

Rekonstrukciós eljárások

Orvosi képdiagnosztika

2019 ősz

ML-EM rekonstrukció (Emissziós tomográfiai értelmezés)

- EM eljárások alapelve:
 - Vannak megfigyelt adataink (méréseink), esetünkben a PET LOR-ok mentén érzékelt gamma beütési szám (y_j)
 - Vannak becsülni kívánt változók (x_m), jelenleg ez a vizsgált szövetbeli annihiláció száma
 - Létezik olyan változó, melyet ha ismernénk leegyszerűsödne az egész feladat: a PET esetén $s_{i,m}$: azon fotonok száma, melyek m . voxelben keletkeztek i . LOR mentén haladnak.
- Megoldás iteratív, iterációnként két lépés:
 - Expectation lépés: $p(m|i)$ frissítése
 - Maximization lépés: x_m ML becslése

ML-EM rekonstrukció (Emissziós tomográfiai értelmezés)

- $$p(y_j) = \frac{E\{y_j\}^{y_j} \cdot \exp(-E\{y_j\})}{y_j!}$$
- $$y_j = \sum_m s_{j,m}$$
- $$p(s|x) = \prod \prod \frac{E\{s_{j,m}\}^{s_{j,m}} \cdot \exp(-E\{s_{j,m}\})}{s_{j,m}!}$$
- $$\ln(p(s|x)) = \sum_i \sum_m s_{j,m} \cdot \ln(A_{i,m} \cdot x_m) - A_{i,m} \cdot x_m - \dots$$

– Cél $\arg \max_x \left\{ \ln(p(s|x)) \right\}$ becslése, hiba: s nem ismert

ML-EM rekonstrukció (Emissziós tomográfia)

- Expectation: $s_{j,m} = A_{j,m} \cdot x_m \cdot y_j / \sum_{m'} A_{j,m'} \cdot x_{m'}$
 - $\ln(p(s|x)) = \sum_i \sum_m s_{i,m} \cdot \ln(A_{i,m} \cdot x_m) - A_{i,m} \cdot x_m - \dots$
 - $\frac{\partial \ln(p(s|x))}{\partial x_j} = \sum_i \sum_m s_{i,m} \cdot \left(1 / (A_{i,m} \cdot x_m)\right) \cdot A_{i,m} \cdot \delta_{j=m} - A_{i,m} \cdot \delta_{j=m}$
 - $\frac{\partial \ln(p(s|x))}{\partial x_j} = \sum_i s_{i,j} / x_j - A_{i,j} = 0$
- $$x_j' = x_j \sum_i \frac{y_i}{\sum_{m'} A_{i,m'} \cdot x_{m'}} \cdot \frac{A_{i,j}}{\sum_{i'} A_{i',j}}$$

ML-EM rekonstrukció (Emissziós tomográfiai értelmezés)

- Módosító összefüggés interpretációja:

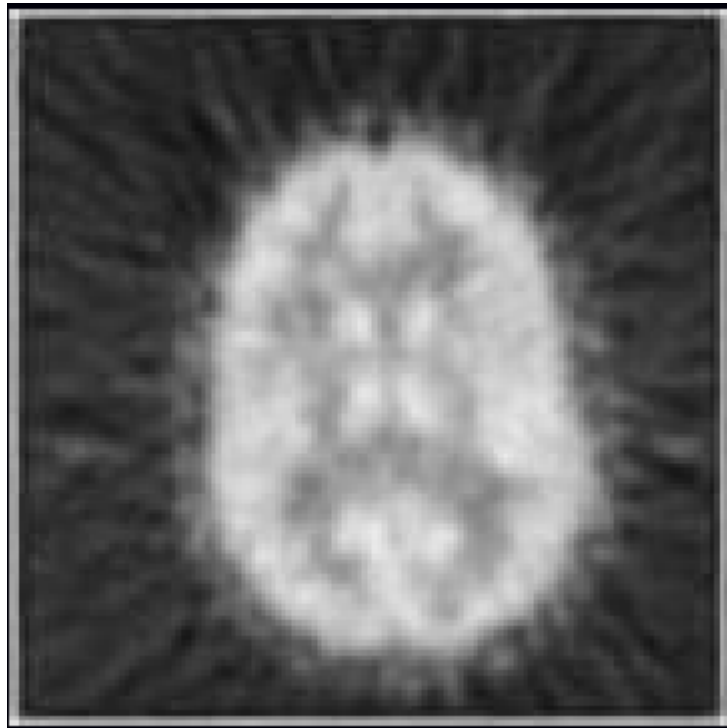
$$x_j' = x_j \sum_i \frac{y_i}{\sum_{m'} A_{i,m'} \cdot x_{m'}} \cdot \frac{A_{i,j}}{\sum_{i'} A_{i',j}}$$

