



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

Orvosi képdiagnosztika jegyzet

2022. ŐSZI FÉLÉV

Készítette

Antal Georgina, Fábián Csenge
Horváth Viktor, Pallag Jonatán

Lektorálta

Hadházi Dániel

2023. január 16.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
1.1. Orvosi képdiagnosztika nehézségei	2
1.2. Funkcionális képalkotó modalitások	2
1.3. Projekciós röntgen	3
1.4. Számított tomográfia (CT)	3
1.5. Ultrahang (UH)	4
1.6. Pozitron emissziós tomográfia (PET)	4
1.7. Mágnesesrezonancia-képalkotás (MRI)	5
1.8. Orvosi képdiagnosztika képeinek fő jellemzői	5
1.9. Képalkotó eljárások sajátosságai	6
1.10. Rekonstrukciós példa	7
1.11. Orvosi döntéstámogatás	7
1.12. PACS rendszerek	8
1.13. Duál energiás röntgen	9
1.14. Jelfeldolgozással kivitelezett bordátlanítás	10
1.15. Időbeli követés	10
1.16. Tumor viselkedésének monitorozása	11
1.17. Tumor a szív árnycában	12
2. Digitális képalkotás fizikája, képek tárolása	13
2.1. Jelforrások	13
2.2. Elektromágneses sugárzás	13
2.3. Fotoelektromos kölcsönhatás	14
2.4. Fotonok energiája	15
2.5. Fotonok kölcsönhatásai	16
2.6. Fényérzékelés folyamata	17
2.7. Félvezetők működési elve	17
2.8. Diódák működési elve	18
2.9. Félvezető diódák	19
2.10. Charge-Coupled Device (CCD)	19
2.10.1. Expozíció alatti vezérlés	20
2.10.2. Kiolvasás során alkalmazott vezérlés	21
2.10.3. Fényképezőgépekben alkalmazott CCD működésének szemléltetése	21
2.11. Szcintilláció	22
2.12. A képet terhelő zaj	22
2.13. Dinamika tartomány	24
2.14. Képrögzítés egyéb fizikai hibái	24
2.15. Képfarmátumok	24
2.15.1. BMP	25
2.15.2. TIFF	25

2.15.3. GIF	25
2.15.4. LZW	25
2.15.5. PNG	26
2.15.6. PNG tömörítése - szűrés	26
2.15.7. PNG tömörítése - deflate	27
2.15.8. JPEG	27
2.15.9. JPEG - tömörítés	27
2.15.10. Veszteséges JPEG artifaktumai	29
2.15.11. DCM	30
3. Röntgen	31
3.1. A fotonok energiája	31
3.2. A röntgen berendezés	31
3.3. A röntgenső felépítése és működése	32
3.3.1. A katód	33
3.3.2. Az anódtárcsa	34
3.3.3. A röntgenső működése	34
3.3.4. Elektronok kölcsönhatásai	35
3.3.5. Fotonok keletkezésének helye	37
3.3.6. Anódsarok effektus	39
3.4. A kollimátor felépítése és működése	39
3.5. Röntgensugárra ható geometriai hatások	40
3.6. Röntgensugár interakciója az anyaggal	41
3.6.1. Koherens szóródás	41
3.6.2. Párváltás	42
3.6.3. Foto-elektromos kölcsönhatás	42
3.6.4. Inkoherens (Compton) szóródás	42
3.6.5. A csillapodás jelensége	43
3.6.6. A szóródás jelensége	48
3.7. Röntgensugarak detektálása	49
3.8. Röntgenképeket terhelő zajok	51
3.8.1. Sötétáram	51
3.8.2. Erősítés korrekció	52
3.8.3. Backscatter	53
3.8.4. Modulációs transzfer	54
3.9. Kitekintések	54
3.9.1. Digitális tomoszintézis	54
3.9.2. Fluoroszkópia	56
3.9.3. Duál energiás röntgen	56
3.9.4. CT	57
3.9.5. Electron Beam Tomography	58
3.9.6. Pitch	58
4. Képpalkotás modellezése, metrikái	60
4.1. Áttekintés	60
4.2. Lineáris rendszerek	60
4.3. Lineáris eltolás-invariáns rendszerek	60
4.4. A Dirac delta	61
4.5. Az impulzusválasz	61
4.6. Konvolúciós integrál	62
4.7. Impulzusválasz	64

4.8.	Súlyfüggvények	65
4.9.	Fourier transzformáció	66
4.10.	Komplex exponenciálisok	67
4.10.1.	Konvolúció tétel	67
4.11.	LTI rendszerek viselkedése	68
4.12.	H átviteli függvény	69
4.12.1.	Átviteli függvény meghatározása	70
4.13.	Képpalkotó rendszerek jellemzése	71
4.14.	Point Spread Function (PSF), 3D – 2D	72
4.15.	Milyen súlyfüggvényeket, milyen PSF-eket tapasztaltunk?	73
4.16.	Modulációs átviteli függvény, Modulation Transfer Function (MTF)	74
4.17.	Röntgen detektor MTF példák	75
4.18.	MTF mérése	76
4.18.1.	Vonalpár fantom	76
4.18.2.	Él módszer	78
4.18.3.	MTF és PSF kapcsolata	79
4.18.4.	Zaj	80
4.18.5.	Signal to Noise Ratio (SNR)	81
4.18.6.	Contrast to Noise Ratio (CNR)	82
4.19.	Zaj spektruma	84
4.20.	Zaj teljesítmény spektrum, Noise Power Spectrum (NPS)	84
4.21.	Normalizált NPS (NNPS)	85
4.22.	Zaj-ekvivalens kvantum, Noise Equivalent Quanta (NEQ)	86
4.23.	Detektálási kvantumhatékonyság, Detective Quantum Efficiency (DQE)	87
5.	Fourier térbeli analízis	88
5.1.	Folytonos Fourier transzformáció	88
5.1.1.	Fourier transzformáció tulajdonságai	90
5.2.	Folytonos Fourier Sorfejtés	91
5.3.	Diszkrét idejű Fourier transzformáció (DTFT)	92
5.4.	Mintavett jel jekonstrukciója	96
5.5.	Interpolációk összehasonlítása	96
5.6.	Integráló mintavételezés	97
5.7.	Diszkrét Fourier Transzformáció (DFT)	98
5.7.1.	DFT pontszáma	99
5.8.	DFT és DFS kapcsolata	99
5.9.	DFT és FFS kapcsolata	100
5.10.	Spektrumszivárgás - ablakozás	100
5.11.	2D DFT	101
5.12.	2d DFT konvolúciós tétele	104
5.13.	Polár koordinátás DFT	106
6.	Inverz problémák	109
6.1.	Maximum likelihood (ML) becslés	110
6.2.	Maximum a posteriori (MAP) becslés	110
6.3.	Direkt dekonvolúció	111
6.4.	Wiener inverz-szűrés	114
6.5.	Richardson Lucy algoritmus	118
6.6.	MAP becslések	120
6.6.1.	MAP becslés példa – stacionárius Gauss zaj, frekvenciatérbeli prior	121
6.7.	Ismertetett módszerek összegzése	122

7. Képfeldolgozó eljárások áttekintése	124
7.1. Képjavítás	124
7.1.1. Kontraszt javítás	124
7.1.2. Hisztogram széthúzás	125
7.1.3. Gamma korrekció	126
7.1.4. Globális hisztogram kiegyenlítés	127
7.1.5. Adaptív hisztogram módosítás	129
7.1.6. Lineáris zajszűrés	130
7.1.7. Éldetektáló szűrők	131
7.1.8. Élkiemelő szűrők	132
7.1.9. Éldetektálás zajérzékenysége	133
7.1.10. Élkiemelés elmosással	133
7.1.11. Élek kiemelése éldetektáló szűrőkkel	134
7.1.12. Nemlineáris szűrés	135
7.1.13. Homomorfikus szűrés	135
7.1.14. Order statistics szűrés	136
7.1.15. Medián szűrés	137
7.1.16. Adaptív szűrők (általános jelfeldolgozás)	138
7.1.17. Adaptív szűrők (képfeldolgozásban)	139
7.1.18. Élkiemelés adaptív szűréssel	141
7.1.19. Lineáris szűrés transzformált tartományban	142
7.1.20. PCA	143
7.1.21. Polinomiális szűrők	143
7.1.22. Volterra soros polinomiális szűrők	143
8. Képszegmentáló eljárások	145
8.1. Képszegmentálás	145
8.2. Él alapú képszegmentálás	146
8.2.1. Élkiemelő szűrők	147
8.2.2. Határvonal követés	148
8.2.3. Hough transzformáció	149
8.3. Régió alapú képszegmentálás	152
8.3.1. Régió növesztés	152
8.3.2. Régió darabolás és egyesítés	153
8.3.3. Graph cut eljárások	153
8.3.4. Textúra alapú analízis	154
8.3.5. Küszöbözés	158
8.3.6. Expectation–maximization algoritmus	160
8.4. Képszegmentálási eredmények	164
9. Deformálható modellek	166
9.1. Fourier sor alakmodell	166
9.2. ASM/AAM	167
9.3. ACM Snake	172
9.4. Lokális optimum probléma	172
9.4.1. Probléma kezelése multiscale szűréssel	172
9.5. GVF regularizáció	172
9.6. Esettanulmány	172

10.Regisztrációs eljárások	173
10.1. Képregisztráció célja	173
10.2. Regisztráció csoportosítása	176
10.3. Síkbeli geometriai transzformációk	176
10.3.0.1. Hasonlósági transzformáció	176
10.3.0.2. Affin transzformáció	177
10.3.0.3. Projektív transzformáció	177
10.3.0.4. Görbült transzformáció	178
10.4. Regisztrációs módszerek	179
11.Rekonstrukciós eljárások	180
11.0.1. Tipikus problémák	193
11.0.2. Fém artifakt	197
11.0.3. Páciens bemozdulása	198
11.0.4. Compton szóródás	199

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Orvosi képdiagnosztika nehézségei

Az orvosi képdiagnosztika a mai modern orvosi diagnosztika egyik legfontosabb eszköze. Természetesen léteznek olyan betegségek, amelyeket képdiagnosztika nélkül, például vérből is ki lehet mutatni, de számos olyan betegség akad, aminek diagnosztizálásához valamilyen képalkotási eljárásra van szükség.

