

Fourier térbeli analízis, inverz probléma

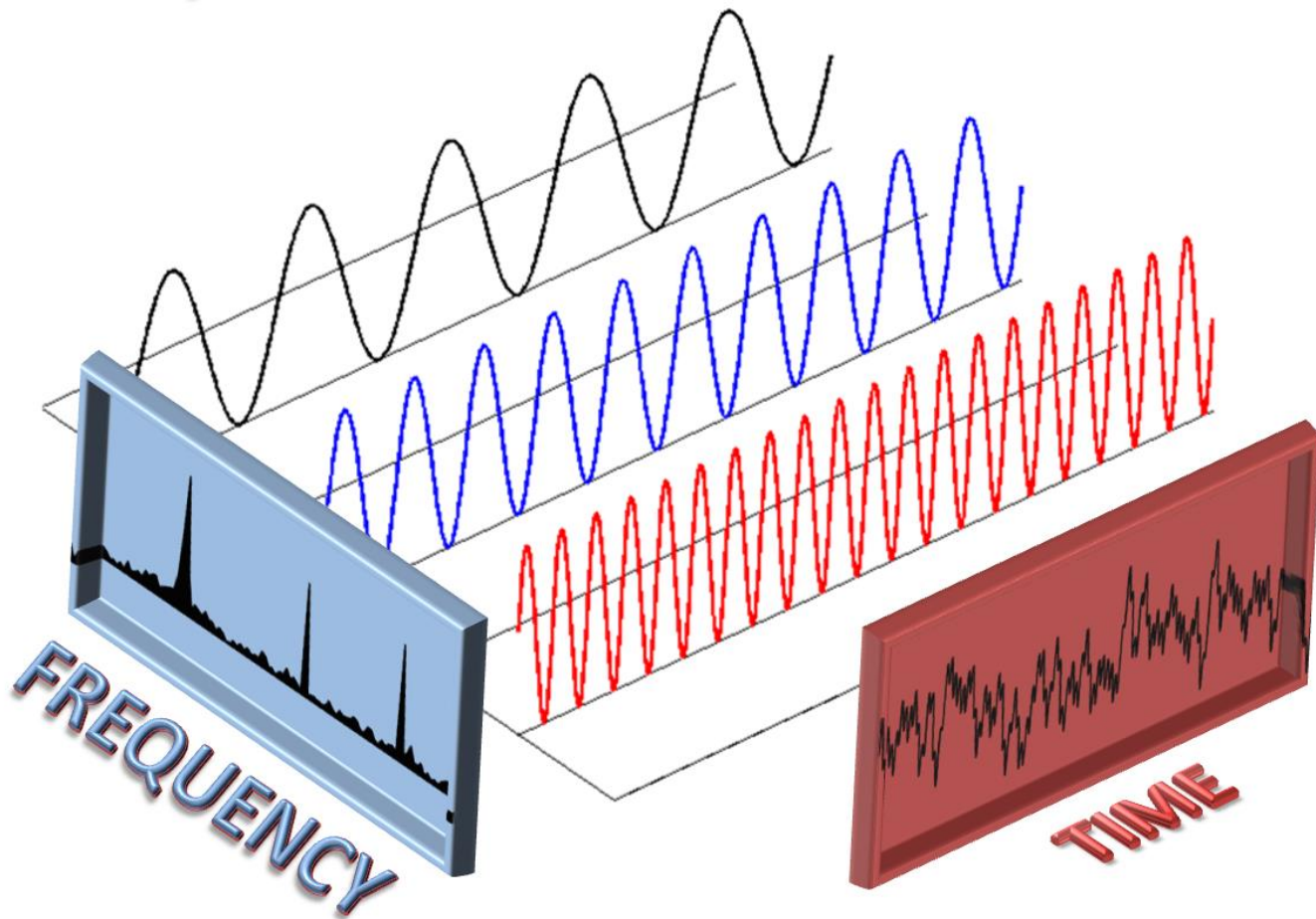
Orvosi képdiagnosztika

2019 ősz

Előadás témái

- Fourier transzformációk és kapcsolataik:
 - FS, FT, DTFT, DFT, DFS
 - Mintavételezés, interpoláció

Folytonos Fourier Transzformáció



Folytonos Fourier Transzformáció

- Lineáris transzformáció a véges energiájú, folytonos függvények tere felett:

$$- F(\omega) = FT\{f\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\{-j \cdot x \cdot \omega\} dx$$

$$- f(x) = FT^{-1}\{F\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp\{j \cdot x \cdot \omega\} d\omega$$

- Legfontosabb tulajdonságai:

$$- \text{Konvolúció tétele: } (f * g) = FT^{-1}\{(F \cdot G)(\omega)\}$$

$$- \text{Fordított konvolúció: } ((f \cdot g)(x)) = \frac{1}{2\pi} FT^{-1}\{F * G\}|_x$$

$$- \text{Parseval tétele: } E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

Folytonos Fourier Transzformáció

– Valós jel spektruma: $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$

– Páros, valós jel spektruma:

$$F(-\omega) = \operatorname{Re}\{F(-\omega)\} = \operatorname{Re}\{F(\omega)\} = F(\omega)$$

– Páratlan, valós jel spektruma:

$$F(-\omega) = \operatorname{Im}\{F(-\omega)\} \cdot j = \operatorname{Im}\{F(\omega)\} \cdot (-j) = \overline{F(\omega)}$$

– Periodikus jel spektruma diszkrét:

$$F(\omega) = 0, \text{ ha } \omega \neq k \cdot (2\pi \cdot f) \Big|_{k \in \mathbb{Z}}$$

– Ekvivalens egy unitér transzformációval:

- Ez pl. maga után vonja a bijektivitást

Folytonos Fourier Sorfejtés

- Lineáris transzformáció a periodikus folytonos függvények tere felett:

$$- c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cdot \exp(-j \cdot x \cdot 2\pi n/T) dx; \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$- f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \exp\{j \cdot x \cdot 2\pi n/T\}$$

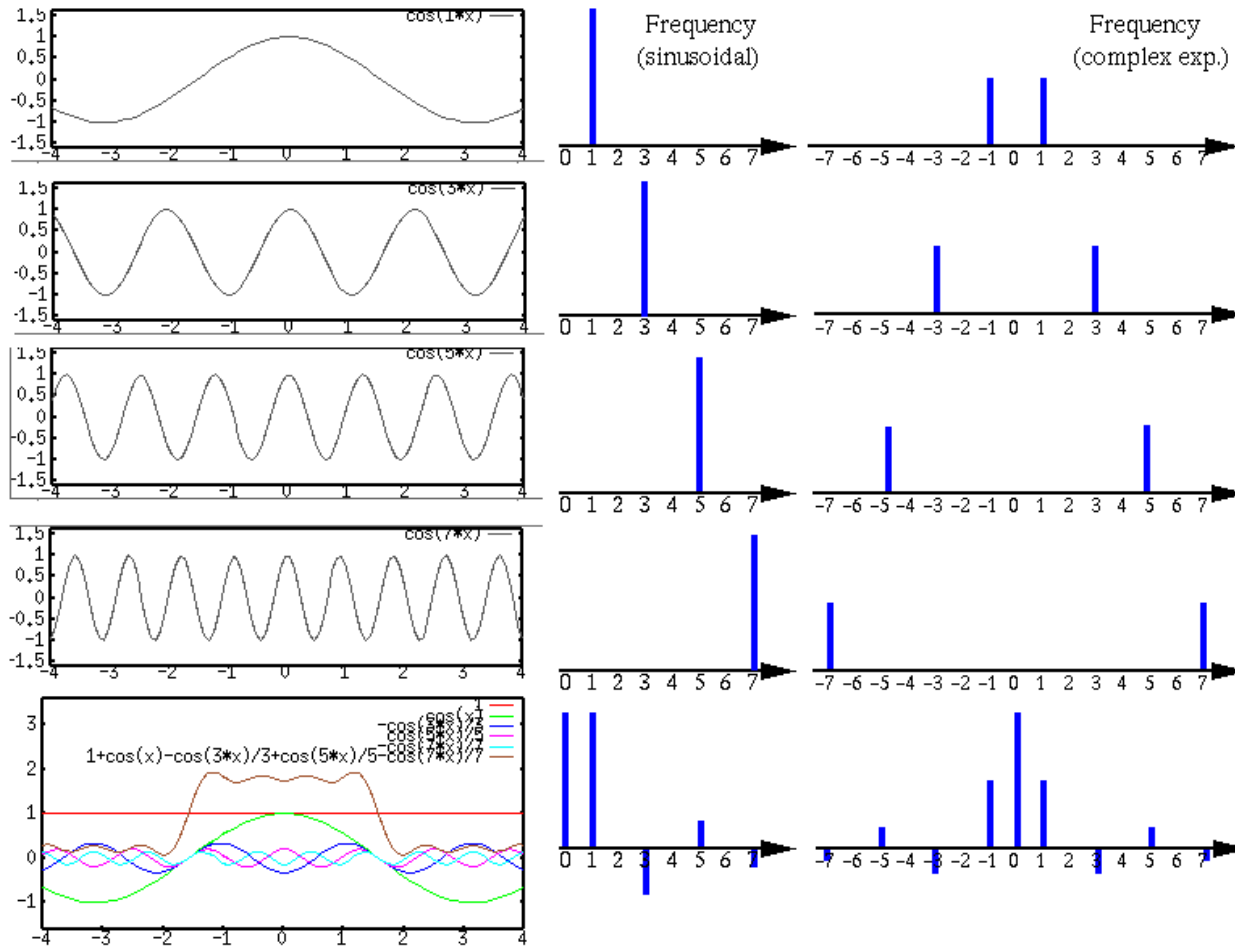
- Kapcsolat a folytonos FT-val:

– Mintavételezi a spektrumot: $c_n \propto F(2\pi \cdot n/T)$

– Periodikus jel \Leftrightarrow diszkrét spektrum

– Egyéb tulajdonságokat örökli a folytonos FT-től

Folytonos Fourier Sorfejtés – 1D



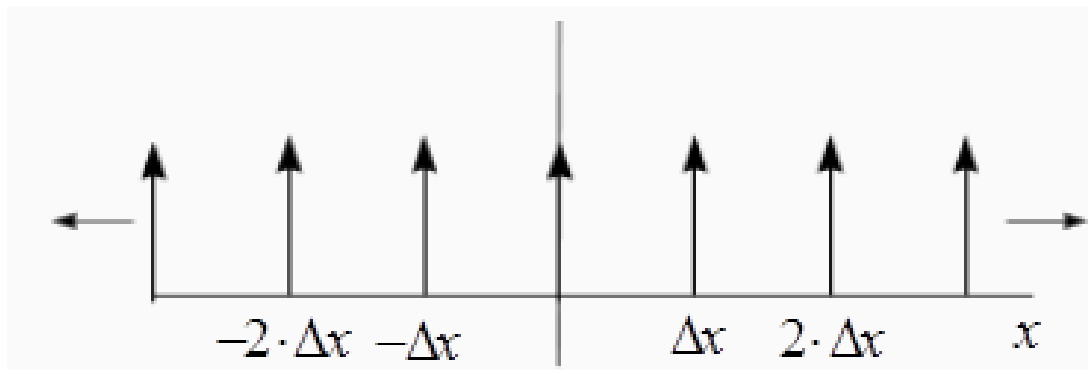
Diszkrét idejű Fourier Transzformáció (DTFT)

- Adott egy mintavételezéssel előállt végtelen hosszú, abszolút összegezhető jel: $f[n]$
- Definíció:
 - $X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \exp\{-j \cdot \omega \cdot n\}$
 - $x[n] = 1/2\pi \cdot \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) \exp\{j \cdot \omega \cdot n\} d\omega$
- Alapvető tulajdonságok:
 - $n \in \mathbb{Z}$, de $\omega \in \mathbb{R}$
 - $X(\omega + 2 \cdot k \cdot \pi) \Big|_{k \in \mathbb{Z}} = X(\omega)$
 - Egyéb tulajdonságait örökli a folytonos FT-től

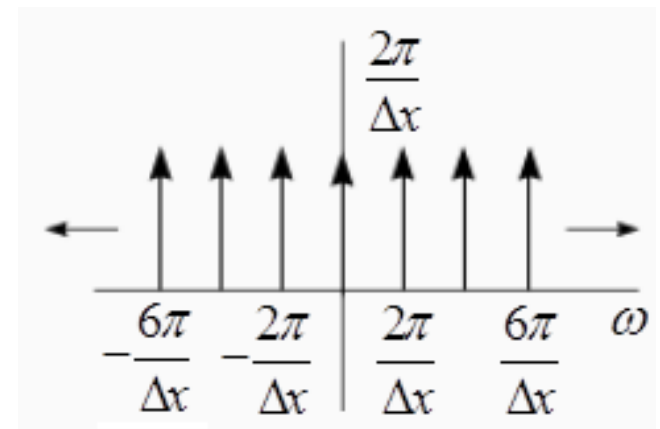
Matematikai mintavételezés

Folytonos FT és DTFT kapcsolata

- Végtelen impulzus fésű:
 - Matematikai mintavételezés: folytonos jel elemenkénti szorzata az impulzus fésűvel.
 - Időtartománybeli szorzás \Leftrightarrow Spektrumok konvolúciója



Impulzuszésű az időtartományban



frekvenciatartományban

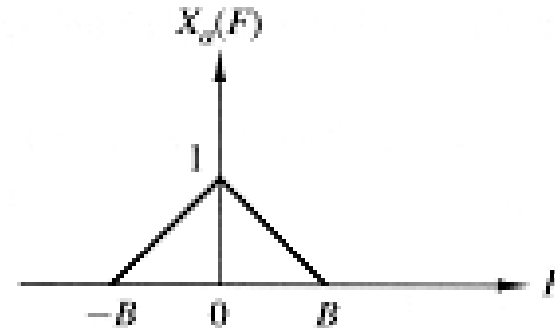
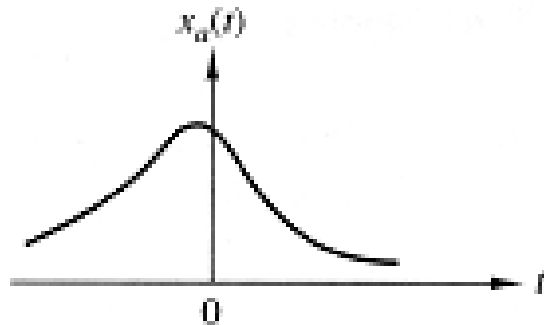
Mintavett jel spektruma

- Formálisan a mintavett jel spektruma:

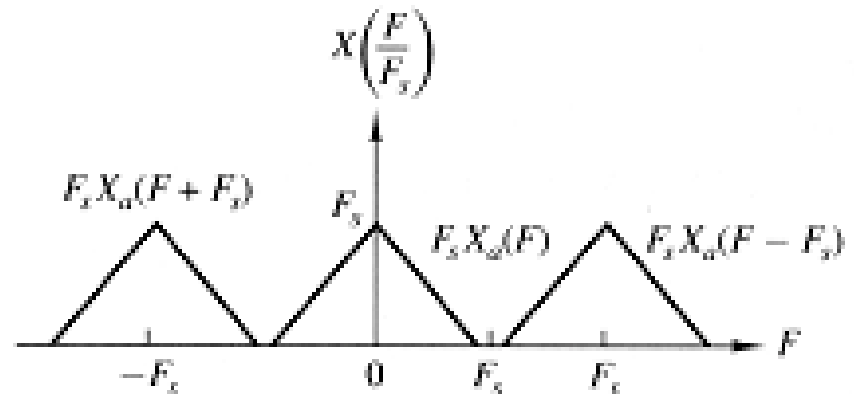
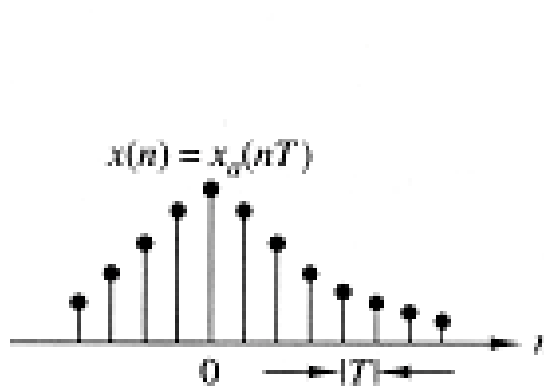
$$X_s(\omega) = \frac{2\pi}{\Delta x} X(\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{\Delta x}\right) = \frac{2\pi}{\Delta x} \sum_k X\left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{\Delta x}\right)$$

- Δx : mintavételezések távolsága
 - $X(\omega)$: folytonos idejű jel spektruma
 - $X_s(\omega)$: mintavételezett jel spektruma
- Nyquist mintavételi törvény:
 - $bw\{x\} < (1/2) \cdot f_s$; $\square f_s = (1/\Delta x)$
 - Ha nem tartjuk be alul mintavételezés: $K \cdot X_s(\omega) \neq X(\omega)$

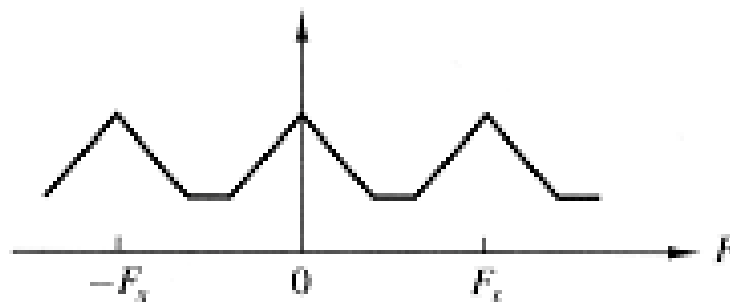
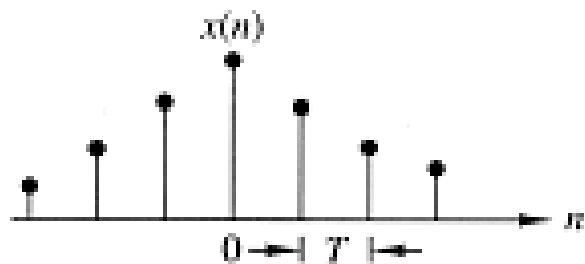
Helyesen mintavételezés interpretációja



