Rekonstrukciós eljárások

Orvosi képdiagnosztika

2019 ősz

Előadások témája

- Röntgen tomográfia fizikai és matematikai alapjai – 2D Radon transzformáció, szűrt visszavetítés:
  - Fan – beam / Cone – beam felvételi elrendezések esete
- Általánosított (3D) röntgen tomográfia alapjai – ART rekonstrukciós eljárások
- Pozitron emissziós tomográfia alapjai – ML-EM statisztikai rekonstrukciós eljárás
- Modell alapú / CS rekonstrukciós eljárások
- Tomoszintézis felvételi elrendezés – MITS rekonstrukció
- Rekonstrukciós eljárások minősítése

Röntgen tomográfia alapjai

- Általánosított Beer-Lambert törvény:

$$\mathbf{I}_{(x0,y0)} = \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} I_0(E) \cdot \exp\left\{ -\int_{P(x0,y0)} \mu(E,\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \right\} dE:$$

  - $I_0(E)$: röntgencsövet elhagyó E energiájú fotonok intenzitása (üres térfogat esetén a detektor által érzékelt fotonok száma)
  - $P(x,y)$: pontszerű sugárforrást a detektor (x,y) koordinátájú pontjával összekötő szakasza a *3d térnek*
  - $\mu(E,\mathbf{x})$: a vizsgált térfogat $\mathbf{x}$ koordinátájú pontjának lineáris csillapítási együtthatója E energián
  - Egyszerűsített Beer-Lambert törvény: $I_0(E) \cdot \exp\left\{ -\int_{P(x0,y0)} \mu(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \right\}$ (monokróm spektrum esete)

Röntgen tomográfia alapjai

- Monokróm spektrumú sugárzás esete:
  - Általánosan alkalmazott feltételezés
  - Rekonstrukció célja a lin. csillapítási együtthatók meghatározása az alábbi összefüggés invertálásával:

$$-\ln\left(\mathbf{I}_{(x,y)}/I_0\right) = \int_{P(x0,y0)} \mu(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

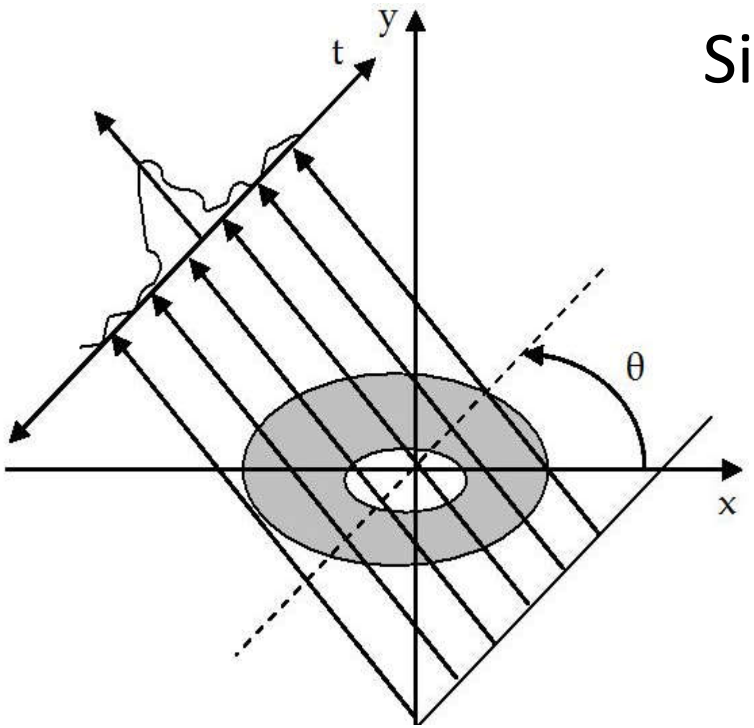
- Valódi röntgensugarak ezzel szemben:
  - Polikromatikusak $\Rightarrow$ sugárkeményedés problémája
  - Szóródnak: nem igaz, hogy csak a vetítősugár mentén elhelyezkedő képletek számítanak.
  - Projekciók egyéb zajjal is terheltek : kis intenzitásnál rossz SNR

Röntgen alapú képalkotás

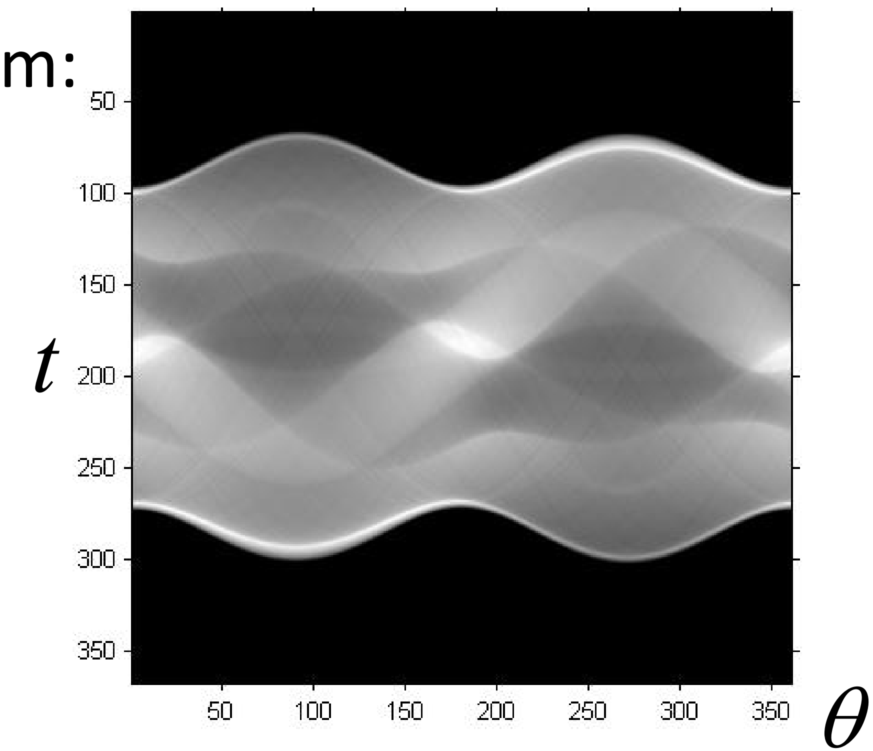
- Konvencionális P-A röntgen:
  - Nincs rekonstrukció
- Számítógépes tomográfia (CT):
  - Párhuzamos vetítősugarakon alapuló eljárások (kevés ilyen eszköz van csak forgalomban), cserébe egyszerű elmélet
  - Legyező (Fan-beam) helikális CT – leggyakoribb típus
  - Cone-beam CT, ennek speciális változata a Tomoszintézis
- Orvosi képdiagnosztika alapvető eszköze:
  - Mivel a röntgen sugárzás ionizál, illetve maga a vizsgálat itthon mércével drága, ezért csak indokolt esetben végzik

2D Radon transzformáció:

- Radon transzformáció (2D szelet 1D projekciók):
  - Input: 2D Descartes - koordinátarendszerbeli kép
  - Output: sinogram – 2D polár-koordinátarendszerbeli kép



Sinogram:



Radon transzformáció – Fourier vetítősík tétel

- Radon transzformáció (2D szelet 1D projekciók):
  - Vetítősugarak merőlegesek az x tengellyel θ szöget bezáró egyenesre: $t = x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta)$
  - Vetítősugarak mentén integráljuk a szelet elemeit:
    $$P_\theta(t) = \iint_{x,y} f(x,y) \cdot \delta\big(x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta) - t\big) dxdy$$
  - Legyen $S_\theta(\rho) = FT_\rho\{P_\theta(t)\} = \int P_\theta(t) \cdot \exp(-2\pi j \cdot t\rho) dt$
- Fourier vetítősík tétel származtatása:

$$S_\theta(\rho) = \iiint_{x,y,t} f(x,y) \cdot \delta\big(x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta) - t\big) \cdot \exp(-2\pi j \cdot \rho t) dtdydx$$