Ezeknél a képalkotó folyamatoknál figyelembe kell venni, hogy élő szervezeteket vizsgálunk, ami lényegesen korlátozza a felhasználható módszereket. A képalkotás során a célunk a vizsgált szervezet strukturális, illetve funkcionális feltérképezése, majd az adatok felhasználásával a szervezet gyógyítása, így kifejezetten figyelni kell arra, hogy a képalkotási folyamat ne okozzon egészségügyi károsodást. Valójában ez adja a fő nehézségét ezeknek a módszereknek. Minden képalkotó modalitás (röntgen, CT, PET) esetén meg lehetne oldani nagyon jó minőségű képek készítését, ám ekkor túl nagy lenne az ionizáló hatás, ami roncsolja a sejteket.

Ezen problémák következtében az orvosi képdiagnosztika az átlagos képfeldolgozási feladatoknál nehezebb problémát jelent, és így rosszabb, zajosabb képeket eredményez. Az orvosi képdiagnosztika során keletkezett képek értelmezéséhez sokszor elengedhetetlen a szakorvosi ismeret. A felvételek feldolgozásával a radiológus foglalkozik. Ez egy nehéz szakma, az egyetem elvégzését követően több tíz év tapasztalat szükséges, és nagy felelősségű döntéseket kell meghozni például sebészeti beavatkozás szükségességéről vagy rosszindulatú daganat azonosításáról.

Ezért felmerül az igény a képek értelmezésének könnyítésére a számítástudomány segítségével. Fontos cél egyrészt a képminőség javítása különféle rekonstrukciók eljárások alkalmazásával, másrészt orvosi döntéstámogató (CADe) és diagnosztikát segítő (CADx) rendszerek készítése. Az orvosi döntéstámogató eszközök általában az elváltozásokat, daganatok próbálják meg kiszűrni, és ezeket a felvételeken megjeleníteni.

1.2. Funkcionális képalkotó modalitások

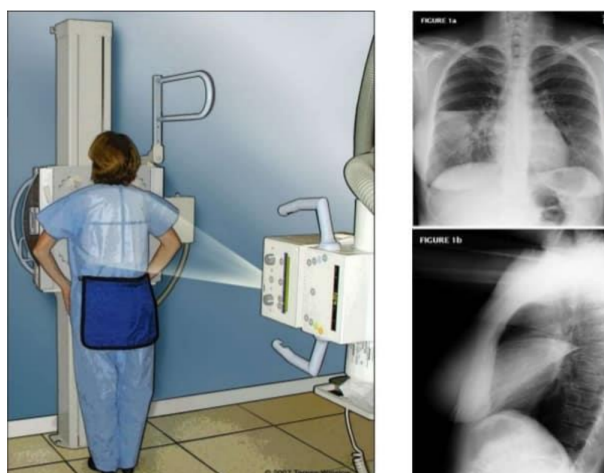
A szervek működésének megfigyelésére alkalmas modalitásokat az alábbi csoportokba lehet sorolni:

- Transzmissziós tomográfias eszközök
 - Azt vizsgálják, hogy a kívülről jövő vizsgálójel (fotonnyaláb) hogyan terjed a vizsgált páciensen belül, mekkora része jut át.
 - Ebbe a kategóriába sorolható a röntgen és a CT.

- Vizsgálójel reflexióján alapuló képalkotó eljárások
 - Leginkább lágy szövetek vizsgálatára szokták használni, például emlő vizsgálatára vagy hasi vizsgálatra.
 - Ezek a módszerek nem ionizálnak, így nem roncsolják a sejteket.
 - Ide sorolható az MRI és az ultrahang
- Funkcionális képalkotó modalitások
 - Ezek a módszerek fiziológiai aktivitásokat monitoroznak, tehát azt használják ki, hogy a daganatokra, gyulladásos területekre jellemző, hogy nagy tápfelvétellel rendelkeznek.
 - Ide sorolható a Pozitron emissziós tomográfia (PET).

1.3. Projekciós röntgen

A projekciós röntgen esetén a sugárforrás a páciens irányába röntgensugarakat bocsát ki, amiket a csillapítást követően az állítható detektor érzékel. Mellkasröntgen vizsgálatoknál a posterior/anterior felvételek mellett sokszor laterális (oldalirányú) képet is készítenek, mert a szív és a bordák könnyen eltakarhatják a daganatot.



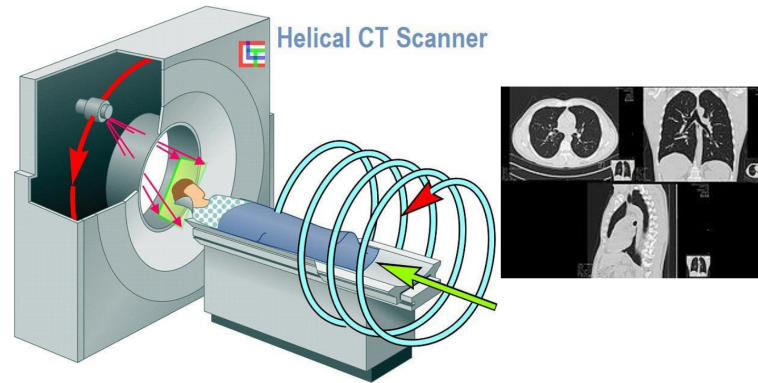
1.1. ábra. Projekciós röntgen

1.4. Számított tomográfia (CT)

A CT segítségével pszeudo háromdimenziós képeket lehet alkotni. A képen egy első generációs berendezés látható. A különböző generációk eltérő célokra alkalmasak, nem feltétlenül jobbak vagy rosszabbak a másikonál.

A vizsgálat során a páciens ráfektetik egy asztalra, ami translációs mozgást végez merőlegesen a sugárforrás és a detektor síkjára. A sugárforrás-detektor pár folyamatosan, konstans szögsebességgel pörög, miközben az asztal translációs mozgást végez. Így, ha a páciens testében kijelölünk egy inercia pontot, akkor ezen pont körül a sugárforrás helikális projektóriát készít.

A képen három felvétel látható. A bal felső az axiális szeletet, a jobb felső a koronális (mellkassal párhuzamos) szeletet, az alsó kép pedig a szagittális (oldalirányú) szeletet ábrázolja.

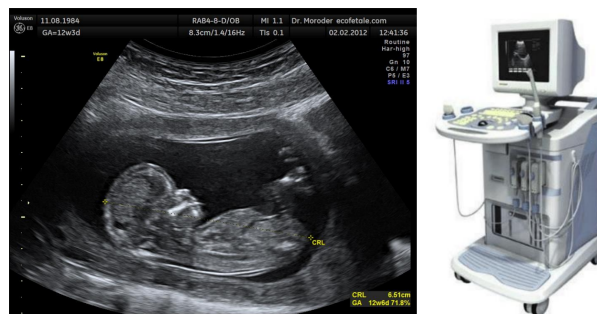


1.2. ábra. Első generációs CT

1.5. Ultrahang (UH)

Az ultrahang esetén rugalmas, rezgésre alkalmas elemeket tartalmazó közegekben kifejtett mechanikai hatás következtében visszaverődő rezgések alapján történik a képalkotás. A vizsgálat során hanghullámokat bocsátanak ki, melyek a térfogat többé-kevésbé homogén tartományainak határaitól különböző fáziseltolással detektálódnak vissza.

Előnye, hogy nem nagyon roncsolja a szervezetet, illetve ez a legolcsóbb képdiagnosztikai eljárás.



1.3. ábra. Ultrahang

1.6. Pozitron emissziós tomográfia (PET)

A PET nagy tápanyagfelvételű területek, például gyulladások és daganatok vizsgálatára alkalmas. A vizsgálat során cukorhoz molekulárisan kötnek radioaktív bomló anyagot, és ezt a tápanyagot befecskendezik a szervezetbe, amit a daganat, illetve gyulladós terület magához vesz. A tápanyagok elfogyasztását követően ezen szervek helyén a radioaktív bomlás következtében gamma fotonpárok keletkeznek, és ezek becsapódását méri az eszköz.

Mivel az agy nagy tápanyagfelvétellel rendelkezik bármilyen gyulladás vagy elváltozás nélkül is, így agyi működési folyamatok is jól monitorozhatóak PET segítségével. A képalkotás során a páciens stabil helyzetben körülbelül 10 percre egy csőszerű képződménybe fektetik. A lyuk körül egy stabil detektor gyűrű található, ami a felvétel készítése alatt folyamatosan rögzíti a becsapódó gamma fotonpárok számát.

A képen is látszik, hogy az elkészített felvételek nem tartalmaznak sok strukturális információt és túl finom lokalizációt, ezért szoktak mellé CT felvételeket is készíteni, ami segít a nagy tápanyagfelvételű szerv azonosításában.

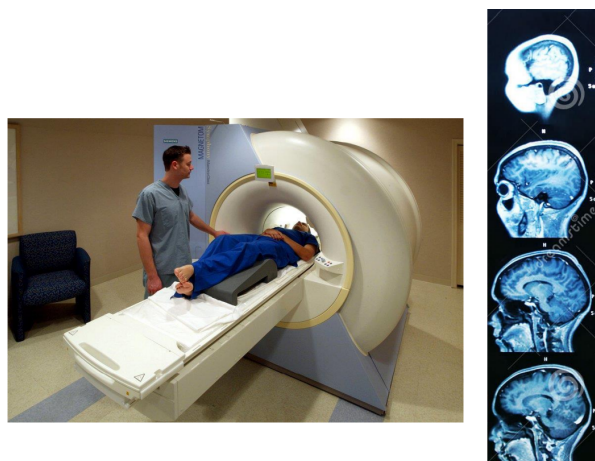


1.4. ábra. Pozitron emissziós tomográfia

1.7. Mágnesesrezonancia-képkötés (MRI)

A 30 perces MRI vizsgálat során sok Tesla-s elektromágneses teret kapcsolnak be, amivel a hidrogénatomokban lévő elektronok spin-jét növelik. Ezek a tér lekapcsolásával visszarendeződnek, és a visszarendeződés során mágneses sugárzást bocsátanak ki, amit a készülék mér. Tehát lényegében az MRI azt vizsgálja, hogy egy adott térfogaton belül milyen hidrogénsűrűség van.