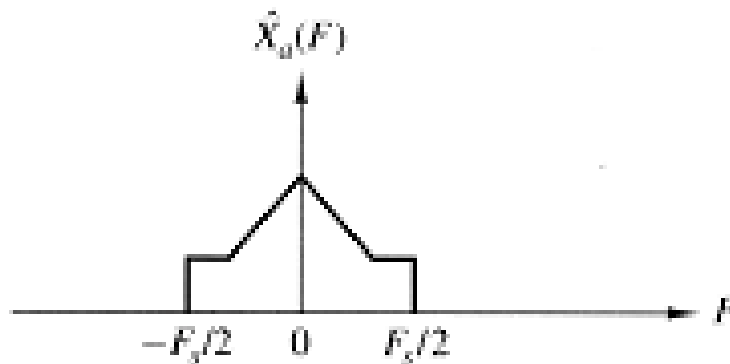
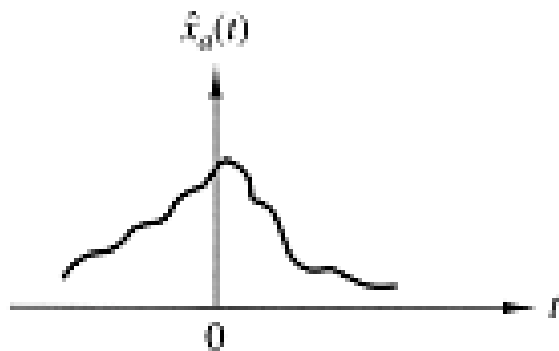
(a)



Alul mintavételezés interpretációja spektrum átlapolódása



(d)



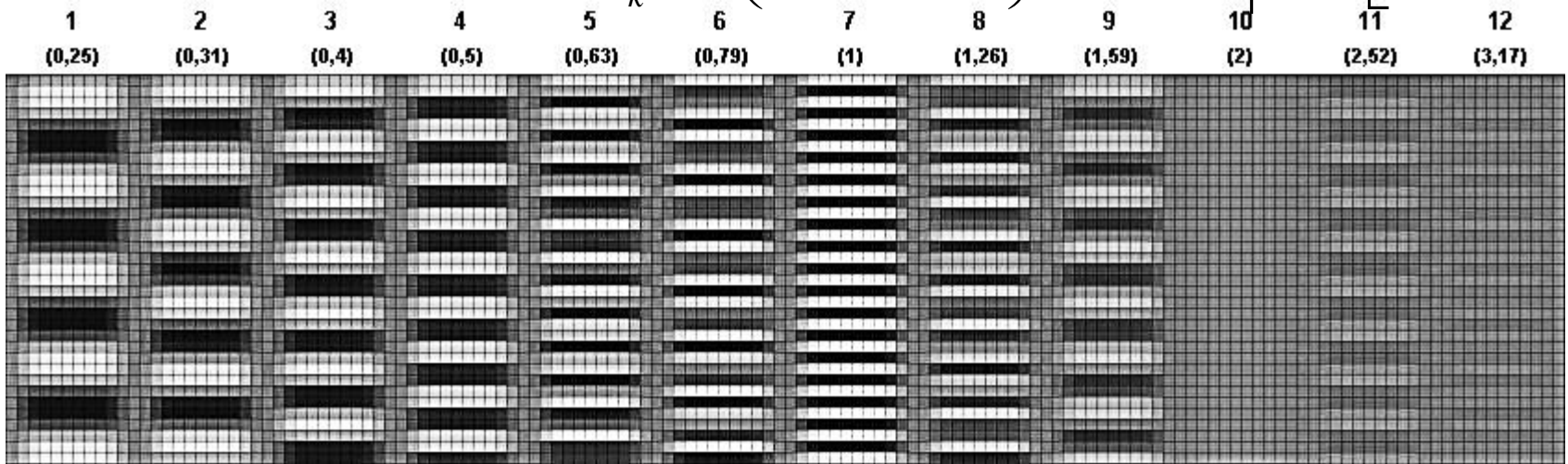
Spektrum átlapolódása moire / aliasing

- Spektrum átlapolódása által generált jeltorzulás



Spektrum átlapolódása - aliasing

- Aliasing : $X_s(\omega) \propto \sum_k X\left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{\Delta x}\right) \neq X(\omega) \Big| \omega \in \left[-\frac{\pi}{\Delta x}, \frac{\pi}{\Delta x}\right]$



- Anti-aliasing filter – mintavételezés előtti alul-áteresztő szűrés:
 - Pl. Bayer szűrős fényképezőgépeknél optikai szűrő
 - Radiológiában az elkent PSF-ek miatt elhagyható

Mintavett jel rekonstrukciója

- Rekonstrukció (interpoláció):
 - Cél: a mintavételezett jel értékének előállítása két mintavételezési pont között
 - Ha sérült a mintavételezési törvény, akkor lehetetlen
 - LTI rendszerrel: $x_R = x_S * h_R$
 - Ideális interpolációs kernel:
 - $H_R(\omega) = \begin{cases} K & |-\omega_L \leq \omega \leq \omega_L \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad \omega_L = 2\pi \cdot f_S / 2$
 - $h_R \propto \text{sinc}(\omega_L \cdot x)$

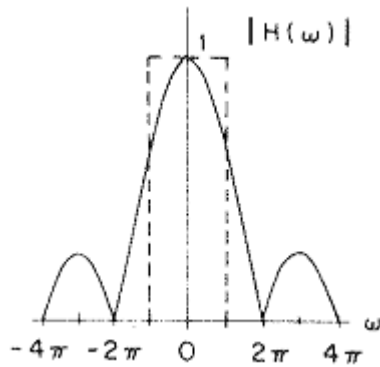
Interpoláció hibái

- Megfigyelt tartomány széle:
 - Súlyfüggvény „kilóg” a megfigyelt tartományból
- $|H_R(\omega)| \neq 0$ $|\omega| > 2\pi f_s/2$ esete:
 - Lényegesen jelentősebb hibaforrás
 - Mintavett jel rekonstrukciója:
 - $X_R(\omega) = H_R(\omega) \cdot X_S(\omega) \propto \sum_k H_R(\omega) \cdot X\left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{\Delta x}\right)$
 - $X_R(\omega) \neq X(\omega)$, ha $|\omega| > 2\pi f_s/2$
 - Példa rá a Nearest Neighbour interpoláció (ZOH)

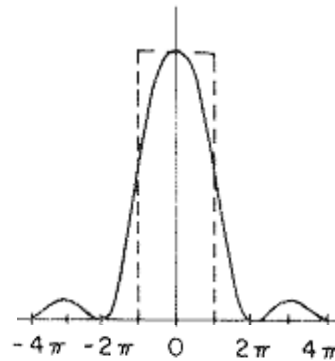
Interpolációk összehasonlítása

- Átviteli/súlyfüggvényük analízisével:

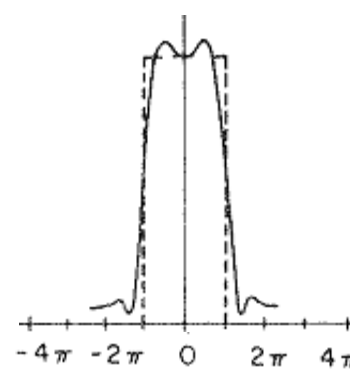
Nearest Neighbour



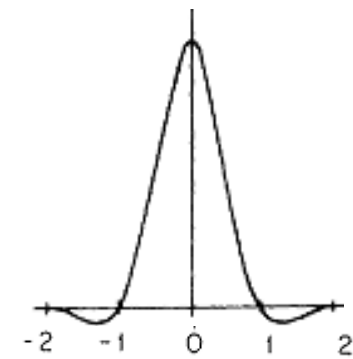
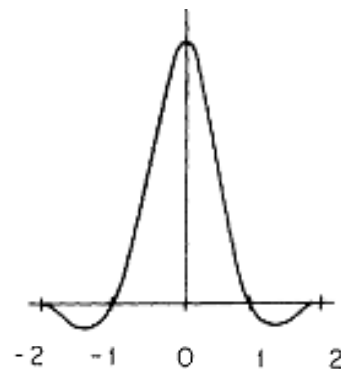
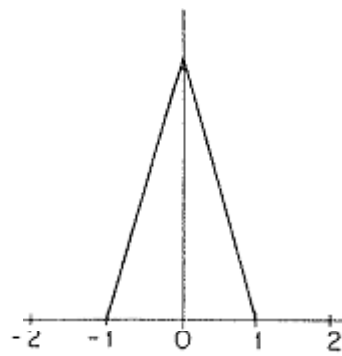
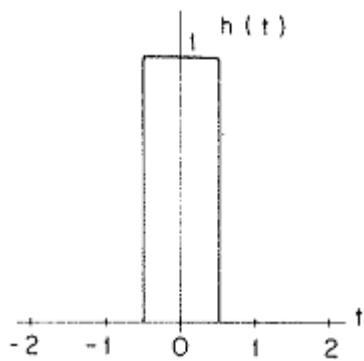
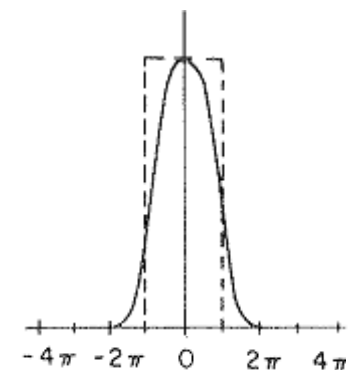
Lineáris



Köbös Spline



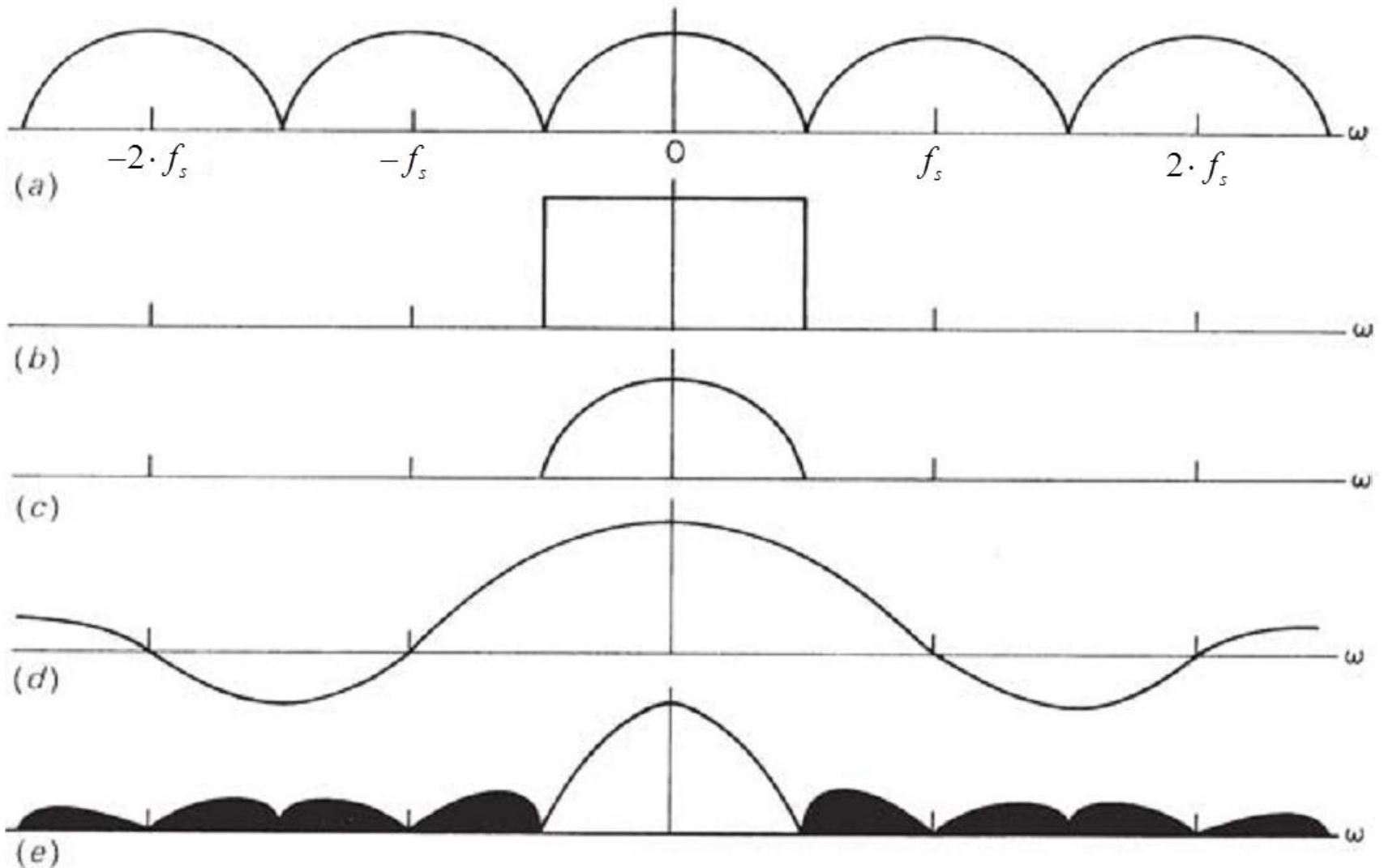
Köbös B-Spline



Átviteli függvény

Súlyfüggvény

(Hibás) interpoláció vizualizációja



Integráló mintavételezés

- Érzékelők integrálják a fotonokat:
 - Érzékelőelemek homogén súlyfüggvénye: $p(x)$
 - Adekvát az alábbi modell:

1. Megszűrjük a folytonos jelet az érzékelők súlyfüggvényével
2. Elvégezzük a matematikai mintavételezést

$$X_s(\omega) \propto (X(\omega) \cdot P(\omega)) * \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{\Delta x}\right) \right)$$

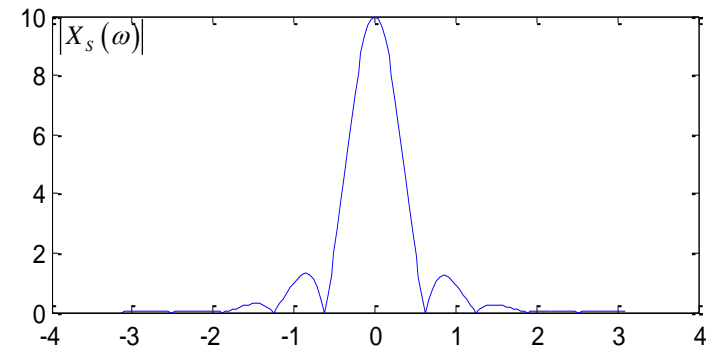
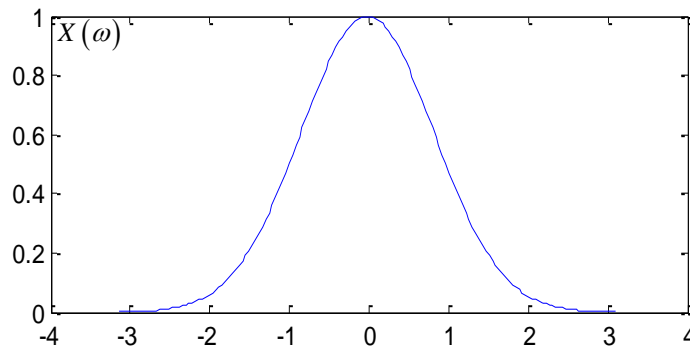
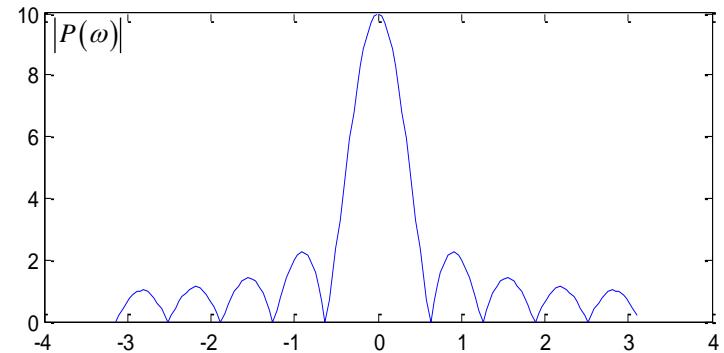
- Ha az érzékelőelemek súlyfüggvénye nem homogén, akkor nem modellezhető LTI rendszerrel

Integráló mintavételezés - példa

- Ideális, integráló mintavételezés esete:

$$- p(x) = \begin{cases} 1/\Delta_x & ||x| < \Delta_x/2 \\ 0 & ||x| > \Delta_x/2 \end{cases}$$

$$- P(\omega) = \Delta x \cdot \text{sinc}(\Delta x \cdot \omega/2)$$



Diszkrét Fourier Transzformáció (DFT)

- Diszkrétizált jelet N pontban ismerjük:

$$- X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\{-j \cdot n \cdot (k \cdot 2\pi/N)\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\{-j \cdot n \cdot k \cdot \Delta\omega\}$$

$$- x[n] = (1/N) \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot \exp\{j \cdot 2\pi kn/N\}$$

- Kapcsolat a DTFT-vel:

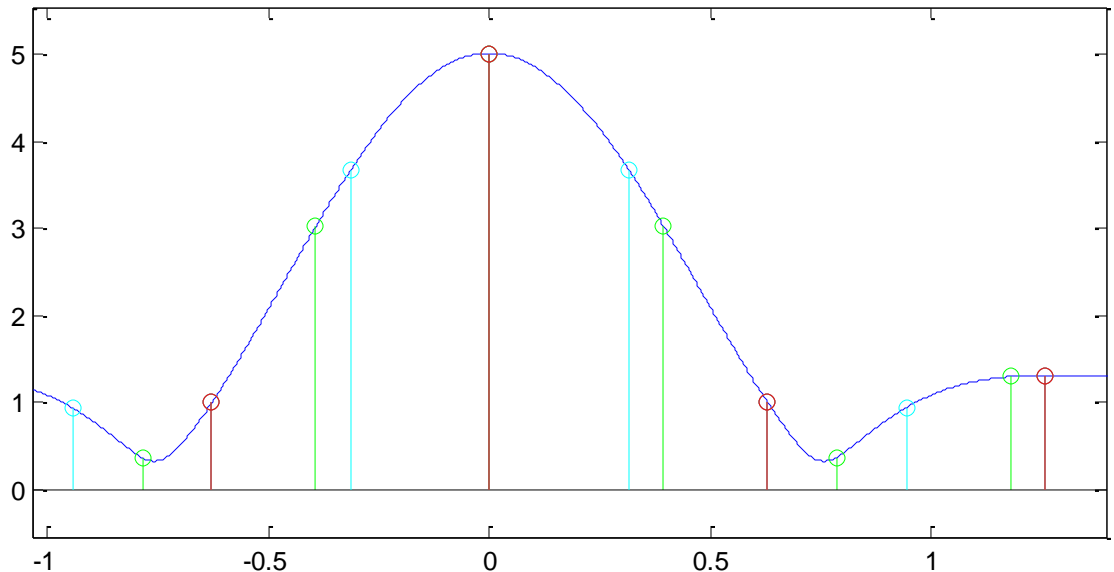
$$- x[n] = \begin{cases} y[n] & n \in [0, 1, \dots, N-1] \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad \text{megfigyelési ekvivalens}$$

- DFT mintavételezi a megfigyelési ekvivalens DTFT spektrumát: $Y_k = X(k \cdot \Delta\omega)$

- C^N feletti ortogonális transzformáció, mi a mátrixa?