– $\frac{y_i}{\sum_{m'} A_{i,m'} \cdot x_{m'}}$: i. LOR menti beütésszám szerinti multiplikatív hiba

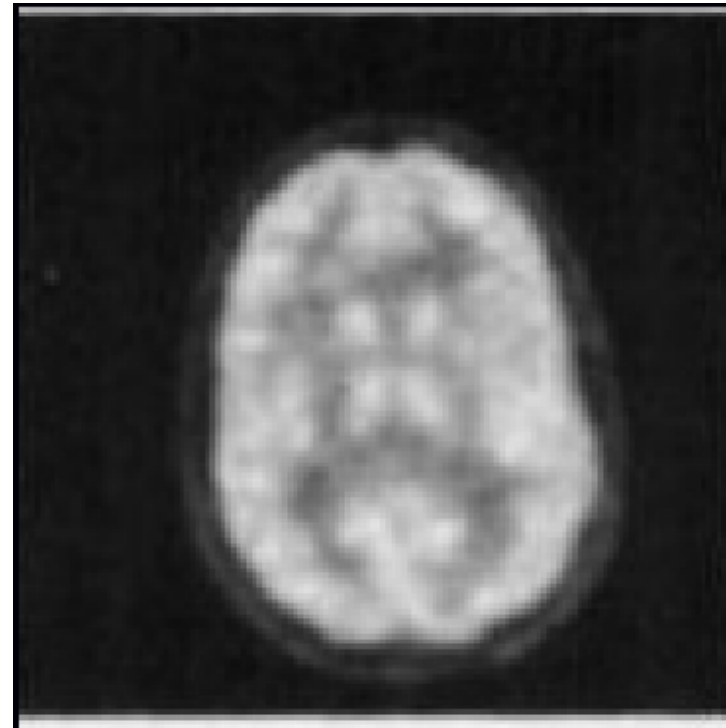
– $\sum_i \frac{y_i}{\sum_{m'} A_{i,m'} \cdot x_{m'}} \cdot \frac{A_{i,j}}{\sum_{i'} A_{i',j}}$: aktuális becslés multip. Hibájának visszavetítése a j. voxelbe

ML-EM és FBP összehasonlítása (Emissziós tomográfia – PET)

- Kis beütésszám miatt alacsony effektív felbontás
- Ráadásul jelentős nem Gauss-i zaj



