

# Képképzés modellezése, metrikái

Orvosi képdiagnosztika

2020 ősz

# Jelölésjegyzék

- Rendszer válasza  $f$  gerjesztésre:  $S\{f\}$
- Dirac-delta:  $\delta(x)$ ; egységugrás:  $1(x)$
- $x_0$  idejű Dirac-delta gerjesztése a rendszer válasza:  $h(x, x_0)$ 
  - LTI esetben:  $h(x - x_0) := h(x, x_0)$
- Konvolúció:  $*$
- $g$  Fourier transzformáltja:  $G = FT\{g\}$ 
  - $g$  spektruma:  $G$
- $g$  sávzélessége:  $bw\{g\}$
- $X$  eloszlás várható értéke:  $\mu(X)$ , szórása:  $\text{std}(X)$
- Szürkeárnyaltos képet leíró leképezés:  $I : R^2 \rightarrow R$
- Elemenkénti átlagolás:  $\langle I^{(1:M)} \rangle(x, y) = (1/M) \sum_i I^{(i)}(x, y)$

# Tartalom

- Elméleti áttekintés – lineáris rendszerek:
  - LTI rendszerek leírása – konvolúciós integrál
  - Rendszer identifikáció
  - Folytonos idejű Fourier transzformáció
- Képkotás mérése lineáris rendszerekkel:
  - Point Spread Function, Modulation Transfer Function, Noise Power Spectra, SNR, CNR
  - NEQ, DQE

# Lineáris rendszerek

- Komplex, fizikai rendszerek sosem lineárisak
  - Linearizálás nélkül kezelhetetlenül bonyolultak
  - Leginkább sztochasztikus folyamatok
    - Lin. rendszerként várható értékük jellemezhető
- Lineáris rendszerek jellemzői
  - Rendszer:  $S : A \rightarrow B$
  - Lineáris:  $S \{a \cdot f + b \cdot g\} = a \cdot S \{f\} + b \cdot S \{g\}$   
 $a, b \in R \quad f, g : C \rightarrow A$

# Lineáris rendszerek vizsgálata

- Eltolás-invariáns (idő invariáns) rendszer:

- $S\{f * \delta(x - x_0)\}(y + x_0) = S\{f\}(y)$

- Dirac impulzus:

- $\delta(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)$

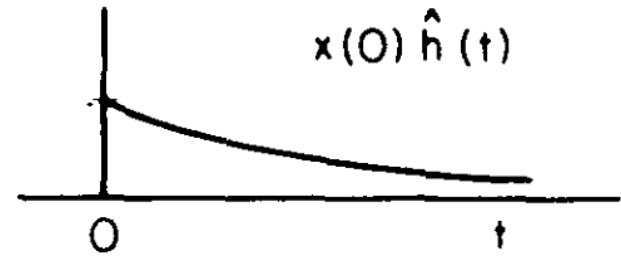
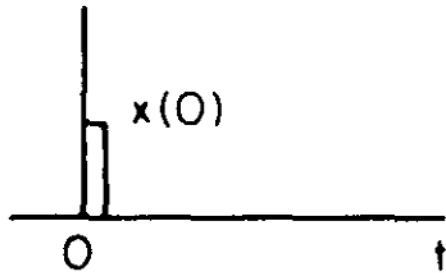
- Impulzusválasz:  $h(x, x_0) = S\{\delta(y - x_0)\}(x)$

- Eltolás(idő)-invariáns rendszernél:  $h(x, x_0) \equiv h(x - x_0)$
    - LTI rendszereket egyértelműen leírja  $h(x)$

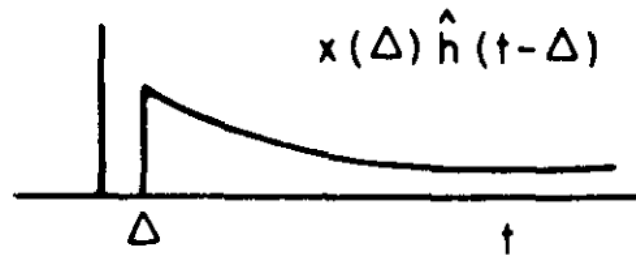
# LTI rendszerek válasza (konvolúciós integrál)

- Közelítsük infinitezimális téglákkal  $f$ -et:
  - $S\{f\}(x) \approx \hat{y}(x) := \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(j \cdot \Delta x) \cdot h(x, j \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$
  - Közelítő modell helyességének feltételei:
    - $f$  folytonos
    - $h(x, y)$  is folytonos függvénye  $y$ -nak
    - $\Delta x \ll 1$
- Ha  $S$ eltolás invariáns:
  - $S\{f\}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \hat{y}(x) = \int_{x'=-\infty}^{\infty} f(x') \cdot h(x - x') \cdot dx'$
  - Tömörebben:  $y(x) := S\{f\}(x) = (f * h)(x)$

# LTI rendszerek válasza (konvolúciós integrál)

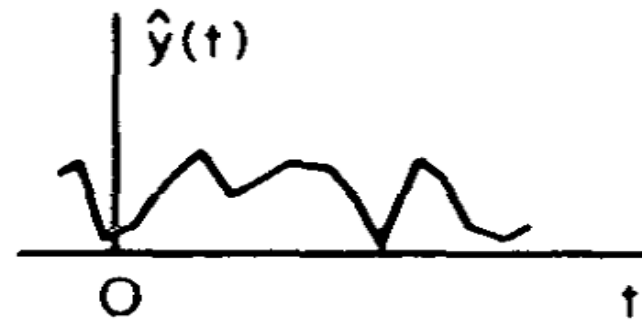
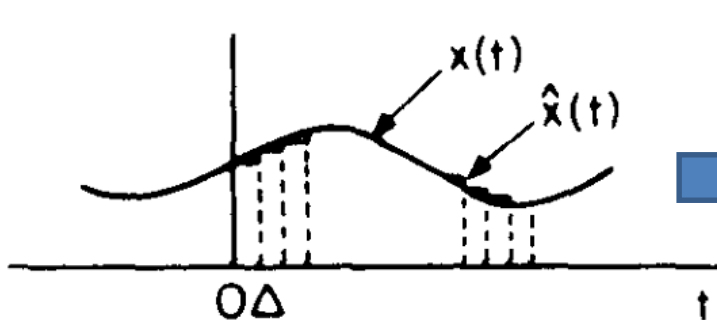


+

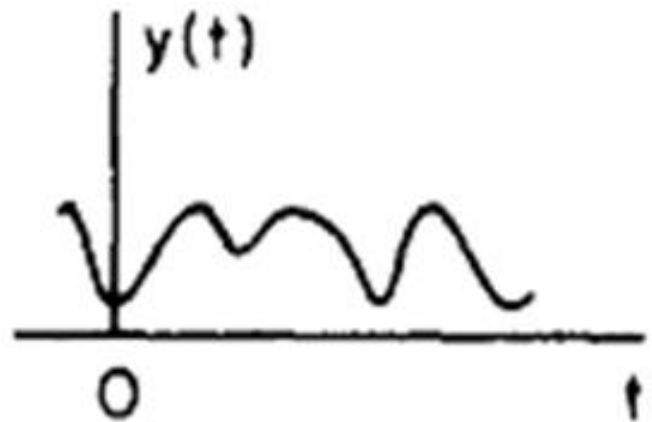
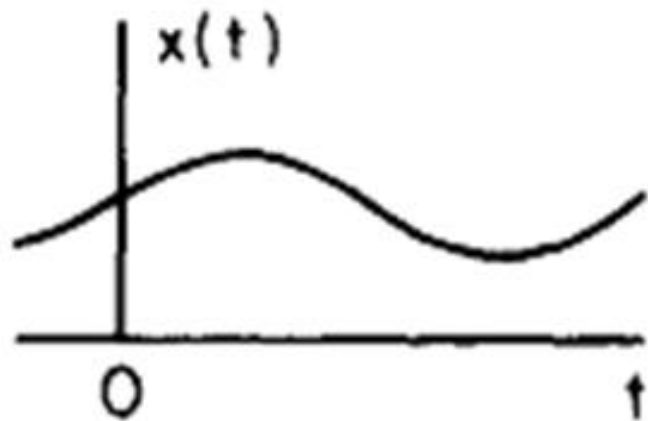
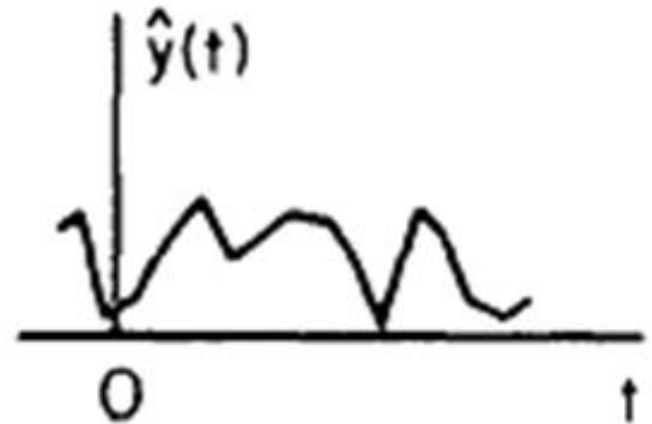
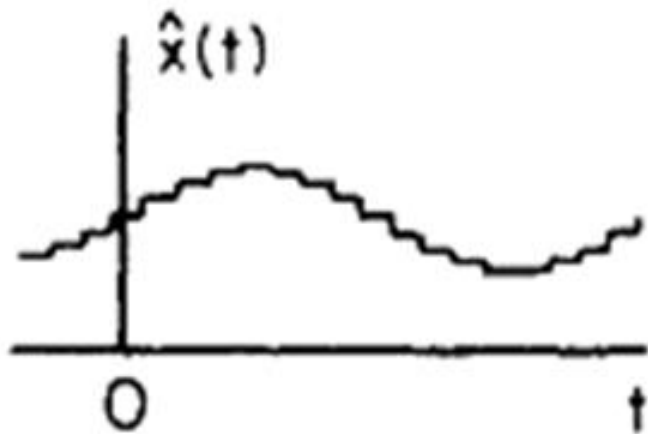


+ ...

