

# Képfeldolgozó eljárások áttekintés

Orvosi képdiagnosztika

# Tartalomjegyzék

- **Képmanipulációs eljárások**
  - Képjavítás (kontraszt módosítás, intenzitásviszonyok módosítása-hisztogram módosítás, zajszűrés)
- **Képelemzés**
  - Éldetektálás (szűréssel, gradiens, második derivált meghatározással, Canny, stb)
  - Képszegmentálás
    - Egyszerű eljárások
      - Hisztogram (képintenzitás) alapján, textura alapján
      - régió növesztés, watershed eljárás
      - Élek, kontúrok alapján
      - Pixelértékek alapján (klaszterezés, osztályozás)
    - Komplex eljárások
      - Transzformációs eljárások: Hough transzformáció,
      - szegmentálás deformálható modellekkel: ASM, AAM, deformálható Fourier transzformáció
      - szegmentálás deformálható modellekkel: parametrikus. Snake,
      - szegmentálás deformálható modellekkel Geometriai: Level set módszer
      - Komplex eljárások:, edge flow, stb,
  - Morfológiai műveletek

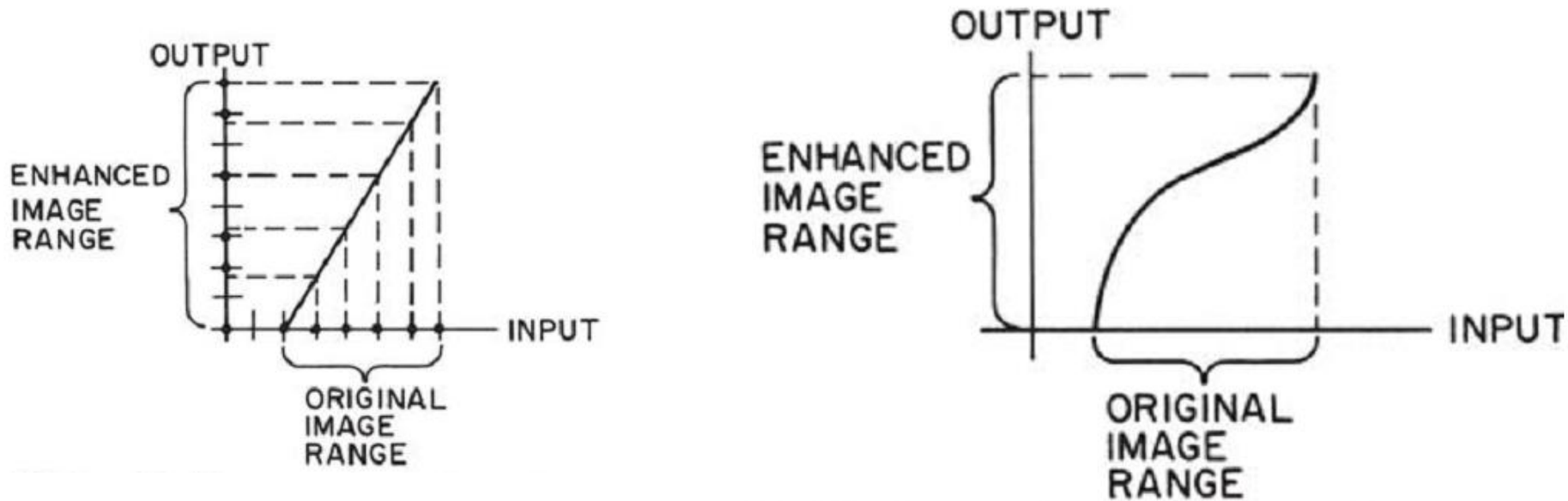
# Képjavítás

**Cél: a kép vizuális megjelenésének javítása. Alapvetően az emberi szem számára javítunk a kép megjelenésén, de segíti a gépi képelemzést is.**

Tipikus képjavítási eljárások:

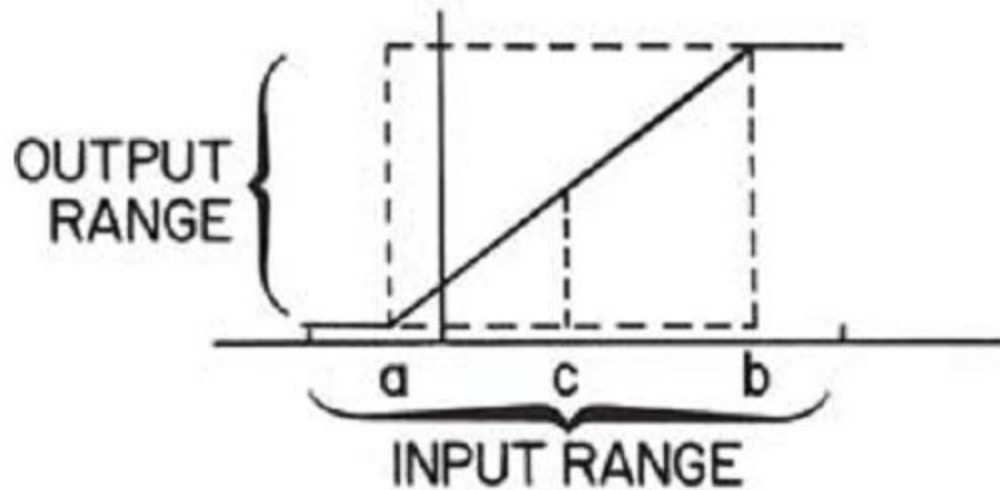
- Kontraszt módosítás
- Intenzitásviszonyok módosítása
- Szűrések:
  - lineáris szűrések,
  - nemlineáris szűrések:
    - homomorfikus feldolgozás
    - order statistics filters: median, rank és ezek variánsai.
- Élek kiemelése,
- Zajok mérséklése

# Kontraszt javítás – intenzitásokat módosító leképezéssel



- Az intenzitástartomány és az intenzitásviszonyok megváltoztatása
  - lineáris vagy nemlineáris módosítás

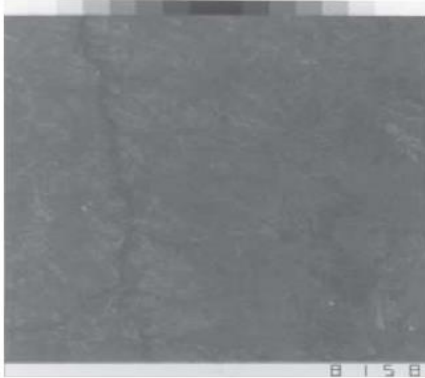
# Kontraszt javítás – intenzitásokat módosító leképezéssel



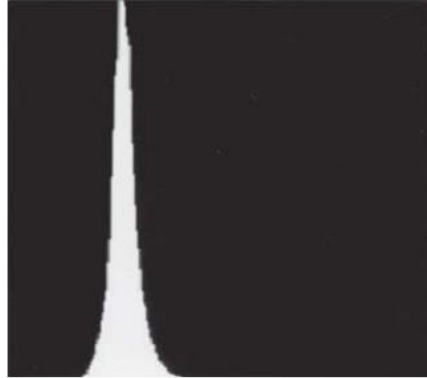
Window-level transzformáció

ablak: a lineáris meredek szakasz tartománya,

Level: a lineáris szakasz középső pontja



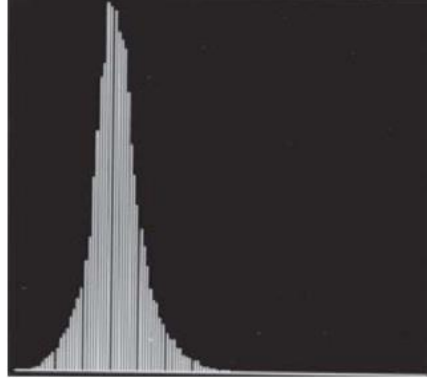
(a) Original



(b) Original histogram



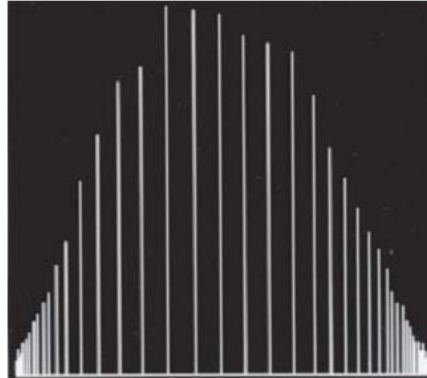
(c) Min. clip = 0.17, max. clip = 0.64



(d) Enhancement histogram



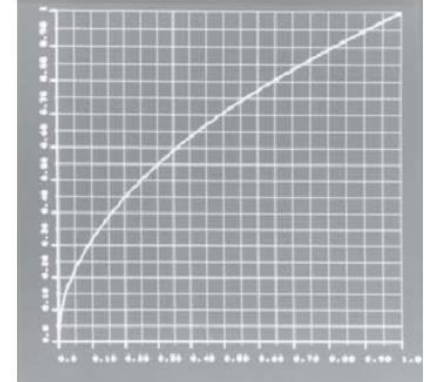
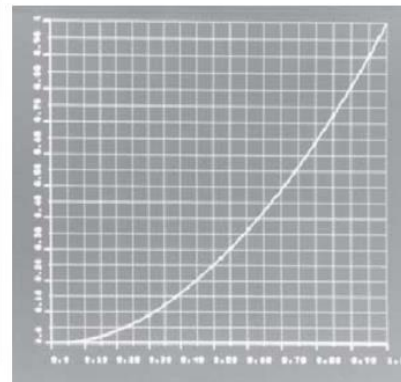
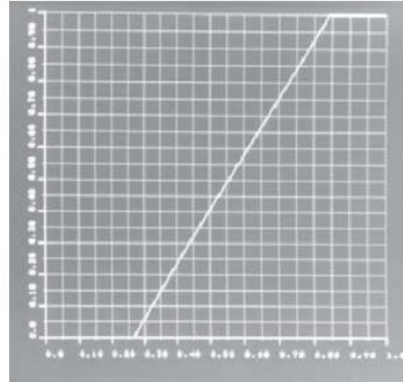
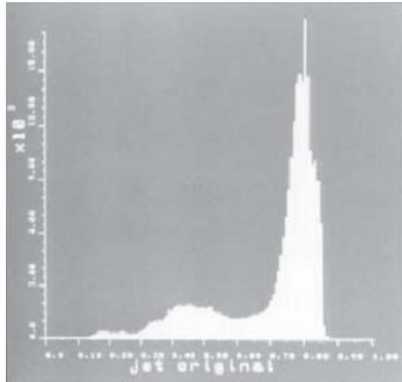
(e) Min. clip = 0.24, max. clip = 0.35