FBP rekonstrukció



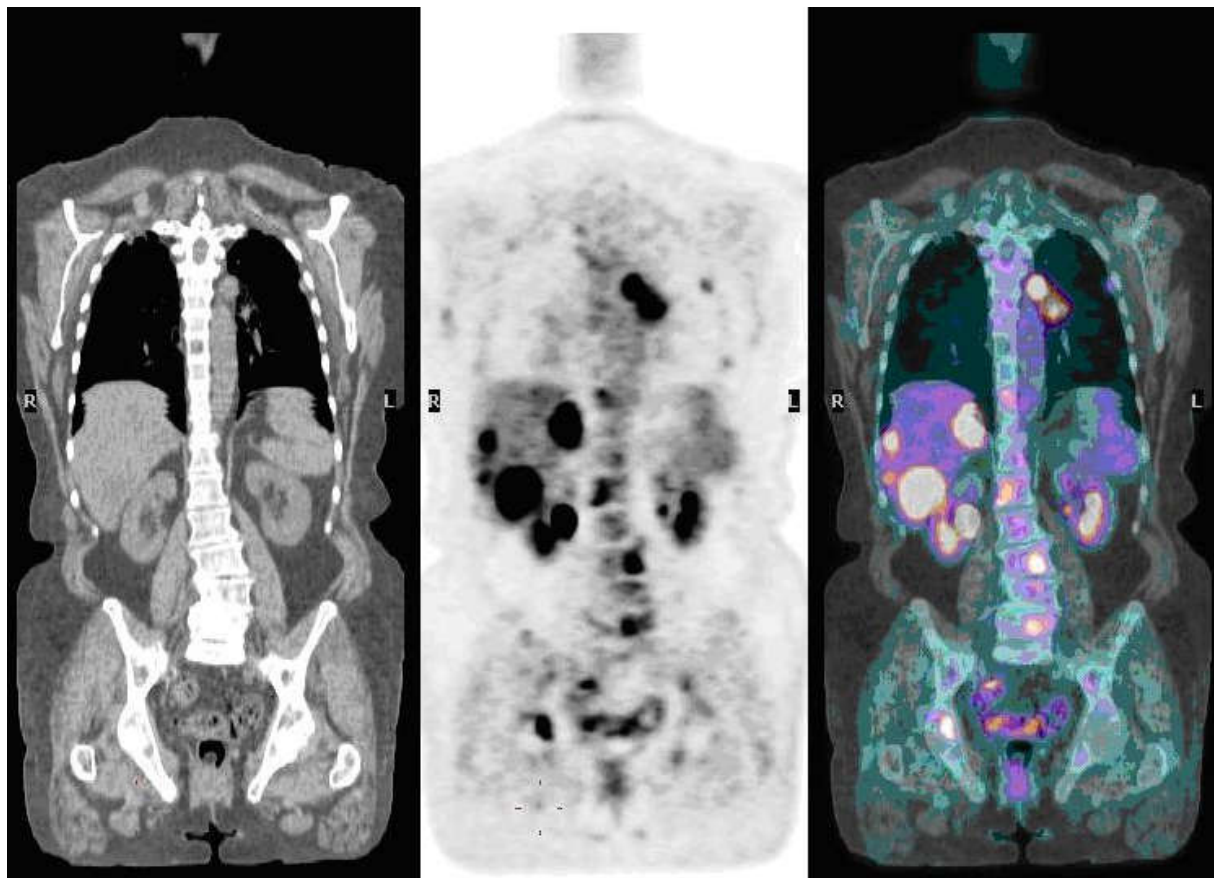
ML-EM rekonstrukció

PET/CT modalitás

- PET funkcionális képet állít elő:
 - Lokalizálhatóak a nagy energiaigényű szövetek
 - Cserébe erősen zajos, rossz minőségű rekonstrukciók
 - Megfelelő zajmodell nélkül lehetetlen értelmezhető rekonstrukciót előállítani vele
- CT rekonstrukciók - morfológiai információ:
 - Kisméretű (korai stádiumú, ezért jó hatásfokkal kezelhető) tumorok nehezen különböztethetőek meg más képletektől.
 - Cserébe kevésbé zajos, felbontását tekintve részletgazdagabb felvételek

PET/CT modalitás

- Rekonstrukció lényegében a PET, illetve a CT rekonstrukciók regisztrálását jelenti



Balról jobbra: CT, PET,
regisztrátum

Modell alapú rekonstrukciós eljárások (Röntgen alapú képalkotás)

- Cél a páciensre érő sugárterhelés minimalizálása:
 - Viszont kisebb dózis zajosabb projekciókat eredményez
 - Limitált szögtartomány problémája jelentősen alulhatározottá teszi a z inverz problémát ($\mathbf{g} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}$)
- MAP becslés alkalmazása szükséges:
 - Emlékeztetőül $\mathbf{f}^* = \arg \max_{\mathbf{f}} \{P\{\mathbf{f}|\mathbf{g}\}\} \propto \arg \max_{\mathbf{f}} \{ (P\{g|f\} \cdot P\{f\}) \}$
 - $-\log(P\{\mathbf{g}|\mathbf{f}\}) = \Phi_{Likelihood}(\mathbf{f})$ bünteti az eltérést
 - $-\log(P\{\mathbf{f}\}) = \Phi_{Prior}(\mathbf{f})$ apriori ismeretek alapján regularizál