$\Sigma$ :



# LTI rendszerek válasza (konvolúciós integrál)



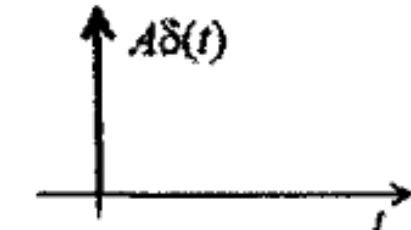
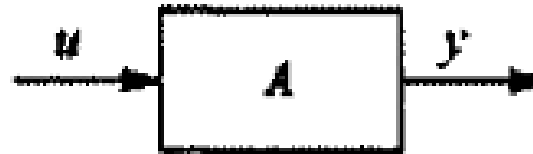


# LTI rendszerek

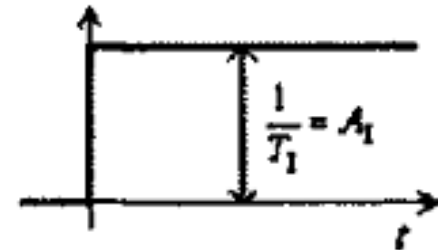
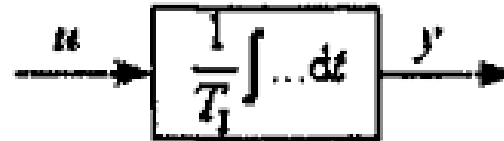
- Impulzusválasz ( $h$ ) egyéb elnevezései:
  - Súlyfüggvény
  - Gerjesztés Válasz függvény
  - Képképző rendszereknél: Point Spread Function
- Fizikai képképző rendszerek sajátosságai:
  - Rögzített képek (projekciók, stb.):  $y \approx h * x + \eta$
  - Általában  $x : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $y : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$
  - $\eta$  a képképzés, és a fizikai foton interakciók függvénye

# Egyszerű rendszerek impulzusválasza (szemléltetés)

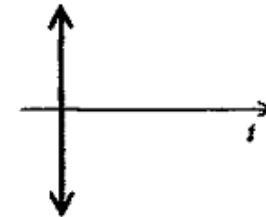
- Arányos tag:



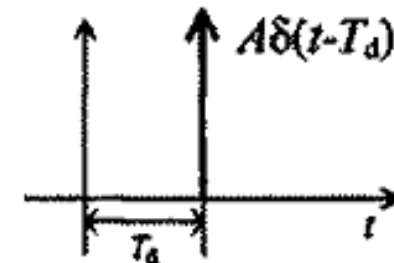
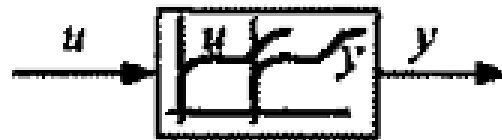
- Integráló tag:



- Differenciáló tag:



- Holtidős tag:



# Fourier Transzformáció

- Folytonos függvények lineáris transzformációja:

$$- F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{(-j \cdot 2\pi \cdot \xi \cdot x)} \cdot dx; \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \cdot e^{(j \cdot 2\pi \cdot \xi \cdot x)} \cdot d\xi$$

$$- \text{Euler formula: } \exp(j \cdot 2\pi \cdot \xi \cdot x) = \cos(2\pi \cdot \xi \cdot x) + j \cdot \sin(2\pi \cdot \xi \cdot x)$$

- LTI rendszerek vizsgálata Fourier tartományban:

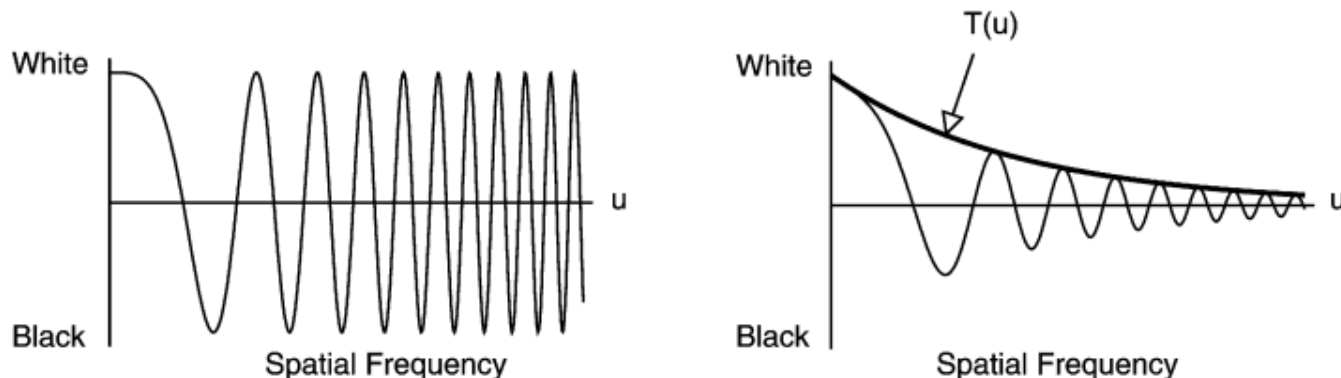
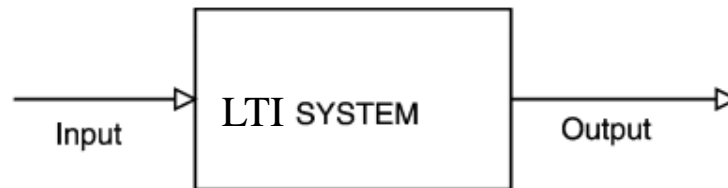
$$- y(x) = \int_{x'=-\infty}^{\infty} h(x') \int_{\xi=-\infty}^{\infty} F(\xi) \cdot e^{(j \cdot 2\pi \cdot \xi \cdot (x-x'))} \cdot d\xi \cdot dx'$$

$$- y(x) = \int_{\xi=-\infty}^{\infty} F(\xi) \cdot \left( \int_{x'=-\infty}^{\infty} h(x') \cdot e^{(-j \cdot 2\pi \cdot \xi \cdot x')} \cdot dx' \right) \cdot e^{(j \cdot 2\pi \cdot \xi \cdot x)} \cdot d\xi$$

$$- \text{Konvolúció tétel: } Y(\xi) = F(\xi) \cdot H(\xi)$$

# LTI rendszerek – konvolúció tétel

- LTI rendszer sajátfüggvényei az FT bázisfüggvényei (komplex exponenciálisak):
  - $\xi$  frekvenciájú szinuszos jelre adott válasz is  $\xi$  frekvenciájú szinuszos jel:



# LTI rendszerek átviteli függvény

- Átviteli függvény:  $H = FT \{h\}$
- $H(\xi) = |H(\xi)| \cdot \exp(j \cdot \varphi(H(\xi)))$  értelmezése:
  - $|H(\xi)|$  rendszer erősítése (1/ tehetetlensége):
    - $\xi \sim$  jel változásának sebessége
    - Fizikailag realizálható rendszerek sávkorlátozottak:  
 $|H(\xi)| \ll 1$ , ha  $\xi > bw(h)$
    - Általában monoton csökkenő függvény (ellenpélda: kondenzátor)
  - $\varphi(H(\xi))$  rendszer fázis tolása (késleltetése):
    - $FT \{f(x - x_0)\} = F(\xi) \cdot \exp(j \cdot 2\pi \cdot x_0 \cdot \xi)$

# LTI rendszerek identifikációja

- $H(\xi)$  meghatározása:

- Egységimpulzus ( $\delta(x)$ ) gerjesztés

- Egységugrás gerjesztés:  $1(x) = \int_{-\infty}^x \delta(x') \cdot dx'$ 
  - $h(x) = dS\{1\}(x)/dx$

- Szinuszos vizsgálójellel (LTV-hez is jó lehet):

- $f(x) = A_0 \cdot \cos(2\pi \cdot \xi \cdot x + \varphi_0)$

- $y(x) = A_0 \cdot A \cdot \cos(2\pi \cdot \xi \cdot x + \varphi_0 + \varphi)$  esetén