(f) Enhancement histogram

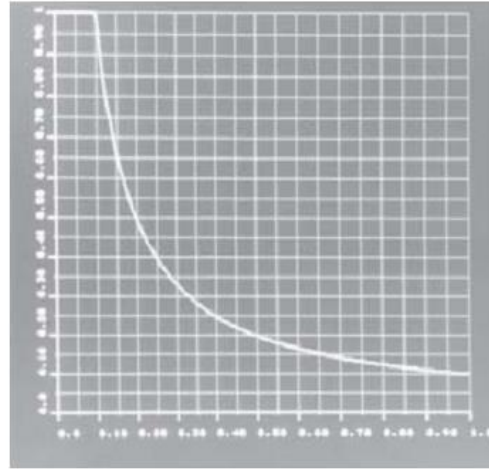
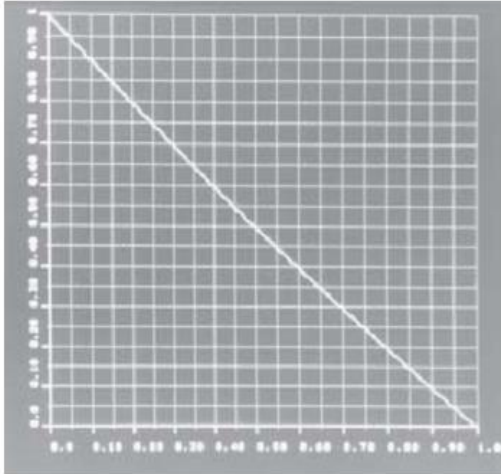
## A hisztogram széthúzása

# Kontraszt javítás



$$G(j, k) = [F(j, k)]^p$$

# Kontraszt javítás



$$G(j, k) = 1.0 - F(j, k)$$

$$G(j, k) = 1.0$$

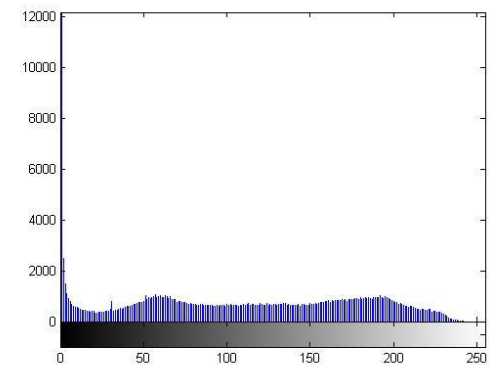
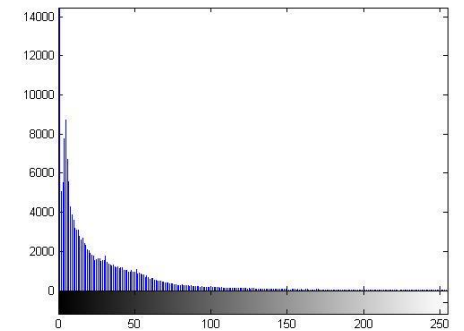
for  $0.0 \leq F(j, k) < 0.1$

$$G(j, k) = \frac{0.1}{F(j, k)}$$

for  $0.1 \leq F(j, k) \leq 1.0$

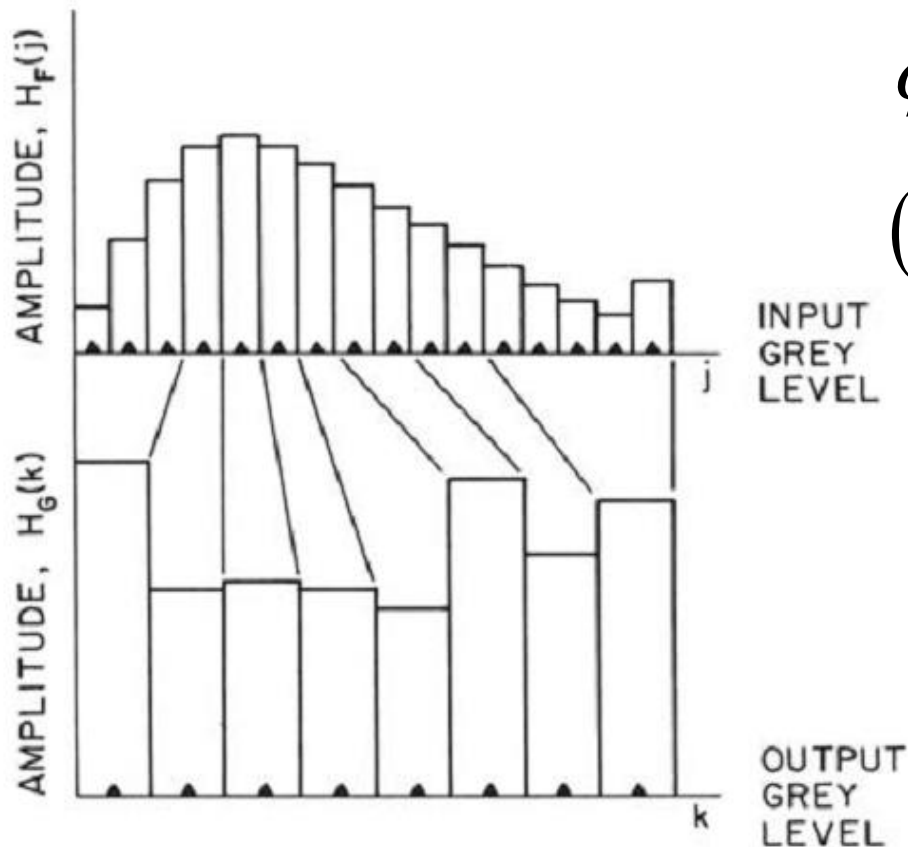


# Hisztogram kiegyenlítés



# Hisztogram kiegyenlítés

- Hisztogram kiegyenlítés



$$\varphi(a) = b$$

$$(b-1) \cdot N/B < \sum_{x=0}^a h(x) \leq b \cdot N/B$$

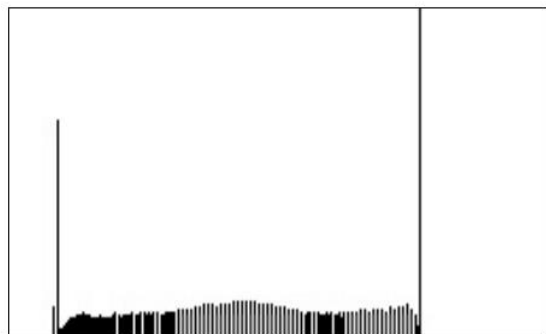
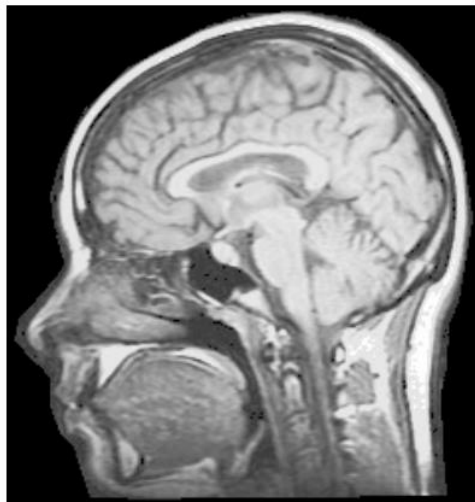
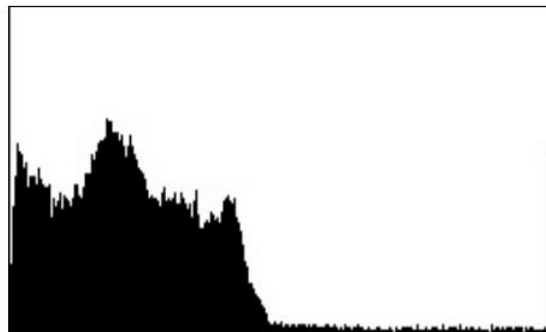
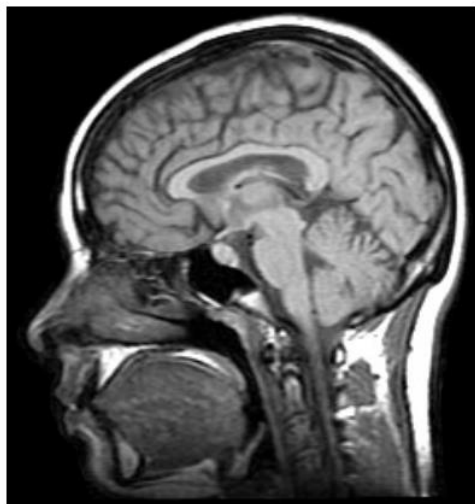
$\varphi(a)$  : intenzitás leképezés