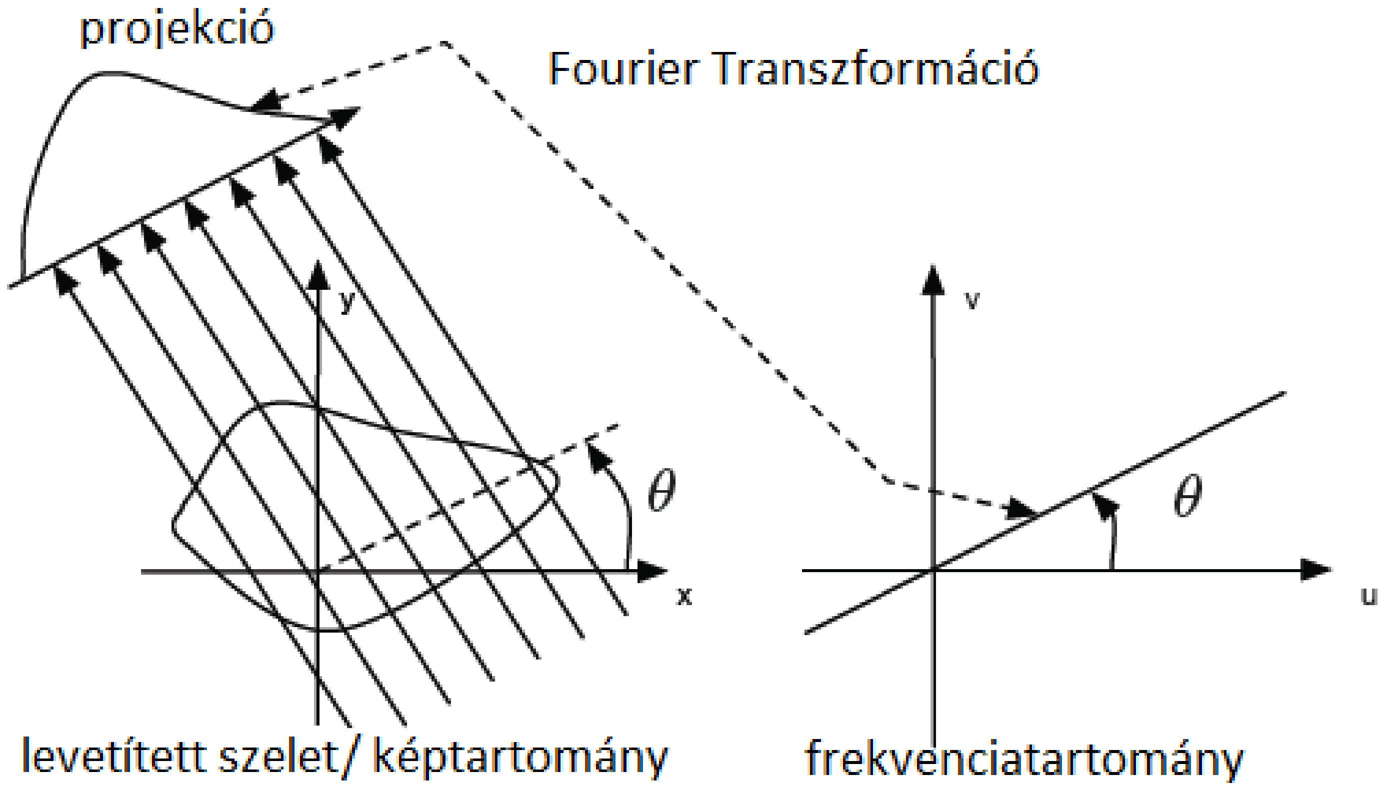
$$S_\theta(\rho) = \iint_{x,y} f(x,y) \cdot \exp\Big(-2\pi j \cdot \rho \cdot \big(x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta)\big)\Big) dydx$$

Fourier vetítősík tétel

– Lényegében f spektrumának egy szakaszát kaptuk meg:

$$S_\theta(\rho) = F\left(\rho \cdot \cos(\theta), \rho \cdot \sin(\theta)\right)$$

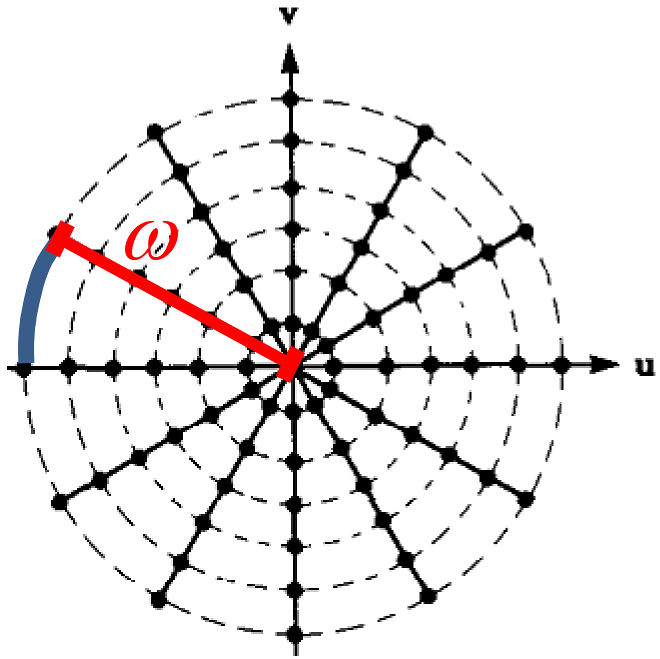
- Vizuális interpretáció:



Rekonstrukció – FBP alapötlete

- Rekonstrukció célja: Radon Transzf. invertálása
- Fourier vetítősík tétel értelmében a vizsgált szelet spektrumainak bizonyos részeit ismerjük:
  - Az ismert részeket „illesszük” egy üres spektrumba
  - Polár koordinátás frekvencia sugarának függvényében a spektrum mintavételi helyeinek eltérő a távolsága:

    $K(\omega) = |\omega| \cdot \Delta\theta$
  - Korrekció: spektrumba illesztés előtt $|\omega|$ -val súlyozzunk frekvenciatérben (ez az ún. rámpaszűrés).



Szűrt visszavetítés (FBP) származtatása

- FT inverze: $f(x,y) = \iint_{u,v} F(u,v) \cdot \exp\left(j2\pi(ux+vy)\right) dv du$
- Fourier vetítősík miatt a spektrumot polárkoordináta-rendszerben ismerjük: $u = \omega \cdot \cos(\theta);\; v = \omega \cdot \sin(\theta)$

$$f(x,y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega,\theta) \cdot \exp\left(j2\pi \cdot \omega\left(x\cos(\theta) + y\sin(\theta)\right)\right) \cdot J\, d\omega\, d\theta$$

  – $J = \begin{vmatrix} \partial u/\partial\omega & \partial u/\partial\theta \\ \partial v/\partial\omega & \partial v/\partial\theta \end{vmatrix} = \ldots = \omega$, $du\, dv = J\, d\omega\, d\theta$

  – Továbbiakban $k := x\cos(\theta) + y\sin(\theta)$

- $f(x,y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega,\theta) \cdot \exp\left(j2\pi \cdot \omega k\right) \cdot \omega\, d\omega\, d\theta$

Szűrt visszavetítés (FBP) származtatása

- Vágjuk szét a külső integrált:

$$f(x,y)=\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}F(\omega,\theta)\cdot \mathrm{e}^{j2\pi\cdot\omega k}\ \omega\, d\omega\, d\theta+\int_{\pi}^{2\pi}\int_0^{\infty}F(\omega,\theta)\cdot \mathrm{e}^{j2\pi\cdot\omega k}\ \omega\, d\omega\, d\theta$$

  - $f(\cdot,\theta)$ a sinogram egy oszlopa, melynek definíciójából (Radon transzf.) következik, hogy $F(\omega,\theta)=F(-\omega,\theta+\pi)$, hiszen:

$$F(\omega,\theta+\pi)=\int_{t=-\infty}^{\infty}P_{\theta+\pi}(t)\cdot\exp(-j2\pi\omega t)\,dt=\int_{t=-\infty}^{\infty}P_{\theta}(-t)\cdot\exp(-j2\pi\omega t)\,dt$$

$$F(\omega,\theta+\pi)=\int_{l=\infty}^{-\infty}P_{\theta}(l)\cdot\exp\left(-j2\pi(-\omega)l\right)\frac{\partial t}{\partial l}dl=F(-\omega,\theta) \qquad l=-t$$

  - Felhasználtuk, hogy $k=x\cos(\theta)+y\sin(\theta)$, illetve $\cos(\theta+\pi)=-\cos(\theta)$ és $\sin(\theta+\pi)=-\sin(\theta)$