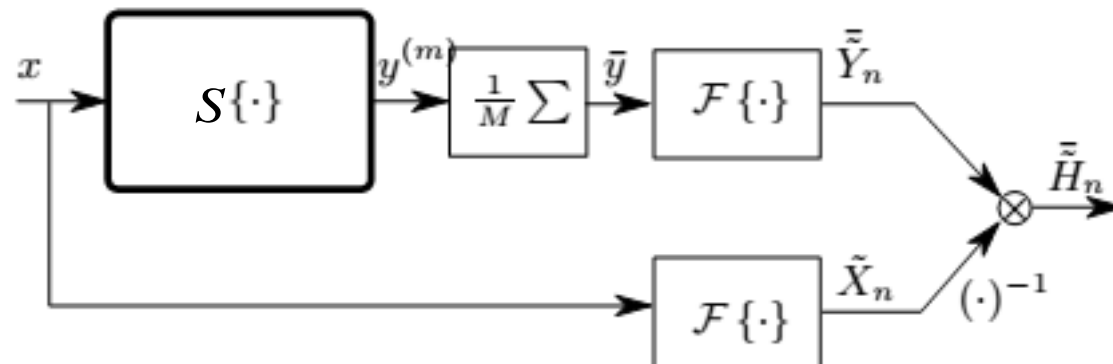
$$H(\xi') = \begin{cases} A \cdot \exp(j \cdot \varphi \cdot \text{sign}(\xi')) & | \xi' = \pm \xi \\ ? & | \xi' \neq \pm \xi \end{cases}$$

# LTI rendszerek identifikációja

– Multiszinuszos vizsgálójel (LTV rendszerekhez is):

- $f(x) = \sum_i A_i \cdot \cos(2\pi \cdot (i \cdot \omega) \cdot x + \varphi_i)$

- $y(x)$  Fourier Sorfejtése megadja  $H(\pm i \cdot \omega)$  értékeit

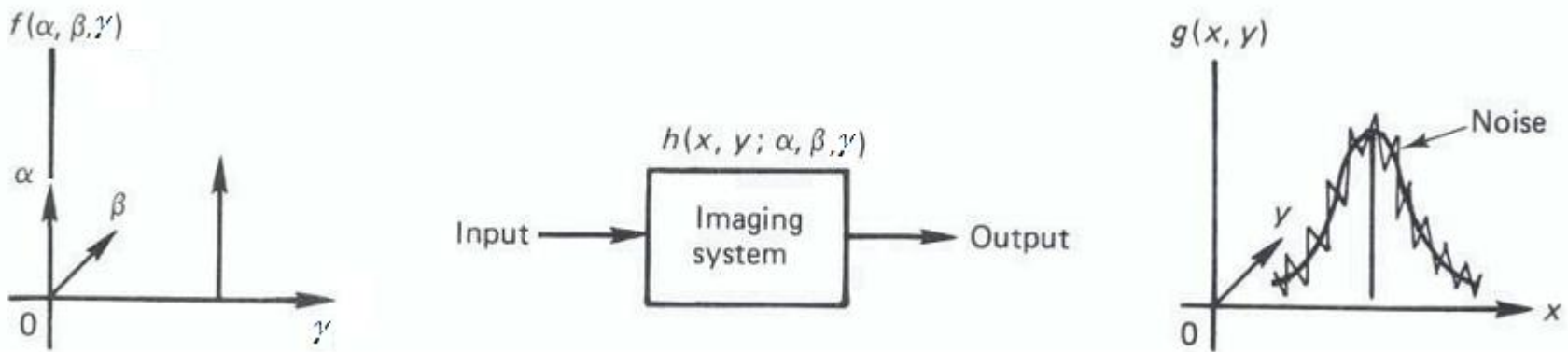


– Fehér zajjal:

- Bemeneti zaj: teljesítménysűrűség spektruma egyenletes
- Kimeneti zaj: teljesítménysűrűség spektruma  $\propto |H(\xi)|^2$

# Képkötő rendszerek jellemzése

- Képkötés általános modellje: Lineáris rendszer:



- Lineáris rendszerek – GV vizsgálat
  - Ideális gerjesztés: dirac-delta
  - Közelítése: pontszerű gerjesztés
    - A gerjesztés is GV válasza egy lineáris rendszernek ( $l(\alpha, \beta, \gamma)$ )
    - Közvetlenül a ( $h * l$ ) rendszert vizsgáljuk



# Point Spread Function 3D - 2D

- Általános modell (konv. integrál)- a gerjesztés képe lineáris rendszermodell és zaj esetén:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} h(x, y; \alpha, \beta, \gamma) \cdot f(\alpha, \beta, \gamma) d\gamma d\alpha d\beta + \eta(x, y)$$

- $f(\alpha, \beta, \gamma)$ : gerjesztés (vizsgált objektum)
  - $\eta(x, y)$ : additív zaj
  - $h(x, y; \alpha, \beta, \gamma)$ : rendszer súlyfüggvénye – PSF-je
- Inverz probléma – később részletesen tárgyaljuk

# Point Spread Function 2D - 2D

- Detektált kép abban az esetben, ha impulzust detektálnánk ideális esetben:

$$g(x, y) = \sum_{\alpha, \beta} h(x, y; \alpha, \beta) \cdot f(\alpha, \beta) + \eta(x, y)$$

- $f(\alpha, \beta)$ : ideális esetben az imp. gerjesztés képe
  - $\eta(x, y)$ : additív zaj
  - $h(x, y; \alpha, \beta)$ : torzító rendszer PSF-je
- Inverz probléma – később részletesen tárgyaljuk

# Point Spread Function (2D – 2D eset)

- Nem szükségszerűen izotropikus:
  - Fényképezőgépek / mikroszkópok – inhomogén lencsék okozzák az anizotróp PSF-et
  - PA röntgen, CT, DTS esetén tipikusan anizotróp
  - MRI esetén felvételi paraméterek függvénye
- Nem szükségszerűen shift invariáns:
  - Jelentősen nagyobb probléma
  - Közelítés shift invariáns rendszerekkel:
    - Alapelv: PSF folytonos függvény
    - Isoplanatic régiók

# Point Spread Function (2D – 2D eset)

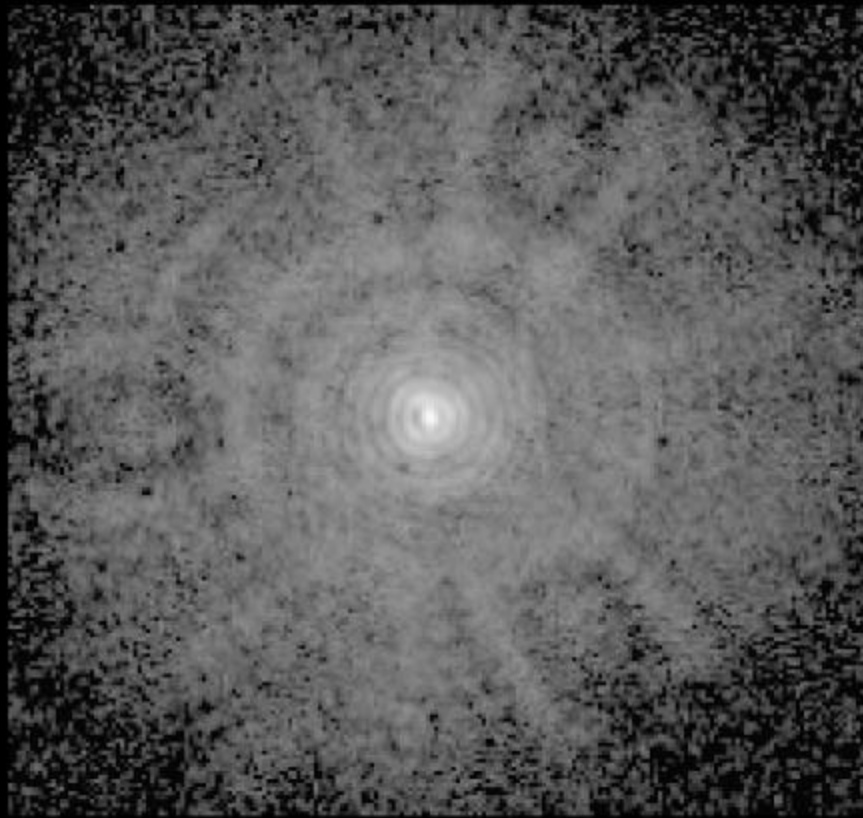
- Nem szükségszerűen izotropikus:
  - Fényképezőgépek / mikroszkópok – inhomogén lencsék okozzák az anizotróp PSF-et
  - PA röntgen, CT, DTS esetén tipikusan anizotróp
  - MRI esetén felvételi paraméterek függvénye
- Nem szükségszerűen shift invariáns:
  - Jelentősen megvalósítási problémák
  - Közelítés shift invariáns
    - Alapelv: PSF folytonos függvény
    - Isoplanatic régiók

Az időinvariancia analógiája képeket bemenetként kezelő 2D rendszer esetén.