Modell alapú rekonstrukciós eljárások (Röntgen alapú képalkotás)

- Likelihood tag megválasztása:
 - PET-nél Poisson modellt alkalmazunk („ritka esemény törvény”)
 - Röntgen esetén negatív logaritmálást követően Gauss modell

$$\Phi_{Likelihood}(\mathbf{f}) = 1/2 \cdot (\mathbf{g} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{f})^T \cdot \mathbf{\Sigma}^{-1} \cdot (\mathbf{g} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{f})$$

- $\mathbf{\Sigma}$ gyakran diagonális, ekkor $\Sigma_{(i,i)} = \sigma_{(i)}^2$:
 - Lényegében az i-edik vetítősugár NSR-jének a négyzete
 - Megfelelő megválasztása nehéz, aktívan kutatott feladat
- Kvadratikus függvény, minimalizációja analitikus

Modell alapú rekonstrukciós eljárások (Röntgen alapú képalkotás)

- Regularizációs tag megválasztása:
 - Logikusnak tűnik a gradiens energiáját büntetni:
$$\Phi_{\text{Prior}}(\mathbf{f}) = \alpha \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{f}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{D}^T \cdot \mathbf{D},$$
 ahol \mathbf{D} a deriválás mtr.-ja
 - Belátható, hogy ekvivalens egy regularizáció nélküli rekonstrukció alul-áteresztettjével.
 - Tehát ez a regularizáció csökkenti az effektív felbontást (mind a rekonstruált szeleteken belül, mind azok között a modalitástól függetlenül).
 - Inkább él őrző regularizációk alkalmazása javallott pl. Teljes Variancia minimalizáció, Huber büntetőfüggvény ...

Compressive Sensing

- Nyquist mintavételnek megfelelő interpoláció:
 - Régebben láttuk a kernelét
 - De ez csak egy interpolációs lehetőség
- Compressive Sensing alapú megközelítés:
 - Nem szükséges Nyquist tétel szerint mintavételezni
 - Két általános megvalósítása létezik:
 - Megszorítjuk a rekonstruálni kívánt jel bázisát (erre lesz példa a Matrix Inverziós Tomoszintézis)
 - Keresünk egy olyan operátort / ábrázolást ami felett ritka a rekonstruálni kívánt jel (pl. TV minimalizációs)

Teljes variancia minimalizáció

- Rekonstrukció, mint optimalizálási feladat:

$$\mathbf{f}^* = \arg \min_{\mathbf{f}} \left\{ \|\mathbf{g} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}\|_2^2 + \lambda \cdot \|\mathbf{D} \cdot \mathbf{f}\|_1 \right\}$$

- \mathbf{D} diszkrét differencia / wavelet transzformációk mátrixia
- Lényegi változás, hogy a regularizáció L2 norma szerinti

- Alternating Direction Methode: $\mathbf{z} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{f}$ változóval

$$\Phi(\mathbf{f}, \mathbf{z}) \triangleq \|\mathbf{g} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}\|_2^2 + \lambda \cdot \|\mathbf{z}\|_1 + \beta \cdot \|\mathbf{z} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{f}\|_2^2$$

- Alternálva minimalizáljuk \mathbf{f} -et és \mathbf{z} -t iterációnként:

$$\mathbf{f}^{(n+1)} = \arg \min_{\mathbf{f}} \left\{ \Phi(\mathbf{f}, \mathbf{z}^{(n)}) \right\} = \arg \min_{\mathbf{f}} \left\{ \|\mathbf{g} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}\|_2^2 + \beta \cdot \|\mathbf{z}^{(n)} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{f}\|_2^2 \right\}$$

$$\mathbf{z}^{(n+1)} = \arg \min_{\mathbf{z}} \left\{ \Phi(\mathbf{f}^{(n+1)}, \mathbf{z}) \right\} = \arg \min_{\mathbf{z}} \left\{ \lambda \cdot \|\mathbf{z}\|_1 + \beta \cdot \|\mathbf{z} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{f}^{(n+1)}\|_2^2 \right\}$$