$h(x)$  : eredeti kép hisztogramja

$N$  : kép pixeleinek a száma

$B$  : széthúzott hisztogram bin-jeinek a száma (értékhalmoz mérete)

# Hisztogram kiegyenlítés példa

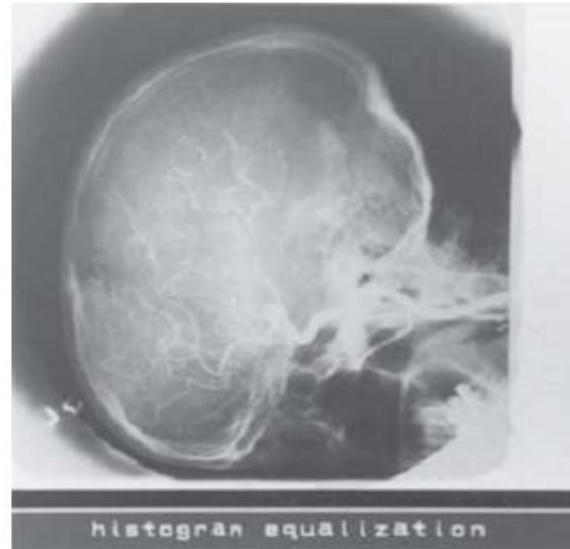


# Adaptív hisztogram módosítás

Csúszó ablak kummulatív hisztogramja alapján történik a hisztogram kiegyenlítés



eredeti



nemadaptív



adaptív

$$G(j, k) = b : (b-1) \cdot a^2 / B < \sum_{x=0}^{F(j,k)} h^{(j,k)}(x) \leq a^2 \cdot N / B$$

$h^{(j,k)}$  :  $(j,k)$  pixel középpontú  $(a \times a)$  méretű ablak hisztogramja

# Zajszűrés

- Lineáris szűrések, szűrőkernel
  - szűrés a képtartományban
- Szűrés transzformált tartományban
  - (bázisfüggvények terében végezzük el a szűrést: Fourier, stb)
- Nemlineáris szűrések:
  - homomorfikus jelfeldolgozás
  - order statistics szűrés: median szűrés, egyéb OSF eljárások

# Lineáris, eltolás invariáns szűrések

$$G(j, k) = \sum \sum I(m, n) H(j - m, k - n)$$

Pl. aluláteresztő szűrő

$$\mathbf{H} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

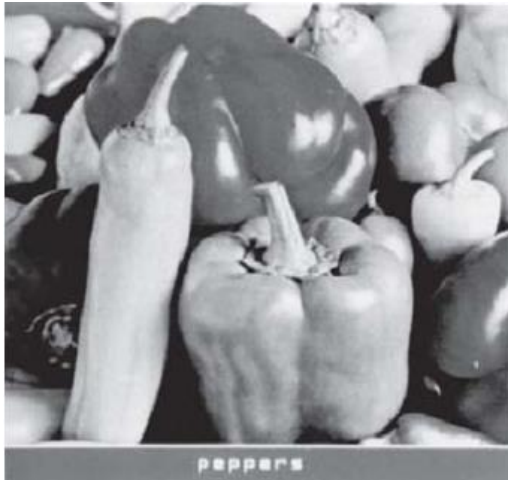
$$\mathbf{H} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \left( \frac{1}{b+2} \right)^2 \begin{bmatrix} 1 & b & 1 \\ b & b^2 & b \\ 1 & b & 1 \end{bmatrix}$$

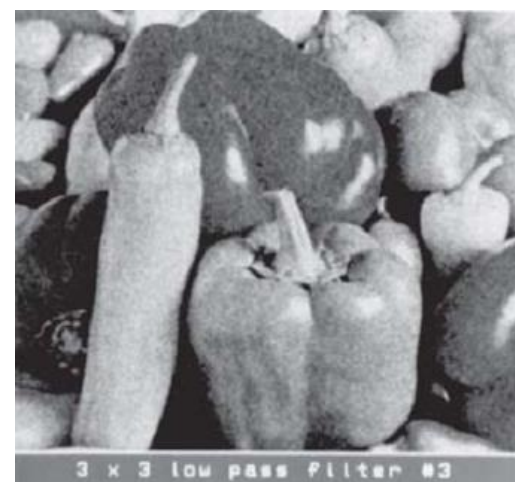
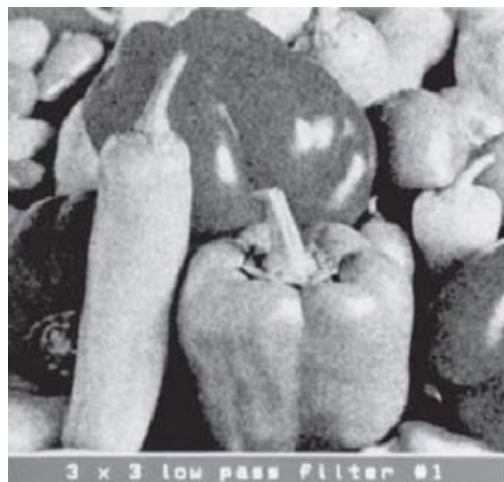
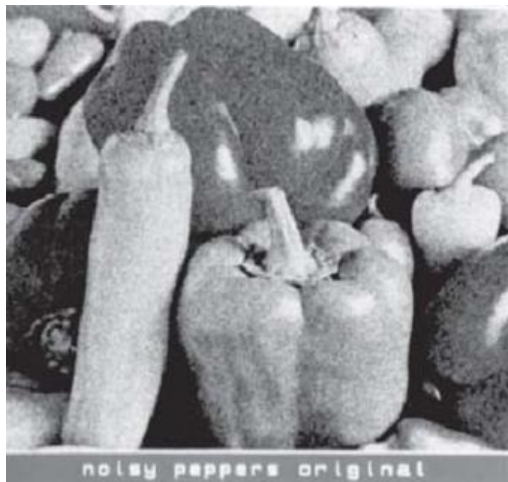
# Lineáris szűrés

Eredeti



$$\mathbf{H} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$



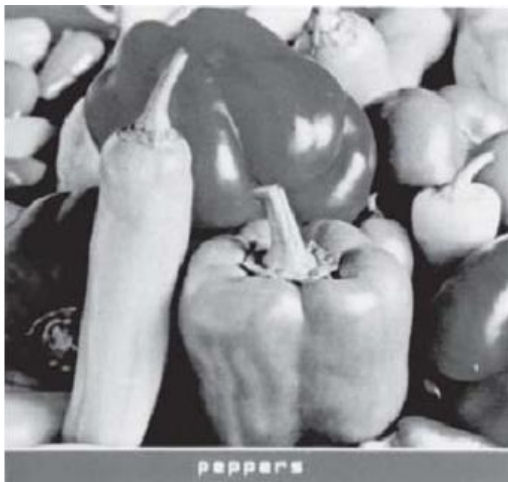
Egyenletes zaj

mask 1

mask 3

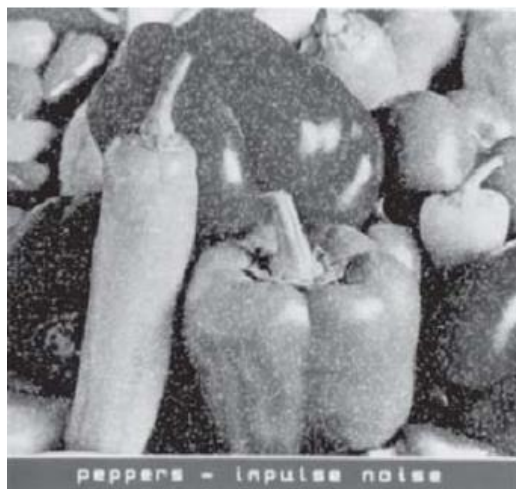
# Lineáris szűrés

Eredeti

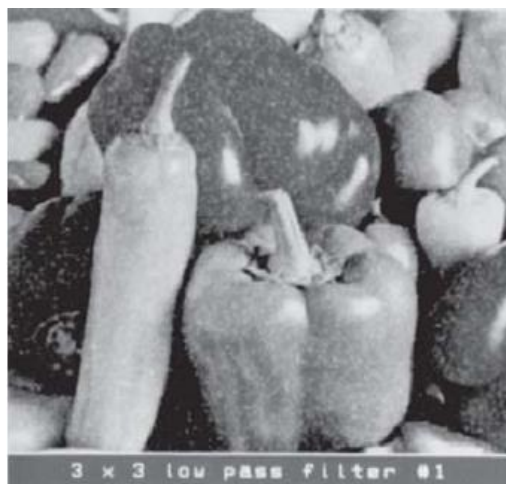


$$\mathbf{H} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

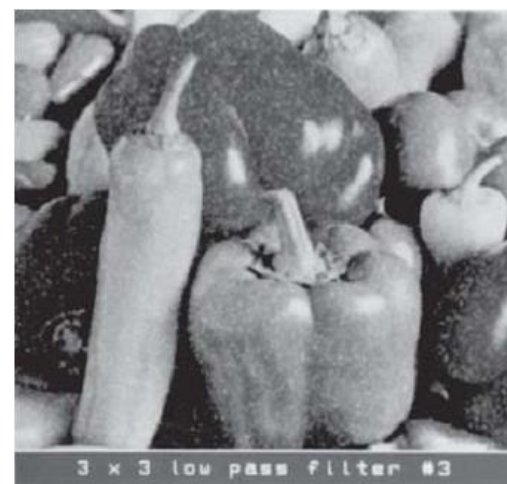
$$\mathbf{H} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$