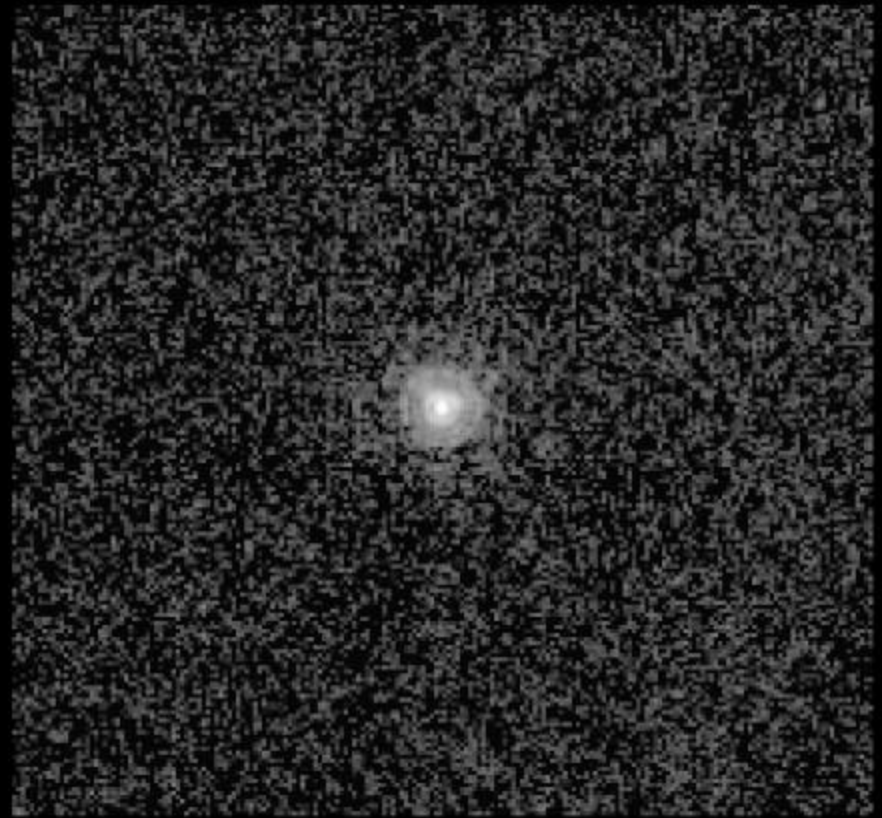
# HUBBLE SPACE TELESCOPE

## FAINT OBJECT CAMERA

### COMPARATIVE VIEWS OF A STAR



BEFORE COSTAR



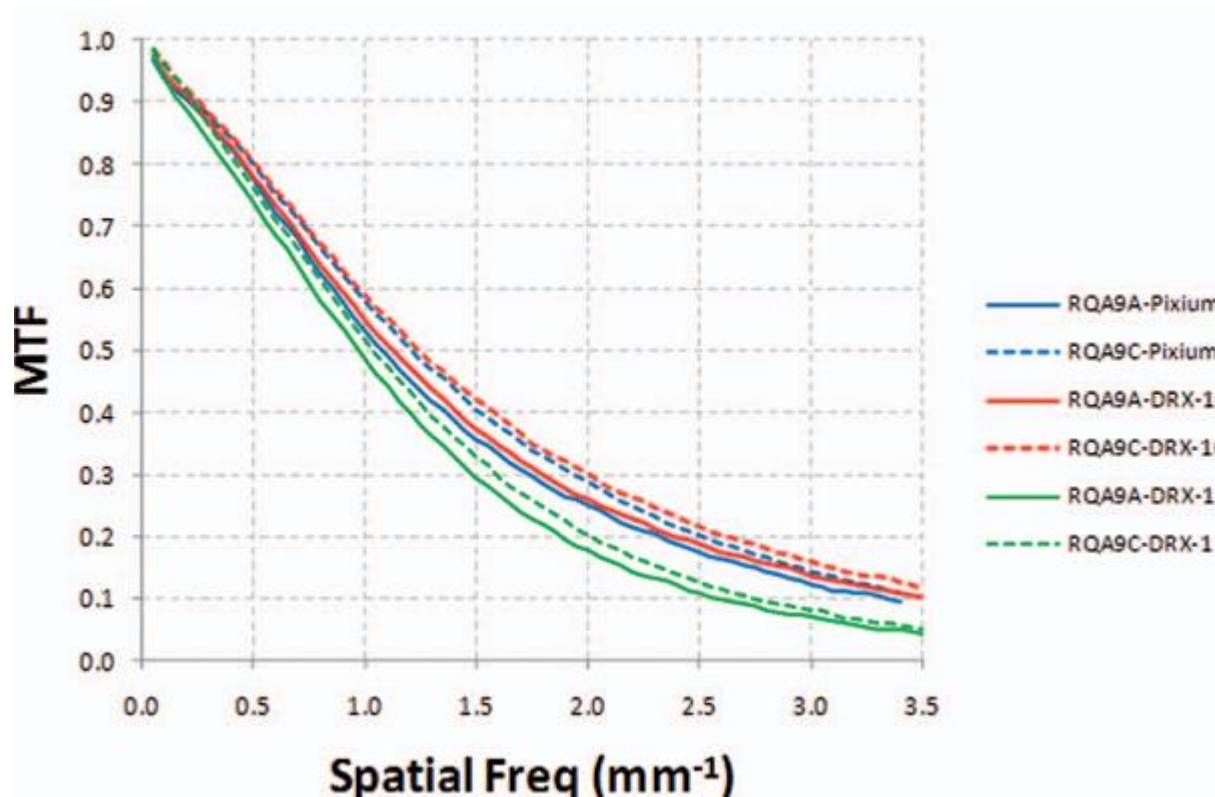
AFTER COSTAR

# Modulation Transfer Function

(modulációs átviteli függvény)

- Tételezzük fel, hogy a PSF pozíció független
- Ekkor a PSF spektrumát érdemes vizsgálni:
  - TF (átviteli függvény):  $\mathbf{H} = F\{\mathbf{h}\}$
- Elterjedt még az OTF / MTF felbontás is:
  - Optical Transfer Function:  $\mathbf{H}/\mathbf{H}(0,0)$
  - Modulation Transfer Function:  $|\mathbf{H}/\mathbf{H}(0,0)|$
- Effektív felbontás (zaj nélkül):  $bw\{\mathbf{h}\}$ 
  - Képkalkotásban 0.5-ös MTF érték határozza meg