Teljes variancia minimalizáció

– Az iterációk első lépése kicsit átalakítva:

$$\min_{\mathbf{f}} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{g}^T & \sqrt{\beta} \cdot \mathbf{z}^{(n)T} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T & \sqrt{\beta} \cdot \mathbf{D}^T \end{bmatrix} \cdot \mathbf{f} \right\|_2^2$$

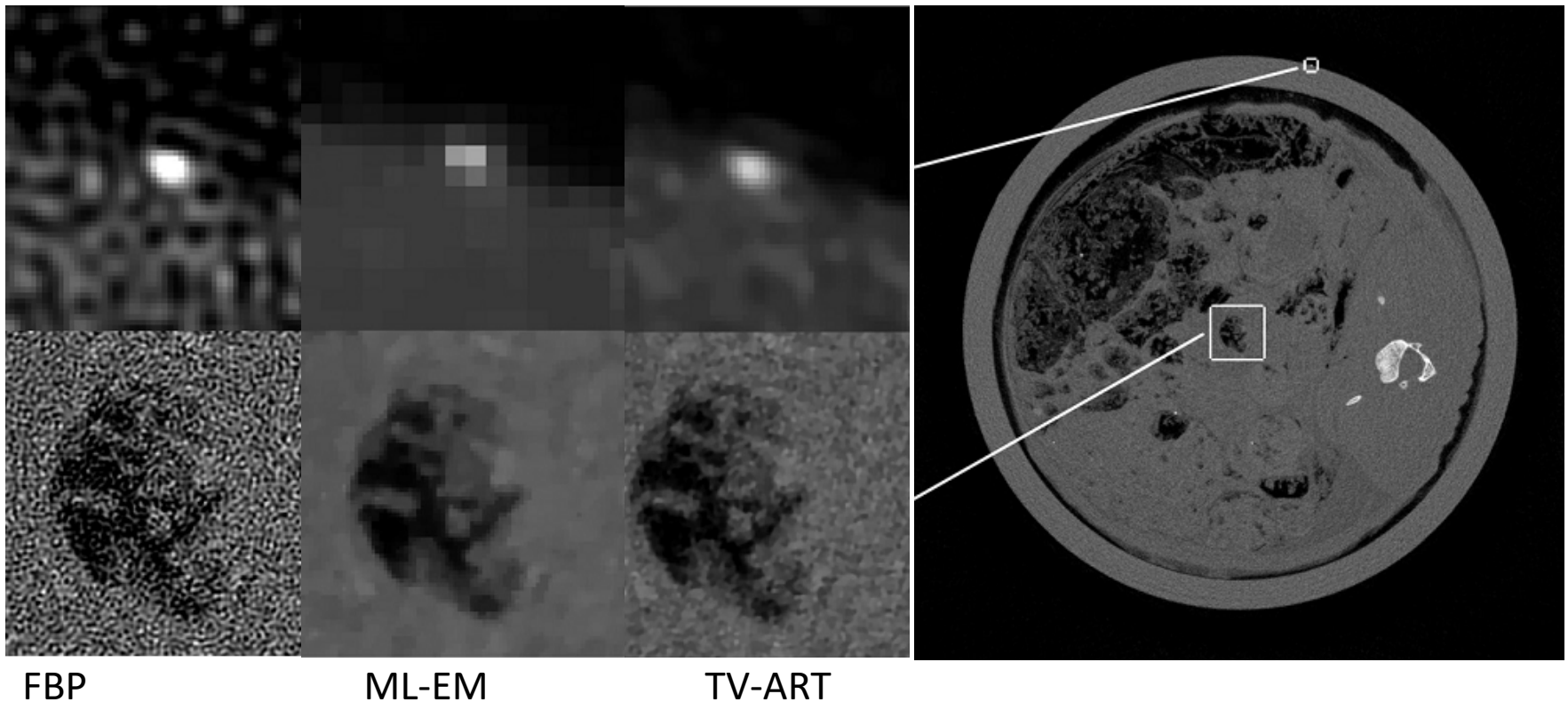
- Formálisan visszajutottunk az alapproblémához, csak most már biztosan túl-határozott (additív ART probléma)
- Minimalizálása erőforrásigény miatt sokszor SART-vel