DFT pontszáma

- Megfigyelési ekvivalens DTFT spektrumát tetszőleges felbontással mintavételezhetjük:
 - Ha M minta érdekel, akkor $M-N$ db 0-val paddelünk
 - A fizikai (folytonos) jel spektrumáról ezáltal nem tudunk meg többet!
 - 2-Radix FFT



DFT és a DFS kapcsolata

- A DFT által meghatározott spektrum diszkrét:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot \exp\{j \cdot 2\pi kn/N\} =$$

–

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot \exp\{j \cdot 2\pi kn/N + 2\pi k\} = x[n + N]$$

– Lényegében **Diszkrét Fourier Sorfejtés (DFS)**

- DFT kapcsolata a Diszkrét Fourier Sorfejtéssel:
 - DFT időtartományban véges idejű diszkrét jelet vár
 - DFS periodikus, végtelen idejű diszkrét jelet vár
 - Ezt leszámítva identikusak.

DFT és FFS kapcsolata

- Vizsgáljuk a mintavételezett jelet folytonos időben:

$$- x_s(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t) \text{ és } x_s(t + N \cdot \Delta t) = x_s(t)$$

$$- c_k = \frac{1}{N \cdot \Delta_t} \int_{0-0}^{N\Delta t-0} x_s(t) \cdot \exp\left\{-j \cdot t \cdot k \cdot \frac{2\pi}{N \cdot \Delta_t}\right\} dt =$$
$$= \frac{1}{N \cdot \Delta_t} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\left\{-j \cdot n \cdot \frac{k \cdot 2\pi}{N}\right\} \propto \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\{-j \cdot n \cdot k \cdot 2\pi/N\}$$

- Mintavételezés hatásai:

- DFT felbontása: $\Delta f = f_s / N = 1 / (N \cdot \Delta_t)$ $\omega_k = 2\pi \cdot k \cdot \Delta f$
- Aliasing (már volt)

DFT és FFS kapcsolata

- Vizsgáljuk a mintavét
időben:

A megfigyelt jelrészlet egy periódusa
egy folytonos periodikus jelnek.

$$- x_s(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t) \text{ és } x_s(t + N \cdot \Delta t) = x_s(t)$$

FFS

$$- c_k = \frac{1}{N \cdot \Delta_x} \int_{0-0}^{N\Delta_x-0} x_s(t) \cdot \exp\left\{-j \cdot t \cdot k \cdot \frac{2\pi}{N \cdot \Delta_x}\right\} dt =$$

$$= \frac{1}{N \cdot \Delta_x} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\left\{-j \cdot n \cdot \frac{k \cdot 2\pi}{N}\right\} \propto \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\{-j \cdot n \cdot k \cdot 2\pi/N\}$$

DFT

- Mintavételezés hatásai:

- DFT felbontása: $\Delta f = f_s / N = 1 / (N \cdot \Delta x)$ $\omega_k = 2\pi \cdot k \cdot \Delta f$
- Aliasing (már volt)

Spektrumszivárgás - ablakozás

- DFT kapcsolata a DTFT-vel és a DFS-el:
 - Impliciten cirkuláris jelet feltételez (DFS)
 - Tegyük fel, hogy az eredeti jelünk (végtelen terjedelmű) véges részét tudtuk mintavételezni:

$$h[n] = \text{rect}_T[n], \quad y[n] = y_\infty[n] \cdot h[n]$$

- Ideális esetben: $Y_{(k)} = Y_\infty(k \cdot \Delta\omega)$
- A valóságban: $Y_{(k)} = 1/2\pi \cdot (Y_\infty * H)(k \cdot \Delta\omega)$
- Cél lenne a DTFT spektrumot szivárgás nélkül mintavételezni: $Y_{(k)} := Y_\infty(k \cdot \Delta\omega)$

Spektrumszivárgás - ablakozás

- DFT kapcsolata a DTFT-vel és a DFS-el:

- Impliciten cirkuláris jelet feltételez (DFS)

- $\sum_{k=1}^T \delta[n-k]$, hogy Végtelen kiterjedésű mintavételezett jel (megfigyelési ekvivalens) ni:

$$h[n] = \text{rect}_T[n], \quad y[n] = y_\infty[n] \cdot h[n]$$

- Ideális esetben: $Y_{(k)} = Y_\infty(k \cdot \Delta\omega)$
- A valóságban: $Y_{(k)} = 1/2\pi \cdot (Y_\infty * H)(k \cdot \Delta\omega)$
- Cél lenne a DTFT spektrumot szivárgás nélkül mintavételezni: $Y_{(k)} := Y_\infty(k \cdot \Delta\omega)$

Spektrumszivárgás - ablakozás

– Tehát a megfigyelt jel DFT spektruma:

$$Y_k = 1/2\pi \cdot (Y * H)(k \cdot \Delta\omega)$$

– $h[n]$ az úgynevezett ablak függvény

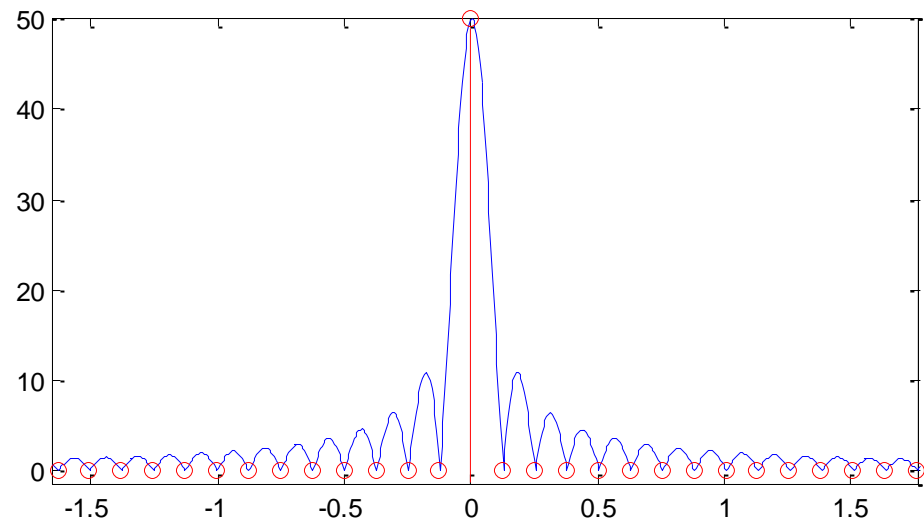
- Ha expliciten nem ablakozunk, akkor: $h[n] = \text{rect}_T[n]$

Pl.: $T = 50$

Kék görbe: rect ablak DTFT
spektrum amplitúdója

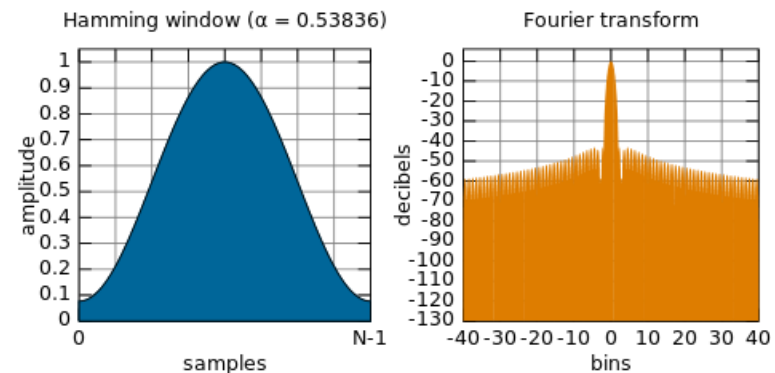
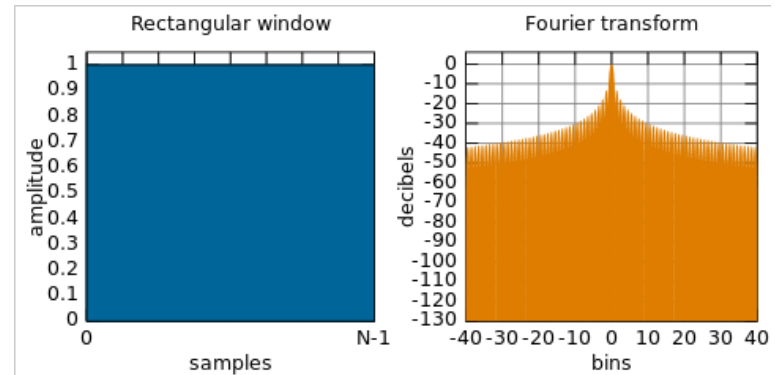
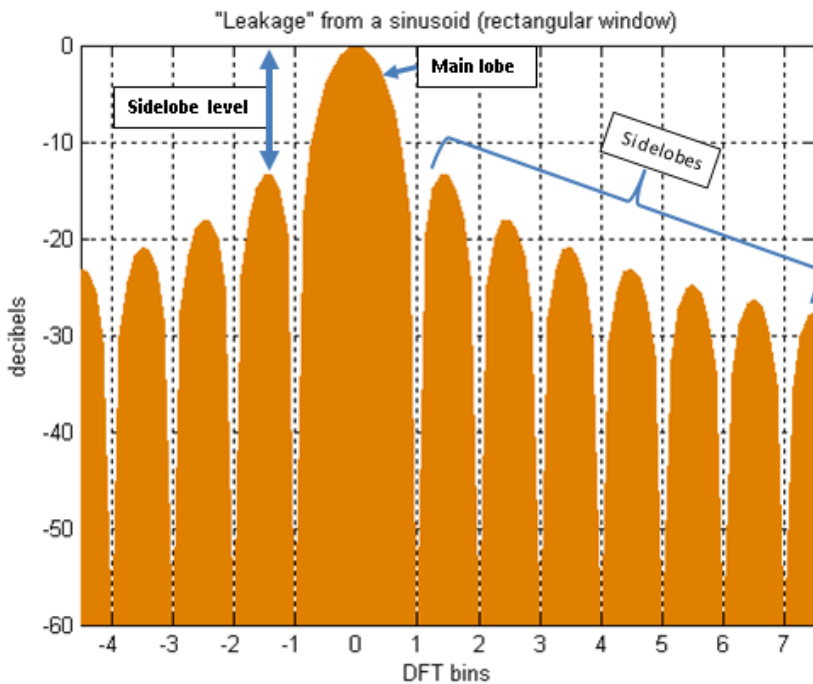
Piros pontsor: rect ablak DFT
spektrum amplitúdója

Mikor nincs spektrumszivárgás?



Spektrumszivárgás - ablakozás

- DFT előtti ablakozás:
 - Képtérben az általunk definiált $h[n]$ -el szorzunk
 - Ablakfüggvények tulajdonságai:

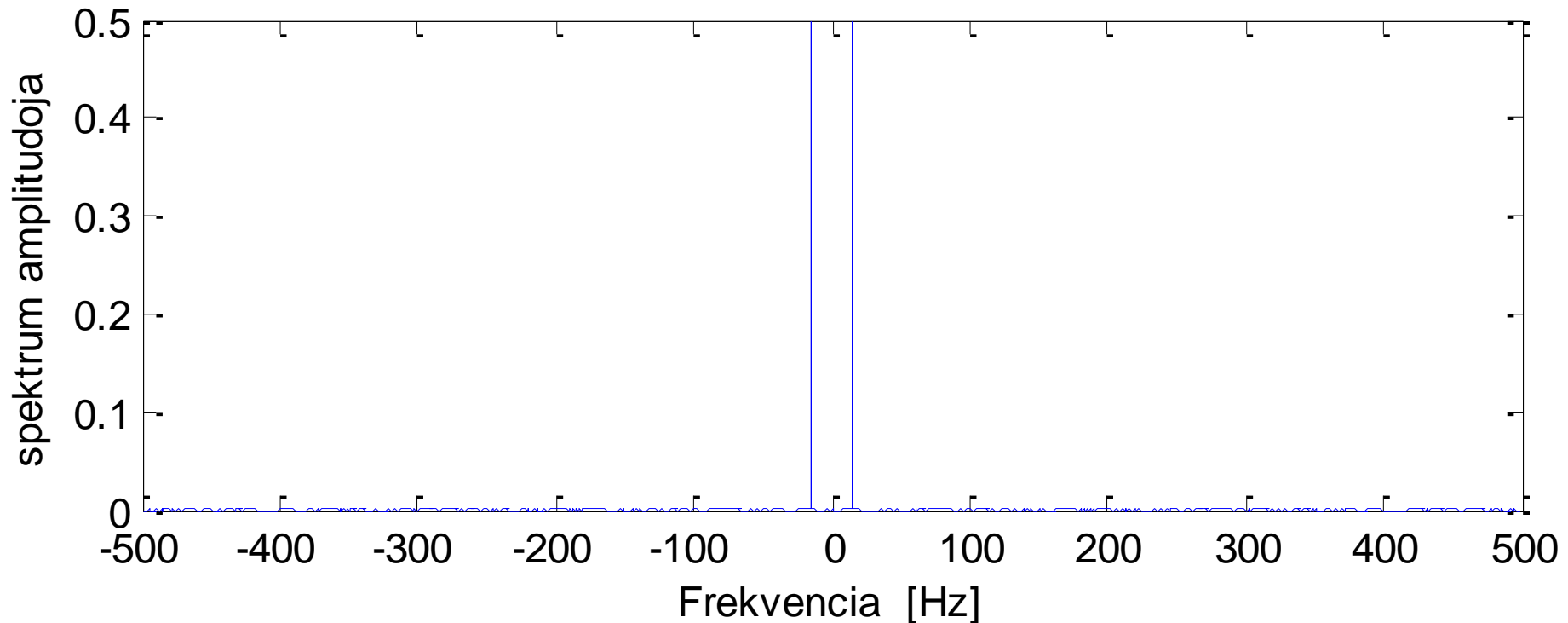


Koherens mintavételezés

- Periodikus jelből egész számú periódusnyit mintavételezünk (y_N): $N/f_s = k/f$, $k \in \mathbb{Z}_+$
 - f : periodikus jelünk frekvenciája, N : minták száma
 - N pontos négyzetes ablak DTFT spektruma:
 - $H_{rect} = \sin(\omega/\Delta\omega)/(\omega/\Delta\omega)$
 - $H_{rect}(k \cdot \Delta\omega) = \delta_{k,0}$ ha $k \in \mathbb{Z}$
 - $Y_s(\omega) = 0$, ha $\omega \neq k \cdot \Delta\omega \big|_{k \in \mathbb{Z}}$
 - Tehát a DFT által mintavételezett frekvenciákon nem torzul az ablakozás miatt a DTFT spektruma
 - Különben Spektrumszivárgás.