Ezzel a módszerrel csak stabil szervek vizsgálhatók, így például a szív vagy a tüdő monitorozására nem alkalmas.



1.5. ábra. MRI

1.8. Orvosi képdiagnosztika képeinek fő jellemzői

Az orvosi képdiagnosztika képeit az alábbiak jellemzik:

- Általában intenzitás felvételeket készítenek, és ezeket szürkeárnyaltos képeken vizualizálják, melyek színezésére utólag van lehetőség
- A térbeli felbontásuk széles tartományt fed le, pár száz pixeltől néhányszor tízmillió voxelig terjedhet.
 - A megfelelő felbontás kiválasztása nem egyszerű feladat.
- Az intenzitás felbontásuk (gradációs felbontásuk) tipikusan 8-16 bit között mozog.

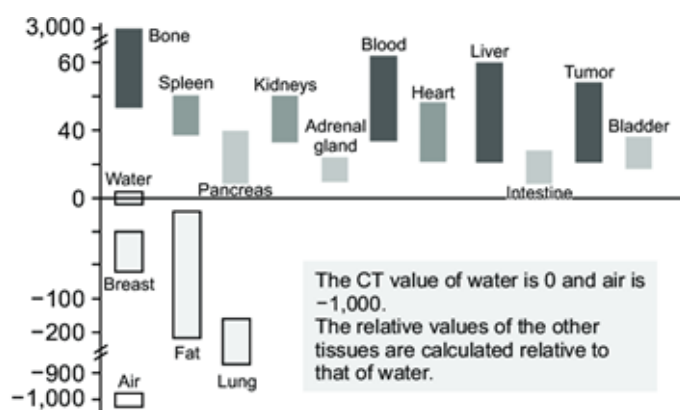
- Az ember körülbelül 7 bitet tud megkülönböztetni, ezért majd az ablakozás segítségével fogjuk ezt a tartományt kihúzni az emberi szem által érzékelhető tartományra.
 - A legtöbb orvosi szoftverben beégetve vannak ilyen ablakok csontok, lágyrészek, illetve tüdő régiók kiemelésére.
- Nagy információmennyiséggel kell dolgozniuk, egy vizsgálat elkészítéséhez akár több száz képre is szükség lehet.
 - Viszonylag gyors (sokszor valós idejű) kiértékelésre van szükség.
 - A felvételek minőségét különböző zajforrások rontják:
 - Az *inherens zajt* a képképzés zaja generálja.
 - Az *anatómiai zaj* főleg szummációs képeknél jelenik meg abban az esetben, ha a szervek átvetülnek egymásra.
 - A *rekonstrukciós* eljárások főleg kisméretű zajokat eredményeznek.

1.9. Képképző eljárások sajátosságai

A képképzés folyamatát különböző fizikai jelenségek és törvények segítségével modellezzük. A modellalkotás során meg kell hozni egy kompromisszumot a modell hibái és komplexitása között. A megfelelő pontosságú modellek sajnos a gyakorlatban nem alkalmazhatóak, a primer (érzékelő kimenetén lévő) képek diagnosztikára sokszor alkalmatlanok. Ezért gyakran a felvételek manipulálására van szükség, vagy komplex eljárásokkal más jelet kell előállítani belőlük.

A képképző eljárásoknak hatalmas a számítási erőforrásigényük, egy finom CT rekonstrukció akár GB-os nagyságrendű adatot is generálhat. Ennek ellenére sokszor fontos követelmény a gyorsaság.

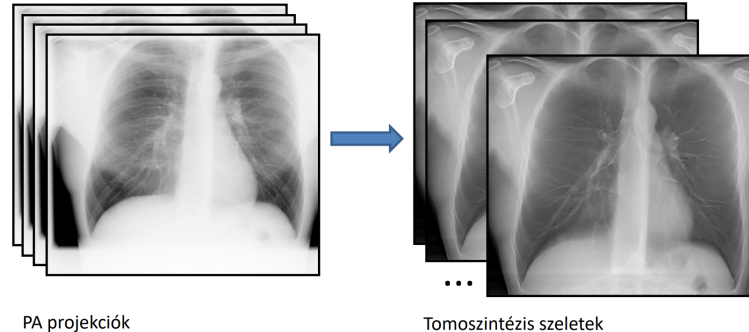
A képképző eljárásokkal szemben gyakran megjelenik a kvantitatív képképzés követelménye, tehát, hogy a voxelekhez a sűrűségérték alapján hozzárendelhető legyen az ott látható anyag vagy szerv. Sajnos ez nem oldható meg ilyen egyszerűen, egyrészt a keletkező zajok miatt, másrészt a Hounsfield skálán is látható jelenség miatt, miszerint a szervek sűrűségértékei között átfedések vannak.



1.6. ábra. Hounsfield skála

1.10. Rekonstrukciós példa

A képeken egy tanszéki projekt során készült lineáris tomoszintézis rekonstrukció eredményei láthatóak. A rekonstrukció során a bal oldali szummációs képekből állították elő a jobb oldalon látható koronális szeletmetszeti képeket.



1.7. ábra. Lineáris tomoszintézis rekonstrukció

1.11. Orvosi döntéstámogatás

Az orvosi képdiagnosztika sokszor monoton, fárasztó, nehéz feladat, mégis hatalmas felelősség van a felvételeket vizsgáló szakemberen, hiszen sokszor emberek fizikai léte múlik a döntéseken. Tovább nehezíti a feladatot, hogy gyakran sajnos az alkalmazott képalkotás nem alkalmas arra, amire használják.

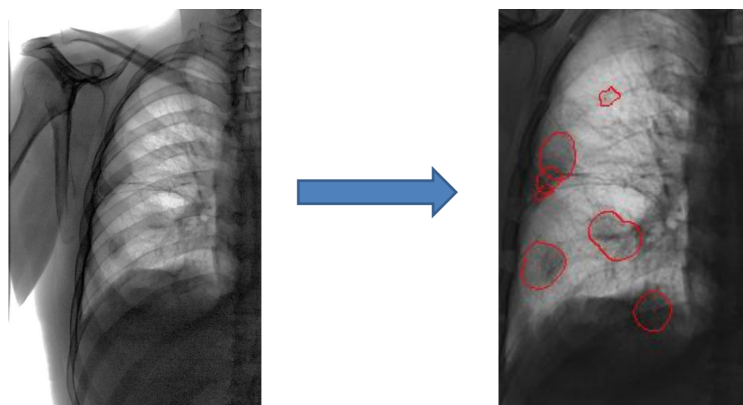
Erre példa a posterior/anterior röntgen daganatos megbetegedések szűrésére való alkalmazása. Egy amerikai tanulmány kimutatta, hogy átlagosan több évvel azelőtt már ott van a felvételen a daganat árnyéka, mielőtt azt detektálnák.

A daganatos megbetegedéseket négy stádiumba szokták sorolni annak megfelelően, hogy milyen fejlettségi szintnél tart. A táblázat első sora az 5 éves túlélési rátákat mutatja sikeres kezelést követően. A második sorban pedig a diagnózisok aránya látható. Látható, hogy a második stádiumban még 30%-os túlélési rátát lehet elérni, de sajnos csak a megbetegedések kevesebb, mint 25%-át tudják ehhez elég korán felismerni.

Tüdő daganatok (nem kissejtes)	Stádium I	Stádium II	Stádium III	Stádium IV
5 éves túlélési ráta	47%	30%	10%	1%
Diagnózisok aránya	14.5%	7.3%	31.8%	35.8%

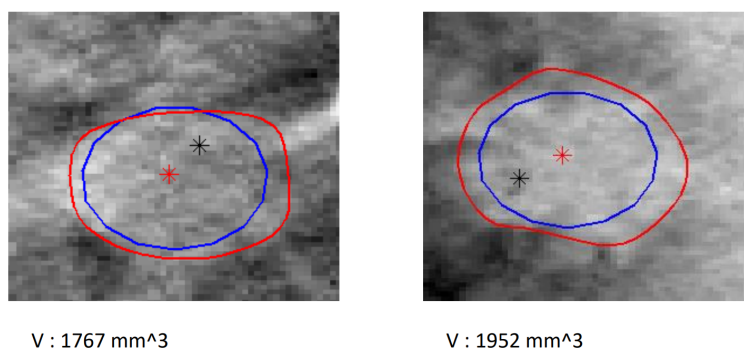
1.8. ábra. Daganatos megbetegedések stádiumai

A megfelelő képalkotó modalitások alkalmazásával javítható a detektálási ráta. A képek algoritmikus elemzésével, és döntéstámogató rendszerek alkalmazásával a betegségek korai szakaszában is kiemelhetők daganatos elváltozások a posterior/anterior röntgenfelvételeken. A képen egy tanszéki projekt eredménye látható, amely során egy posterior/anterior felvételtől döntéstámogató rendszer segítségével eltávolították a bordákat, majd az így kapott képen azonosították a daganatos elváltozásokat.