Szűrt visszavetítés (FBP) származtatása

- Vágjuk szét a külső integrált:

$$P_\theta(l) \triangleq f(l,\theta)$$

$$\int^{\pi}\int^{\infty} \ldots(\omega,\theta)\cdot \mathrm{e}^{j2\pi\cdot\omega k}\,\omega\, d\omega\, d\theta + \int^{2\pi}\int^{\infty} F(\omega,\theta)\cdot \mathrm{e}^{j2\pi\cdot\omega k}\,\omega\, d\omega\, d\theta$$

$$S_\theta(\omega) \triangleq F(\omega,\theta)$$

  – $f(\cdot,\theta)$ a sinogram egy osz… ciójából (Radon transzf.) következik, hogy $F(\omega,\theta) = F(-\omega,\theta+\pi)$, hiszen:

$$\partial t/\partial l = -1$$

$$F(\omega,\theta+\pi) = \int_{t=-\infty}^{\infty} P_{\theta+\pi}(t)\cdot \exp(-j2\pi\omega t)\,dt = \int_{t=\ldots}^{\infty} \ldots \mathrm{xp}(-j2\pi\omega t)\,dt$$

$$F(\omega,\theta+\pi) = \int_{l=\infty}^{-\infty} P_\theta(l)\cdot \exp(-j2\pi(-\omega)l)\frac{\partial t}{\partial l}\,dl = F(-\omega,\theta) \qquad l = -t$$

  – Felhasználtuk, hogy $k = x\cos(\theta) + y\sin(\theta)$, illetve $\cos(\theta+\pi) = -\cos(\theta)$ és $\sin(\theta+\pi) = -\sin(\theta)$

Szűrt visszavetítés (FBP) származtatása

- Alakítsuk át egyszerű behelyettesítésekkel a második integrált:

$$\int_{\pi}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} F(\omega,\theta)\cdot \mathrm{e}^{j2\pi\cdot\omega k}\,\omega\, d\omega\, d\theta\Bigg|_{\theta=-\Theta} = \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\infty} F(-\omega,\Theta)\cdot \mathrm{e}^{-j2\pi\cdot\omega k}\,\omega\, d\omega\, d\Theta$$

$$\boxed{k = \cos(\theta)\,x + \sin(\theta)\,y}$$

$$\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\infty} F(-\omega,\Theta)\cdot \mathrm{e}^{-j2\pi\cdot\omega k}\,\omega\, d\omega\, d\Theta\Bigg|_{\omega=-\Omega} = \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{-\infty} F(\Omega,\Theta)\cdot \mathrm{e}^{j2\pi\cdot\Omega k}\,(-\Omega)\cdot(-1)\, d\Omega\, d\Theta$$

$$\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{-\infty} F(\Omega,\Theta)\cdot \mathrm{e}^{j2\pi\cdot\Omega k}\,(-\Omega)\cdot(-1)\, d\Omega\, d\Theta = \int_{0}^{\pi}\int_{-\infty}^{0} F(\Omega,\Theta)\cdot \mathrm{e}^{j2\pi\cdot\Omega k}\,(-\Omega)\, d\Omega\, d\Theta$$

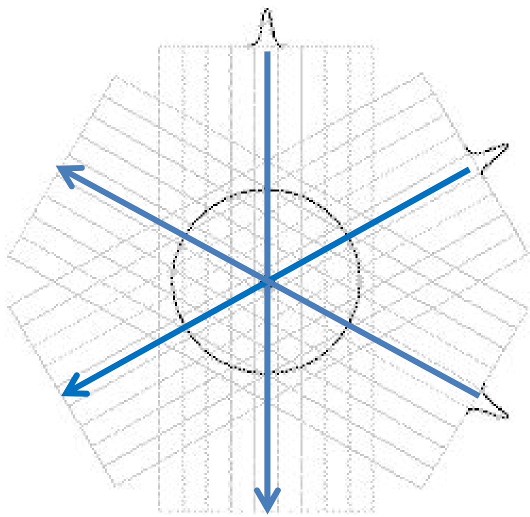
Szűrt visszavetítés (FBP) származtatása

- Lássuk mit sikerült kifőznünk:

$$f(x,y)=\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}F(\omega,\theta)\cdot \mathrm{e}^{j2\pi\cdot\omega k}\;\omega\,d\omega\,d\theta+\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{0}F(\omega,\theta)\cdot \mathrm{e}^{j2\pi\cdot\omega k}\,(-\omega)\,d\omega\,d\theta$$

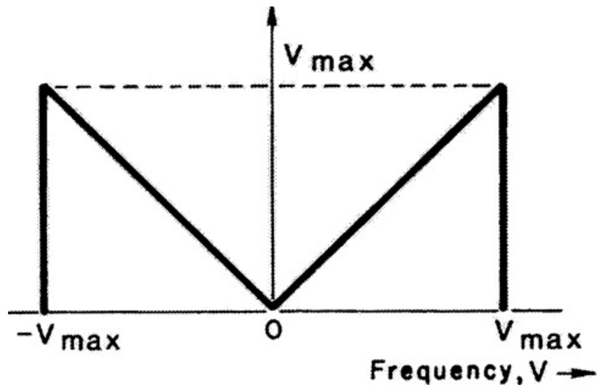
$$f(x,y)=\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega,\theta)\cdot|\omega|\cdot\exp(j2\pi k\omega)\,d\omega\,d\theta=\int_0^{\pi}Q_\theta(k)\,d\theta:$$

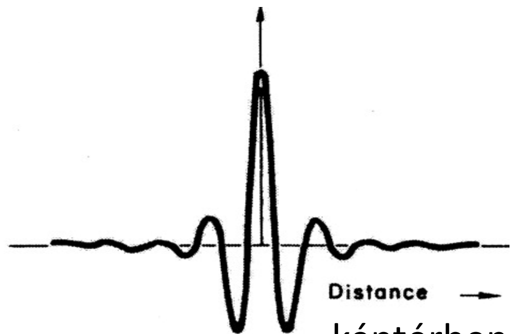
  - $Q_\theta(k)=\int_{\omega=-\infty}^{\infty}S_\theta(\omega)\cdot|\omega|\cdot\exp(j2\pi k\omega)\,d\omega$ ekvivalens a projekciók (sinogram oszlopai) rámpa szűrővel történő szűrésével
  - $f(x,y)=\int_0^{\pi}Q_\theta(\mathrm{x}\cos(\theta)+y\sin(\theta))\,d\theta:$ az ú.n. visszavetítés



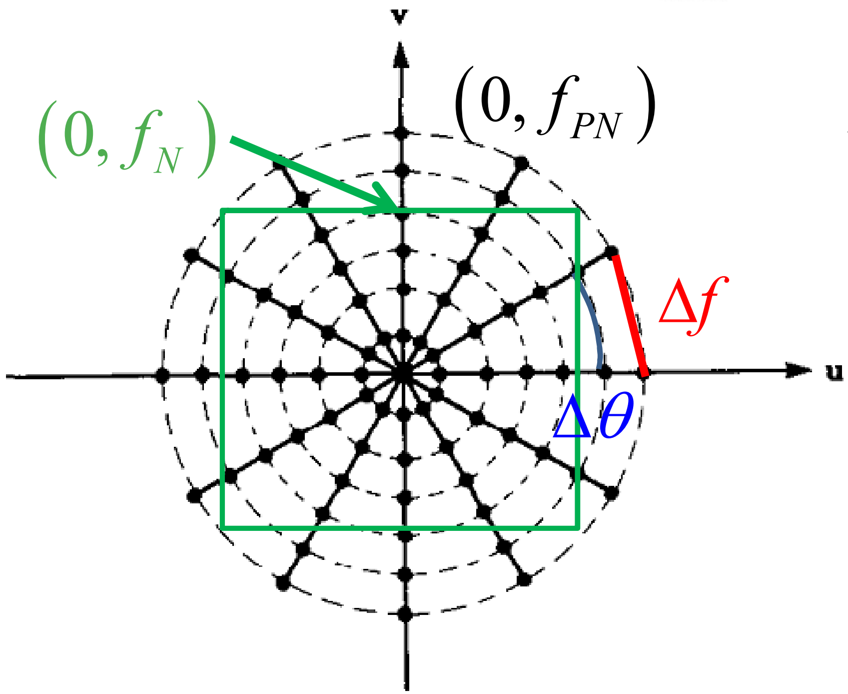
Szűrt visszavetítés értékelése

- Rámpaszűrő:





képtérben



„Ideális" rekonstrukció:

- 180°-ból rögzített projekciók
- $f_{PN} = 1/2\Delta t \qquad \Delta\theta = \pi/M$
- $\Delta f_{rad} = 2 f_{PN}/N = 1/(\Delta t \cdot N)$
- $\Delta f_{az} = f_{PN} \cdot \Delta\theta \approx \Delta f_{rad}$

  $M/N \approx \pi/2$

Szűrt visszavetítés implementációja

- Rámpaszűrés frekvenciatérben történik:
  - ~20-as szűrő esetén már a frekvenciatartománybeli szűrés a gyorsabb (ennek főleg régebbben volt jelentősége).
- Visszavetítés kép / időtartományban:
  - Frekvenciatartományban interpolálnunk kellene a spektrum ismert egyeneseiből a DFT által mintavett frekvenciák értékét (mely messze nem triviális).
- Szűrések, projekciók visszavetítése egyenként (sugaranként) jól párhuzamosítható