Impulzus zaj



mask 1



mask 3



# Éldetektáló szűrők

-1	0	+1
-2	0	+2
-1	0	+1

Gx

+1	+2	+1
0	0	0
-1	-2	-1

Gy

Sobel

$$|G| = \sqrt{Gx^2 + Gy^2} \quad \theta = \arctan(Gy/Gx)$$

-1	0	+1
-1	0	+1
-1	0	+1

Gx

+1	+1	+1
0	0	0
-1	-1	-1

Gy

Prewitt

Egyebek:

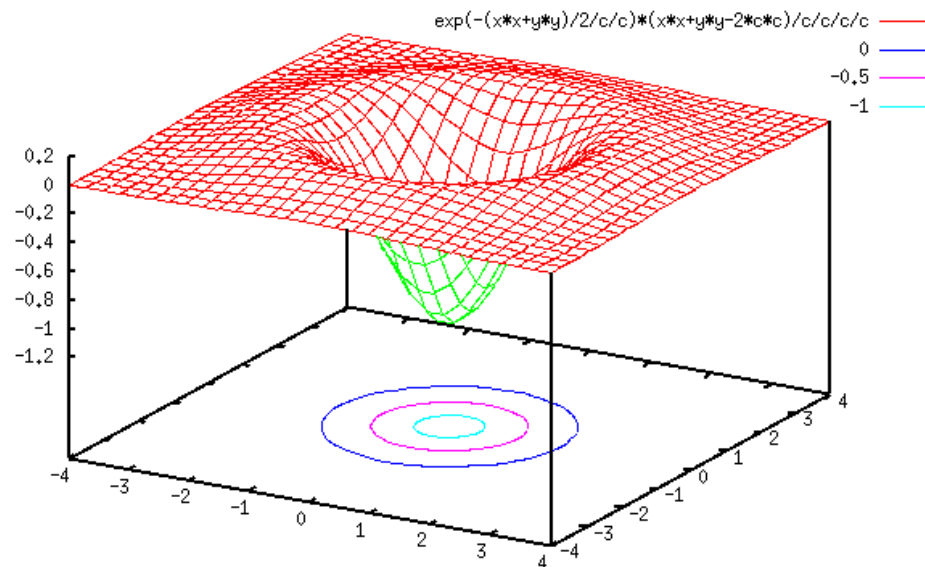
Roberts, Kirsch, DoG, LoG

$$|G| = \sqrt{Gx^2 + Gy^2} \quad (|G| = |Gx| + |Gy|)$$

# Élkiemelő szűrők

2D LoG és közelítő kernele

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -16 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



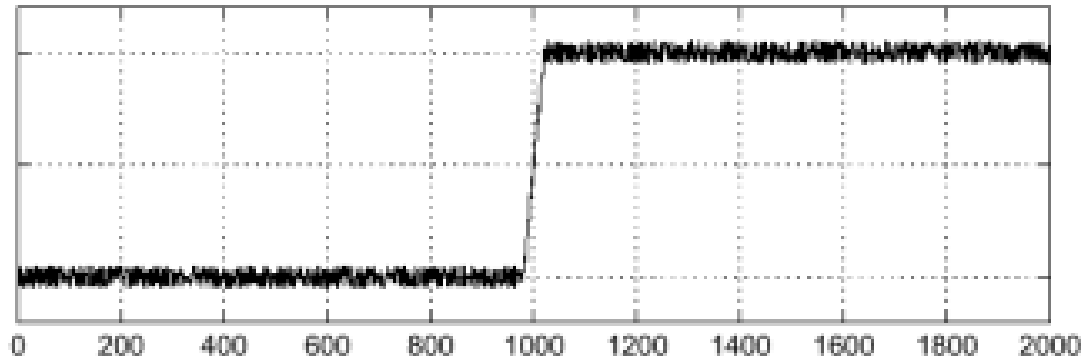
$$LoG \triangleq \Delta G_{\sigma}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} G_{\sigma}(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} G_{\sigma}(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 2\sigma^2}{\sigma^4} e^{-(x^2 + y^2)/2\sigma^2}$$

LoG alkalmazása, nullátmenetek detektálására  
Küszöbözés (csak a nagy átmeneteket tartja meg)

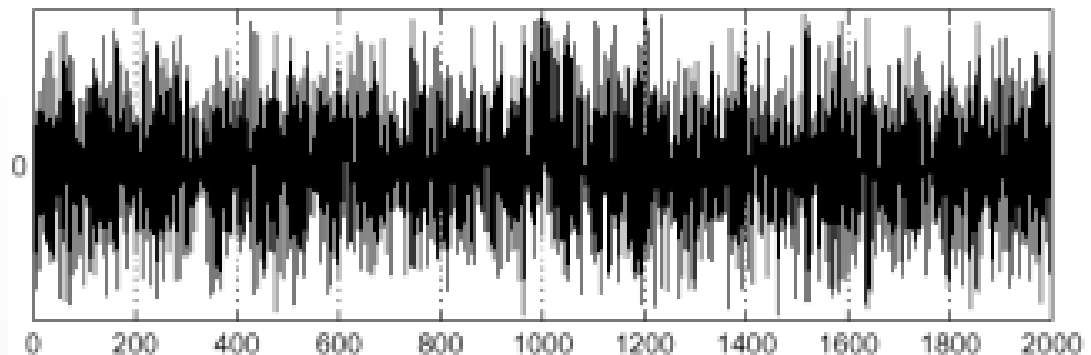
# Éldetektálás zajérzékenysége

- Élkiemelés – nagy frekvenciás szűrés:
  - Nagy frekvencián általában rosszabb SNR -> zajérzékeny
  - Pl.:

$$f(x)$$

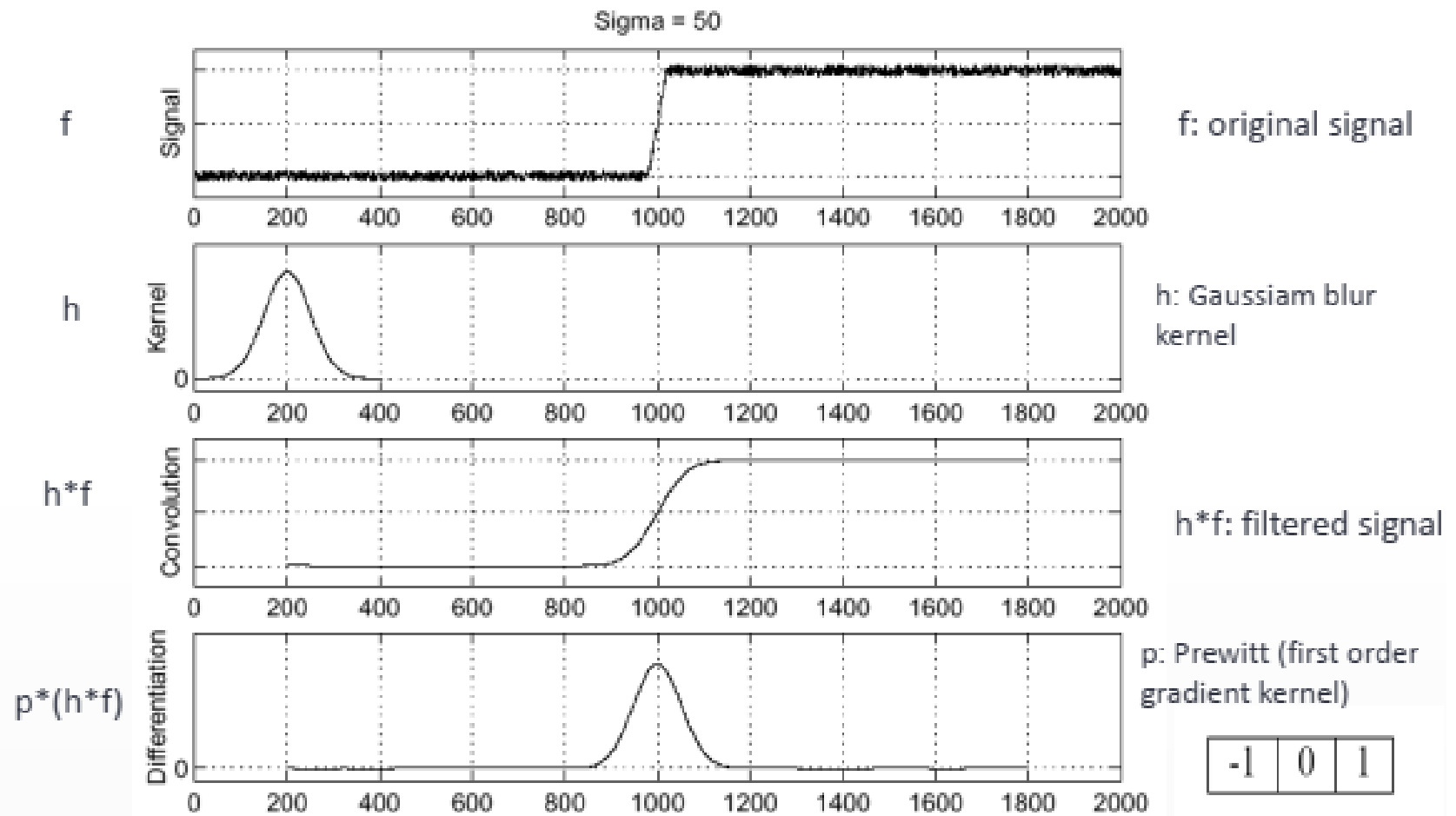


$$\frac{d}{dx}f(x)$$



# Éldetektálás zajérzékenysége

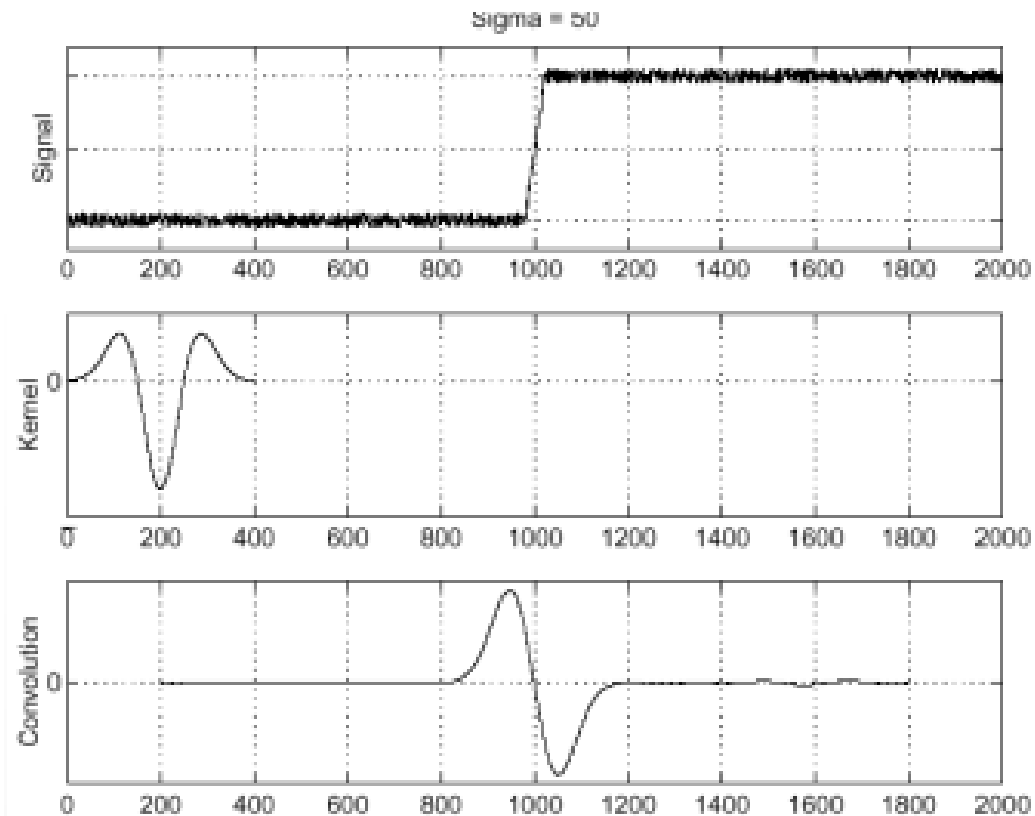
- Gauss mosás redukálja a zajt (de a gyenge éleket is)



# Élkiemelés elmosással

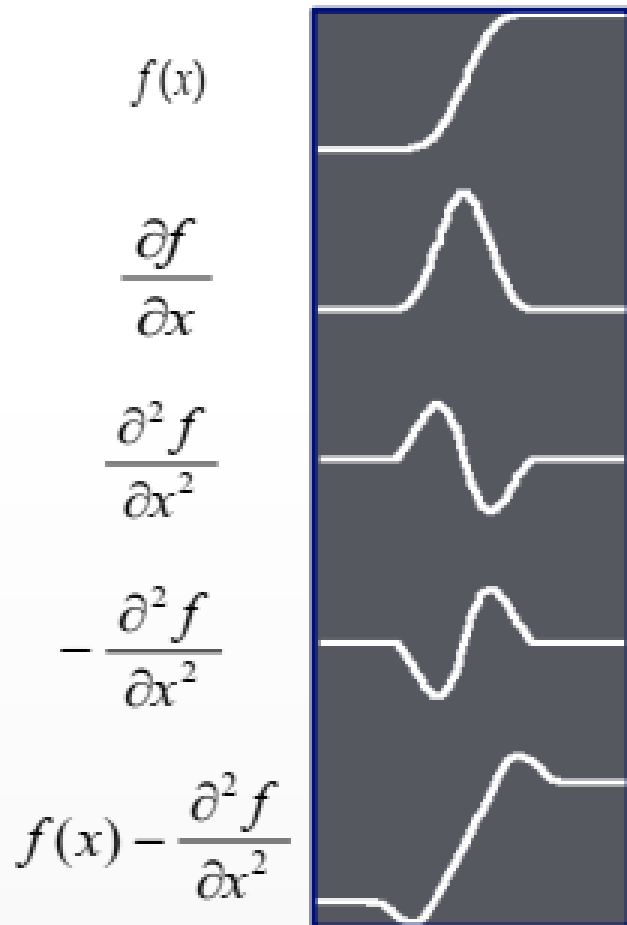
- Konvolúció átzárójelezhető:  $(\mathbf{I} * \mathbf{g}) * \mathbf{h} = \mathbf{I} * (\mathbf{g} * \mathbf{h})$ 
  - Derivative of Gaussian
  - Laplacian of Gaussian szűrések

Gyorsabb – elég 1 db konvolúció



# Élek kiemelése éldetektáló szűrőkkel

- Eredeti képből vonjuk ki a LoG szűrtjét:



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$



Original image



Edge enhanced image

# Nemlineáris szűrés

- homomorfikus szűrés
- order statistic (rank) szűrés
- polinomiális szűrés
- matematikai morfológia
- neurális hálók
- nemlineáris kép visszaállítás

# Nemlineáris szűrések

- Homomorfikus szűrés
  - Multiplikatív zajok mellett hatékony

$$F(j, k) = I(j, k)S(j, k)$$

megvilágítás, zajmentes kép

$$\log\{F(j, k)\} = \log\{I(j, k)\} + \log\{S(j, k)\}$$

- Logaritmálás után hagyományos szűrési eljárások

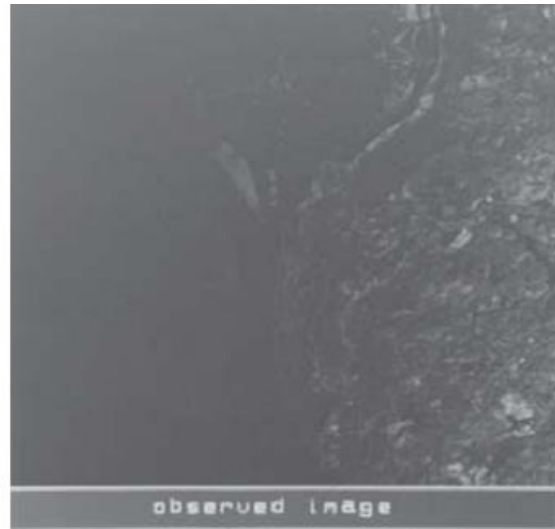




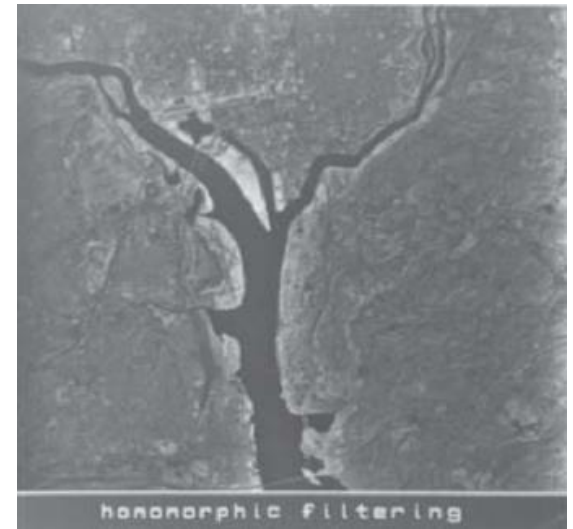
# Homomorfikus szűrés



megvilágítás



érezelt kép



homomorfikus szűrés eredménye  
Butterwoth felüláteresztő szűrés

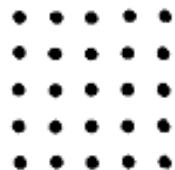
# Order statistics szűrés

- Legyen  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ , akkor  $X_{(i)}$  az  $i$ -edik statisztika
- Sorbarendezi a szomszédos pixeleket növekvő intenzitásérték szerint, kiválaszt egyet a rangnak megfelelően és ez lesz a kimenet
- Speciális rank szűrők:
  - medián
  - Kétdimenziós mediáns szűrő

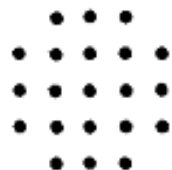
$$med(X_i) = \begin{cases} X_{(\nu+1)} & \text{if } n = 2\nu + 1 \\ (X_{(\nu)} + X_{(\nu+1)})/2 & \text{if } = 2\nu \end{cases}$$

$$y_{ij} = med(x_{i+r, j+s}; (r, s) \in A), \quad (i, j) \in \mathbf{Z}^2$$

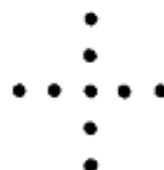
Az  $A$  halmaz a szűrő ablak. Az ablak alakja befolyásolja a szűrő tulajdonságait (élmegtartás, bizonyos képrészletek megtartása)