1.9. ábra. Bordák eltávolítása

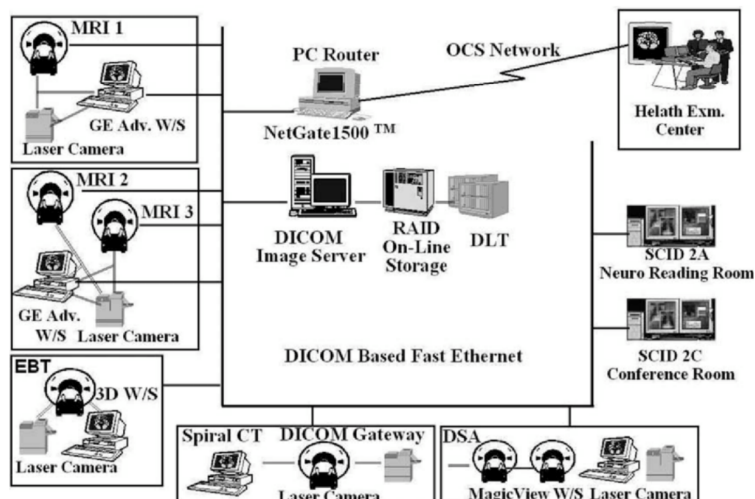
Egy másik tanszéki projekt során daganatok térfogatát becsülő orvosi döntéstámogató eszköz készült. Ez először egy késsel jelölt gömbmodellt illeszt a daganatra, majd ezt egy háromdimenziós szegmentáló eljárással (úgynevezett snake eljárással) finomítva állítja elő a pirossal jelölt finomított modell. A módszer előnye, hogy két azonos képen pontosan ugyanott fogja megjelölni a daganat határait, míg egy orvos sosem fogja pontosan ugyanott meghúzni a daganat határait. Így ezzel a döntéstámogató eszközzel sokkal pontosabban lehet egy daganatot monitorozni, mint kézi szegmentálással.



1.10. ábra. Daganat térfogatának becslése

1.12. PACS rendszerek

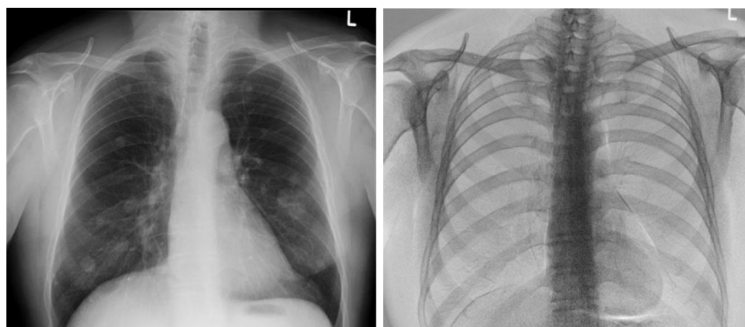
A kórházakban készült felvételeket PACS (Picture Archiving and Communication System) rendszerekben tárolják. Ezekkel szemben fontos követelmény, hogy egy betegről bármelyik magyarországi kórházban készült felvételt bármelyik másik magyarországi kórházban el tudják érni. A rendszerek kiépítésekor fontos szempont a robusztusság, illetve a támadások és fizikai amortizáció elleni védelem.



1.11. ábra. PACS rendszerek

1.13. Duál energiás röntgen

A duál energiás röntgenek célja a nagy csillapítási együtthatóval rendelkező részek (például csontok) leszűrése. Ehhez az alábbi képen látható két felvételt készítik el, egy normál és egy nagy energiás röntgenfelvételt. Az utóbbi esetén csak nagy energiájú fotonokat használnak, melyeket csak a bordák és a csontok csillapítják.



1.12. ábra. Normál és nagy energiás felvétel

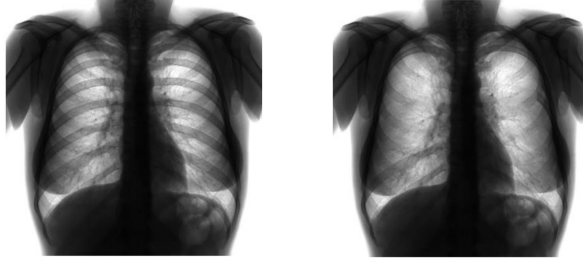
A nagy energiás felvétel segítségével eltüntethetőek a csontok a normál energiás felvételtől, és így sokkal jobban láthatóvá válnak a tüdőben a daganatos áttétek.



1.13. ábra. Normál energiás felvétel bordák nélkül

1.14. Jelfeldolgozással kivitelezett bordátlanítás

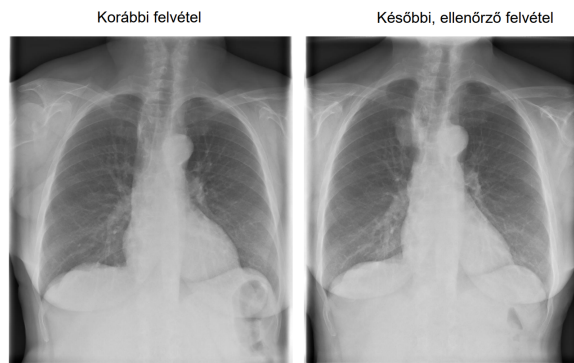
Ezen tanszéki projekt során elkészült módszer esetén a bordák eltüntetése szoftveresen történik, nincs szükség nagyenergiás felvételre, így a páciens fele akkora sugárterhelést kap, mint az előző esetben.



1.14. ábra. Bordák eltávolítása szoftveresen

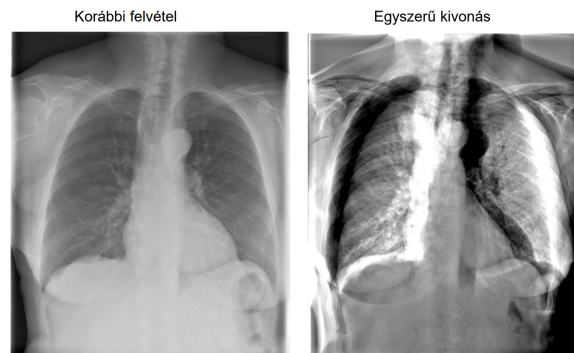
1.15. Időbeli követés

Gyakori elvárás, hogy egy páciensről különböző időpontokban készült képeket össze lehessen hasonlítani.



1.15. ábra. Ellenőrző felvétel

Ez egy nehéz feladat, mivel egyrészt nem biztos, hogy pontosan ugyanolyan helyzetben volt a páciens minden felvétel elkészítésekor, másrészt nem biztos, hogy ugyanúgy nézett ki a páciens, mivel előfordulhat, hogy időközben meghízott. Így az alábbi képen látható egyszerű kivonás nem is alkalmazható, mert szinte mindenhol eltérést fog mutatni.



1.16. ábra. Egyszerű kivonás

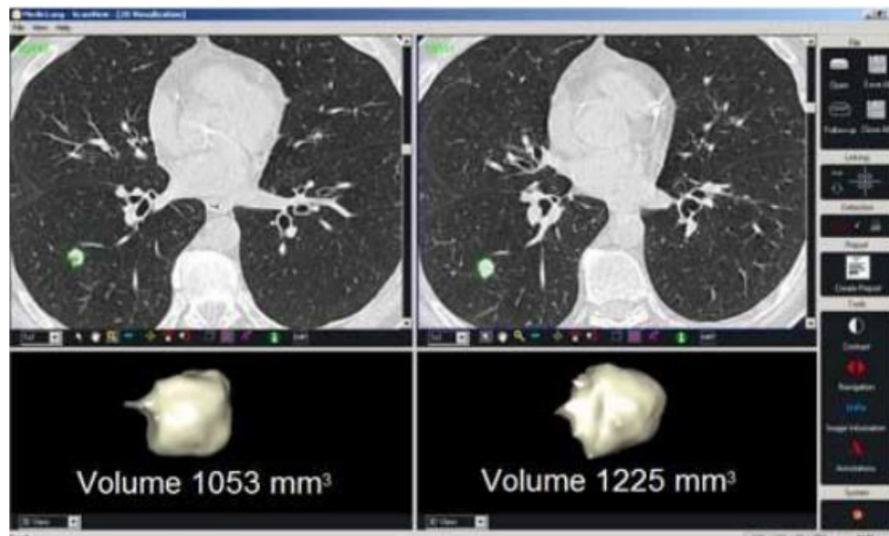
Ezért először szükség van egy merev testes regisztráció elvégzésére. Ha ezt követően készítjük el a különbségképet, akkor már lényegesen jobb eredményt kapunk.



1.17. ábra. Különbségkép

1.16. Tumor viselkedésének monitorozása

Fontos feladat a CT felvételeken történő 3D szegmentálás is, egyrészt azért, mert a tumorokat az orvosi protokoll aszerint osztályozza, hogy hogyan változik a térfogatuk, másrészt a sebészeti beavatkozások előkészítéséhez pontos információkra van szükség a tumor elhelyezkedéséről és térbeli kiterjedéséről. Mindkettő megköveteli a robusztus szegmentációt, amit kézi szegmentációval nem lehet megvalósítani.



1.18. ábra. Tumor viselkedésének monitorozása

1.17. Tumor a szív árnyékában

Szabad szemmel nehéz lehet észrevenni a szív árnyékában elhelyezkedő elváltozásokat, viszont képfeldolgozáson alapuló módszerek segítségével eltüntethető a szív árnyéka, és így felismerhetővé válik a tumor.



1.19. ábra. Tumor a szív árnyékában

2. fejezet

Digitális képalkotás fizikája, képek tárolása

Ebben a fejezetben a képalkotás általános működéséről lesz szó, emellett említésre kerülnek röntgen specifikus információk, melyek részletesebb leírására a röntgent tárgyaló fejezetben kerül sor.

A tárgy keretein belül alapvetően a képek keletkezése kerül kivizsgálásra nem matematikai és rendszerelméleti modellek szintjén, hanem fizikai aspektusból. Bizonyos dolgok figyelmen kívül maradnak, melyek általános képalkotás során fontosak lehetnek, ilyen például a lencsék működése, valamint az ezekből származó torzítás. Ennek magyarázata, hogy az említésre kerülő orvosi képalkotó modalitások (pl. CT, PET) működésének, fizikájának a nagyon részletekbe menő taglalására nem terjed ki a tárgy anyaga idő hiányában.