Szűrt visszavetítés zajérzékenysége

- Detektorok DQE-je a frekvencia függvényében monoton csökken zajos magas frekvencia (PET esetén a röntgenes esetnél jóval rosszabb).
- Ráadásul magas frekvencián „távolabb vannak” a spektrum ismert értékei (ezért kell a rámpa szűrés is).
- Legegyszerűbb megoldás az alul-áteresztés:
  - Az alul-áteresztés és a visszavetítés sorrendje tetszőleges
  - Erőforrásigény miatt érdemes a rámpa szűrőt megszűrni:

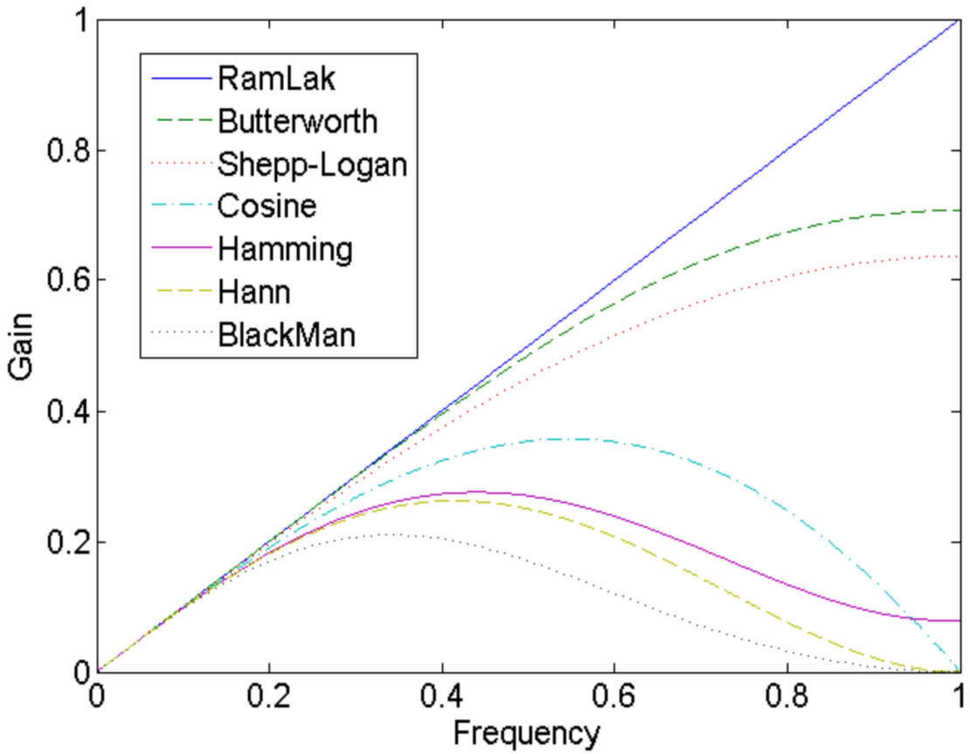
$$\left(P_\theta * h_{Ramp}\right) * h_{Lowpass} = P_\theta * \left(h_{Ramp} * h_{Lowpass}\right)$$

Klasszikus inverz problémák mely algoritmusaira hasonlít az eljárás?

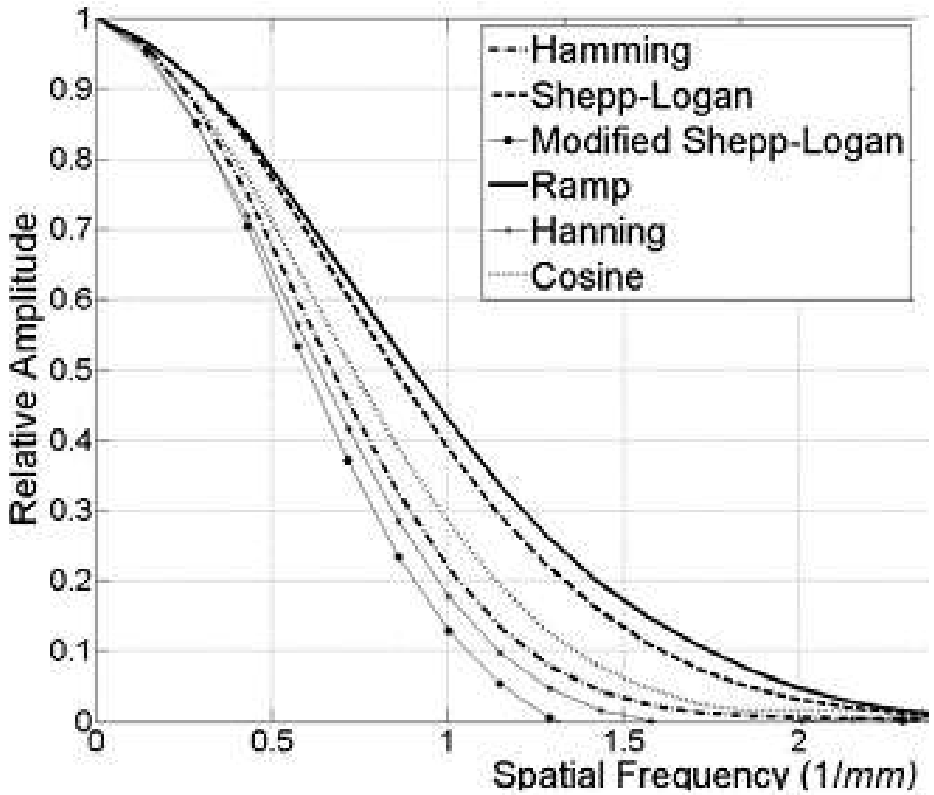
Szűrt visszavetítés zajérzékenysége

- Rámpa szűrő módosítottjaival szűrünk:

Szűrők átviteli függvényének abszolút értéke:



Egy CAT MTF-je a szűrők függvényében (példa):

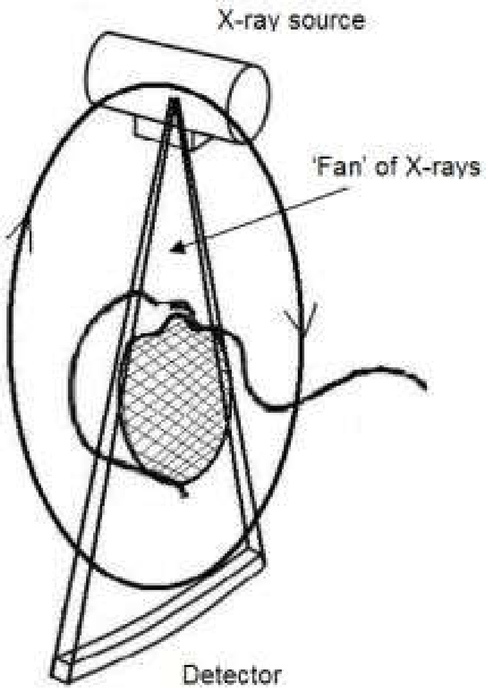


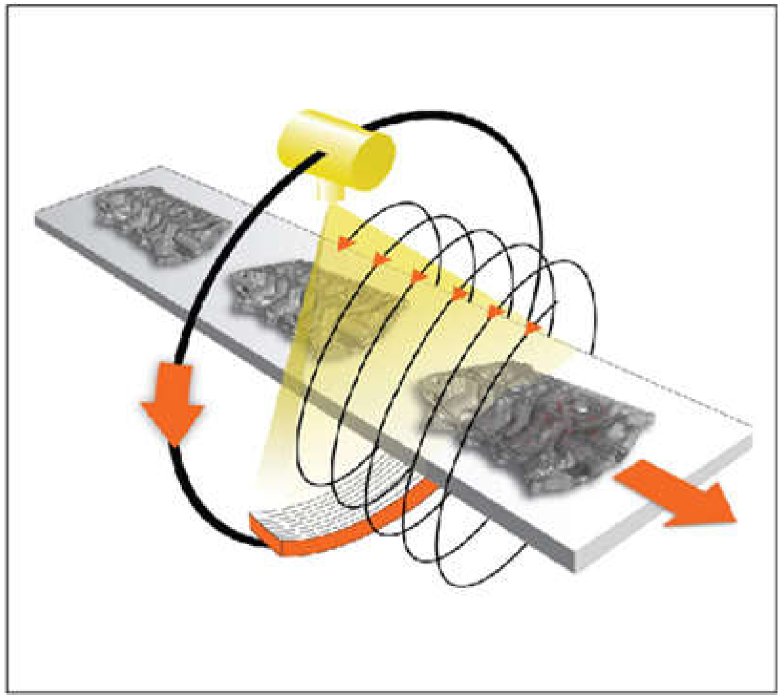
Szűrt visszavetítés működése

- Demo videó az FBP rekonstrukciójáról: https://www.youtube.com/watch?v=ddZeLNh9aac
  - A szinogramban oszlop-folytonosan helyezkednek az 1D projekciók.
- A videón jól követhető a limitált szögtartomány által okozott artifakt:
  - Magas frekvenciás komponensek (pl. fantom széle) kis szögtartományból is jól rekonstruálódik.
  - Alacsony frekvenciás komponensek viszont erősen szétmosódottak (jellegzetesen „V” alakban) .
  - Vetítősugarakkal párhuzamos élek rekonstruálhatóak jól.