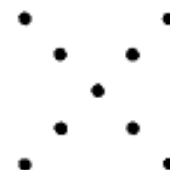
SQUARE



CIRCLE



CROSS

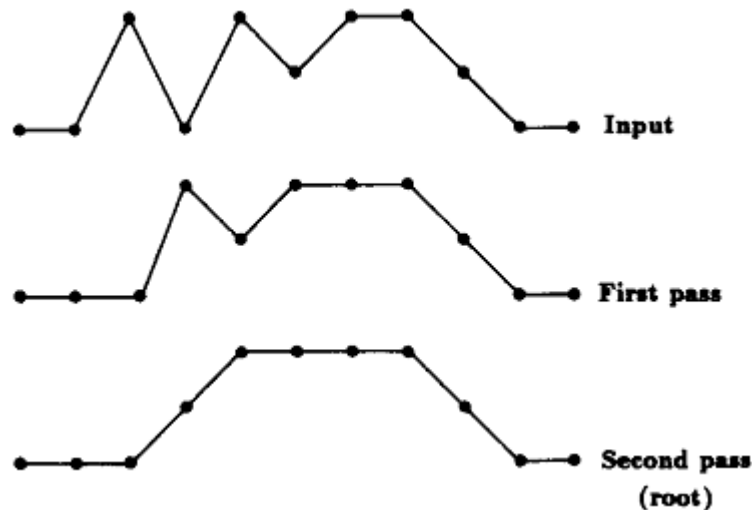


X-SHAPE

# Medián szűrés

## Tulajdonságok:

- Jól teljesít lassan lecsengő zajeloszlásnál (hatékony az impulzus zajok eltüntetésénél)
- Rosszul teljesít gyorsan lecsengő eloszlásnál (pl. egyenletes zajeloszlásnál)
- Fehér zaj mellett aluláteresztő tulajdonságú
- Igyekszik megtartani az éleket
- Kérdés: van-e olyan jel (sajátfüggvény sajátjel), melyet nem módosít?  
(a lineáris szűrőknél ilyen a szinusz)
- Medián szűrő root jele: Minden véges hosszúságú nemroot jel a root jelhez konvergál, ha a medián szűrőt ismételten alkalmazzuk



# Medián szűrés



**A zajos képből 7x7 ablak**

**eredeti zajos kép**

**átlagoló szűrés**

**medián szűrés**

# Rank szűrés



**A zajos képből 7x7 maszk mellett 4. rangú pixelek kiválasztása (rank 4)**

# Adaptív szűrők (ált. jel feldolg.)

## Adaptív lineáris szűrő:

$$x(i) = d(i) + n(i)$$

$$\hat{d}(i) = y(i) = \sum_{j=1}^n a_j(i)x_{(j)}(i) = \mathbf{a}^T(i)\mathbf{x}(i) \quad \mathbf{a}(i) = [a_1(i), \dots, a_n(i)]^T$$

$$J = E[e(i)^2] = E\left[\left|d(i) - \sum_{j=1}^n a_j(i)x_{(j)}(i)\right|^2\right]$$

$$\mathbf{a}(i+1) = \mathbf{a}(i) + \mu e(i)\mathbf{x}(i)$$

## Adaptív nemlineáris szűrők

$y(i) = f(\sum_j a_j(i)x_j(i))$  ahol  $f$  valamilyen nemlineáris függvény

# Adaptív szűrők (kép feldolg.)

- **Adaptív szűrés**

- Az adaptív szűrés nem shift invaránsan viselkedik – szűrés definíciója függ az adott képrészlet jellemzőitől.

- **Lee szűrés:**

- $$F \{ \mathbf{I} \} (i, j) = \beta_{(i,j)} \cdot \mathbf{I}(i, j) + (1 - \beta_{(i,j)}) \cdot \mu_{(i,j)} \{ \mathbf{I} \}$$

- $$\beta_{(i,j)} = \max \left( \left( \sigma_{i,j}^2 \{ \mathbf{I} \} - \xi \right) / \sigma_{i,j}^2 \{ \mathbf{I} \}, 0 \right)$$

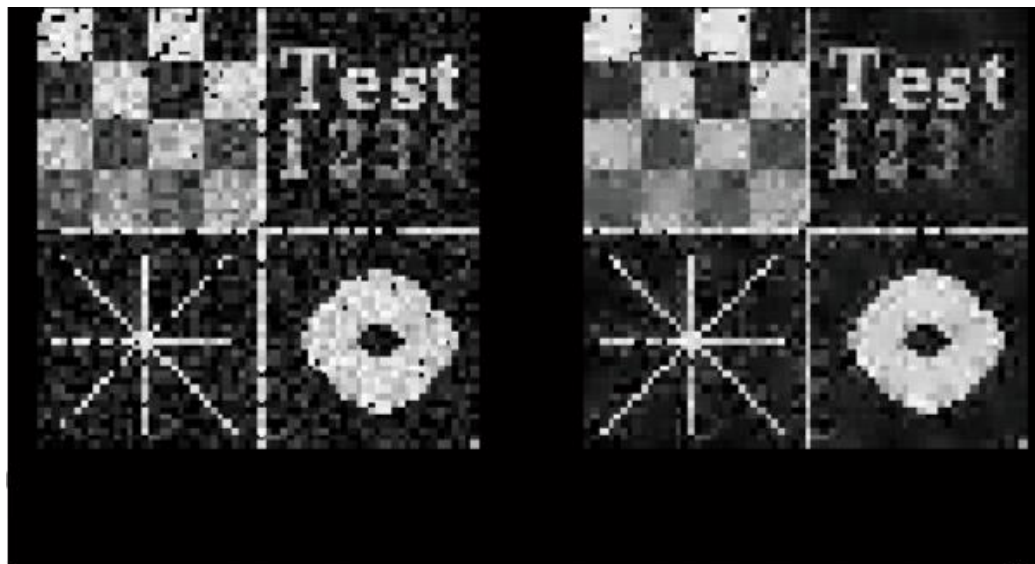
- $$\sigma_{i,j}^2 \{ \mathbf{I} \} = \frac{1}{(2N + 1)^2} \sum_{|i-v| \leq N, |j-u| \leq N} \left( \mathbf{I}(u, v) - \mu_{(i,j)} \{ \mathbf{I} \} \right)^2$$

$$\mu_{(i,j)} \{ \mathbf{I} \} = \frac{1}{(2N + 1)^2} \sum_{|i-v| \leq N, |j-u| \leq N} \left( \mathbf{I}(u, v) \right)$$