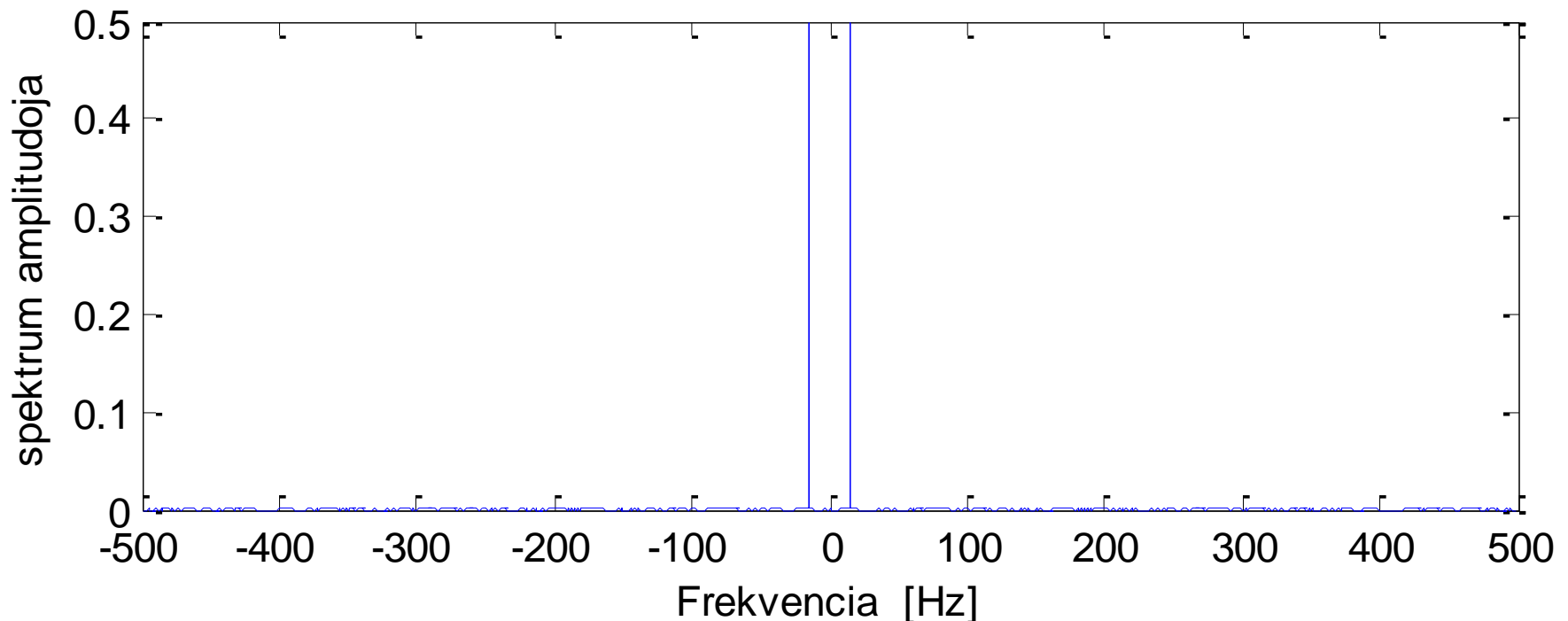
Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$



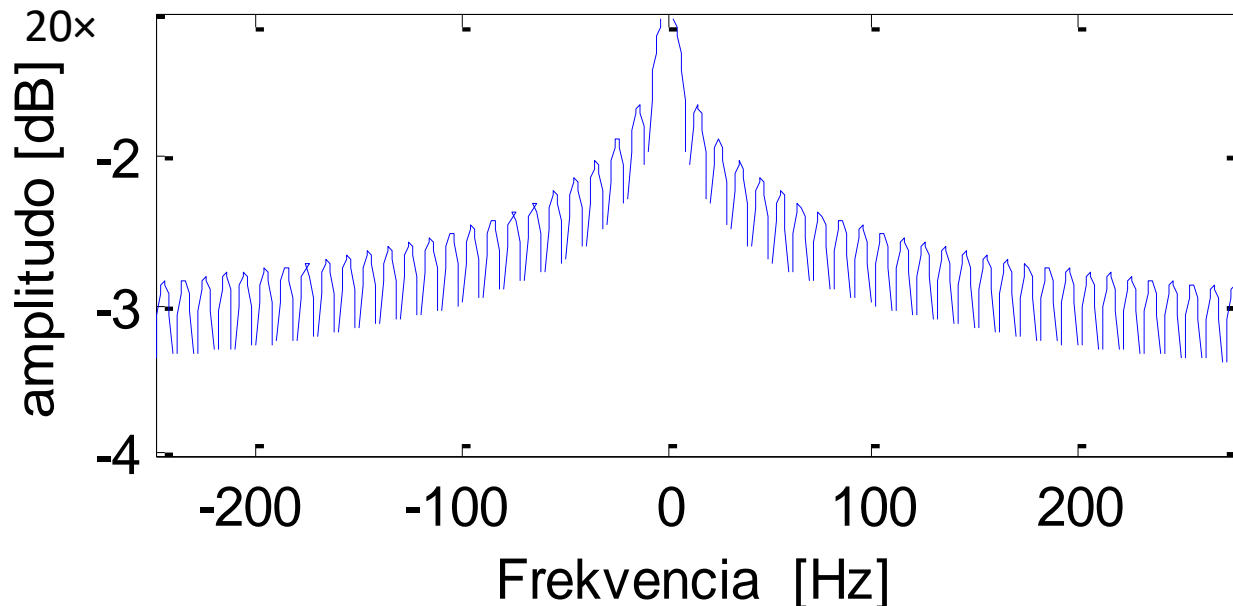
Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
 - Mintavételezzük ($y_\infty[\cdot]$): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = \infty$
 - Mivel a mintavételi törvényt nem sértjük meg:



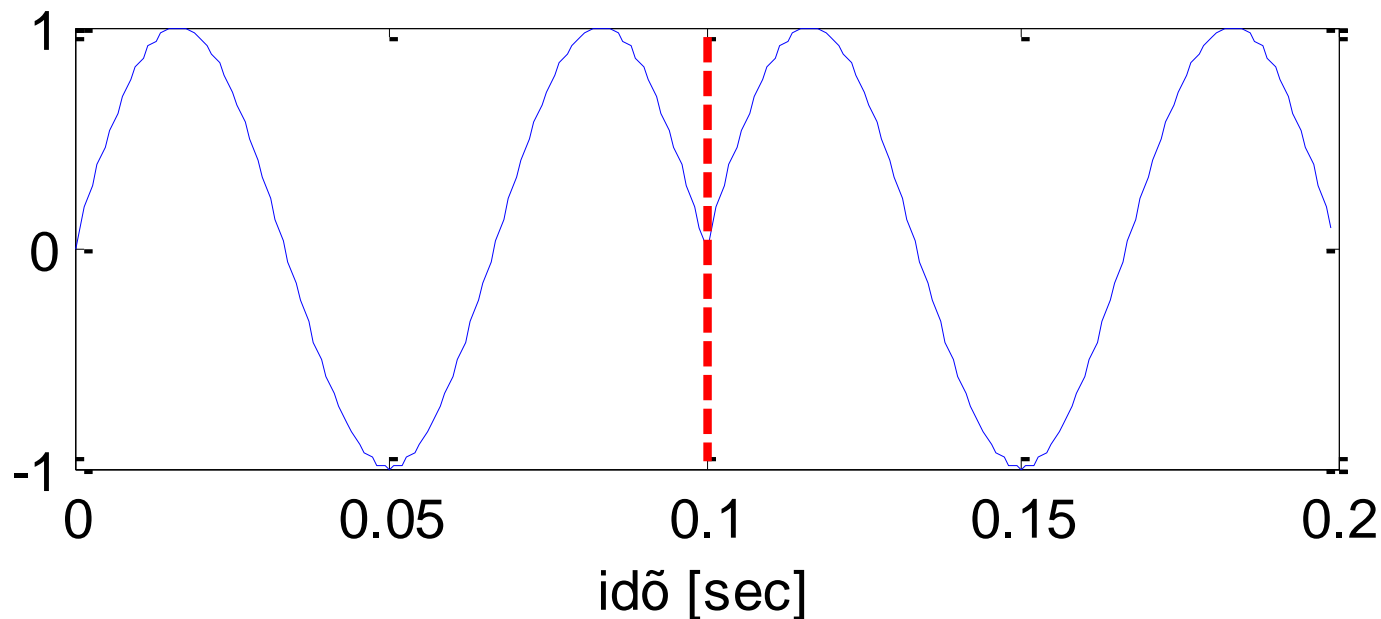
Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
 - Mintavételezzük (y_{100}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 100$
 - Megfigyelési ekvivalens: $(y_\infty \cdot \text{rect}_{100})[\cdot]$
 - Implicit ablak DTFT spektrumának részlete:



Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
 - Mintavételezzük (y_{100}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 100$
 - DFT által „látott” jel: $y_{100}[n] = (y_\infty \cdot h_{Rect})[\text{mod}_{100}(n)]$



Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

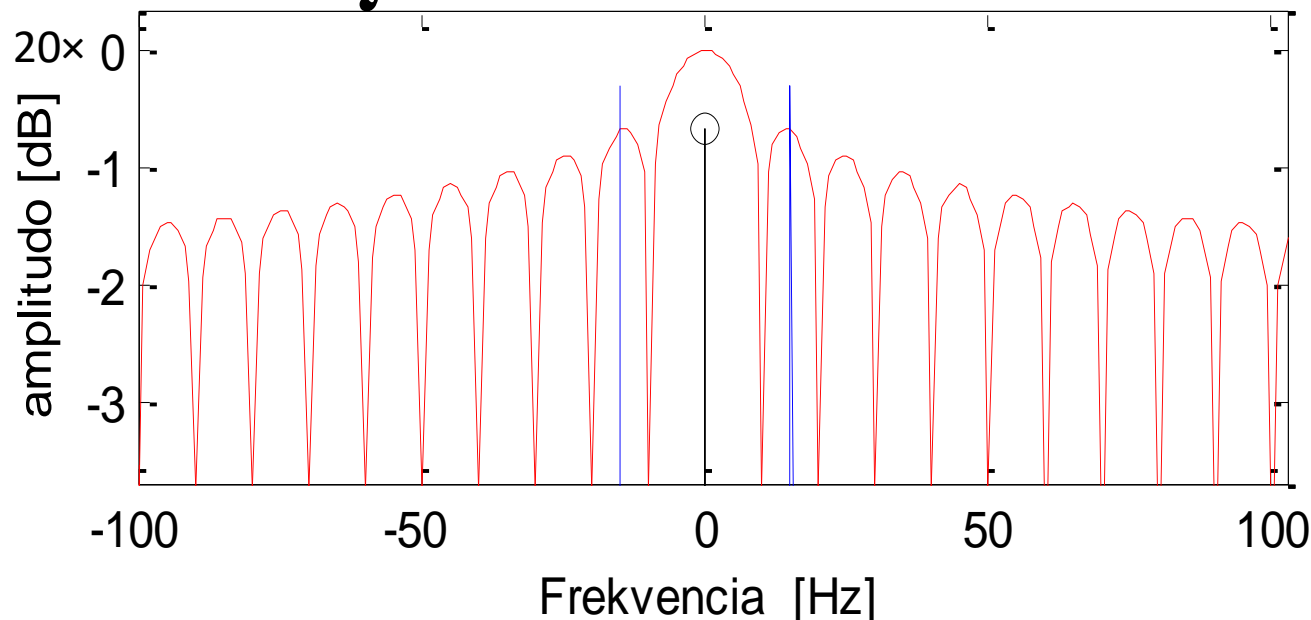
- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
 - Mintavételezzük (y_{100}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 100$
 - Megfigyelési ekvivalens spektruma: $Y_{100} \propto Y_\infty * H_{rect}$

$$Y_{100}(0) = \int Y_\infty(\tau) \cdot \frac{1}{2\pi} H_{rect}(0 - \tau) d\tau$$

Piros: ablak normált spektruma

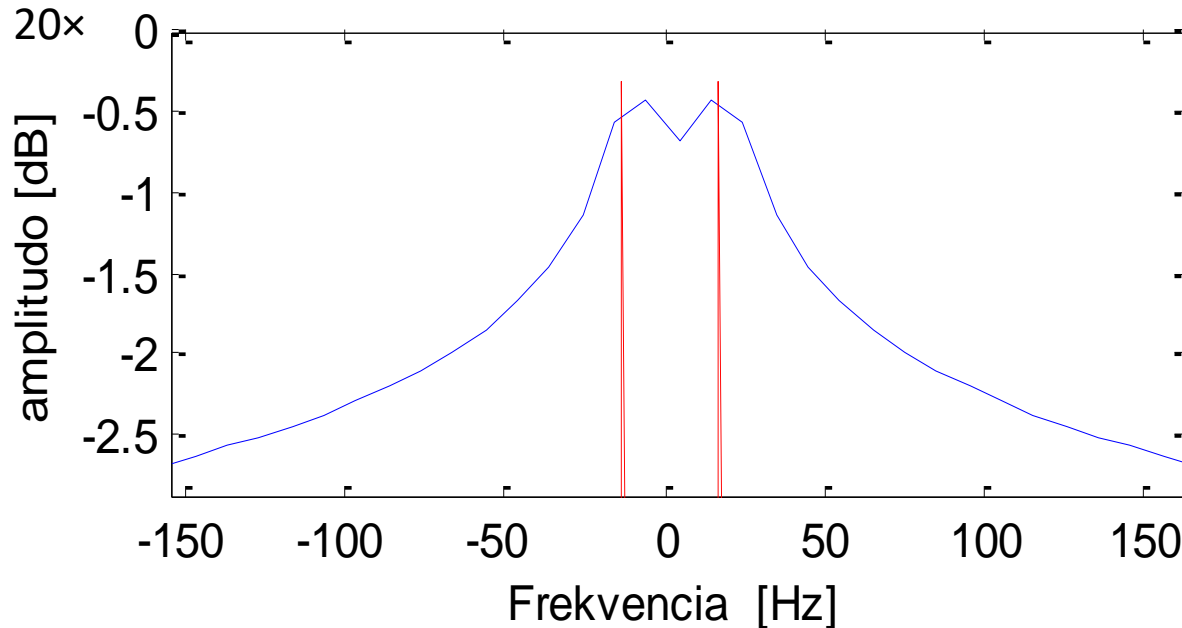
Kék: folytonos jel spektruma

Fekete: N=100 mintavétellel előálló jel spektrumának DC komponense



Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
 - Mintavételezzük (y_{100}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 100$
 - Megfigyelési ekvivalens spektruma: $Y_{100} \propto Y_\infty * H_{rect}$

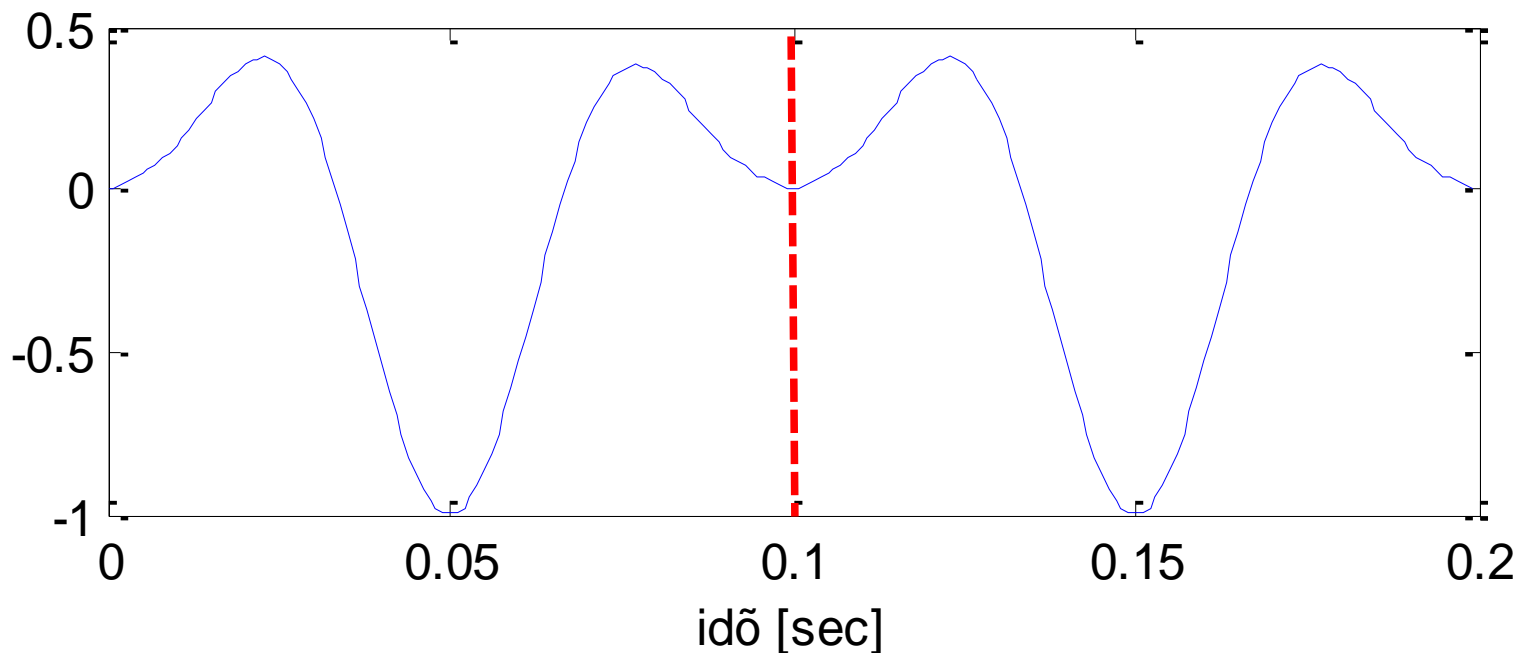


Piros: folytonos jel
spektruma

Kék: N=100
mintavétellel előálló
jel spektruma

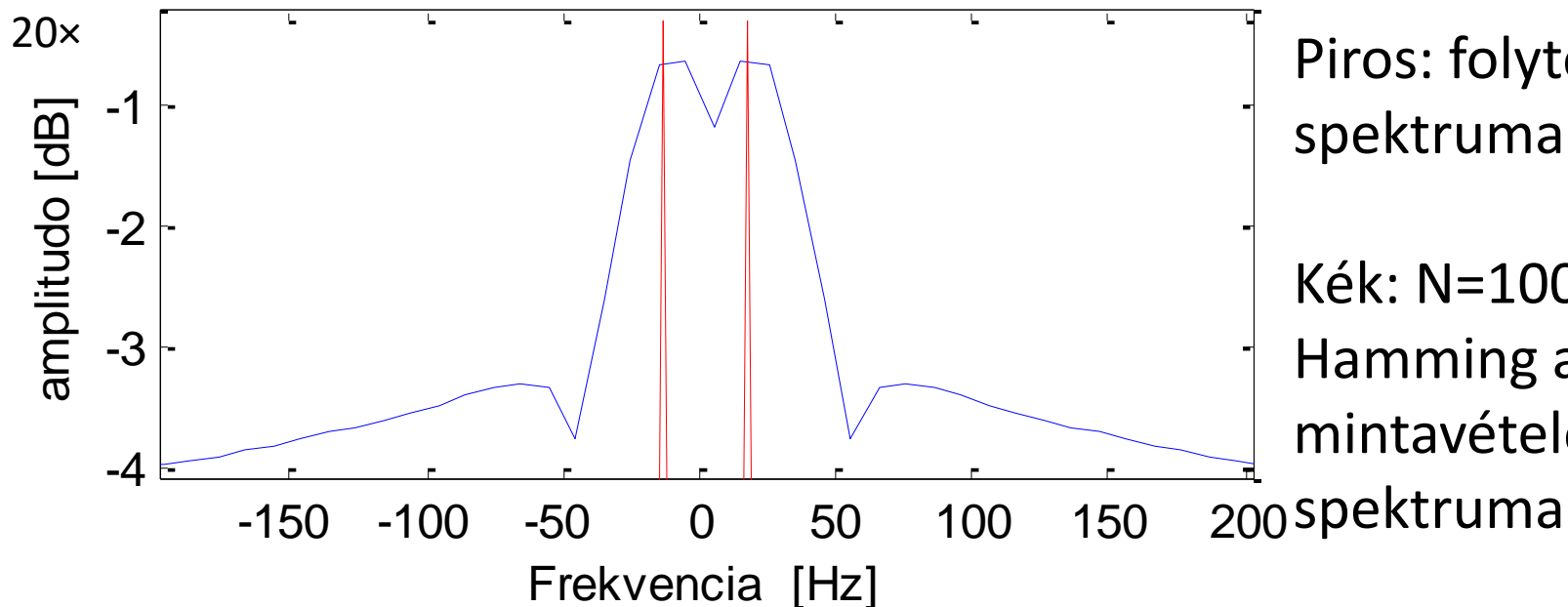
Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés, Hamming ablak