A fejezet második felében a képek tárolásának főbb formátumairól és ezen formátumok által hordozott tulajdonságokról lesz szó.

2.1. Jelforrások

Képalkotás során a vizsgáló jelet fotonok jelentik, nagyobb absztrakciós szinten: a fény.

A fény egy elektromágneses sugárzás, tehát egyszerre változik az elektromos és a mágneses térerősség vektor, melyek egymásra, valamint a fotonok terjedésének irányára is merőlegesek.

A foton részecske és hullám tulajdonsággal is bír, amely főleg a részecske tulajdonságok szempontjából kerül részletezésre, viszont a fizika más területein érdekes lehet a hullám tulajdonság is. A fotonok osztályozása energiájuk szerint történik, az alapján dől el, hogy különböző anyagokkal találkozáskor, milyen kölcsönhatásba lépnek és ennek következtében, hogyan lehet képalkotás során felhasználni.

A hang is egy lehetséges jelforrás képalkotáshoz, mely a rugalmas közeg mechanikai rezgése és hullámmozgásként modellezhető. Erre részletesebben nem tér ki a fejezet.

2.2. Elektromágneses sugárzás

A fény tehát egy elektromágneses sugárzás. A foton terjedési irányára merőleges síkban megjelenik az elektromos és a mágneses térerősség vektora, ezek vannak az ábrán pirossal és késsel jelölve. Egymásra is merőlegesek és attól függetlenül, hogy milyen polarizáció van, mindig a foton trajektóriájára merőleges síkban lesznek.

Nagyon fontos tulajdonság az elektromos és a mágneses térerősség vektor által végzett mozgásnak a hullámhossza (λ), illetve a hullámhossz reciproka melytől a foton energiája

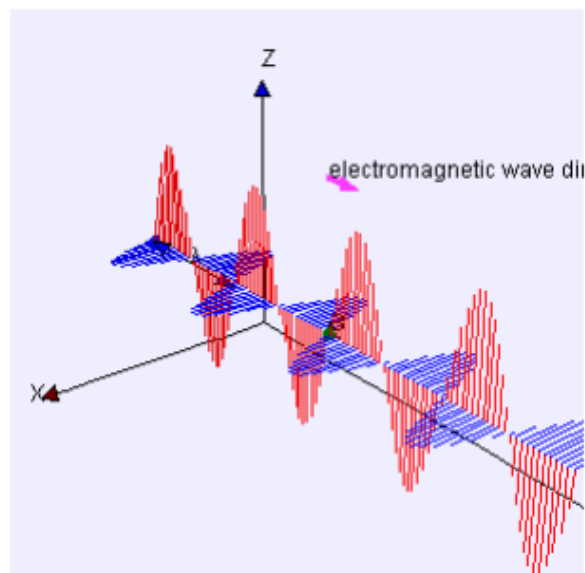
függ.

$$E = h * (c/\lambda)$$

Ahol h a Planck-állandó, c a fénysebesség, λ pedig a hullámhossz, ami a fotonok viselkedését határozza meg.

Amit még érdemes tudni, hogy Einstein megközelítés szerint energia kvantumként tekintenek a fotonra, melynek nyugalmi tömege zérus, viszont a sebessége állandó. Különböző közegekben vizsgálva a fénytörést, az tapasztalható, mintha ezen tulajdonságok nem teljesülnének. Ennek az egyszerű oka, hogy a pillanatnyi sebessége ott is végig állandó, csak a terjedés során több különböző kölcsönhatást szenved el annak függvényében, hogy milyen az adott közeg. Például rugalmasan ütközik, ezáltal hosszabb utat kell megtennie és a látszólagos sebessége kisebb lesz. A fény érzékelhető terjedési sebessége vákuumban a fénysebesség.

A polarizáció azt vizsgálja, hogy milyen pályát ír le az elektromos és a mágneses térerősség vektor, azon kívül, hogy ezek merőlegesek a foton terjedésének irányára. Egy sík-polarizált hullám esetén egy síkon belül marad az elektromos és a mágneses térerősség vektor, de lehetne például kör-polarizált is, mely esetén helikális pályát ír le a két vektor.



2.1. ábra. Elektromos és mágneses térerősség vektorok.

2.3. Fotoelektromos kölcsönhatás

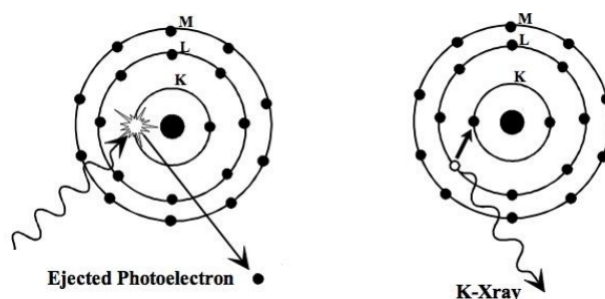
Milyen kölcsönhatásoknak esnek a fotonok áldozatul?

- Koherens szóródás,
- inkoherens szóródás,
- fotoelektromos kölcsönhatás,
- párkeltés.

Ezek közül a fotoelektromos kölcsönhatás, ami a leginkább fontos számunkra. Ennek során egy relatíve nagy energiájú foton mozgása során összeütközik egy atommag körül keringő elektronnal. Annak megfelelően, hogy milyen távol van az atommagtól, más kötési és más helyzeti energiával fog rendelkezni. Fontos, hogy a kölcsönhatás bekövetkezéséhez, annak kell teljesülnie, hogy a foton energiája (E_f) nagyobb legyen, mint az elektron kötési energiája (E_{ke}). Kettejük között egy rugalmatlan ütközés zajlik le, amely során a becsapódó foton megszűnik létezni és teljesen kiüti az elektront. A foton energia többlete a kiütött foton mozgási energiáját (E_{me}) fogja fedezni, ez alapján lesz sebessége.

$$E_f = E_{ke} + E_{me}$$

Jellemzően nagyobb kötési energiájú héjyaknál játszódik le a folyamat, ennek következtében az instabil atomok próbálják stabilizálni önmagukat. Stabilizáció során egy kintebbi elektron bekerül egy bentebbi héjra. Ezen folyamat során elvesztett potenciális energiát kisugározza foton formájában. Az ábrán a K pályáról kiütött elektron következménye lesz az emittált karakterisztikus foton (K X-ray).



2.2. ábra. Foton rugalmatlanul ütközik egy elektronnal.

Ez a fő kölcsönhatás teszi lehetővé a röntgen illetve más alapú képalkotást. Minél nagyobb rendszámú (Z) elemet vizsgálunk, annál nagyobb kötési energiák jelennek meg és annál több héj van, növelve az esélyét annak, hogy a foton olyan elektronnal találkozik, amit ki tud ütni. A kölcsönhatás bekövetkezésének valószínűsége a rendszám harmadik hatványától, illetve a foton energiájától függ.

$$\text{Kölcsönhatás gyakorisága} \propto (Z/E_f)^3$$

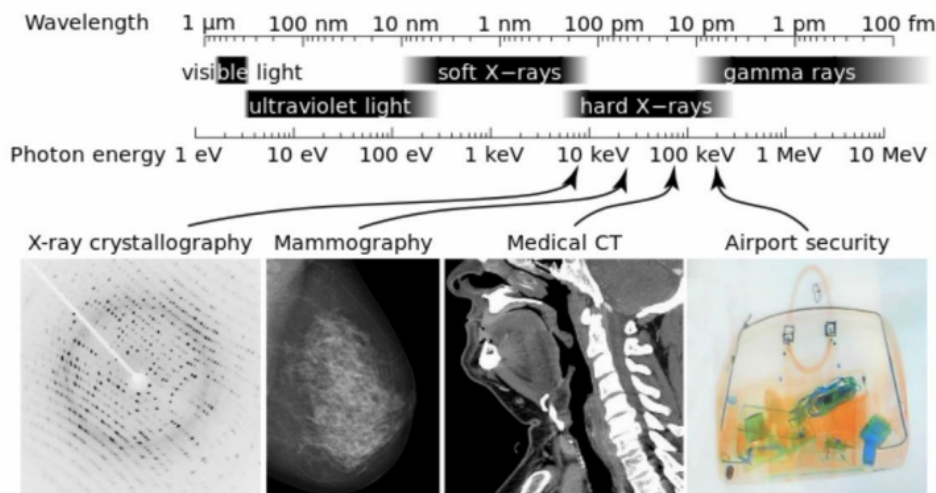
Amit még érdemes tudni, hogy alacsonyabb rendszámú anyagok esetén a röntgen foton tipikusan a K héjon lévő elektronokat tudja kilökn.

2.4. Fotonok energiája

A látható fény a mikrométeres tartományban van, ami eV-os nagyságrendű energiával rendelkezik. Ennél számunkra érdekesebb az UV sugárzás, ami már a 10 eV-os tartomány, de még inkább a röntgenek, amelyeknél nm-es hullámhosszokról van szó és az energiát tekintve az 1-10-100 KeV nagyságrendekről.

Röntgenen belül is léteznek különböző csoportosítások, melyek értékei leolvashatók az ábráról. A lág röntgen könnyen elnyelődik a fotoelektromos kölcsönhatás során, ennek következtében olyan szerveket érdemes vele vizsgálni, ahol nincsenek nagy csillapítási együtthatójú anyagok, ilyen például az emlő vagy különböző légyszövetes részek. Viszont ahol csontok is elkezdnek megjelenni az tapasztalható, hogy a 10 KeV-os vizsgáló jel alkalmasan gyakorlatilag bármilyen képalkotásra, emiatt növelni kell a vizsgálójel energiáját.

Minél nagyobb rendszámú anyagokat kell vizsgálni, annál nagyobb energiájú foton szükséges ahhoz, hogy ezeken az anyagokon keresztül tudjanak menni. Ilyen értelemben véve, tehát fontos tudni, hogy a foton energiája determinálja a kölcsönhatást adott anyagok esetén.