# Röntgen detektor MTF példák

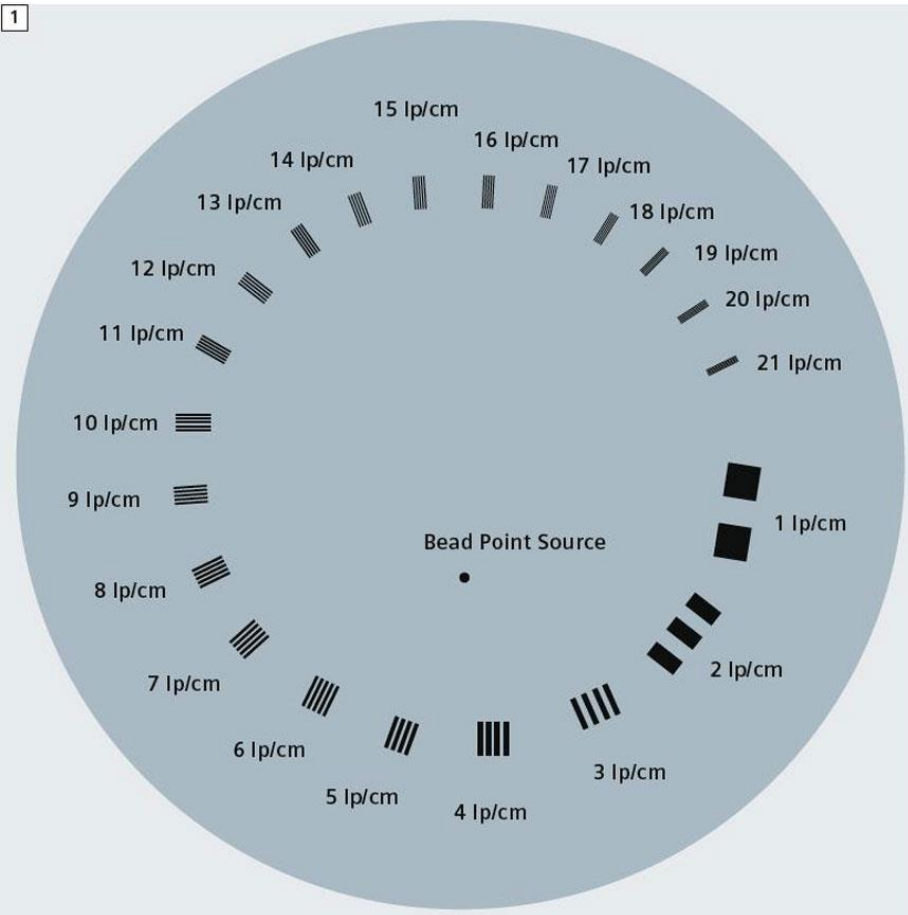


# MTF mérése

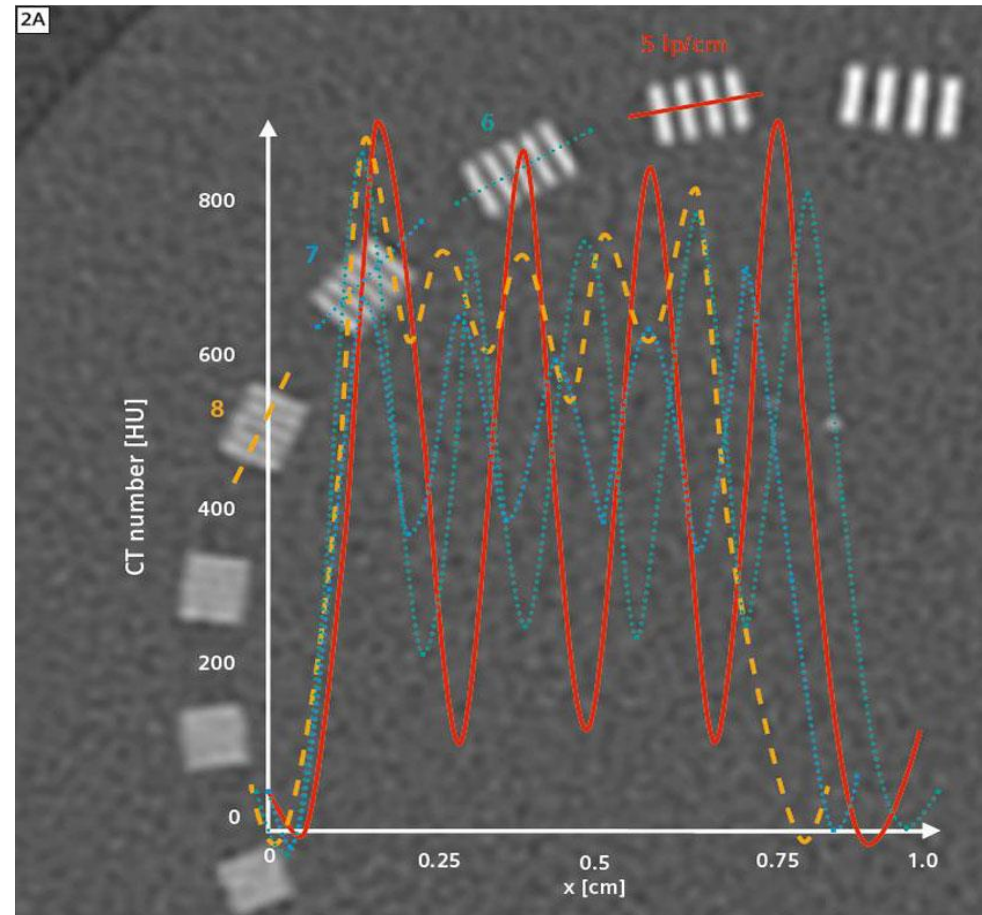
- MTF definiálásánál LTI modellt használtunk:
  - Expected MTF: célja az alul-mintavételezés hatására keletkező moire hatásait degradálni
- Gyakori megvalósításai:
  - Vonalpár fantom: MTF származtatható belőle
  - Rés módszer: magas frekvencián pontosabb
  - Él módszer: alacsony frekvencián pontosabb
  - Általában egy irány mentén mérhető:
    - Ami a fantom elhelyezésétől függ



# MTF mérése vonalpár fantomok



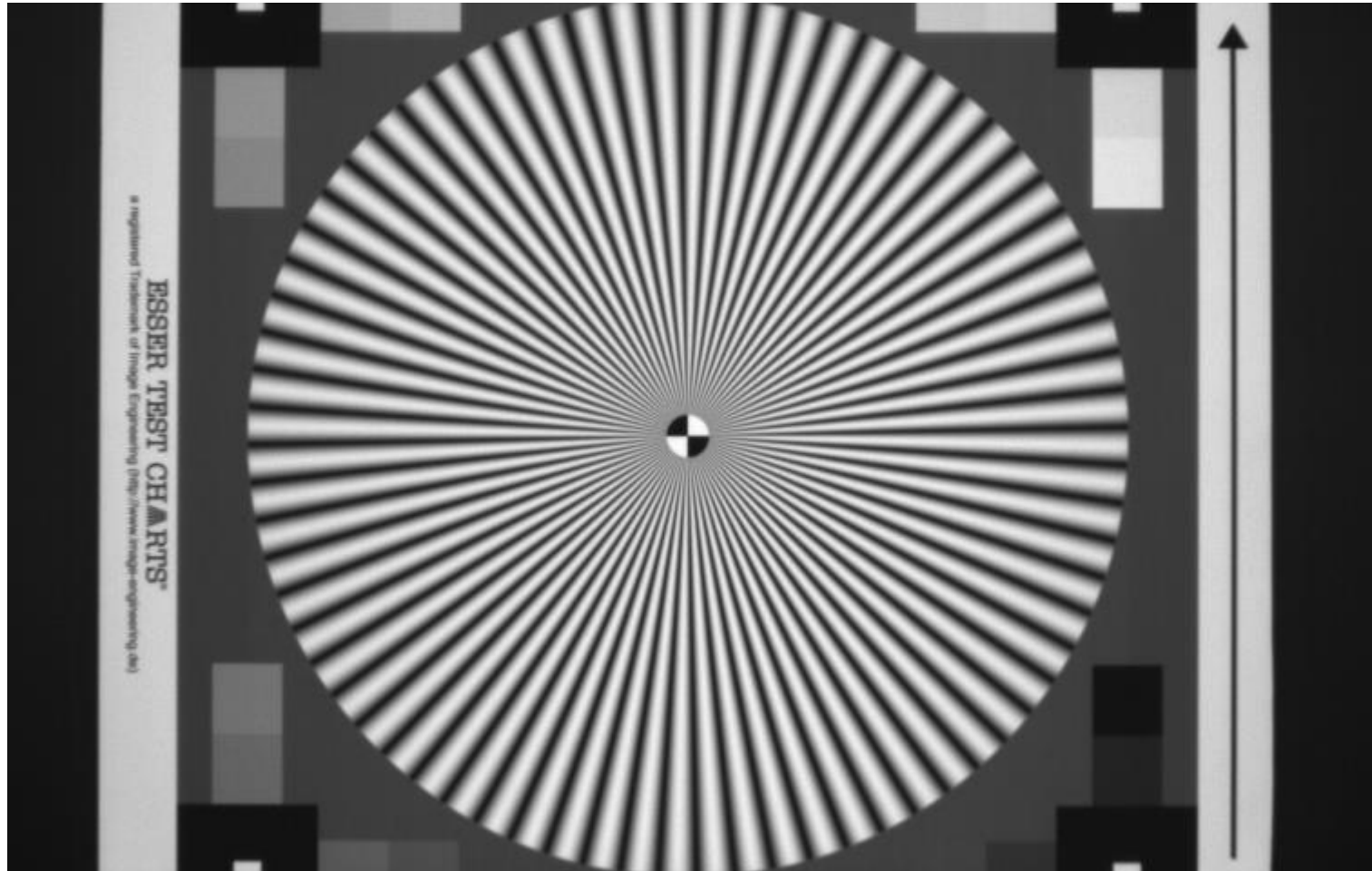
Catphan<sup>®</sup> 500



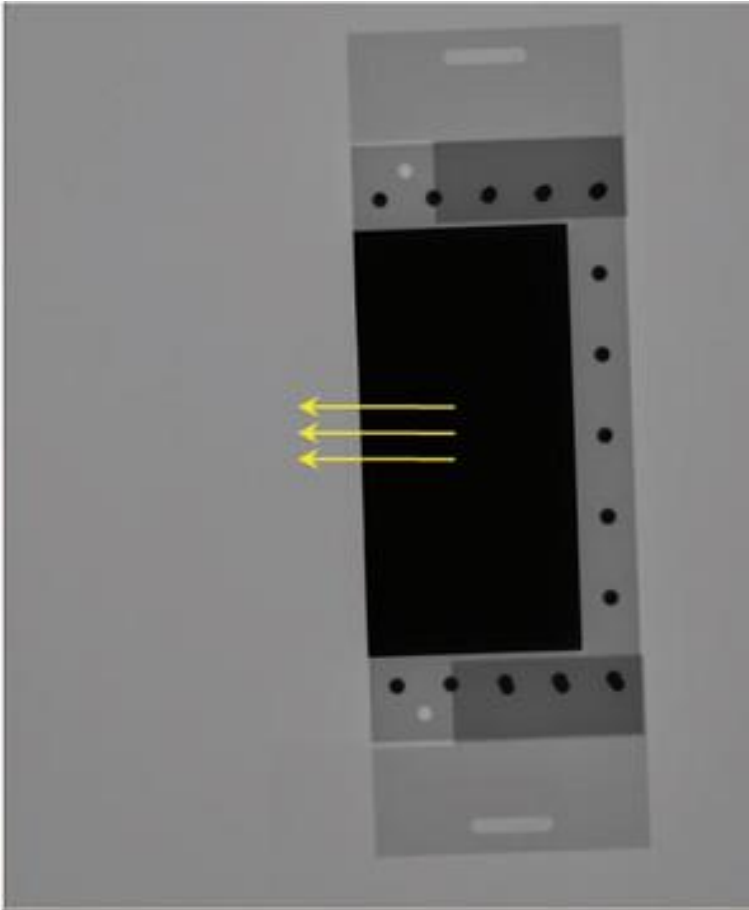
FBP-vel rekonstruált axiális szelet

# MTF mérése vonalpár fantom

- Digitális fényképezőgépekhez készült fantom:

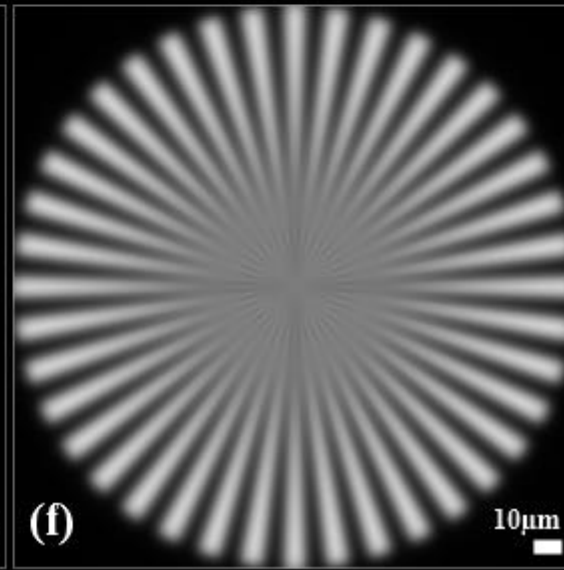
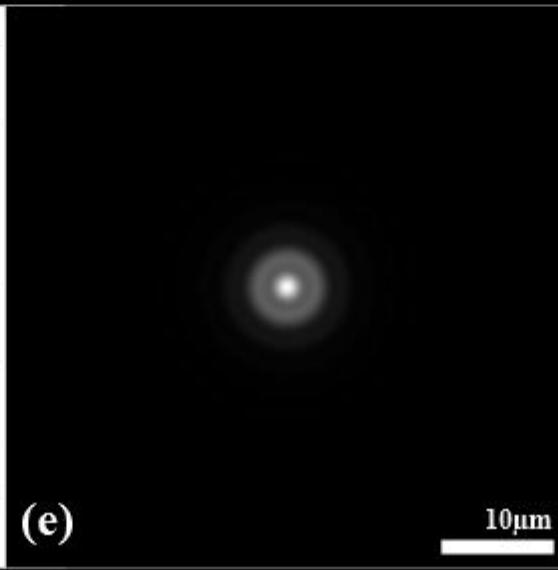
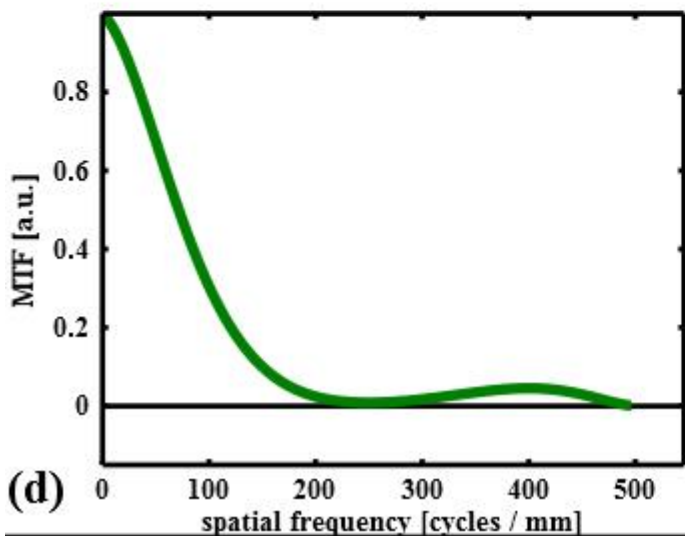
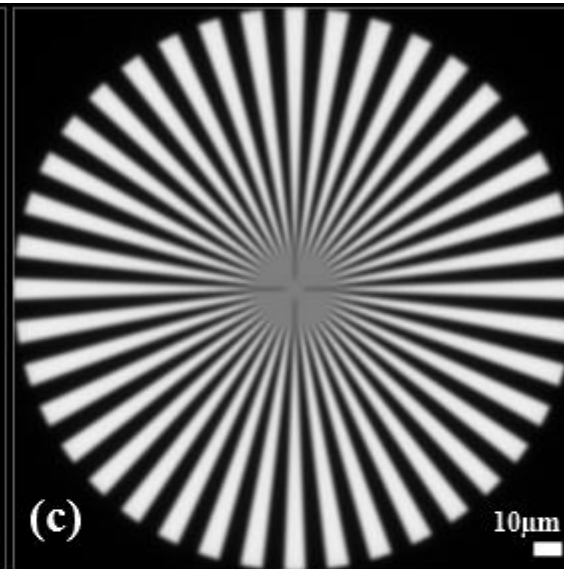
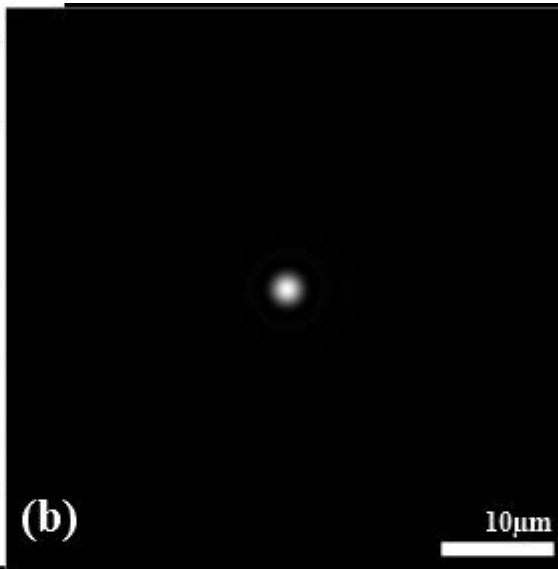
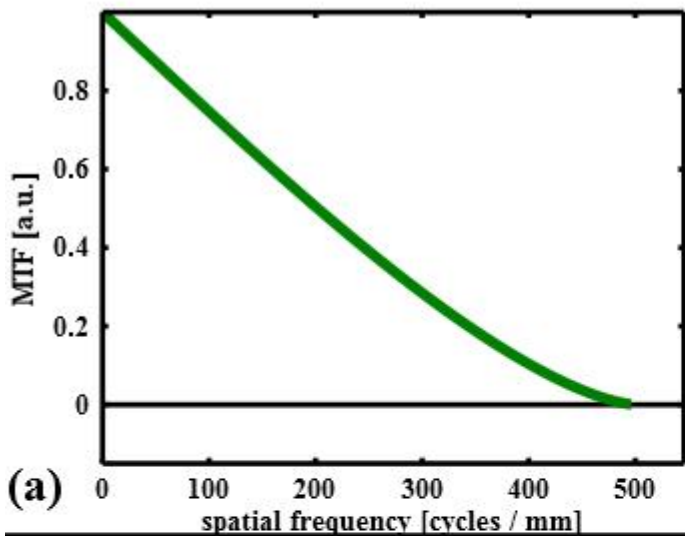


# MTF mérése: él módszer

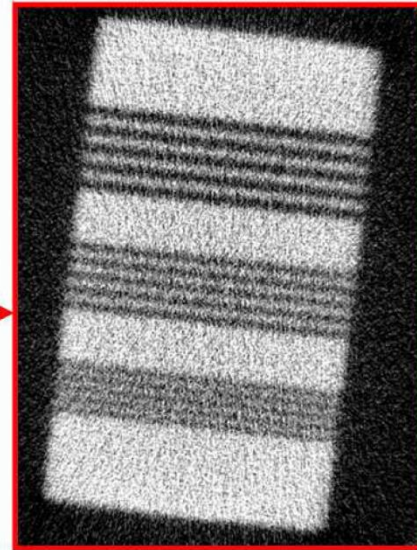
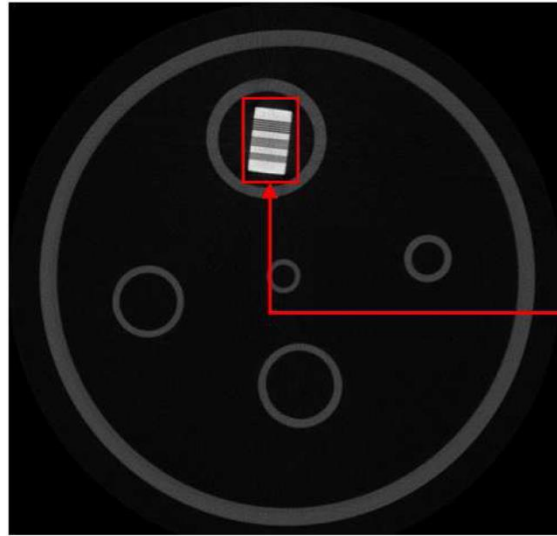


- A fantom éle a pixelek oszlopaival kis, de  $>0$  szöget zár be.
- Így lehetőség nyílik az él „felül-mintavételezésére”, korrigálható az alul-mintavételezési probléma.
- Az élre merőleges derivált adja meg a PSF-et.