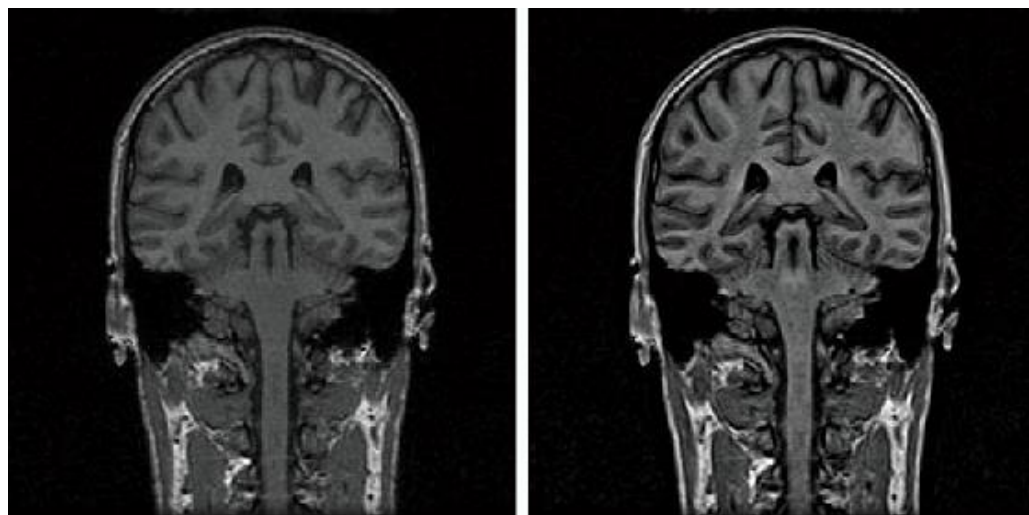
- $\xi$ : paramétere a szűrésnek

# Lee szűrés

Tesz kép



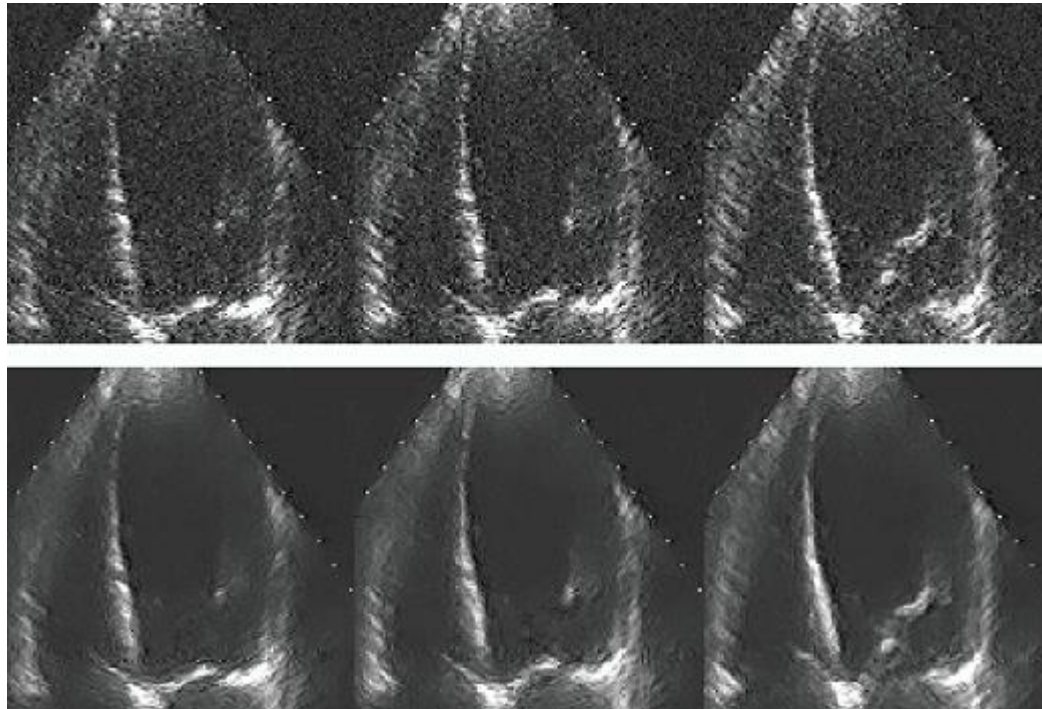
MRI





# Lee szűrő

Ultrahangképnél



# Élkiemelés adaptív szűréssel

- **Statisztikus differenciálás**
- Minden pixel értékét elosztjuk a szórásával, ahol a szórást a környezetében lévő pixelekből számítjuk

$$G(j, k) = \frac{F(j, k)}{D(j, k)}$$

Minden pixelre számítunk átlagértéket és szórást

$$M(j, k) = \frac{1}{W^2} \sum_{m=j-w}^{j+w} \sum_{n=k-w}^{k+w} F(m, n) \quad W \times W \text{ neighborhood where } W = 2w + 1$$

$$D(j, k) = \frac{1}{W} \left[ \sum_{m=j-w}^{j+w} \sum_{n=k-w}^{k+w} [F(m, n) - M(m, n)]^2 \right]^{1/2}$$

Azon régiók intenzitásait (és annak különbségeit) súlyozza fel, melyek homogének voltak

# Élkiemelés adaptív szűréssel

**Wallis operátor**  $G(j, k) = [F(j, k) - M(j, k)] \frac{A_{\max} D_d}{A_{\max} D(j, k) + D_d} + [pM_d + (1 - p)M(j, k)]$

$M_d$   $D_d$   $A_{\max}$  Kívánt átlagos középérték, szórás és a maximális erősítési tényező.  
 $A_{\max}$  szerepe: túl nagy kimeneti érték meggátlása, ha a szórás túl kicsi  $0 \leq p \leq 1$

Általánosabb forma:  $G(j, k) = [F(j, k) - M(j, k)]A(j, k) + B(j, k)$

$A(j, k)$  a képtartománytól függő erősítés  $B(j, k)$  a képtartománytól függő háttér

$D_d$  Kívánt szórás, hogy a képfüggő erősítés  $A_{\max}$  és  $A_{\min}$  között legyen

$$D_d = \frac{A_{\min} A_{\max} D_{\max}}{A_{\max} - A_{\min}} \quad D_{\max} \text{ } D(j, k) \text{ maximuma}$$

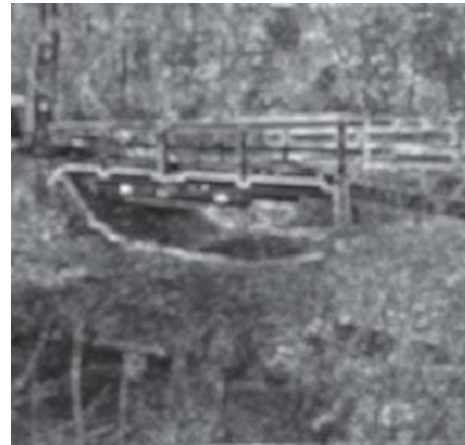
# Élkiemelés adaptív szűréssel



Eredeti



átlag 0-0,98



szórás 0,01- 0,26



háttér 0,09-0,88



Képfüggő erősítés 0,75 – 2,35



Wallis eredménye

Paraméterek:  $D_d = 0.28$ ,  $p = 0.20$ ,  $A_{\max} = 2.50$ ,  $A_{\min} = 0.75$

# Lineáris szűrés transzformált tartományban

- Frekvenciatartomány
- Egyéb bázisrendszer
  - Fix bázisrendszerek (Haar, Hadamard, Walsh, stb.)
  - Bázisrendszer család (Wavelet)
  - Képfüggő bázisrendszer (KLT)

# Lineáris szűrés transzformált tartományban

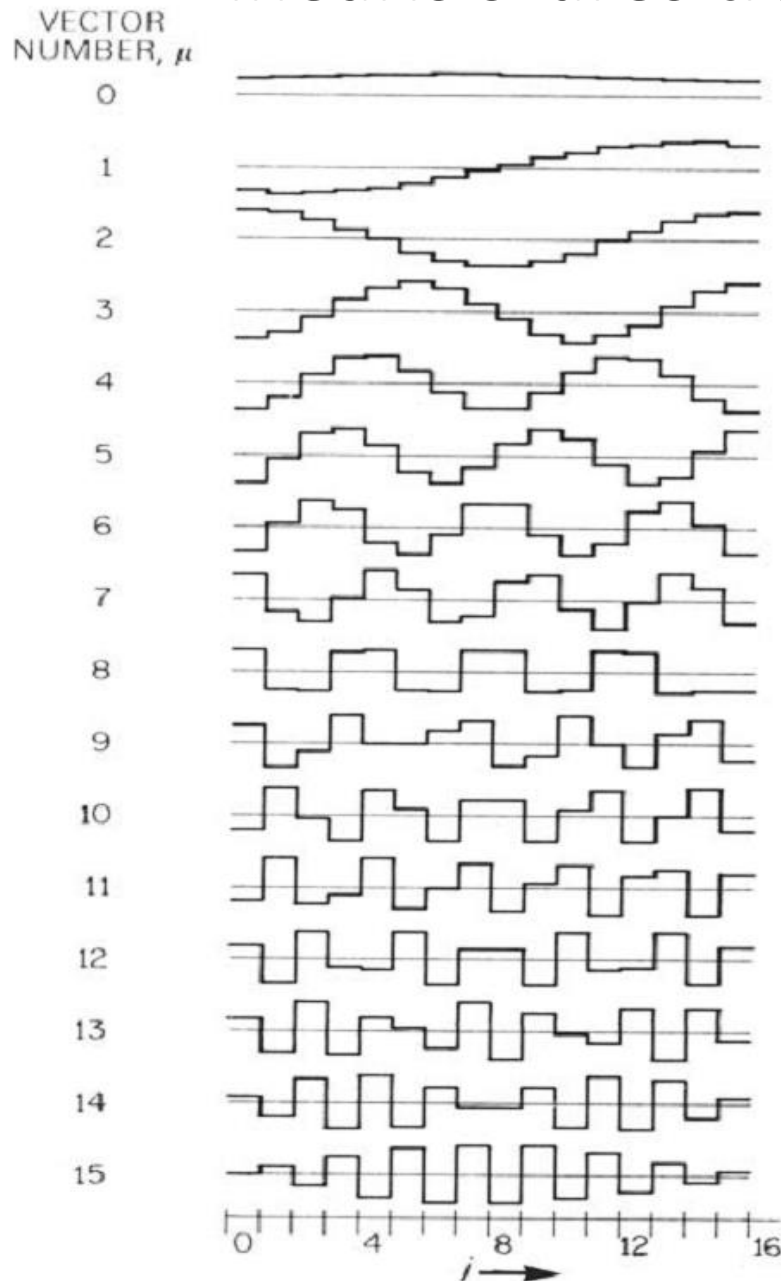
Gauss zaj

pontszerű zaj

		Gauss zaj										pontszerű zaj										
PCA	eredeti	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
	zajos																					
	M=1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
	16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
	64	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
	256	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
	M=1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
	4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
	16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
64	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
256	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
KPCA	M=1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	
Gauss kernel	4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
64	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
256	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		

**PCA-KPCA zajszűrő hatás összehasonlítása**

# Lineáris szűrés transzformált tartományban

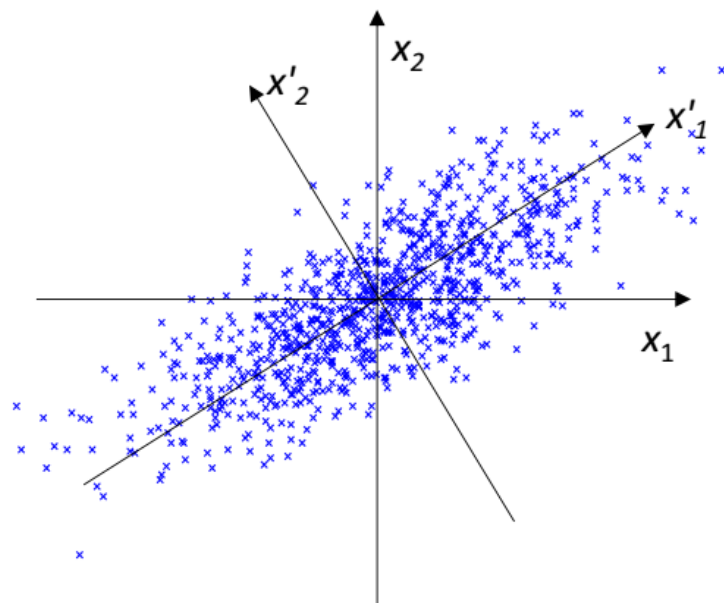


**Karhunen-Loève transzformáció (KLT)**

Jelfüggő ortogonális transzformáció



# PCA



$$\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{T} = [\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \dots, \boldsymbol{\varphi}_N]^T$$