FBP Fan-beam geometria esetén

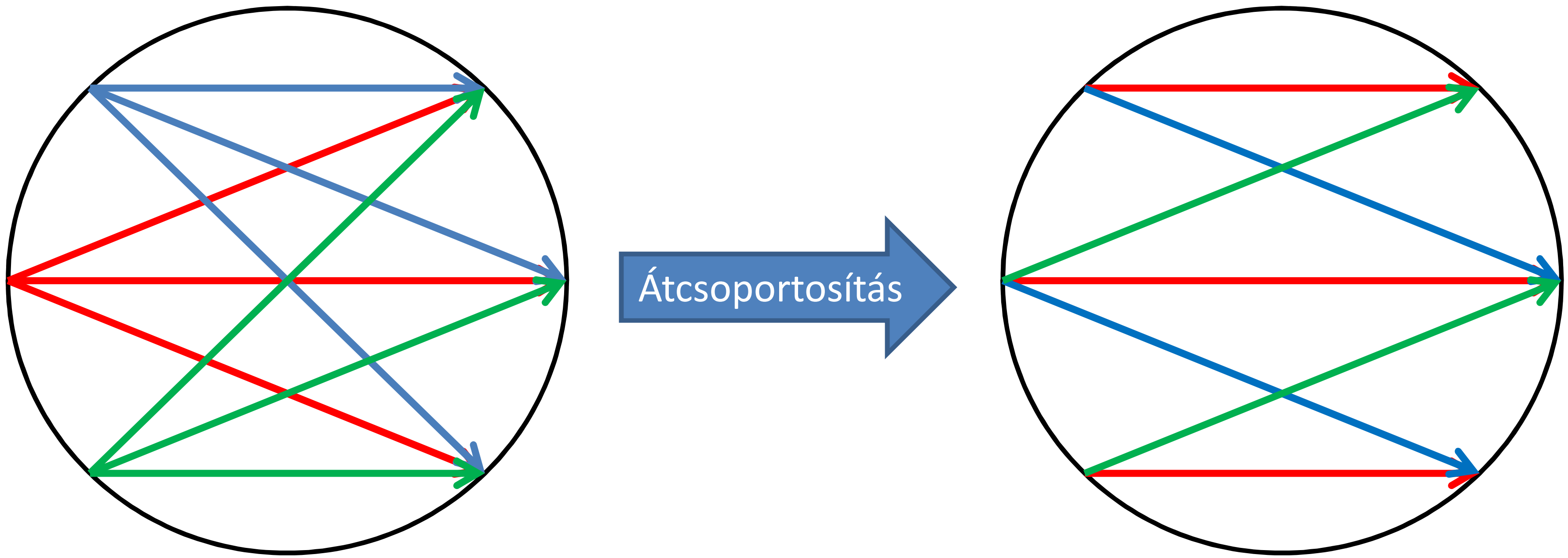
- Eddig párhuzamosak voltak a vetítősugarak:
  - Gyakorlatban egy ilyen CT nem igazán realizálható
- Fan-beam vetítősugaras helikális CT (ú.n. CAT):





FBP Fan-beam geometria esetén

- Alapötlet: a mért intenzitások átcsoportosítása párhuzamos vetítősugár alapú geometria szerint:
  - Lényegében új, párhuzamos vetítősugár szerinti virtuális projekciókat állítunk elő a fan-beam projekciókból.

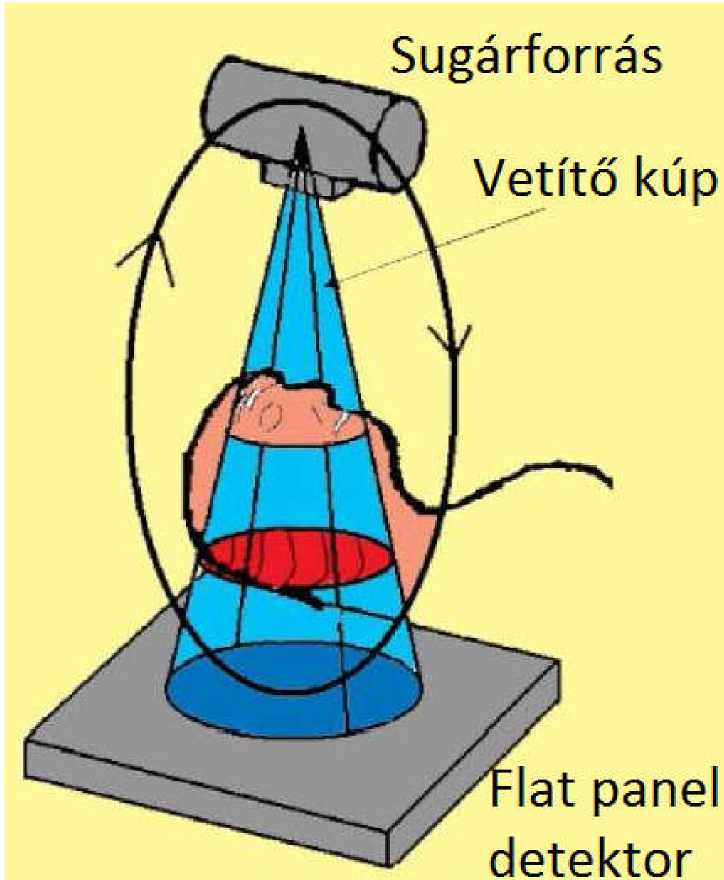


Fan-beam projekciók

Virtuális párhuzamos projekciók

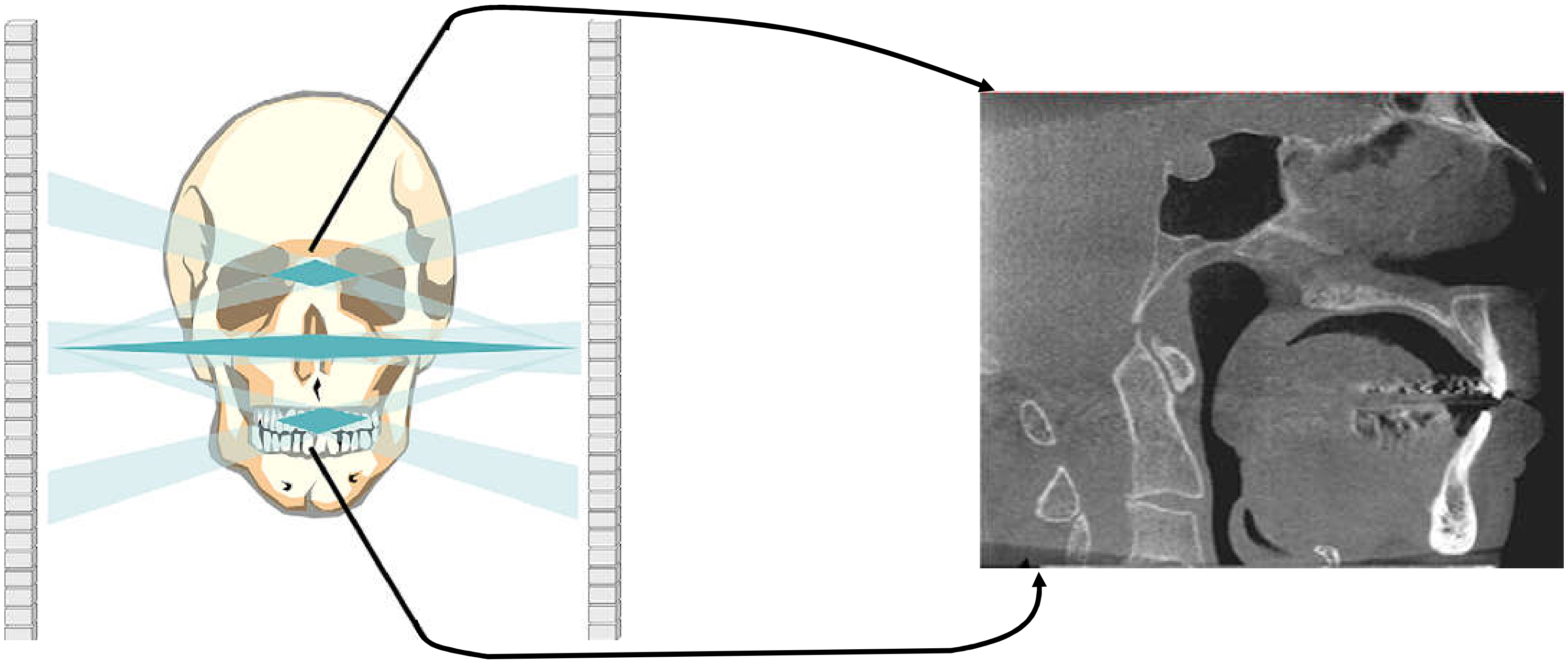
FBP Cone-beam geometria esetén

- CBCT rendszerek - Cone-Beam geometria:
  - Flat-panel detektort használ, a sugarak kúpszerűen (innen az elnevezés) vetülnek a detektorra:



Cone-beam geometria szerinti vetületek FBP rekonstukciója - FDK

- Feldkamp, Davis, Kress CBCT-s algoritmusa:
  - Klasszikus szűrt visszavetítéssel rekonstruál
  - Közelítően helyes algoritmus – ideális esetben sem tökéletes
- Ideális rekonstrukció esetén is Cone-beam artifakt



Projekciók keletkezésének általános 3D modellje

- Általános modellje a (röntgen) képalkotásnak:

$$g(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\gamma=0}^{\infty} h(x,y;\alpha,\beta,\gamma)\cdot f(\alpha,\beta,\gamma)\,d\gamma\,d\alpha\,d\beta+\eta(x,y)$$

  - Mérésekkel rendelkezünk: $g(x,y)$
  - Teoretikusan ismerjük a rendszer PSF-jét: Beer- Lambert törvény szerint, ami nem modellez sem szórt, sem a foto-elektromos kölcsönhatás során emittált fotonokat.
  - Rekonstrukció célja $f(\alpha,\beta,\gamma)$ meghatározása
  - Érdemes megjegyezni, hogy a Beer-Lambert törvénynél ez egy általánosabb modell, de monokróm sugarakat feltételez, gyakorlatban nem tudunk vele dolgozni túl nagy komplexitás.

Projekciók keletkezésének általános 3D modellje

- Megfigyelési modell diszkretizáltja $\mathbf{g} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{f} + \boldsymbol{\eta}$:
  - $\mathbf{g}$ tartalmazza az összes vetítősugár fotodiódákon mért intenzitások negatív logaritmáltját (tehát minden projekció minden pixeléhez tartozó intenzitását tartalmazó vektor).
  - $\mathbf{H}$ a vetítő mátrix, $\mathbf{H}_{(i,j)}$: i-edik pixelbe csapódó fotonok a j-edik voxeltől mennyire csillapodnak (ez anyag független).
  - $\boldsymbol{\eta}$ az additív zaj – nem modellezett hatások determinálják
- Lényegében ez is inverz probléma:
  - Ugyanúgy jelentős a zajérzékenység, mint 2D esetben
  - Ellentétben nagyságrendekkel több változó (akár 1E7)

Projekciók keletkezésének általános 3D modellje

Ez így túl általános, de jobban modellezi a valóságot. Gyakorlatban viszont $\mathbf{H}_{(i,j)}$ az i-edik pixelbe csapódó fotonok által a j-edik voxelben megtett útnak a hossza (csak primer sugárzás) / kúpnak a térfogata. Ezzel a megkötéssel $\mathbf{H}$ egy ritka, ú.n. sávmátrixá válik.

-
  - $\mathbf{H}$ a vetítő mátrix, $\mathbf{H}_{(i,j)}$: i-edik pixelbe csapódó fotonok a j-edik voxelben lévő anyagtól mennyire csillapodnak.
  - $\boldsymbol{\eta}$ az additív zaj – nem modellezett hatások determinálják
- Lényegében ez is inverz probléma:
  - Ugyanúgy jelentős a zajérzékenység, mint 2D esetben
  - Ellentétben nagyságrendekkel több változó (akár 1E7)

Algebrai rekonstrukciós technika (Gordon ART)

- Kaczmarz iterációval történik $\mathbf{g} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}$ megoldása:
  - Rekonstrukciónál a $\mathbf{f} = \mathbf{H}^{\dagger} \cdot \mathbf{g}$ megoldás lenne az „ideális”, de:
    - Túl nagy $\mathbf{H}$ mérete a ma elérhető számítási teljesítményhez
    - Ráadásul $\mathbf{H}$ nagyon ritka, melyet általános algebrai módszerek nem képesek hatékonyan kihasználni
  - Eljárás alapötlete: $\mathbf{g} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}$ lényegében N db (vetítősugarak száma), M dimenziós hipersík egyenlete
    - Ha létezik egzakt inverz, akkor a hipersíkok az M dimenziós tér ugyanazon pontjában metszik egymást.
    - Ha túlhatározott, akkor nincs metszéspont, ha alulhatározott akkor az M dimenziós teret egy résztartományra szűkítik.

Algebrai rekonstrukciós technika (Gordon ART)

– Az eljárás k+1. iterációban merőlegesen vetíti az aktuális $\mathbf{f}$ -et $\mathbf{g}_{(i)} = \mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{f}$ hipersíkra ($i \equiv k(\mathrm{mod}\,N)$):

- $\mathbf{f}$ a $\mathbf{H}_{(i,:)}$-re merőleges azon síkon helyezkedik el, mely távolsága az origótól $\mathbf{g}_{(i)} \Big/ \left\|\mathbf{H}_{(i,:)}\right\|_2$
- Tehát $\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} - \alpha \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}{}^T$, a merőleges vetítés után $\mathbf{g}_{(i)} = \mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \left(\mathbf{f}^{(k)} - \alpha \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}{}^T\right)$ teljesül, amiből kifejezve: $\alpha = \left(\mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{g}_{(i)}\right) \Big/ \left(\mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}{}^T\right)$, behelyettesítve:

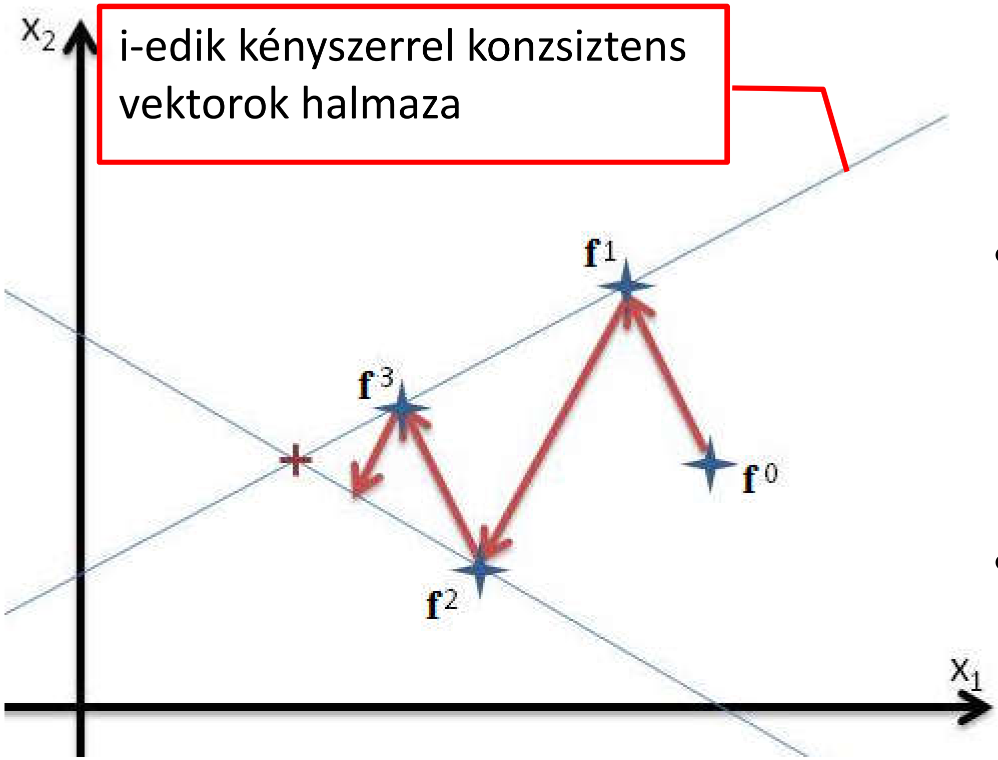
$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} - \left(\mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{g}_{(i)}\right) \cdot \frac{\mathbf{H}_{(i,:)}{}^T}{\mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}{}^T}$$