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
 - Mintavételezzük (y_{100}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 100$
 - DFT által „látott” jel: $y_{100}[n] = (y_\infty \cdot h_{Ham})[\text{mod}_{100}(n)]$



Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés, Hamming ablak

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
 - Mintavételezzük (y_{100}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 100$
 - Megfigyelési ekvivalens spektruma: $Y_{100} \propto Y_\infty * H_{Ham}$

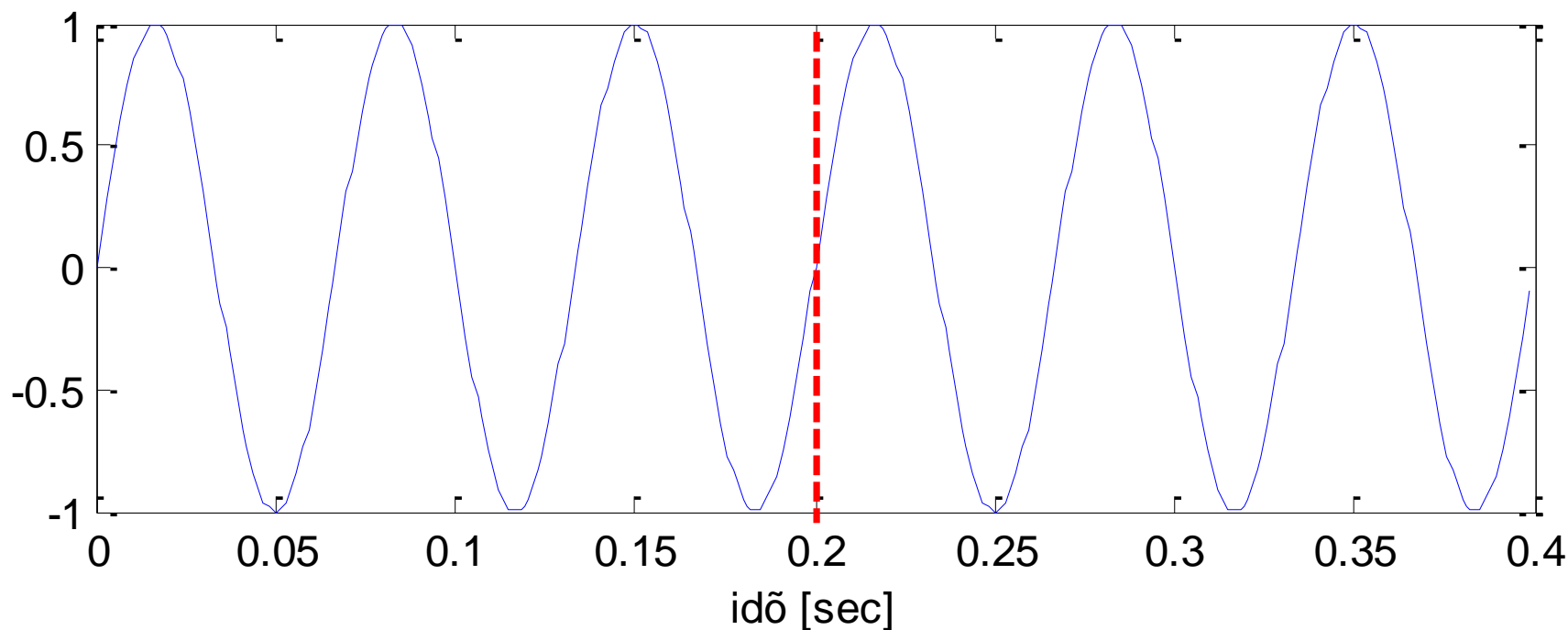


Piros: folytonos jel spektruma

Kék: N=100, Hamming ablakos, mintavételezett jel spektruma

Koherens mintavételezés

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
 - Koherensen mintavételezzük (y_{200}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 200$
 - DFT által „látott” jel: $y_{200}[n] = y_\infty[\text{mod}_{200}(n)] = y_\infty[n]$

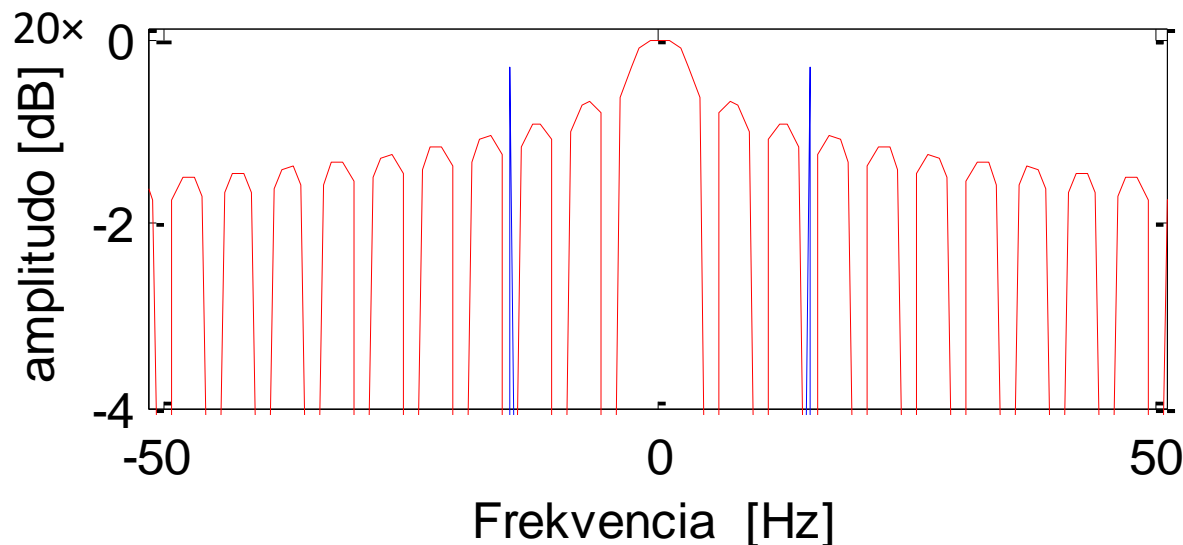


Spektrum koherens mintavételezés esetén

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
 - Mintavételezzük (y_{200}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 200$
 - Megfigyelési ekvivalens spektruma: $Y_{200} \propto Y_\infty * H_{rect}$

$$Y_{200}(0) = \int Y_\infty(\tau) \cdot 1/2\pi H_{rect}(0 - \tau) d\tau$$

Piros: ablak normált spektruma

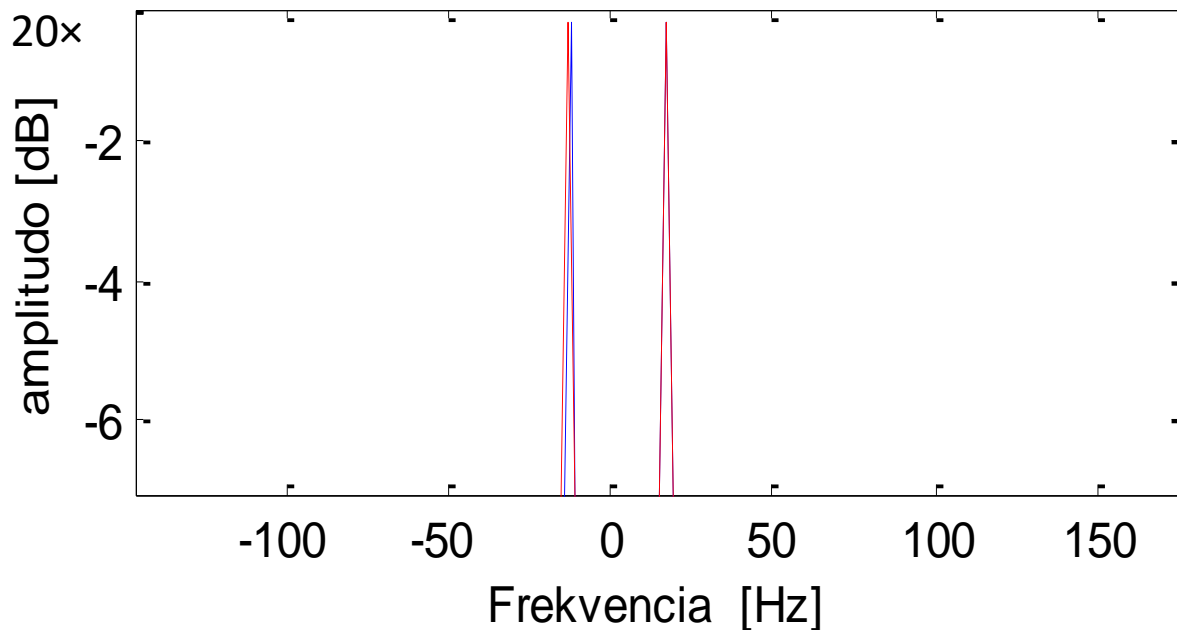


Kék: folytonos jel spektruma

Fekete: $N=200$ mintavétellel előálló jel spektrumának DC komponense ($\log(0)$)

Spektrum koherens mintavételezés esetén

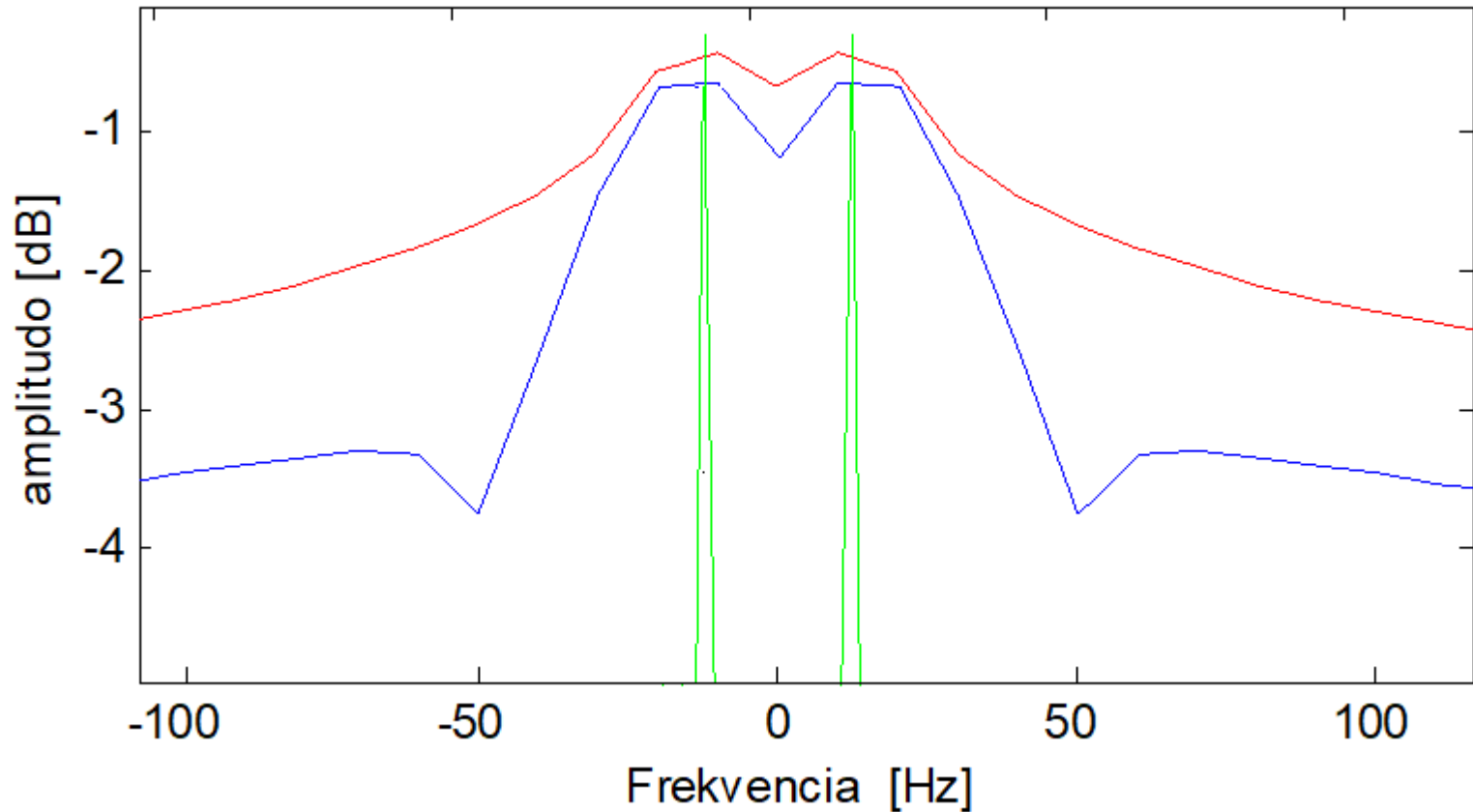
- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
 - Koherensen mintavételezzük (y_{200}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 200$
 - Megfigyelési ekvivalens spektruma: $Y_{200} \propto Y_\infty * H_{rect}$



Piros: folytonos jel
spektruma

Kék: $N=200$
mintavétellel előálló
jel spektruma

Koherensen mintavett / ablakozott, nem koherensen mintavett jelek spektruma



Zöld: koherensen mintavételezett jel spektruma, kék: Hamming ablakos, piros: téglalap ablakos spektrum

2D DFT

Többi transzformáció esetén is hasonló a többdimenziós eset

- Analízis irány:

$$F_{u,v} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f[m,n] \exp\{-2\pi j \cdot (u \cdot m/M + v \cdot n/N)\} =$$
$$= \sum_{m=0}^{M-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} f[m,n] \cdot \exp\{-2\pi j \cdot (v \cdot n/N)\} \right) \exp\{-2\pi j \cdot (u \cdot m/M)\}$$

- Tulajdonságok:

- Periodikus: $[M,N]$ szerint

- Valós jel esetén: $F_{u,v} = \overline{F_{-u,-v}} = \overline{F_{M-u,N-v}}$

- Ha M, N páros: $F_{M/2+u,N/2+v} = F_{M/2-u,N/2-v}$

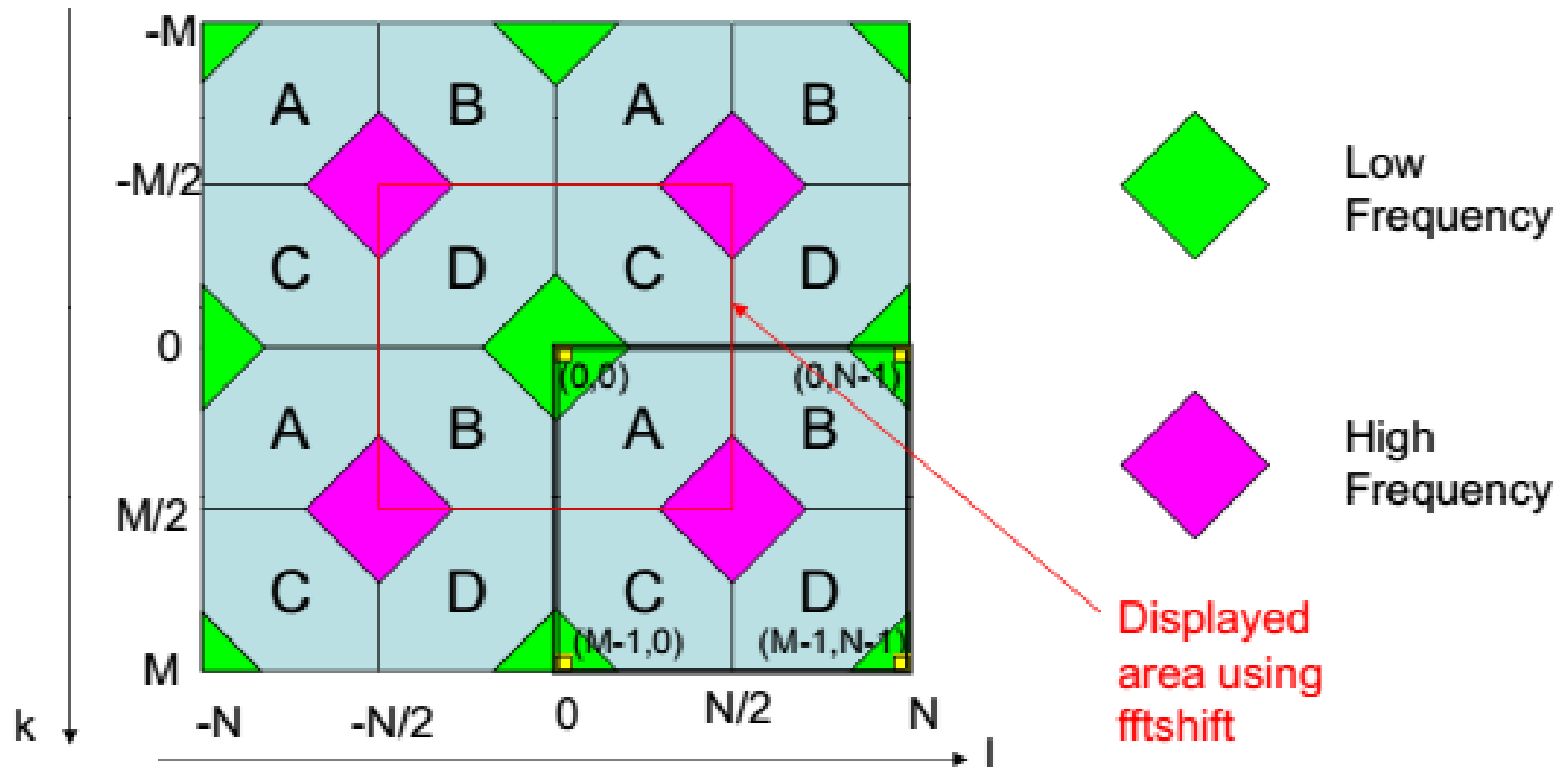
- Konvolúció tétel – **ciklikus konvolúcióra**

2D DFT tulajdonságok

- Transzformáció számítási igénye:
 - $O(N^4)$: naív implementáció esetén
 - $O(N^3)$: ha kihasználjuk a szeparabilitást
 - $O(N^2 \log_2(N))$: FFT-vel
 - Inverz transzformációra u.e. komplexitások
- FFT lehetővé teszi széles körű alkalmazását
 - Pl. 5×5-ös, vagy annál nagyobb konvolúciónál már gyorsabb a DFT-vel számítás (de spektr. szivárgás)
 - Dekonvolúció, regisztráció, ...

2D DFT spektrum

- Spektrum blokkjai:



2D DFT spektrum gépi ábrázolása

- Konjugált szimmetria valós jelek esetén:

0	1	2	3	4	3	2	1
5	6	7	8	9	33	32	31
10	11	12	13	14	30	29	28
15	16	17	18	19	27	26	25
20	21	22	23	24	23	22	21
15	25	26	27	19	18	17	16
10	28	29	30	14	13	12	11
5	31	32	33	9	8	7	6

M=N=8

 real   Conjugate pairs

 Nyquist frekvenciához tartozó komponens

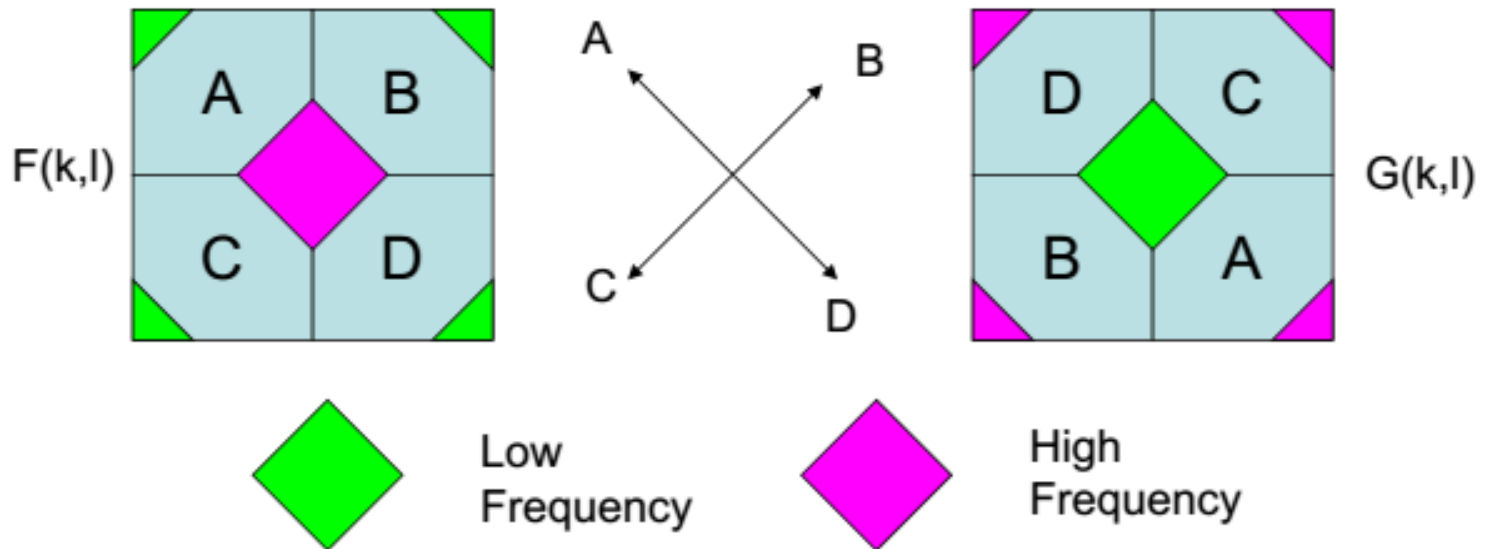
0	1	2	3	4	4	3	2	1
5	6	7	8	9	40	39	38	37
10	11	12	13	14	36	35	34	33
15	16	17	18	19	32	31	30	29
20	21	22	23	24	28	27	26	25
20	25	26	27	28	24	23	22	21
15	29	30	31	32	19	18	17	16
10	33	34	35	36	14	13	12	11
5	37	38	39	40	9	8	7	6

M=N=9

2D DFT spektrum

- Általában a DC komponenst „csavarjuk” középre:

– Ampl. moduláció: $g[m,n] = f[m,n] \cdot (-1)^{(m+n)}$

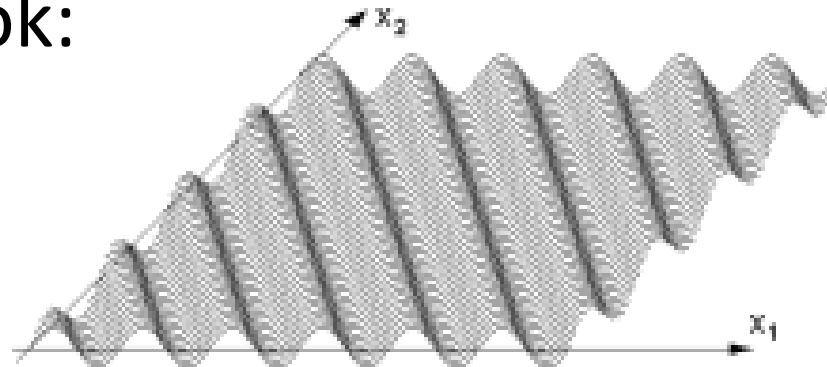


DFT spektrum interpretációja

- DFT analízis irány: $x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot \exp\{j \cdot 2\pi kn/N\}$
- Valós jel esetén : $X_k \cdot X_{N-k} = |X_k|^2$
- Euler formula, illetve a k.k szimmetria alapján:

$$x[n] = \frac{1}{N} \left(X_0 + X_{N/2} \cdot (-1)^n \right) + \frac{1}{N} \left(\sum_{k=1}^{N/2-1} 2 \left(\operatorname{Re}(X_k) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) - \operatorname{Im}(X_k) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) \right) \right)$$

- 2D DFT – 2D hullámfrontok:



2D spektrum interpretációja

- Újfent, a konjugált szimmetria alapján:

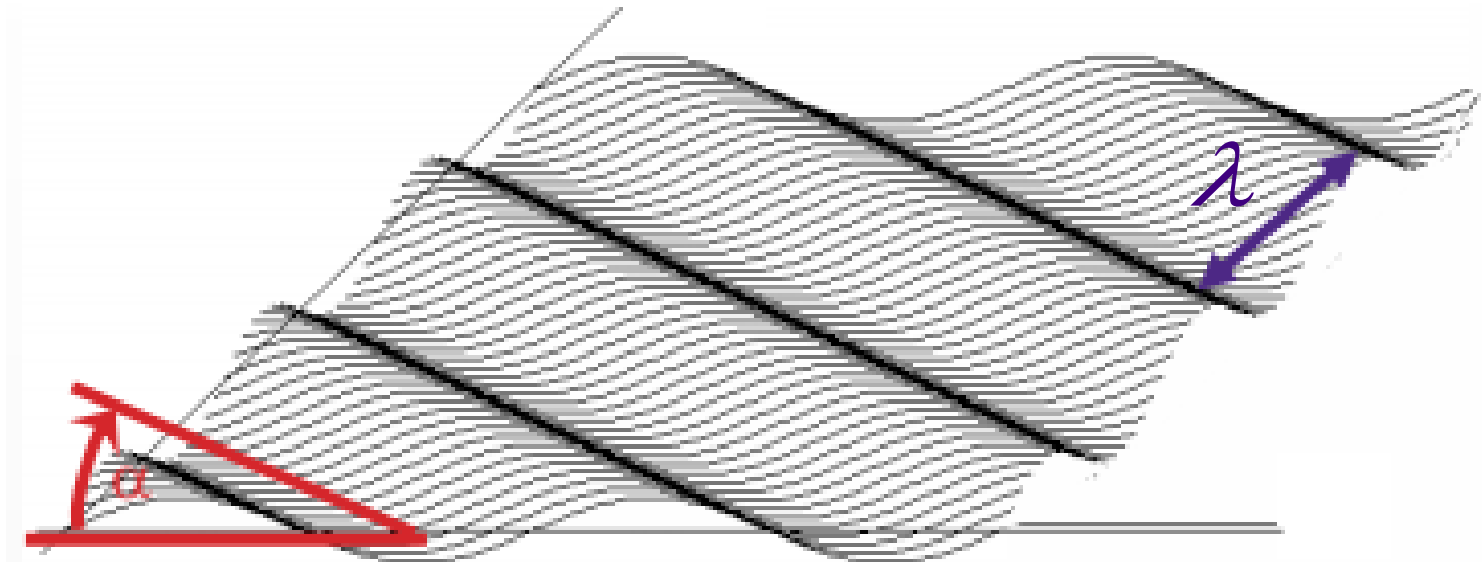
$$F_{u,v} \cdot \exp\left\{2\pi j \cdot \left(\frac{u}{M} \cdot m + \frac{v}{N} \cdot n\right)\right\} + F_{M-u, N-v} \cdot \exp\left\{-2\pi j \cdot \left(\frac{u}{M} \cdot m + \frac{v}{N} \cdot n\right)\right\}$$
$$= 2 \left(\operatorname{Re}(F_{u,v}) \cdot \cos\left(2\pi \left(\frac{u}{M} \cdot m + \frac{v}{N} \cdot n\right)\right) - \operatorname{Im}(F_{u,v}) \cdot \sin\left(2\pi \left(\frac{u}{M} \cdot m + \frac{v}{N} \cdot n\right)\right) \right)$$

- $F_{u,v}$ valós része a koszinuszos, képzetes része a szinuszos bázishullám amplitúdója
- DC / Nyquist frekvenciás tagok u.ú. viselkednek, mint 1D-s esetben

2D spektrum interpretációja

- Vizsgáljunk meg egy bázisfüggvényt:

$$\sin\left(2\pi\left(\frac{u=2}{M}\cdot m + \frac{v=3}{N}\cdot n\right)\right)$$

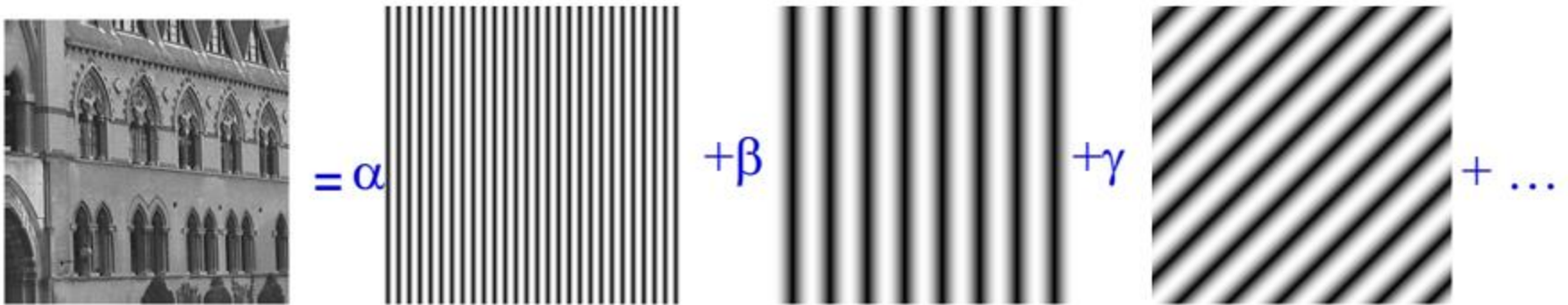


$$\alpha = \text{atan}\left(\frac{u/M}{v/N}\right)$$

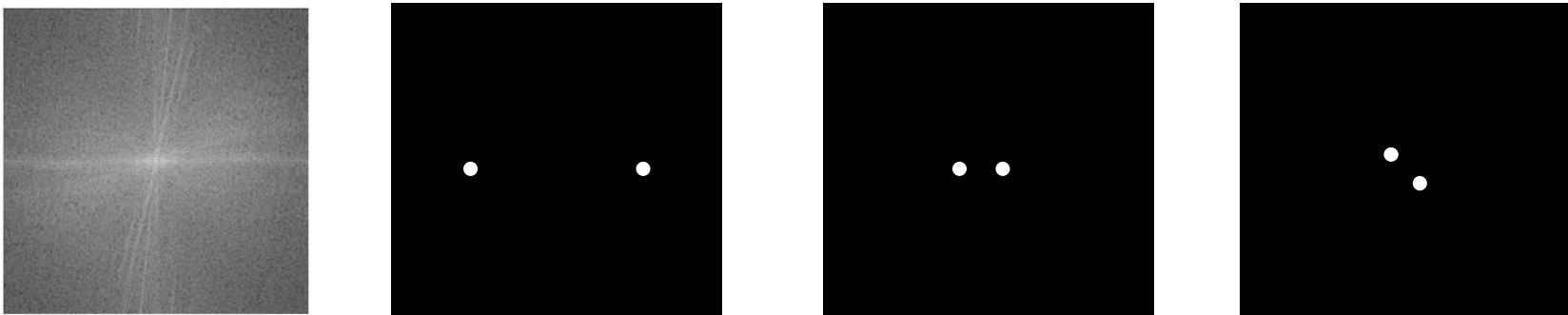
$$f = \frac{1}{\lambda} = \sqrt{\left(\frac{u}{M}\right)^2 + \left(\frac{v}{N}\right)^2}$$

2D DFT Vizuális interpretáció

- Lényegében egy bázis transzformáció ortogonális bázisokra (szinuszos hullámok)

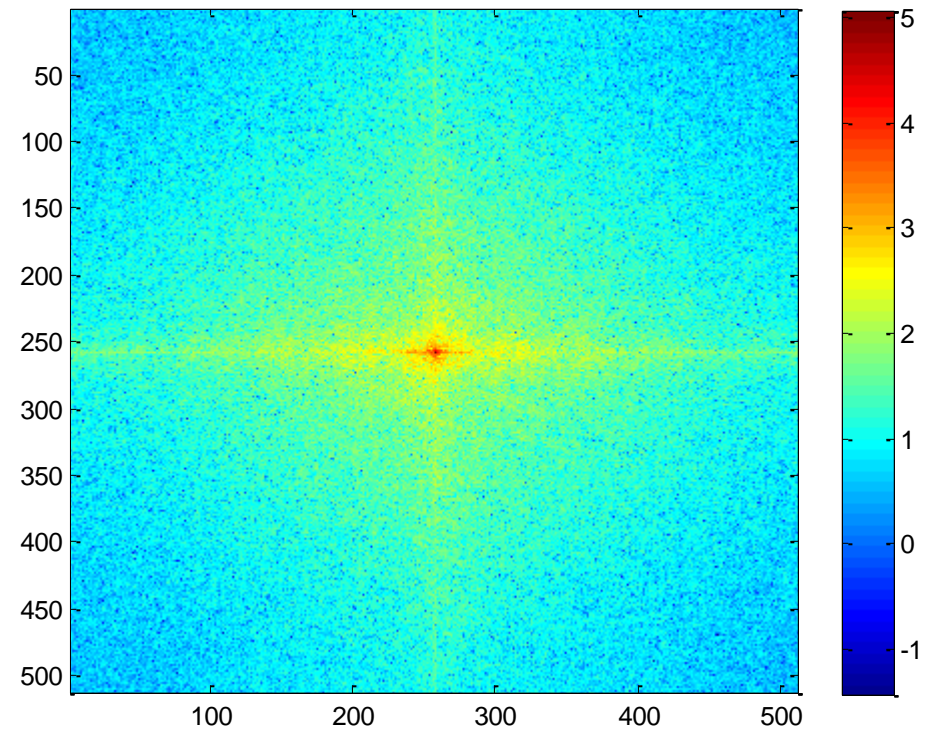


Spektrum amplitudója:



Képek spektrumának jellemzői

- Alacsony frekvenciákon nagy energia:



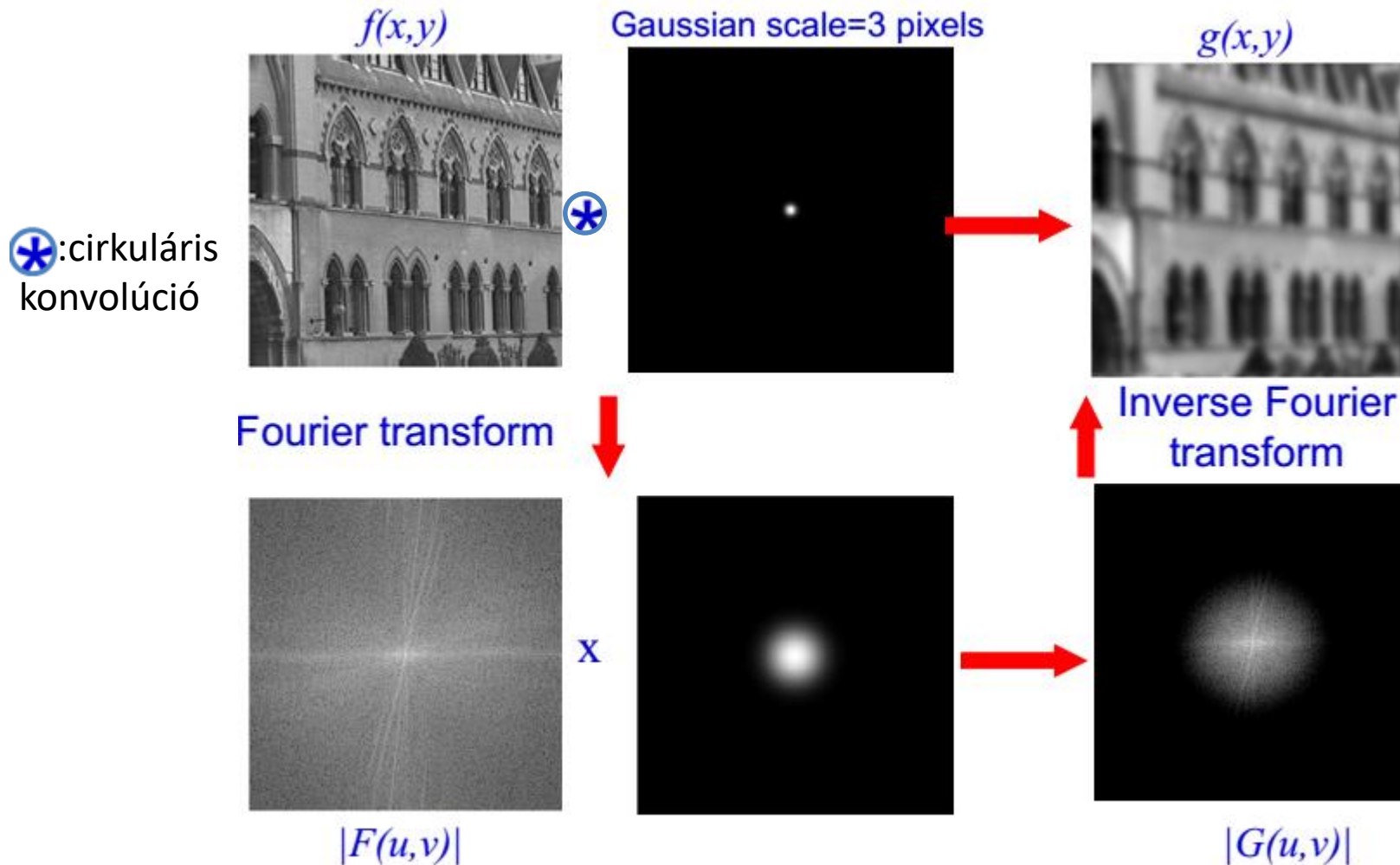
Spektrum amplitúdója logaritmikus skálán

2D DFT konvolúciós tétele:

- DFS- es analógia – cirkularitás:
 - $(f \otimes g)[n] = \sum_{m=0}^N f[m] \cdot g[\text{mod}_N(n-m)] = (f' * g')[n]$
 - $f'[n] = f[\text{mod}_N(n)]$, míg $g'[m] = g[\text{mod}_N(m)]$
- Mit tegyünk, ha $f * g$ -t akarjuk DFT-vel számolni?
 - Terjesszük ki f és g méretét $[N+M]$ hosszúra:
 - Ezt időtartomány / síktartományban is meg kell tenni
 - Általános módszerek: 0-val paddelés, kép széleire tükrözés, alul-áteresztő szűréseknél súlyozás, kiterjesztés a kép szélső pixelének intenzitásával, stb.
 - 5×5-ös kernel esetén már gyorsabb

Konvolúció tétel fontossága

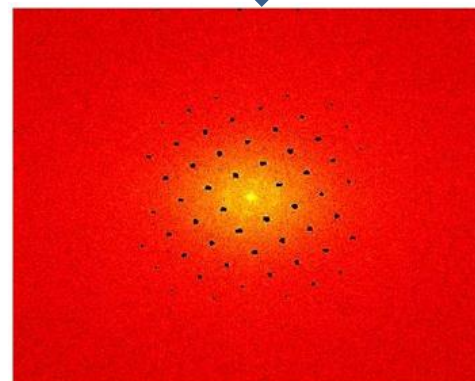
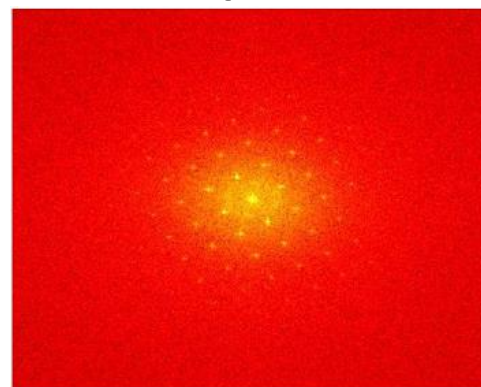
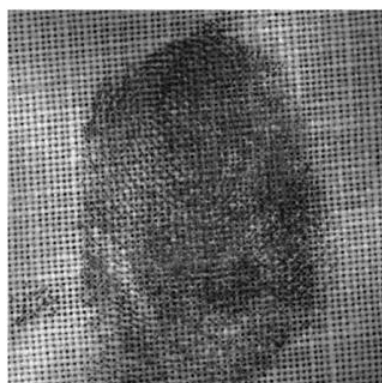
- Lineáris szűrések frekvenciatérben:



2D DFT Példa – periodikus textúra

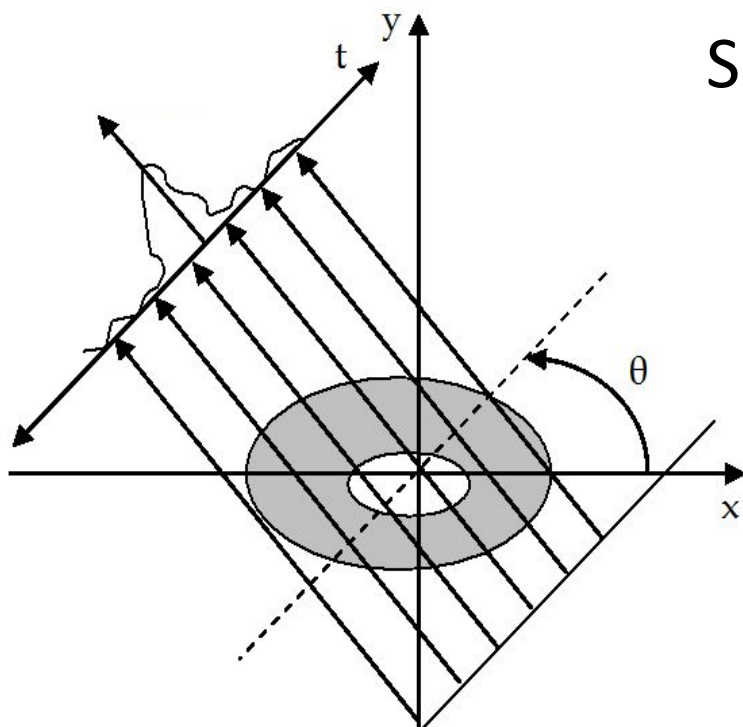
ampl. moduláció

- Periodikus mintázat \Leftrightarrow csúcsok a spektrumban:

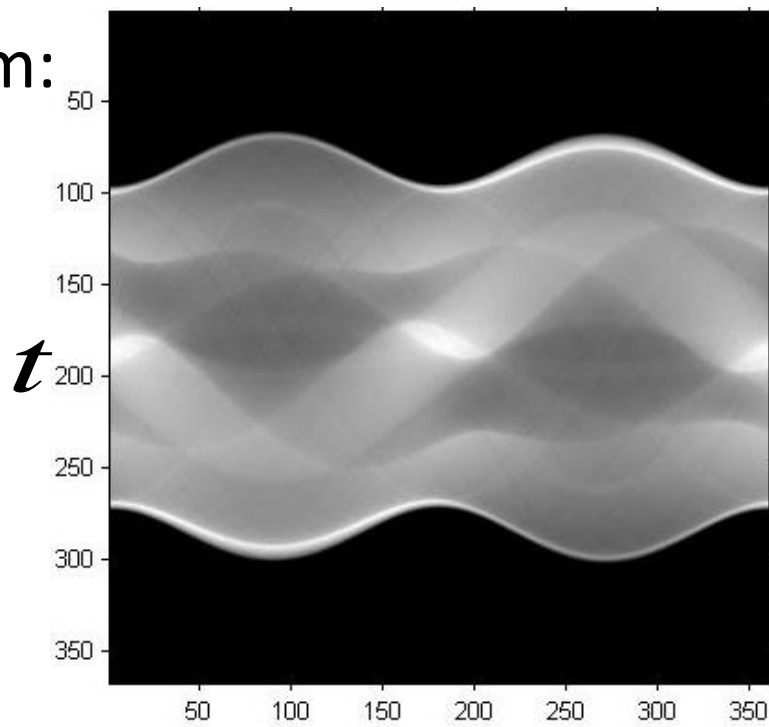


2D Radon transzformáció:

- Radon transzformáció (2D szelet 1D projekciók):
 - Input: 2D Descartes - koordinátarendszerbeli kép
 - Output: sinogram – 2D polár-koordinátarendszerbeli kép



Sinogram:



Radon transzformáció – Fourier vetítősík tétel

- Radon transzformáció (2D szelet 1D projekciók):

- Vetítősugarak merőlegesek az x tengellyel θ szöget bezáró egyenesre: $t = x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta)$

- Vetítősugarak mentén integráljuk a szelet elemeit:

$$P_{\theta}(t) = \iint_{x,y} f(x, y) \cdot \delta(x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta) - t) dx dy$$

- Legyen $S_{\theta}(\rho) = FT_{\rho} \{P_{\theta}(t)\} = \int P_{\theta}(t) \cdot \exp(-2\pi j \cdot t \rho) dt$

- Fourier vetítősík tétel származtatása:

$$S_{\theta}(\rho) = \iiint_{x,y,t} f(x, y) \cdot \delta(x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta) - t) \cdot \exp(-2\pi j \cdot \rho t) dt dy dx$$

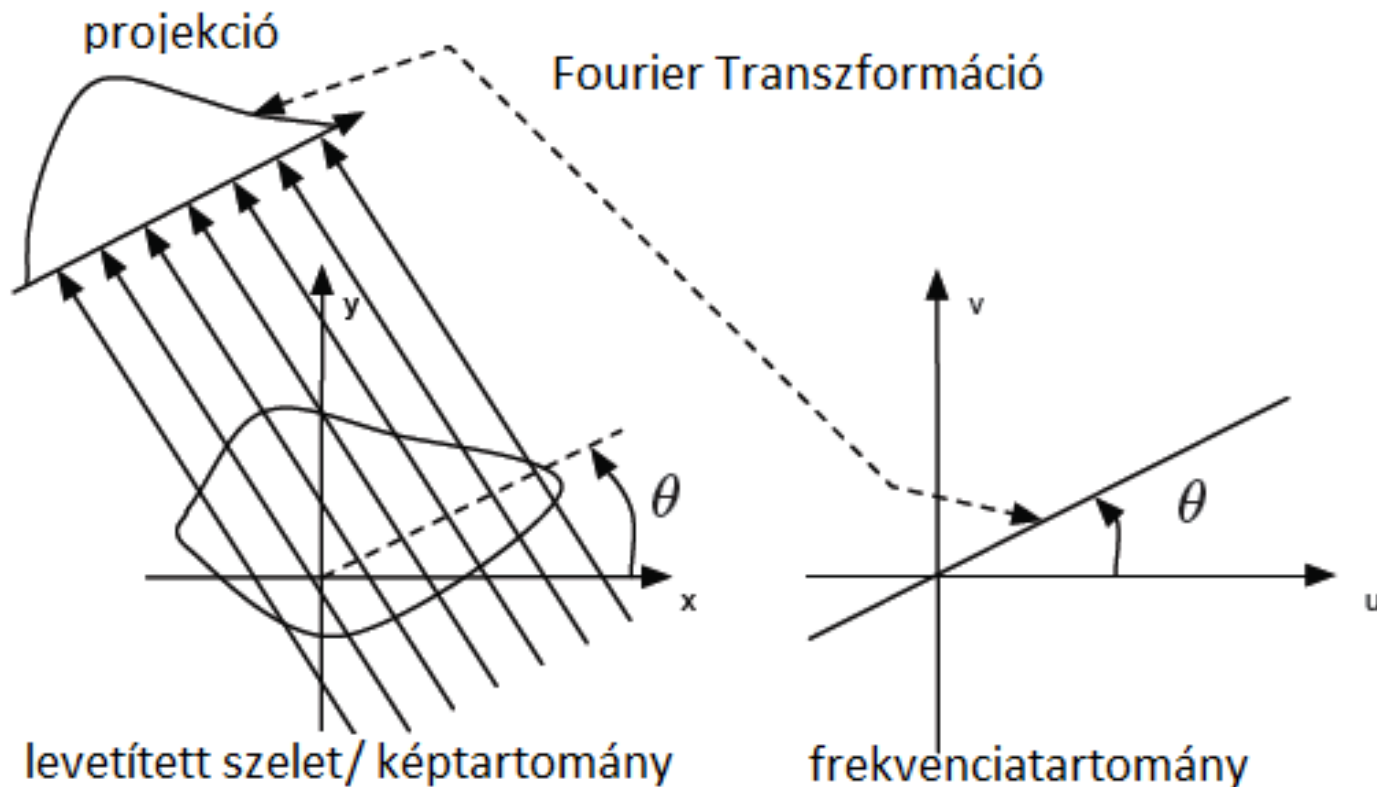
$$S_{\theta}(\rho) = \iint_{x,y} f(x, y) \cdot \exp(-2\pi j \cdot \rho \cdot (x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta))) dy dx$$

Fourier vetítősík tétele

– Lényegében f spektrumának egy szakaszát kaptuk meg:

$$S_{\theta}(\rho) = F(\rho \cdot \cos(\theta), \rho \cdot \sin(\theta))$$

- Vizuális interpretáció:

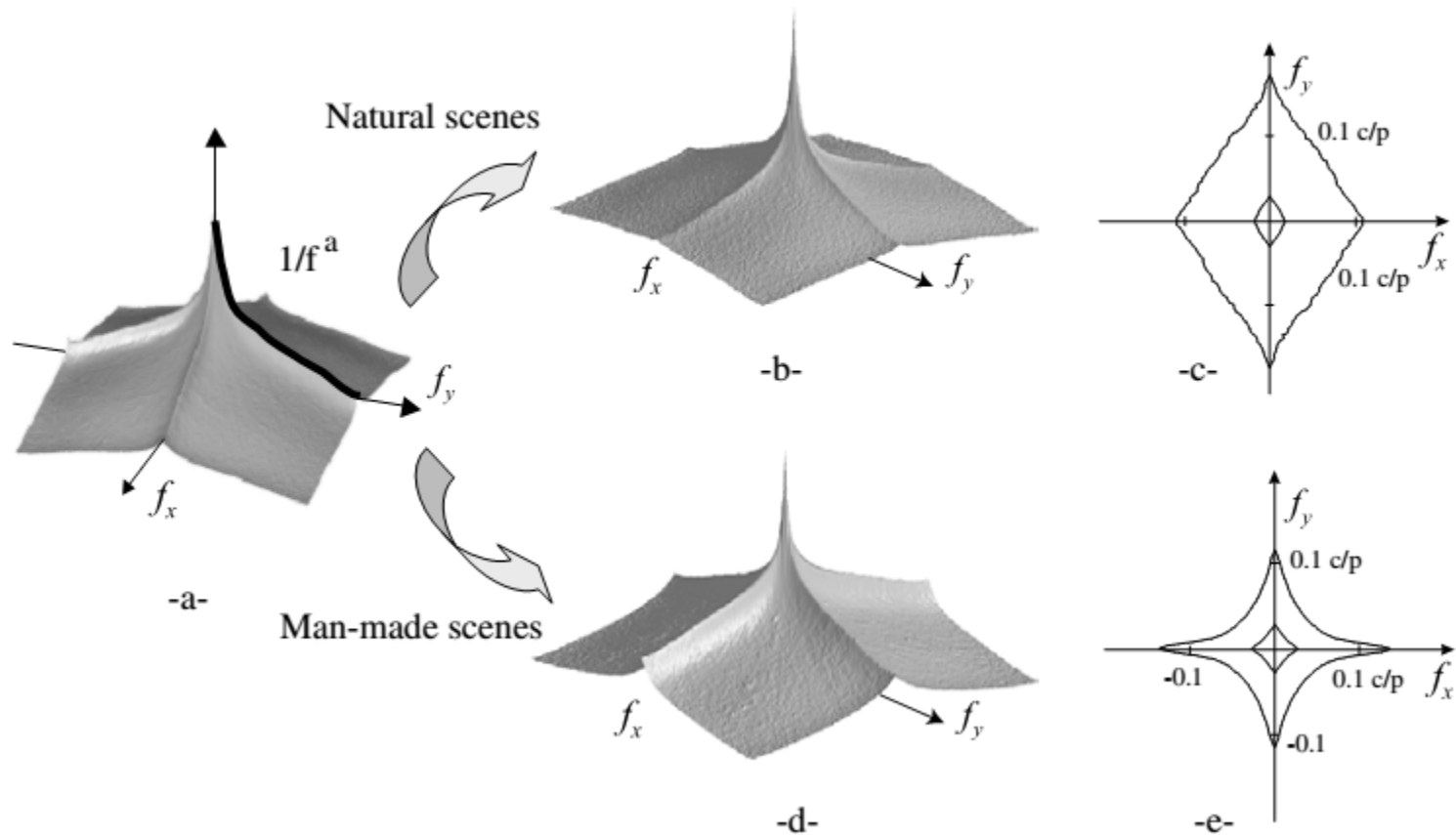


Polár koordinátás DFT

- Motiváció:
 - Radon transzformáció és annak invertálása
 - Regisztráció: elforgatás és eltolás könnyen számolhatóvá válik
- Számítása – folytonos eset:
 - $F\{\theta, \rho\} = \iint_{x,y} f(x, y) \cdot \exp(-2\pi j \cdot \rho \cdot (x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta))) dydx$
 - Nem szeparábilis
 - Fourier vetítősík tétel
 - Spektrum vonal profiljai \Leftrightarrow Radon transzformáció 1D Fourier transzformáltjai