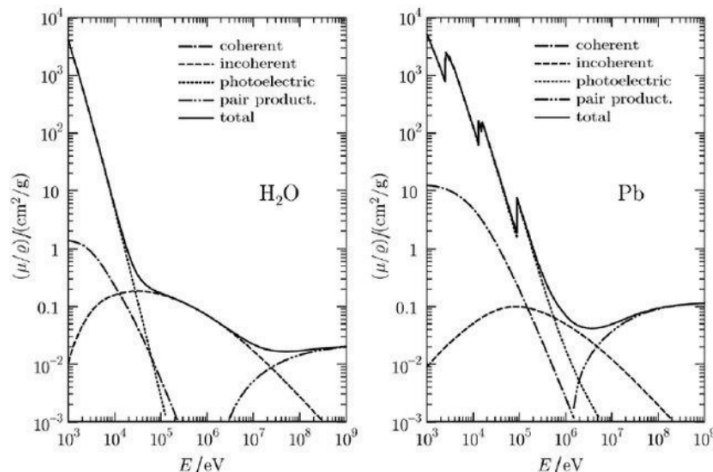


2.3. ábra. Fotonok energiája.

2.5. Fotonok kölcsönhatásai

Különböző anyagoknál eltér a kölcsönhatás bekövetkezésének valószínűsége. Az ábrán a vízszintes tengelyen a becsapódó foton energiája, függőleges tengelyen a tömeggyengítési együttható, pontatlanabban megfogalmazva a bekövetkezési valószínűség látható. Azt mutatja meg, hogy adott sűrűségű anyagban és annak adott vastagságú szeletét tekintve mennyivel gyengül a rajta áthaladó fotonok kinetikus energiájából visszszámolható tömege.

Bal oldalon a víz, jobb oldalon az ólom látható. Víznél 1-100 KeV esetén a fotoelektromos kölcsönhatás dominál, alatta a koherens szórás, fölötté a gamma fotonos tartományban az inkohérens/Compton szóródás és nagyon magas energia tartományban a párkeltés jelensége figyelhető meg. Az utóbbira épülő képalkotó modalitások nem elterjedtek a gyakorlatban. Ezek összege határozza meg a kölcsönhatások bekövetkezésének az eredőjét, hogy mekkora valószínűséggel tud adott energiájú foton áthaladni az anyagon. Víz esetén ez egy szép görbe, viszont ólom esetén tüskék jelennek meg a tömeggyengítési együtthatón. Ezek a karakterisztikus tüskék, amik a csillapítási együtthatókon láthatóak annak a következményei, hogy a foton éppen meghaladja a bentebbi héjon található elektronok kötési energiáját, melyeket nagyjából két-háromszor nagyobb valószínűséggel tud kiütni. Ólom esetén több elektron héjat érint a kölcsönhatás, mint víznel.



2.4. ábra. Fotonok kölcsönhatásai energiájuk függvényében.

2.6. Fényérzékelés folyamata

A fény érzékeléséhez szükséges egy eszköz, amivel a vizsgáló jelet mérni lehet, ez a fotodióda. Ez történhet beütés számlálóval vagy integráló detektorral, amely adott ideig gyűjti magába a töltéseket. Ezt követi egy analóg erősítő, majd egy analóg-digitális átalakító, melynek eredményeként előáll a digitális kép.

2.7. Félvezetők működési elve

A detektáláshoz a félvezetők működési elvét érdemes ismerni. Kristályszerkezetű anyagokról van szó, melyek jellemzője, hogy az elektronok nem 1-1 atommag köré vannak szigorúan kötve, hanem sávokban helyezkednek el és ezáltal töltéseket tudnak ezek az eszközök szállítani. A fémek ilyen jellegű szerkezet kialakulására hajlamosak. A töltés szállításában résztvevő elektronok két diszkrét energia sávba oszlanak:

- vegyértéksávba és
- vezetési sávba.

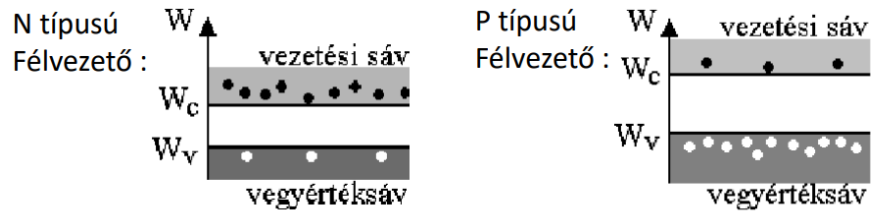
A vegyérték sávon lévő elektronok alapvetően helyhez kötöttek. Viszont félvezetők adalékolása esetén könnyen kialakulnak lyukak, ami arról szól hogy koherens jellegű kötésből hiányzik az egyik elektron. Az áram szállításában ezek a lyukak is részt vesznek.

A másik sáv a vezetési sáv, nagyobb energiájú elektronokat tartalmazó sáv, amik elszakadnak az eredetileg a közösbbe beadó atommagjuktól és mivel nincsenek helyhez kötve, szépen ezen a kristályrácsos mozogni képesek. Töltés szállításában ők is aktívan részt tudnak venni.

Adalékolt kristályrács esetén N típusú félvezetőnél az adalékolás olyan anyaggal történik, aminek a külső elektronhéján lévő elektronok száma eggyel nagyobb lesz, mint a kristály szerkezet nagy részét felépítő anyag külső elektronhéján lévő elektronok száma, így ezek az elektronok helyhez kötött koherens jellegű kötéssel nem igazán tudnak beilleszkedni ebbe a szerkezetbe. Ezek az elektronok egyből a vezetési sávban fogják találni magukat.

A P típusról akkor van szó, amikor olyan atommal szennyezik a szerkezetet, ahol eggyel kisebb elektron szám van a külső elektronhéjon, mint a domináns anyagnál. Ebben az

esetben a domináns anyagnak lesznek olyan elektronjai, amik a vegyérték sávban vannak és nincs olyan elektron amihez kötni tudnának, ezek lesznek a lyukak.



2.5. ábra. N és P típusú félvezető.

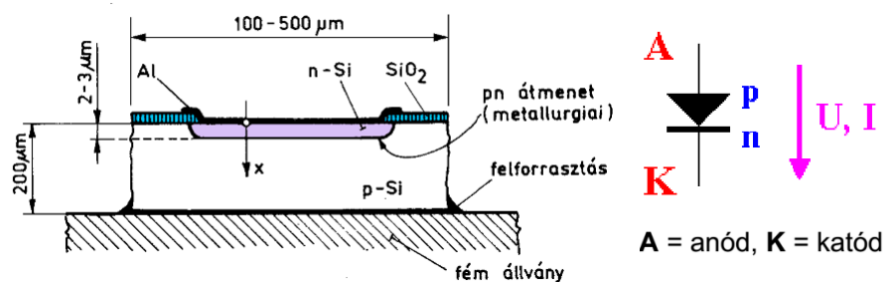
Az hogy melyik elektron melyik sávban van, az leginkább a kinetikus energiájától függ.

A félvezetők olyan anyagtypust alkotnak, amely esetén nagyon kevés elektron képes a vezetési sávba felkerülni külső komolyabb gerjesztés nélkül. A félvezető annak ellenére, hogy nagy ellenállású anyag nem viselkedik teljesen szigetelőként és nem is vezető.

A két sáv közötti mozgáshoz szükséges energiát jellemzően a termikus energia vagy a külső elektromos térerősség tudja biztosítani. Hőközlés esetén a termikus energia az elektronok mozgási energiájává alakul, és az az elektron amelynek az energiája elegendően nagy ahhoz, hogy a potenciálgátat átugorja, az elszakad az őt beadó atomtól és bekerül a vezetési sávba.

2.8. Diódák működési elve

A félvezetőket az elektronikában már több évtizede használják, belőlük épül fel többek között a számunkra nagy jelentőséggel bíró dióda, melyet két különböző típusú félvezető alkot. Az ábrán az N típusú félvezető lila színnel van jelölve, míg a P típusú fehérrel. Ezekből a félvezetőkből fegyverzetet alakítanak ki: P-típus az anód, N-típus a katód.



2.6. ábra. Fotódióda felépítése.

A lyuk többlettel rendelkező anódra nagyobb potenciál van kapcsolva, mint az elektrodokkal rendelkező katódra. Amennyiben a kapcsolt potenciálkülönbség meghaladja a 0.7 V-os küszöbértéket megindul a töltések áramlása.

A P-típusú félvezetőben lyukak vannak, míg az N-típusú félvezetőben elektronok. A mozgásképes vezetési sávban lévő elektronok elkezdik kitölteni a hozzájuk közel lévő lyukakat, ennek következtében kialakul egy kiüresedett/átmeneti tartomány. Az átvándorolt elektronok miatt a P-típusú félvezető N-típusú oldala felőli részén negatív, és az N-típusú félvezető P-típusú oldalán pozitív potenciál jelenik meg. Köztük alakul ki a kiüresedett tartomány, ahol nincsenek se elektronok, se lyukak, és ahhoz hogy elektronok át tudják lépni, olyan elektromos térerőt kell kapcsolni rá, ami le tudja küzdeni ezt a potenciálgátat.

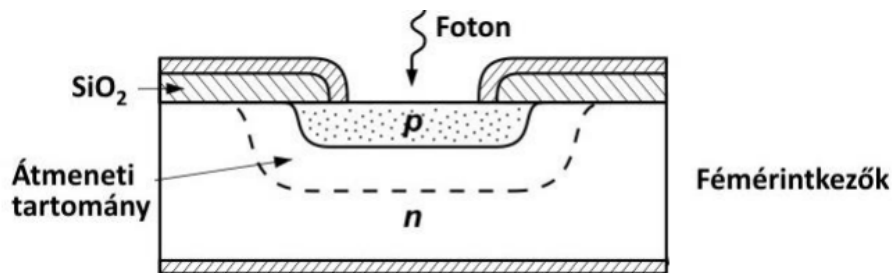
Így alakul ki a 0.7 V-os küszöbérték, amit meghaladva képes vezetni az eszköz. Amennyiben ennél kisebb a potenciálkülönbség az anód és katód között, akkor csak a termikus mozgás miatt kialakuló úgynevezett sötétáram folyik rajta. Itt jön képbe a záróirányú előfeszítés, melynek elvét a fotodiódákban alkalmazzuk. A záróirányú áram nagysága a hőmérséklet növekedésével exponenciálisan nő.