Algebrai rekonstrukciós technika (Gordon ART)

- $\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \left(\mathbf{g}_{(i)} - \mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)}\right) \dfrac{\mathbf{H}_{(i,:)}{}^{T}}{\mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}{}^{T}}$ interpretációja:
  - $\mathbf{g} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}^{(k)}$ a rögzített projekciók és az aktuális ($\mathbf{f}^{(k)}$) rekonstrukció modell szerinti vetületének a különbsége (vetületi hiba)
  - $\mathbf{H}_{(i,:)}{}^{T} \Big/ \left(\mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}{}^{T}\right)$: a vetületi hibát vetíti vissza
- Eljárás tulajdonságai:
  - Sok, könnyen számolható iteráció, melyek nem párhuzamosíthatóak
  - Konvergál, ha megfigyeléseink konzisztensek, ellentétben limit hurokba szorul, mely belsejében helyezkedik el az $\mathbf{f}^{*} = \mathbf{H}^{\dagger} \cdot \mathbf{g}$.
  - Hátránya, hogy nincs prior, ezért túlilleszkedésre hajlamos (lényegében egy ML becslés Gauss eloszlású likelihood-dal, ha konzisztens)
  - Szükség van egy $\mathbf{f}^{(0)}$-ra: gyakran FBP / BP eredménye

Kaczmarz iteráció példa

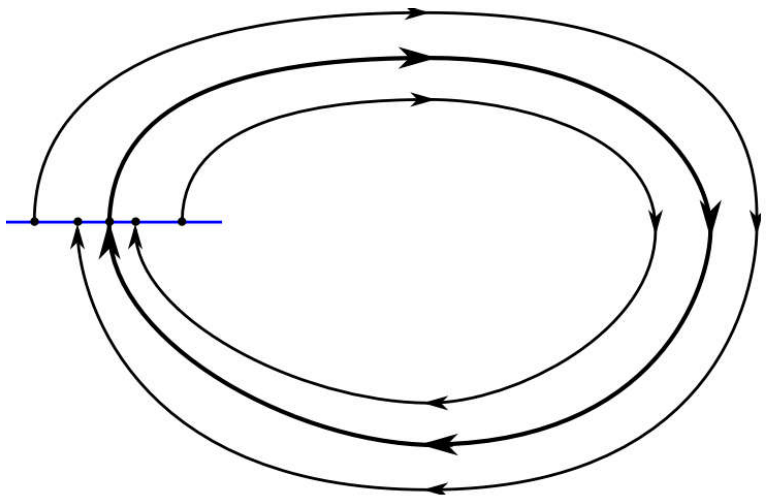
- N=2, M=2 esete:

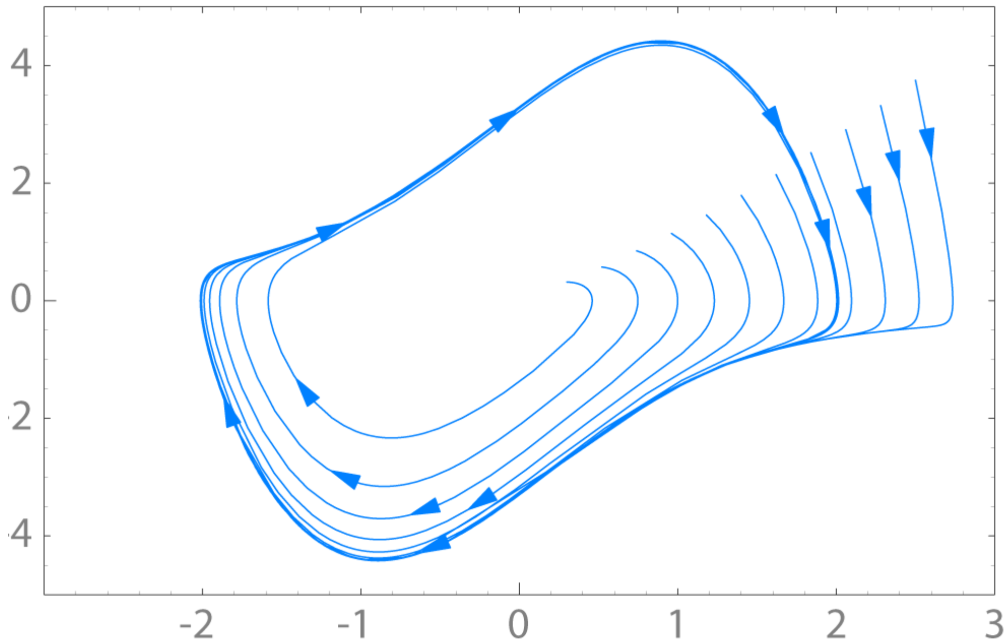


- Ha a két merőleges hipersík egymásra merőleges, akkor két iteráció alatt megvan a metszéspont
- Ha a hipersíkok párhuzamosak, akkor az iteráció nem áll le (limit hurokba kerül)
- Minél nagyobb a két egyenes által bezárt szög, annál gyorsabb a konvergencia.

Limit hurok viselkedés

- Gordon ART inkonzisztens projekciók esetén limit hurokba lép:





Stabil limit hurkok viselkedés: a rendszer állapotváltozója hurok trajektóriába ragad

Algebrai rekonstrukciós technika (Simultaneous ART)

- Egyidejű ART (SART):
  - Hibaképzés nem vetítősugaranként, hanem projekciónként:

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \lambda \cdot \sum_{j \in S_i} \left(\mathbf{g}_{(j)} - \mathbf{H}_{(\mathrm{j},:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)} \right) \frac{\mathbf{H}_{(\mathrm{j},:)}{}^{T}}{\mathbf{H}_{(\mathrm{j},:)} \cdot \mathbf{H}_{(\mathrm{j},:)}{}^{T}}$$

    - S_i: i-edik projekció pixeleit előállító vetítősugarak halmaza
  - Tetszőleges $\mathbf{f}^{(0)}$ esetén is konvergál egy LS becslőhöz:
    - Ha több LS becslő van, akkor az $\mathbf{f}^{(0)}$-hoz L2 szerinti legközelebbihez
  - Jól párhuzamosítható:
    - Azonos projekcióhoz tartozó vetítősugarak menti levetítés és visszavetítés egymástól független
  - Zajra túlilleszkedés tulajdonsága változatlanul megmaradt
    - Ez az eljárás is ekvivalens egy ML becsléssel

Algebrai rekonstrukciós technika
(Simultaneous Iterative Reconstructive Technique)

- Egyidejű Iteratív Rekonstrukciós eljárás:
  - Összes projekció, összes pixele szerint egyszerre képez hibát:

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \lambda \cdot \sum_{j} \left(\mathbf{g}_{(j)} - \mathbf{H}_{(\mathrm{j},:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)} \right) \frac{\mathbf{H}_{(\mathrm{j},:)}{}^{T}}{\mathbf{H}_{(\mathrm{j},:)} \cdot \mathbf{H}_{(\mathrm{j},:)}{}^{T}}$$

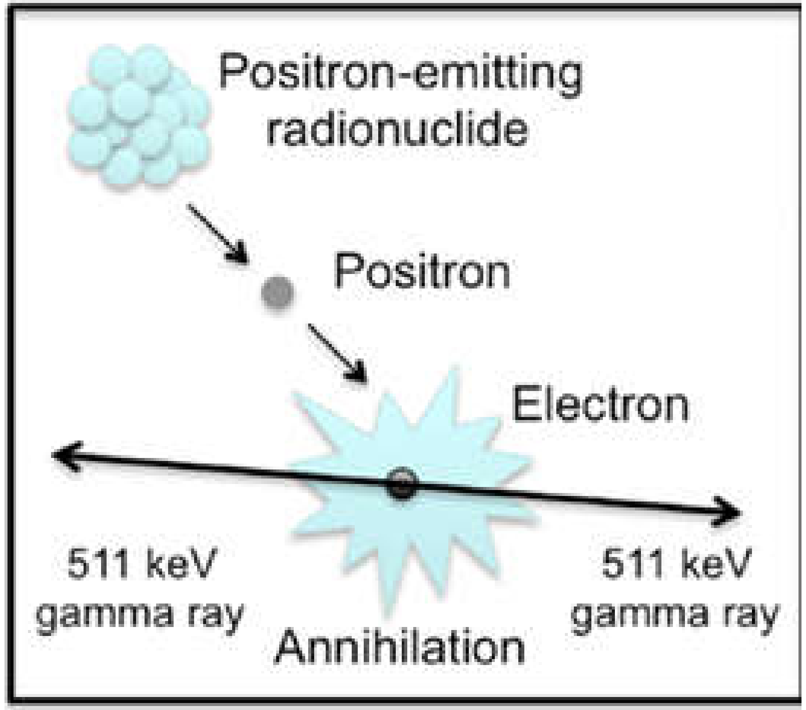
  - Hasonló konvergencia tulajdonságok, mint az SART-nél:
    - Pontosan ugyanazon becsléshez konvergál
  - Jól párhuzamosítható, de:
    - Egyszerre csak egy projekció le / visszavetítése nem módosítja többször u.a. voxelt (egyébként versenyhelyzet).
    - Gyakorlatban több számolás szükséges a konvergenciához, mint a másik két ART-nél
  - Létezik olyan változat, mely kezeli a polikróm energia spektrum miatt kialakuló sugárkeményedés artifaktumot.