– Iterációk második lépésének optimuma egy lépésben, analitikusan meghatározható: $\arg \min_{\mathbf{z}} \left\{ \lambda \cdot \|\mathbf{z}\|_1 + \beta \cdot \|\mathbf{z} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{f}^{(n+1)}\|_2^2 \right\}$

- Az úgynevezett lágy küszöb operátor használatával
- A minimalizálás voxelenként történik

Teljes variancia minimalizáció

- Jobb SNR az ML-EM és az FBP-hez képest:
 - FBP-nél kevésbé zajos, de hasonló kontrasztú kép
 - ML-EM-nél jelentősen jobb kontraszt



Huber büntetőfüggvény

- Huber büntetőfüggvénnyel regularizálunk:

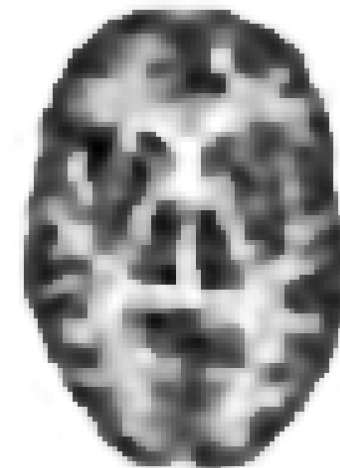
$$\Phi_{\text{Prior}}(\mathbf{f}) = \alpha \cdot L_{\text{Huber}}\{\mathbf{D} \cdot \mathbf{f}\} \quad L_{\text{Huber}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \|\mathbf{x}\|_2^2/2 & \|\mathbf{x}\|_2 \leq \varepsilon \\ \varepsilon \cdot \|\mathbf{x}\|_2 - \varepsilon^2/2 & \|\mathbf{x}\|_2 > \varepsilon \end{cases}$$



Pet fantom



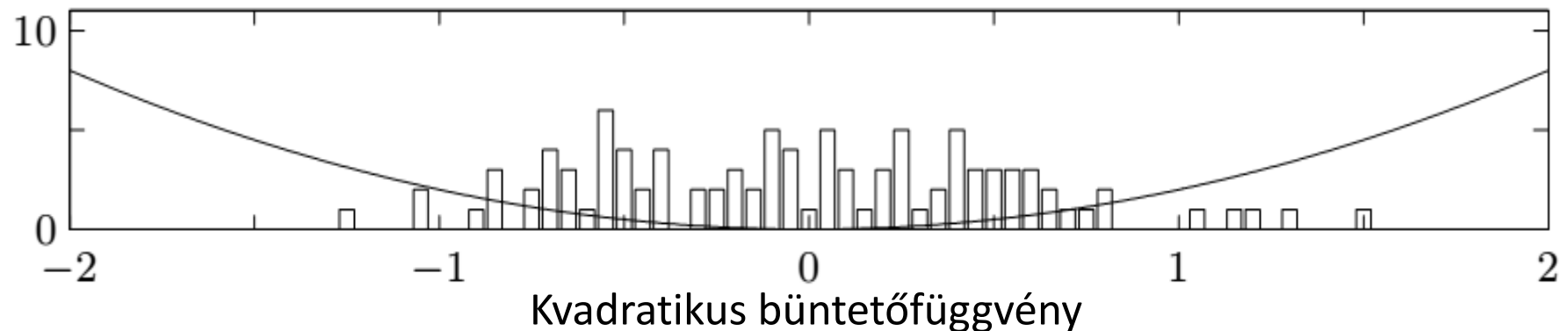
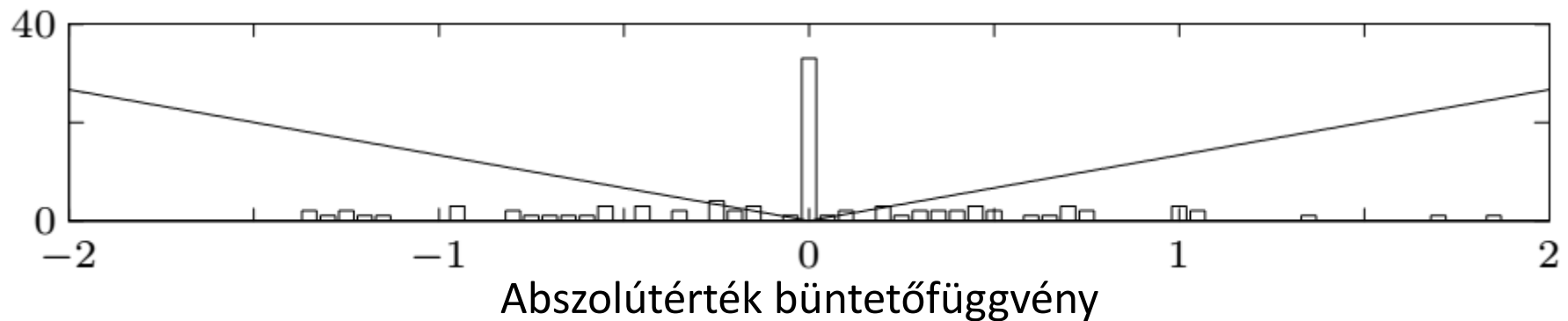
MAP L2 prior