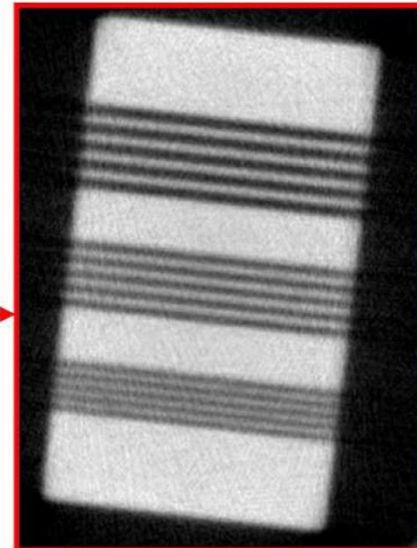
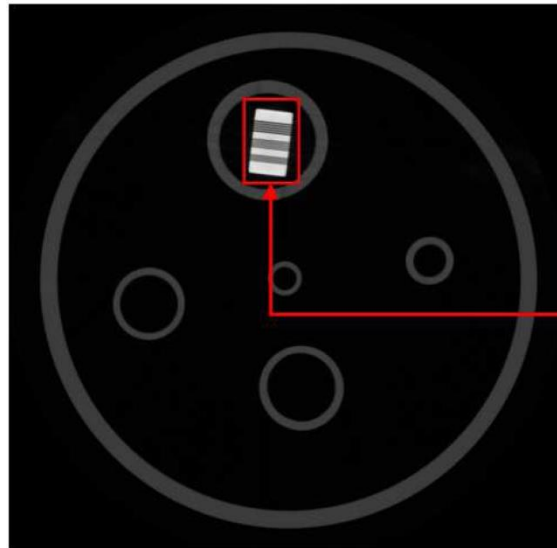
# MTF – PSF közötti kapcsolat



# MTF szerinti minősítés



(a)



(b)

# Signal to Noise Ratio

(jel / zaj viszony)

- Általános jelfeldolgozásban:

$$SNR = 10 \cdot \log_{10} \left( P_{signal} / P_{noise} \right) = 20 \cdot \log_{10} \left( A_{signal} / A_{noise} \right) [dB]$$

– Általában additív zaj

- Képkötő rendszerek esete:

–  $f$  homogén objektum legyen

$$SNR = \frac{\mu_{(x,y) \in N} \{I(x, y)\}}{std_{(x,y) \in N} \{I(x, y)\}}$$

- $N$  a homogén objektum képének kiterjedése, fontos, hogy elegendően nagy legyen
- Több felvételtől is mérhető

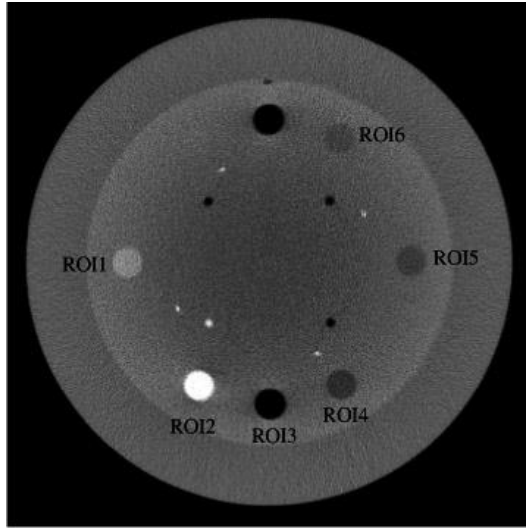
# Contrast to Noise Ratio

(kontraszt / zaj viszony)

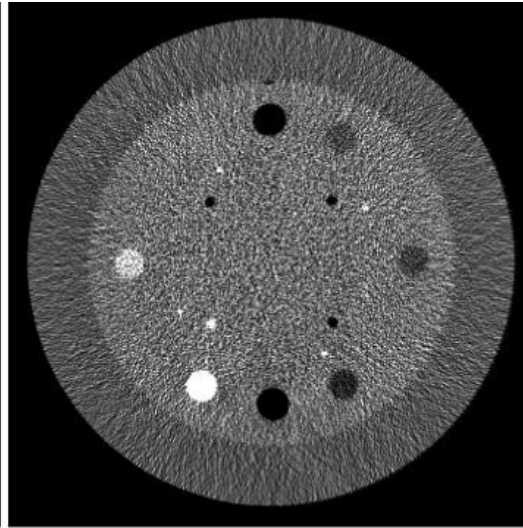
- Kontraszt önmagában nem jó minősítő:
  - Gyakran főleg a zaj generálja
  - Objektumok elkülönítését javítja a jobb kontraszt, de degradálja a nagyobb zaj
- $CNR_{A,B} = C_{A,B} / \sigma_N = \left| \mu_{(x,y) \in A} \{I(x,y)\} - \mu_{(x,y) \in B} \{I(x,y)\} \right| / \text{std}_{(x,y) \in N} \{I(x,y)\}$ 
  - $A, B$  a két elkülöníteni kívánt objektum képe
  - $N$  azon régió, melyből becsülhető a képzaj:
    - Ennek konkrét megválasztása esetfüggő
  - Alkalmazása (mint metrika) főleg orvosi körben elterjedt



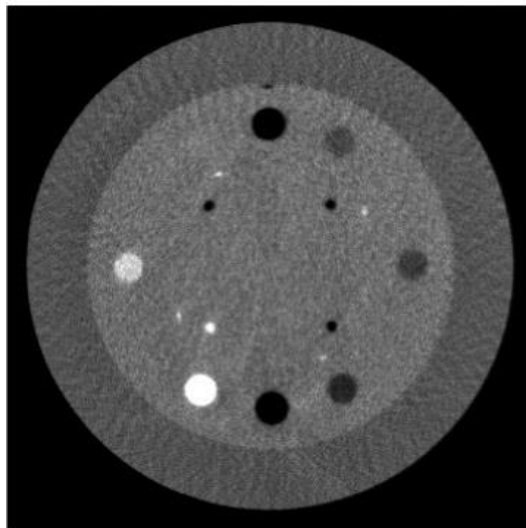
# CNR mérése CT esetén



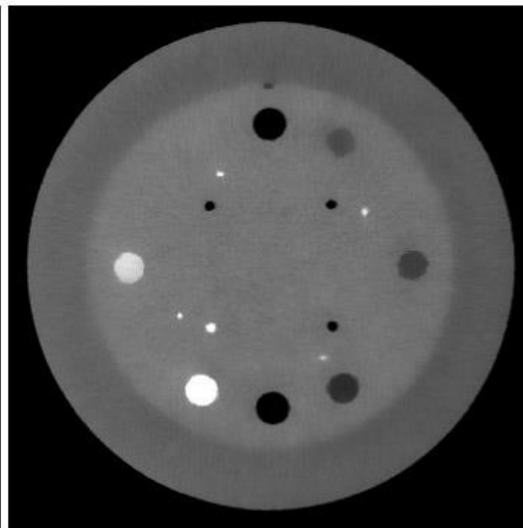
(a)



(b)



(c)



(d)

- Fontos, hogy nem tételez fel lineáris képképzést!
- Szeleten belüli felbontás vs. sugárdózis optimalizáció
- Nemlineáris rekonstrukciók minősítése



# Röntgen kvantum jellemzői

- Kvantum: fotonok száma
- Fotonok eloszlása:
  - Érzékelő felületén/ időben nem egyenletes
    - Sugárzás inherens zaját ez a jelenség generálja
  - Ergodikus eloszlással írható le
  - Véletlen Poisson Folyamat:  $p(k) = \frac{\lambda^k \exp(-\lambda)}{k!}$ 
    - $\lambda$  várható érték esetén  $\sqrt{\lambda}$  szórás
- Ideális képalkotó rendszer:
  - Plusz zajt nem generál ( $SNR_{out} = SNR_{in}$ )

# Noise Power Spectrum

(zaj teljesítmény spektrum)

- A képzaj energiája frekvenciafüggő:

– NPS definíciója *folytonos* jel esetén:

$$NPS = \lim_{N_x, N_y, M \rightarrow \infty} \frac{1}{X \cdot Y} \left\langle \left| F \left\{ I^{(1:M)} - \bar{I} \right\} \right|^2 \right\rangle$$

– *Diszkrét* esetben:

$$NPS = \lim_{N_x, N_y, M \rightarrow \infty} \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{N_x \cdot N_y} \left\langle \left| F \left\{ I^{(1:M)} - \bar{I} \right\} \right|^2 \right\rangle$$

- $\Delta x$ ,  $\Delta y$ : detektor pixeleinek x és y irányú kiterjedése
- $N_x$ ,  $N_y$ : detektor x és y irányú logikai felbontása (pixeleinek a száma)
- $X = \Delta x \cdot N_x$ ,  $Y = \Delta y \cdot N_y$  detektor fizikai mérete

# Noise Power Spectrum

(zaj teljesítmény spektrum)

