek rekonstrukciójára merőlegesen: szeletvastagság FWHM elvvel becsülhető



# 3D Röntgen tomográfia rekonstrukció Modulációs Átviteli Függvénye

- Ferde huzal fantommal (elvben) mérhető:
  - Ha az eljárás az X-Y síkokat rekonstruálja, akkor a huzal ne legyen párhuzamos a Z tengellyel.



Lineáris tomo MITS  
rekonstrukció MTF-e