MAP Huber prior

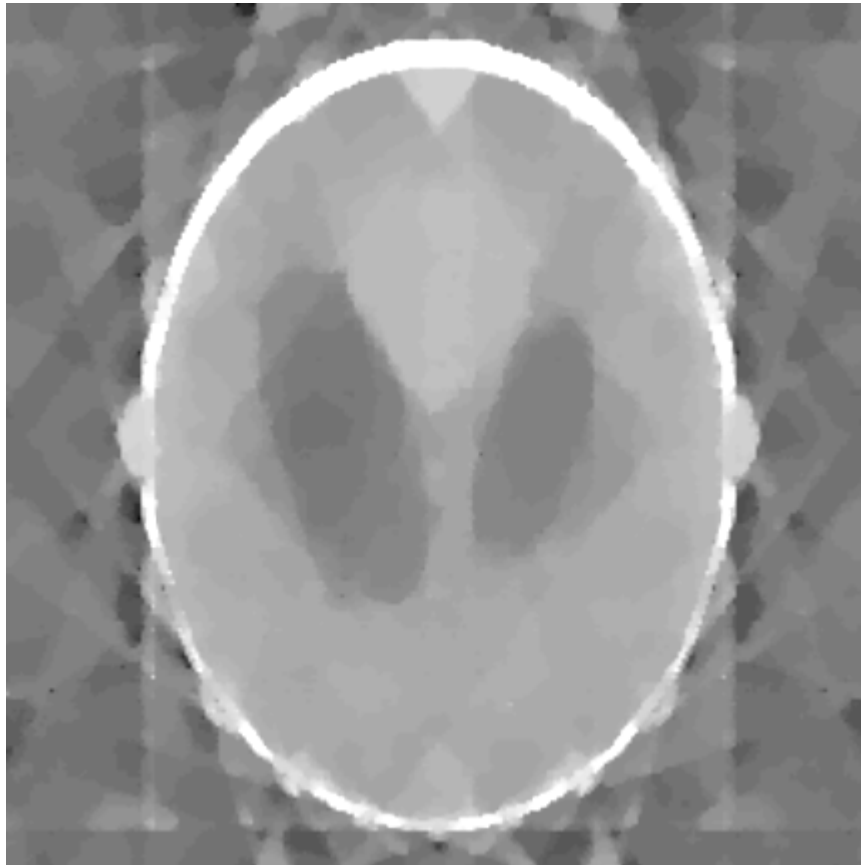
Kvadratus és abszolútérték hiba/büntetőfüggvény

- Két hibafüggvény jelentősen eltérő eloszlást kényszerít ki:



Élet a konvex optimalizáció túl

- CT-s szimuláció, 10 projekcióból ($\Delta\theta=18^\circ$):



Konvex: L2-TV



Valóban ritkasági priorral