Elektronikában az áram iránya az elektronok haladásával ellentétes, tehát ebben az esetben az anód felől folyik a katód irányába.

2.9. Félvezető diódák

A félvezető fotodiódák az átmeneti tartományba eső fotonok hatására keletkező töltéshordozók okozta áram mérésén alapulnak. A félvezető szerkezete (elektronok és lyukak száma) határozza meg, hogy milyen energiájú fotonokra legyen érzékeny a dióda. Hátterben a fényelektromos hatás áll.

Záróirányú előfeszítésnél az N-típusú félvezetőre pozitív, a P-típusú félvezetőre negatív potenciált kapcsolnak, ezáltal megnövelve a kiüresedett tartomány szélességét. Az átmeneti tartományba beeső foton jellemzően fotoelektromos kölcsönhatást szenved el, az általa kilőtt/emittált fotoelektron a negatív irányú előfeszítés miatt az N-típusú félvezető irányában indul el. Ennek következményeképp töltés keletkezik a kimeneten, amit az áramerősség mérő kimutat. Ezen az alapon működő eszköz a beütés számláló/beütés érzékelő fotodióda, amely többek között a PET (pozitron emissziós tomográfia) detektora.



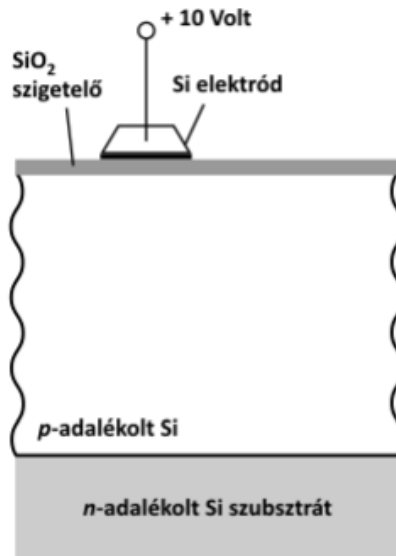
2.7. ábra. Félvezető fotodióda felépítése.

Összefoglalva: a záró irányban előfeszített dióda átmeneti tartományába becsapódó fotonok által keltett fotoelektronok áramot generálnak, melyet mérni lehet.

2.10. Charge-Coupled Device (CCD)

A töltés-csatolt érzékelők MOS kondenzátorokból állnak. A MOS kondenzátor a másik fotodióda, az időben integráló képérzékelő, melynek menetét a következő ábra szemlélteti. A p-adalékolt szilíciummal szemben helyezkedik el egy elektróda, melyre pozitív, az n-adalékolt szilíciumra negatív potenciál van kapcsolva. Ez a nyitóirányú előfeszítés.

A vastag p-adalékolt szilícium félvezetőben fotoelektromos kölcsönhatás során egy vezetési elektron és egy lyuk pár keletkezik. Ha elegendően nagy az N-típusú félvezető és a fémlap közötti feszültség, akkor a lyuk az N-típusú félvezető felé indul, míg az elektron a dielektrikum elektródával szembeni oldalára kerül. Az integrálási idő alatt a p-adalékolt szilíciumba becsapódó fotonok által keltett fotoelektronok elkezdnek felgyülni a fegyverzet túloldalán. Ezek lesznek megszámlálva az integrálási idő végén.



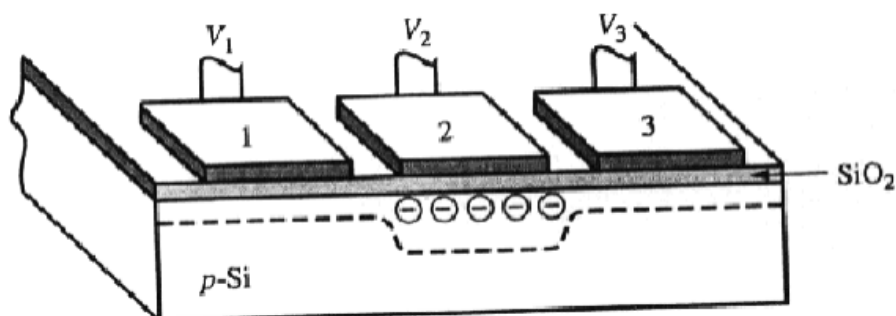
2.8. ábra. CCD.

Az előbb taglalt megoldás a töltés-csatolt érzékelő (CCD - Charge-Coupled Device) működésének az alapelve. Fizikai kialakítása miatt MOS kondenzátorok halmazát realizálja egy ilyen eszköz. Egy pixelhez három darab szükséges, melyek hármasságban helyezkednek el. Az elektródákra kapcsolt feszültséggel a töltéseket shiftelni lehet, innen ered a töltéscsatolt elnevezés.

2.10.1. Expozíció alatti vezérlés

A fotonok gyűjtésének ideje alatt, más szóval expozíciós idő alatti működését a következő ábra szemlélteti. Az elektronok a kettős számú fegyverzettel szemben gyűlnek fel, köszönhetően a rákapcsolt nagy pozitív potenciálnak. A mellette lévő fegyverzetek nulla vagy esetleg negatív potenciálon vannak a folyamat elősegítése érdekében.

$$V_2 > V_{kusz} > V_1, V_3$$

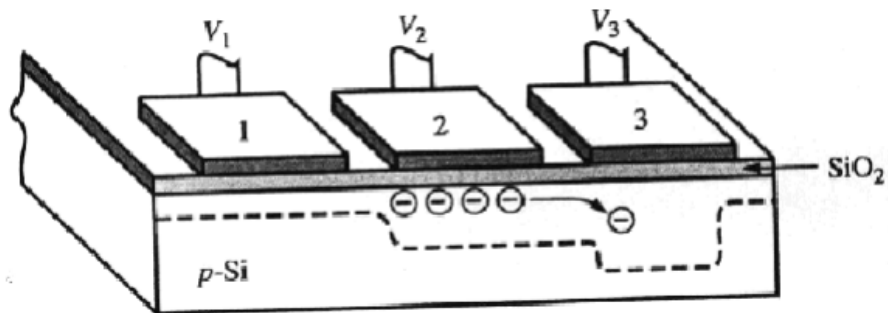


2.9. ábra. Expozíció alatti vezérlés.

2.10.2. Kiolvasás során alkalmazott vezérlés

Kiolvasás esetén az 1-1 subpixel fegyverzetén felgyülemlett pixeleket shiftelni kell. Ennek a menete látható az ábrán. Tegyük fel, hogy a hármas számú fegyverzet irányában történik, ebben az esetben a kettes fegyverzet potenciálja változatlan, a hármas fegyverzetet ennél is nagyobb potenciálra emelve, az elektromos térerősség elkezd dolgozni és megfelelő idő biztosítása esetén a kettes fegyverzet előtt felgyülemlett pixelek elmozognak a hármas fegyverzet irányába.

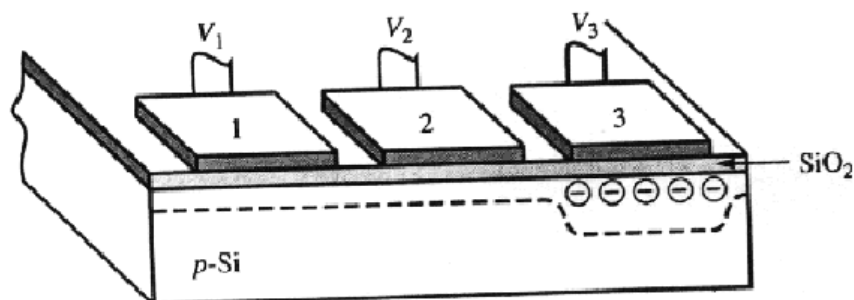
$$V_3 > V_2 > V_{kusz} > V_1$$



2.10. ábra. Kiolvasás első fázisa.

Ha ez megtörtént a kettes fegyverzet potenciálja lekapcsolódik a hármasé pedig lecsökken még elegendő nagyságúra.

$$V_3 > V_{kusz} > V_2 > V_1$$



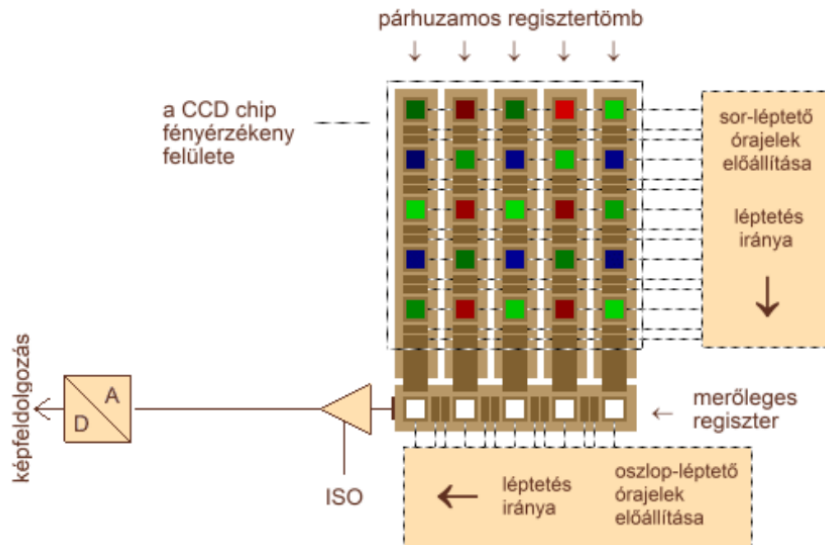
2.11. ábra. Kiolvasás második fázisa.