Algebrai rekonstrukciós technika (Multiplikatív ART)

- Eddig Additív ART-ket néztünk:
  - Kezdeti iterációk során lassabban haladnak
  - Pozitivitási kényszert nem lehet kikényszeríteni
- Multiplikatív ART-k:
  - Hibát multiplikatív módon származtatják
  - pl.: $\mathbf{f}_{(i)}^{(k)} = \mathbf{f}_{(i)}^{(k-1)} \cdot \mu \cdot \left(1 - \frac{\mathbf{g}_{(j)}}{\mathbf{H}_{(\mathrm{j},:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)}} \right)^{H_{(\mathrm{j,i})}}$
    - A hibát $1 - \mathbf{g}_{(j)} \big/ \mathbf{H}_{(\mathrm{j},:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)}$ értéke méri
  - Kezdeti iterációk hatékonyabbak, de gyakran divergál, vagy a végén túlságosan lelassul.

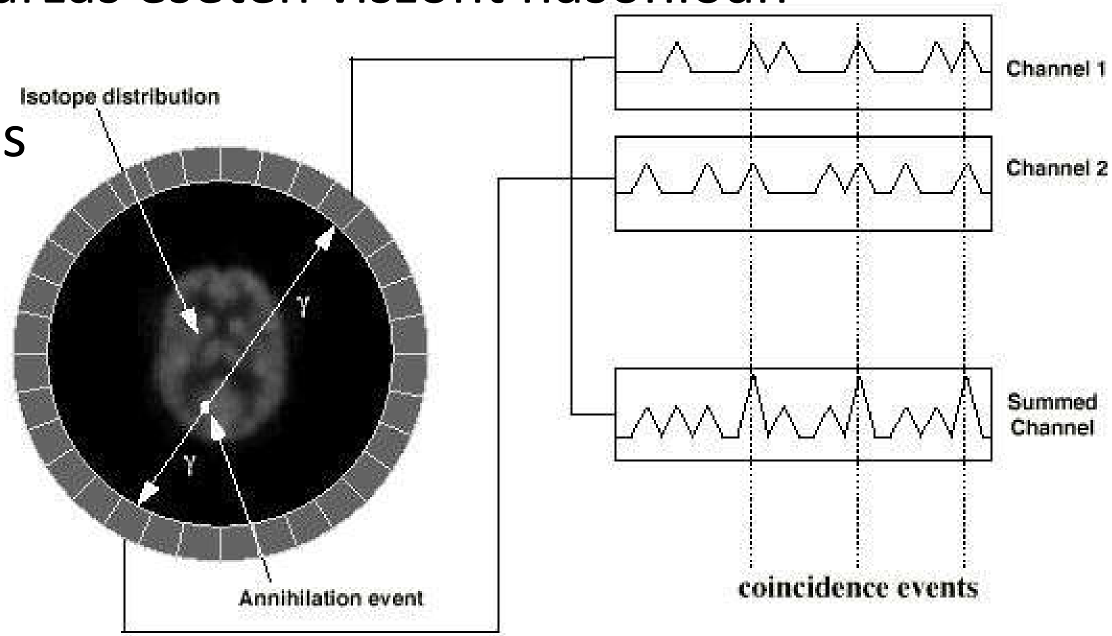
Pozitron emissziós tomográfia alapelve

- Szervezetbe pozitron kibocsátására képes radioaktív izotópot tartalmazó anyagot visznek cukoroldatban.
- Sejtek tápanyagfelvétele miatt nagyobb energiaigényű (pl. gyulladt / daganatos) sejtek helyén több pozitron emisszió.
- Pozitron elektronnal ütközik:
  - Két db, egymással ellentétes irányú γ foton emittálódik.
  - Detektor ezeknek a beütését méri.



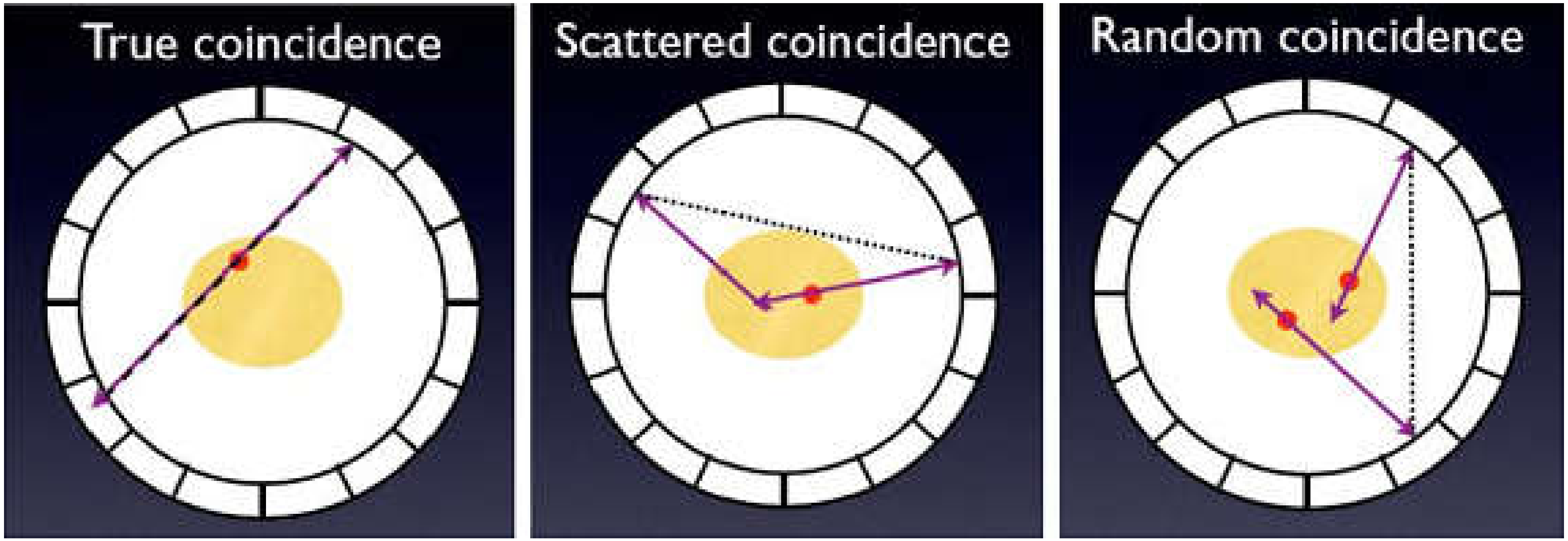
Pozitron emissziós tomográfia rekonstrukciója

- Line of Response : ugyanazon bomló izotóp által kibocsátott γ fotonok beütési helyét összekötő szakasz
  - Érdemes szem előtt tartani, hogy előre nem határozható meg, hogy egy-egy foton milyen irányba fog haladni
  - Elegendően sok kisugárzás esetén viszont hasonlóan viselkedik, mint akármilyen sugárforrás (Poisson folyamat).



Pozitron emissziós tomográfia projekciók zajának értelmezése

- Sokszor téves LOR-t mérünk:
  - Szóródás (rugalmas ütközés) miatt a térfogaton belül megváltoztatja irányát a γ foton.
  - Két, hozzávetőlegesen egy időben történő bomlás is fals látszólagos LOR-t eredményez.



Pozitron emissziós tomográfia rekonstrukciója

- Rekonstrukció során a LOR-ok interpretálhatóak vetítősugaraknak is (intenzitás meg az adott LOR menti gyakorisága a γ beütéseknek).
- Elegendően sok beütés szükséges az eloszlás becsléséhez:
  - Egy scan akár több perc
  - Nagyságrenddel rosszabb SNR, mint CT esetén