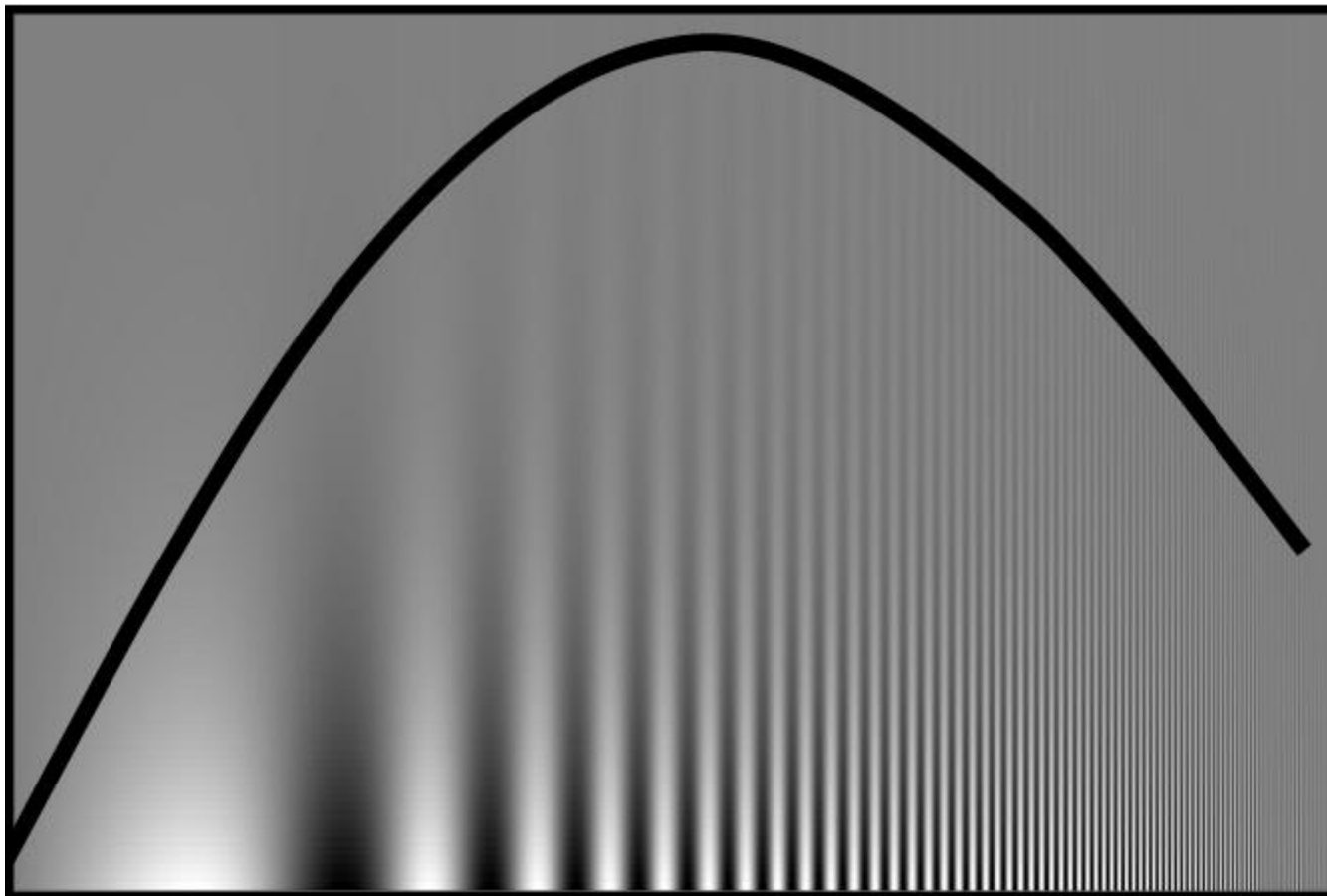
Majd a rekonstrukciónál bizonyítjuk is!

Digitális képek átlagos energiaspektruma

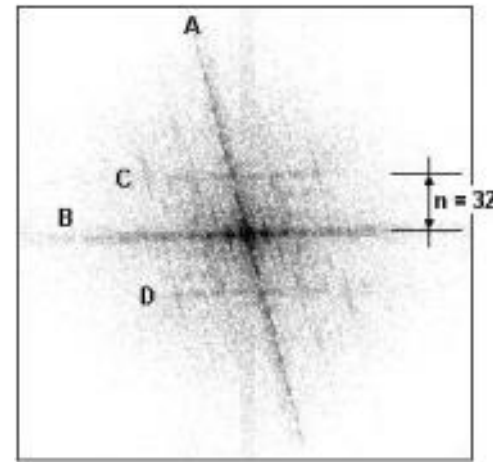


Frekvenciatartomány és emberi látás

- Campbell-Robson kontraszt érzékenységi görbe:

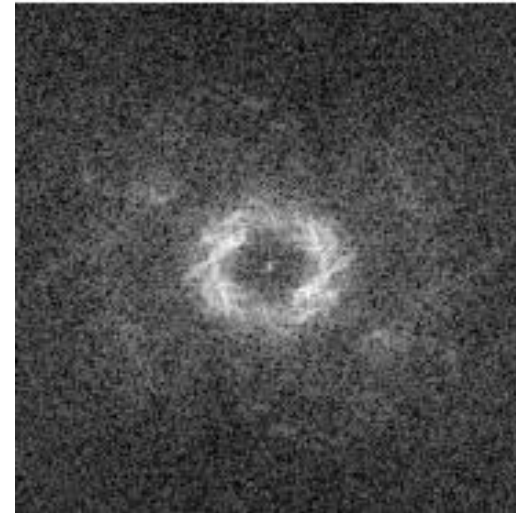


Képek spektrumának jellemzői



- Szignifikáns élekre merőleges „élek” a spektrumban:
 - A: párkány, karzat, homlokzat közel vízszintes élei
 - B: oszlopok, függőleges élek képei
 - C és D periodikus élekre utalnak, melyeknél az alapharmonikusok a DC komponenstől 32 DFT binre vannak ➡ kép szélességének 32-edé a periódusideje

Képek spektrumának jellemzői

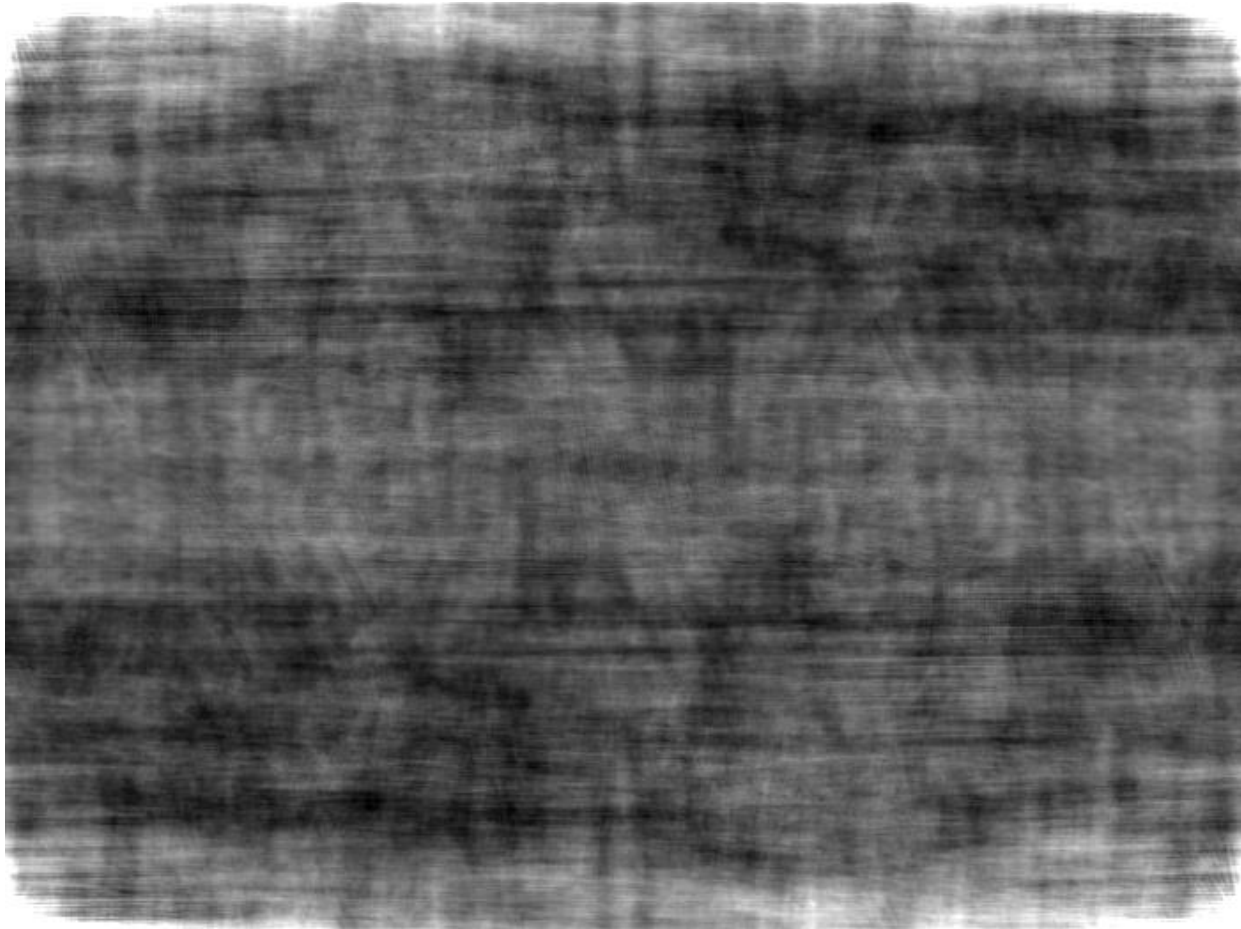


- Nincs karakteres élırány:
 - Vannak élek, de azok orientációja kb. uniform eloszlású
 - DC komponens körül jól definiált távolságra helyezkedik el egy markáns, gyűrű szerű ampl. csúcs (kb. egyenletes távolságra vannak a szomszédos barázdák, d fér bele)

2D DFT példa – rekonstrukció spektrum amplitúdóból és fázisból



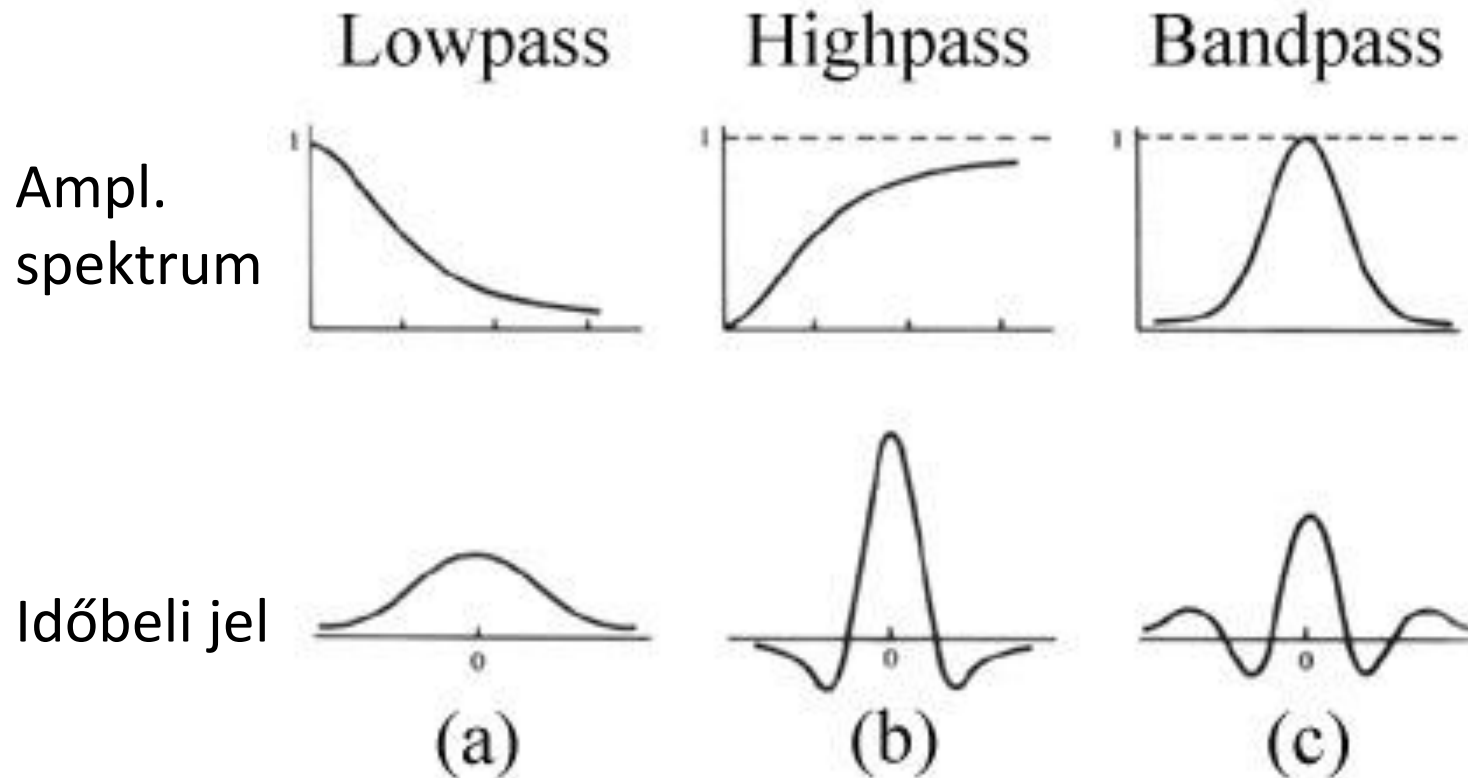
2D DFT példa – csak a spektrum
amplitúdójából rekonstruált kép



2D DFT példa – csak a spektrum fázisából rekonstruált kép

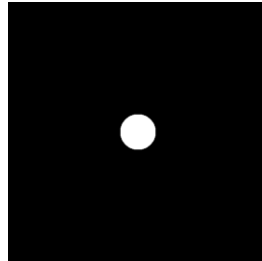


Szűrők idő és frekvencia tartományban



Ideális szűrők

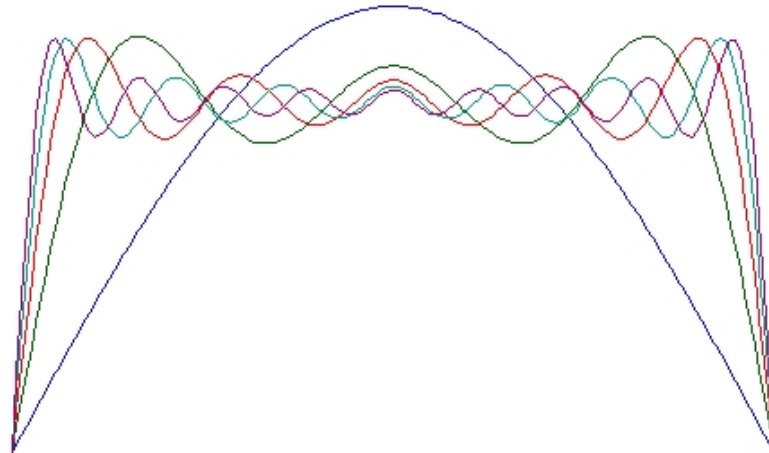
- Amplitúdó éles vágásánál Gibbs jelenség:



Gibbs gyűrű effektus

- Gibbs jelenség elkerülhető „sima” átmenetű szűrőkkel:
 - Butterworth szűrő: adott sávkorlát mellett a legsimább ampl. spektrumú lineáris szűrő
 - Gauss szűrő: alkalmazásával nincs Gibbs artefekt

Reconstruction of the periodic square waveform with 1, 3, 5, 7, 9 sinusoids



Gibbs gyűrű effektus