- A képzaj erőssége a képfüggvény Fourier-transzformáltjának négyzetes közepes értéke

$$\int_{x,y} f(x,y) \cdot \exp(-2\pi j \cdot (ux + vy)) dydx$$

- NPS definíció

$$NPS = \lim_{N_x, N_y, M \rightarrow \infty} \frac{1}{X \cdot Y} \left\langle \left| F \left\{ I^{(1:M)} - \bar{I} \right\} \right|^2 \right\rangle$$

- Diszkrét esetben:

$$NPS = \lim_{N_x, N_y, M \rightarrow \infty} \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{N_x \cdot N_y} \left\langle \left| F \left\{ I^{(1:M)} - \bar{I} \right\} \right|^2 \right\rangle$$

- $\Delta x, \Delta y$  a képfüggvény felbontási képessége
- $N_x, N_y$  a képfüggvény mérete (pixeleinek a száma)

- $X = \Delta x \cdot N_x, Y = \Delta y \cdot N_y$  detektor fizikai mérete

# Noise Equivalent Quanta

(zaj ekvivalens kvantum)

- Normalized NPS:

- Kompenzálja a rendszer erősítését

- $NNPS(u, v) = NPS(u, v) / A^2$

- $A \sim$  Mi a detektor válaszának várható értéke olyan helyen, melybe  $Q$  foton érkezik (kvázi a rendszer erősítése)

- Noise Equivalent Quanta:

- Mennyi foton lenne szükséges ugyanazon képminőség eléréséhez, ha ideális lenne a képképzés

- $NEQ(u, v) = MTF^2(u, v) / NNPS(u, v) = SNR^2(u, v)$

# Detective Quantum Efficiency

(detektálási kvantumhatékonyság)

- Eddigi metrikáknál nem vizsgáltuk a dózistól / fotonok számától való függést:
  - $DQE(u, v) = NEQ(u, v) / Q$ 
    - $Q$  a vizsgált detektort elérő kvantum (fotonok száma, definiálható így is a dózis)
  - Fontos interpretáció:
$$DQE(u, v) = SNR^2(u, v) / SNR_{in}^2(u, v)$$
    - $SNR_{in}(u, v)$ : érzékelőelemre belépő jel (pl. röntgensugár, fotonok) SNR –je
    - A kész rendszer „információ átvitelének” hatékonyságát méri, értéke 0 és 1 között változik.

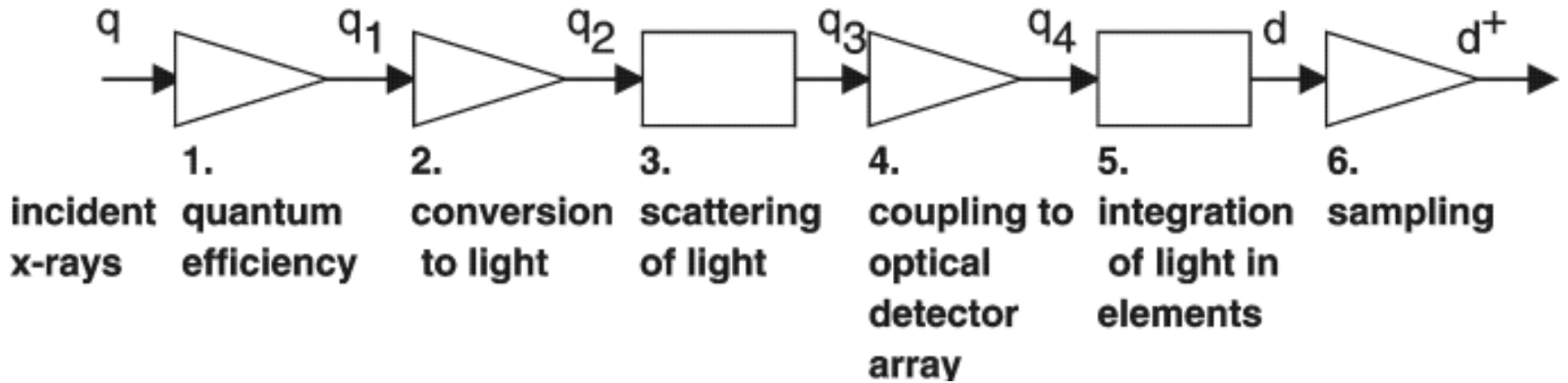
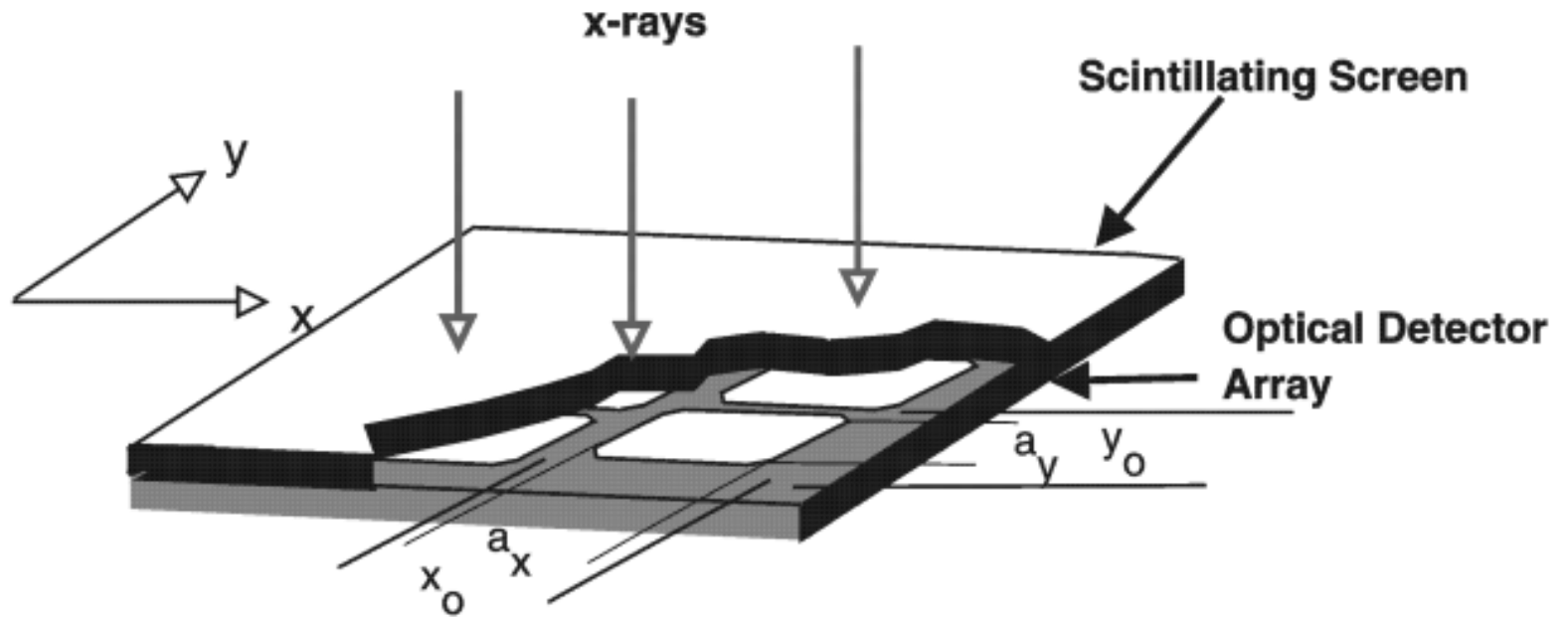
# DQE számolási példák -1-

- Adott egy röntgen detektor, melyet az alábbi rendszer ír le:
  - Egy ideális detektor és egy csillapító réteg soros kaszkádja (pl. CsI szcintillátor), a csillapító réteg nem változtatja az átmenő sugárzás eloszlásának típusát.
  - A szcintillátor a felületét elérő röntgen fotonok  $\frac{1}{4}$ -éből generál látható fotont, plusz zajt nem generál (nem szórja / keni el a fotonokat).
  - $Q=5000$  röntgen foton/ pixel éri a teljes rendszert.
  - $NEQ=?$                        $DQE=?$                        $SNR_{in}=?$                        $SNR=?$

# DQE számolási példák -2-

- Adott egy röntgen detektor, mely:
  - Ideális detektor, és zajos A/D átalakító soros kaszkádja, mely zaja ekvivalens 50 foton/pixel-el a belépő sugárzás fluxusában (inherens zaj).
  - A kiolvasási zaj és a detektort érő fotonok zaja Poisson eloszlású, egymással korrelálatlan.
  - $Q=10000$  foton/pixel éri a detektor felületét.
  - $NEQ=?$        $DQE=?$        $SNR_{in}=?$        $SNR=?$
- Jó közelítéssel ez a két zajforrás aggregálódik (Hf. az aggregát rendszer metrikái).

# Röntgen detektor kvantum modellje





# És mi a valóság?

- Gyakorlatban integráló típusú detektorok:
  - Detektorok erősen érzékenyek a becsapódó fotonok energiájára:
    - Szcintillátor anyagának a függvénye a történet
    - Gyakorlatban van egy energiafüggő valószínűség
  - Az eddig tárgyalt elmélet erősen egyszerűsít
  - DE nincs ennél jobb általános modell
    - Legalábbis hasonló komplexitású
    - Vagy a nagy számok törvénye – Gauss zaj, de ezt inkább hanyagoljuk.