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\varphi}_j = \delta_{ij}$$

$$\mathbf{T}^T \mathbf{T} = \mathbf{I}, \text{ vagyis } \mathbf{T}^T = \mathbf{T}^{-1}$$

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N y_i \boldsymbol{\varphi}_i \quad \hat{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^M y_i \boldsymbol{\varphi}_i \quad M \leq N \quad y_i = \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{x}$$

$$\varepsilon^2 = E \left\{ \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^2 \right\} = E \left\{ \left\| \sum_{i=1}^N y_i \boldsymbol{\varphi}_i - \sum_{i=1}^M y_i \boldsymbol{\varphi}_i \right\|^2 \right\} = \sum_{i=M+1}^N E \left\{ (y_i)^2 \right\}$$



# PCA

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=M+1}^N E\left\{\left(\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{x}\right)\left(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\varphi}_i\right)\right\} = \sum_{i=M+1}^N \boldsymbol{\varphi}_i^T E\left\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\right\}\boldsymbol{\varphi}_i = \sum_{i=M+1}^N \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{R}_{\mathbf{xx}}\boldsymbol{\varphi}_i$$

Lagrange multiplikátoros feltételes szélsőérték-keresés

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon^2 - \sum_{i=M+1}^N \lambda_i \left(\boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\varphi}_i - 1\right) = \sum_{i=M+1}^N \left[ \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{C}_{\mathbf{xx}}\boldsymbol{\varphi}_i - \lambda_i \left(\boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\varphi}_i - 1\right) \right]$$

$$\frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\varphi}_i} = \sum_{i=M+1}^N \left[ 2\mathbf{C}_{\mathbf{xx}}\boldsymbol{\varphi}_i - 2\lambda_i\boldsymbol{\varphi}_i \right] = \mathbf{0} \quad \mathbf{C}_{\mathbf{xx}}\boldsymbol{\varphi}_i = \lambda_i\boldsymbol{\varphi}_i$$

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=M+1}^N \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{R}_{\mathbf{xx}}\boldsymbol{\varphi}_i = \sum_{i=M+1}^N \boldsymbol{\varphi}_i^T \lambda_i\boldsymbol{\varphi}_i = \sum_{i=M+1}^N \lambda_i$$

# Polinomiális szűrők

- A pixel intenzitások polinomiális vagy törtfüggvényei
- Kép javítás (kontraszt élesítés, élmegtartó zajszűrés, textura szegmentálás, élkiemelés, élszegmentálás)
- Van bizonyos kapcsolata a lineáris szűrőkkel (paramétereiben lineáris, adaptív változatnál előnyök)
- Számítási komplexitás jelentősen nagyobb, különösen, ha a nemlinearitás mértékét növeljük
- A nemlineáris szűrők Taylor sor vagy Volterra sor formájában írhatók fel.
- Taylor sor : hatványfüggvény
- Volterra sor különböző pozíciójú (időben vagy a képtartományban) vett értékek szorzatai

# Volterra soros polinomiális szűrők

## A polinomiális szűrők tulajdonságai:

- Paramétereiben lineáris, de nemlineáris szűrő
- Az együtthatókat adaptálni lehet, lineáris megközelítéssel

$$y(n) = h_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \bar{h}_p\{x\}(n)$$

- Általában minden egyes tag az alábbi összefüggéssel adható meg:

$$\bar{h}_p(x_n) = \sum_{i_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{i_p=-\infty}^{\infty} h_p(i_1, \dots, i_p) x(n-i_1) \cdots x(n-i_p)$$

$h_0$  offset  $h_1$  egy digitális FIR szűrő válasza

- Általánosabb nemlineáris szűrő megadási forma:

$$y(n) = f[x(n), x(n-1), \dots, x(n-N_1), y(n-1), \dots, y(n-M)] = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{Q})$$

# Volterra soros polinomiális szűrők

## Első és másodfokú szűrő aggregátja:

- Olyan problémák esetén is hatékony, melynél elvérzik a lineáris, illetve a medián szűrés is (pl. kevert Gauss és impulzus zaj).



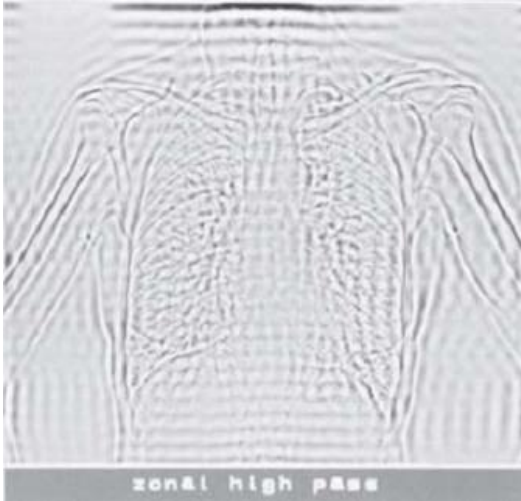
Torzított kép

Gauss szűrés

Medián szűrés

Volterra kerneles szűrés

# Éljavítás, éldetektálás



Zónás / ideális szűrés

Közvetlenül a Fourier tartományban definiáljuk az átviteli függvényt

$$\mathcal{H}(0, 0) = 0$$

$$\mathcal{H}(u, v) = 0 \quad 0 \leq u \leq C-1 \quad \text{and} \quad 0 \leq v \leq C-1$$

$$0 \leq u \leq C-1 \quad \text{and} \quad N+1-C \leq v \leq N-1$$

$$N+1-C \leq u \leq N-1 \quad \text{and} \quad 0 \leq v \leq C-1$$

$$N+1-C \leq u \leq N-1 \quad \text{and} \quad N+1-C \leq v \leq N-1$$

$$\mathcal{H}(u, v) = 1 \quad \text{Egyébként} \quad C \text{ vágási frekvencia} \quad 0 < C \leq 1+N/2$$

# Éljavítás, éldetektálás



$$\mathcal{H}(u, v) = \mathcal{B}(u, v) \quad 0 \leq u \leq N/2 \quad \text{and} \quad 0 \leq v \leq N/2$$
$$0 \leq u \leq N/2 \quad \text{and} \quad 1 + N/2 \leq v \leq N - 1$$
$$1 + N/2 \leq u \leq N - 1 \quad \text{and} \quad 0 \leq v \leq N/2$$
$$1 + N/2 \leq u \leq N - 1 \quad \text{and} \quad 1 + N/2 \leq v \leq N - 1$$

Butterworth szűrés ahol

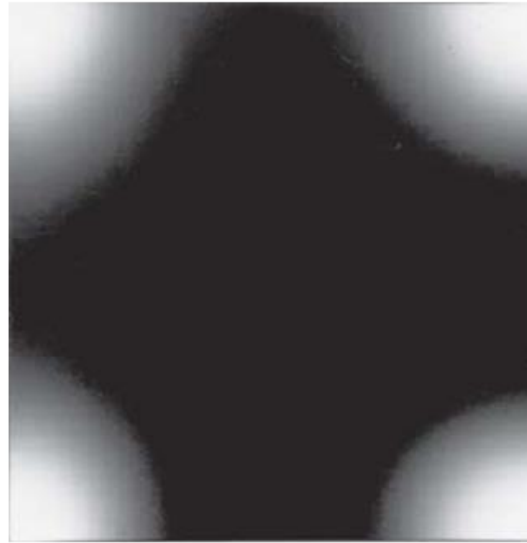
$$\mathcal{B}(u, v) = \frac{1}{1 + \left[ \frac{C}{(u^2 + v^2)^{1/2}} \right]^{2n}}$$

Butterworth szűrőt úgy terveztek meg, hogy adott sávkorlát / vágás frekvencia mellett a legsimább frekvencia átmenettel rendelkezzen.

# Éljavítás, éldetektálás



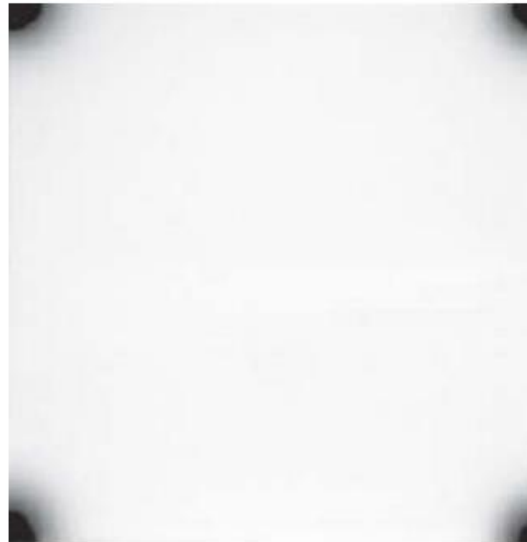
(a) Zonal low-pass



(b) Butterworth low-pass



(c) Zonal high-pass



(d) Butterworth high-pass