A folyamat egyik hátránya, hogy a kiolvasás nem lehet tetszőleges idejű. Orvosi képalkotás esetén pedig problémát okozhat az időzítési követelmények be nem tartása, mely a vizsgálatok időigényének redukciója miatt jelentkezik.

2.10.3. Fényképezőgépekben alkalmazott CCD működésének szemléltetése

A CCD érzékelő működésének 2D-s szemléltetésére szolgál a következő kép. A fegyverzetek a rácsban elhelyezkedő kisebb és nagyobb elemek. A nagyobb fegyverzeteken egy szűrő látható, mely adott színű (hullámhosszú) fotonokat enged át. A lap feladata, hogy az eltérő

hullámhosszú fotonokat kiszűrje, a többit pedig engedje át a felületén. A léptetés/kiolvasás az integrálási/expozíciós időt követi. Négyzetrácsos elhelyezkedésben először sor léptetés történik, melynek célja, hogy a merőleges regiszterhez közelebb kerüljenek a töltések. A merőleges regiszteren belül oszlopok között vízszintes irányban történik a léptetés. Mindig csak adott teljes sor analóg erősítőhöz történő shiftelése után kerül újabb sor a merőleges regiszterbe. Analóg erősítő után következik az analóg/digitális átalakító.



2.12. ábra. CCD működése.

2.11. Szcintilláció

Ez előbb részletezett CCD a szcintillációs réteg mögött található.

Az az anyag amely a látható fotonok érzékelését teszi lehetővé nem alkalmas nem látható fotonok detektálására. Különböző energiájú fotonok detektálásához különböző anyagra van szükség. Nagyobb energiájú foton könnyebben áthalad a térfogaton, ezért egy hullámhossz növelő, energiát csökkentő rétegre van szükség, amit a szcintillátor lát el.

Szcintilláció feladata, átalakítani a fotonokat könnyen detektálható energiájú fotonokká. Használatával a nagyobb energiájú fotonok is érzékelhetővé válnak a detektor számára.

2.12. A képet terhelő zaj

A képképzés fizikájának ismertetése után, a felhasználásának részletezése következik. Az eddigiekben nem volt még szó a fotonok inherens zajáról, amely a képeket degradálja. A foton alapú képképzés leginkább ergodik Poisson folyamattal modellezhető.

Ez alatt az értendő, hogy ha időben konstans kvantum mellett van egy pontszerű sugárforrás, amely a tér minden irányban azonos sűrűséggel bocsátja ki a fotonokat, akkor a tér tetszőleges, mérési kísérlet során fixált 2D-s felületén ugyanannyi idő alatt áthaladó fotonokat (, lényegében a fluxust) vizsgálva nem egyenletes, hanem Poisson-eloszlás figyelhető meg.

Ábrán a Poisson eloszlás sűrűségfüggvénye látható, egy paramétere van, a λ , amely az eloszlás várható értéke. Azt vizsgálja, hogy mekkor annak a valószínűsége, hogy az

esemény λ paraméter mellett k -szor fog bekövetkezni. Ez az alábbi képlettel adható meg:

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k \exp(-\lambda)}{k!}$$

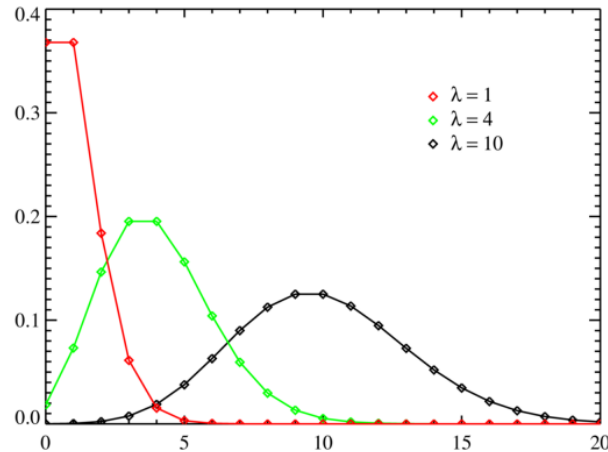
Sokszor Q -val is jelöljük a várható értéket, mert foton kvantumról van szó. Az is könnyen belátható, hogy a szórás négyzete Q , emiatt a szórás \sqrt{Q} .

$$E\{X\} = Q$$

$$\text{var}\{X\} = Q$$

Foton alapú képalkotásnál teljesül, hogy a jel/zaj viszony a várható érték gyöke. Ha például kétszer annyi foton indul a sugárforrásból, akkor az ideális képalkotó eszköz esetén azt fogja eredményezni, hogy $\sqrt{2}$ -szöröse lesz a képalkotás végén a jel/zaj viszony.

Minél kevesebb foton indul, annál jelentősebb lesz az eltérése a Poisson eloszlásnak a Gauss-tól. Például $\lambda = 10$ érték mellett egészen jól egybevágnak egy Gauss görbével, de kisebb esetekben nagyobb eltérés tapasztalható. (Hasonlóan az érme feldobásnál, minél több annál jobban közelíti.)



2.13. ábra. Poisson eloszlás sűrűségfüggvénye.

Ezen kívül vannak más zajforrások is. Például a félvezetőből felépülő MOS kondenzátorok sem ideálisak. Egyik jellemzőjük, hogy termikus energia elősegíti a nem kívánatos mozgását az elektronoknak. Ennek következményeként sötétáram figyelhető meg a kimenetén, tehát fény nélkül sem teljesen nulla a kijövő jel. Általában kis amplitúdójú, de nem elhanyagolható probléma, amelynek várható energiája kalibrációs mérésekkel becsülhető.

További probléma lehet még az előző felvétel beégése, amely az elektronok shifteléséhez szükséges idő redukálásából származik.

Érdeemes megemlíteni az analóg erősítésből származó zajt. Ez az inherens zajnál jellemző. Pl. klasszikus fotózás éjszaka, magas ISO beállítással, ilyenkor tulajdonképpen a Poisson zaj felerősítése történik.

Az analóg/digitális kvantálás során diszkrét értékek állnak elő és lesznek bizonyos foton számok, melyek ugyanarra a diszkrét értékre kvantálódnak. Ennek a hibája egyetlen eloszlású, régen problémát jelentett.

A szcintillációs zaj optikai jellegű, amely elmosza, illetve torzítja a képet. Nem érzékelő elemenként egymástól független zaj van, hanem ezek között térbeli átmosás figyelhető meg.

2.13. Dinamika tartomány

A kép dinamika tartománya. Nehéz kérdés, hogy milyen módon lehet ezt a sok zajhatást egy biteíróba besűríteni.

A P-SI réteg csak véges számú elektront képes tárolni, hozzávetőlegesen $5E4$ elektron egy mai érzékelőnél. (Orvosi berendezéseknél $E5$ nagyságrendű.) Az *FWC* (Full Well Capacity) azt mondja meg, hogy hány elektron gyűlhet fel egy MOS kondenzátorban adott idő alatt. Ezt elosztják az erősítéssel (P). Például, ha az elektronokat kétszeresére erősíti az analóg erősítő, akkor máris feleannyi különböző értéket fog tudni az analóg/digitális átalakító megkülönböztetni. Ez lesz a különböző lehetséges jelértékeknek a száma. Kiolvasási zaj (RN) integrálja magába a sötét áramot, a shiftelésből adódó problémákat stb.. Jó kalibráció esetén, $E-1$ nagyságrendű. Ezt az erősítés értékével kell szorozni. Majd hozzáadódik az analóg/digitális átalakító zaja ($ADCN$). Ez a tag pedig megmutatja azt, hogy milyen zajjal számolhatunk a kimenet végén. A kettő hányadosának kettes alapú logaritmusát fogja előállítani a dinamikát bitekben (D), amely azt adja meg, hogy adott beállítás mellett a kép egy-egy intenzitása hány bit információt ér.

$$D = \log_2\left(\frac{FWC/P}{P * RN + ADCN}\right)$$

Az erősítés általában állítható. Érdekes az analóg/digitális átalakításnál megjegyezni, hogy tipikusan az *FWC* erősítés nélkül ($P = 1$) éppen lefedi a maximális kimenetet. Ráerősítés során a bemeneti érték halmaza leszűkíti.

Orvosi eszközök esetében csak kis tartományban állítható. Ha szűkebb tartományból kerülnek ki a fotonok akkor is ez szoftveresen kezelhető és nem érdemes hardveres erősítésre bízni ennek a kiküszöbölését.

Érdekesség, hogy fényképezőgépeknél az erősítést ISO $P*100$ alakban állítjuk.

2.14. Képrögzítés egyéb fizikai hibái

Milyen hibák jöhetnek elő az egész folyamat során?

A MOS kapacitásból származó hibák a halott pixel és meleg pixelek. Halott pixelről akkor van szó, amikor valamilyen vezérlési hiba miatt nem lehet kiolvasni pontosan az értékét, mindig valamilyen konstans kimenetet produkál. Az úgynevezett meleg pixel szintén vezérlési hibából adódik, bármi éri az érzékelőt, az túltelítődik és mindig egy túlszordult értéket fog mutatni. Ezek eseti hibák, melyeket interpolációval lehet korrigálni, a szomszédos érzékelők által mért intenzitásokból.

Szisztematikus zajok is felléphetnek. Ezek már nem eseti hibák, hanem jellemzők. Tipikusan kis mértékben eltérő karakterisztikájú A/D átalakító blokkokból épülnek fel az orvosi képalkotás során használt flat detektorok. Kompenzálni kell a hatást, különben zavaró lehet főleg a rekonstruált képeken.

2.15. Képfarmátumok

A képek tárolása rendkívül fontos témakör, magában az a tény, hogy például egy CT felvétel mérete GB-os nagyságrendű is lehet, sok kérdést felvet a használattal kapcsolatban.

Bizonyos felvételekre szűk keresztmetszetet definiáló elvárásokat lehet támasztani. Kórházakban az orvosi készülékek a PACS rendszeren keresztül kommunikálnak egymással, ami lehetővé teszi a távorvoslást is. Ezekben a PACS rendszerekben megbízhatóan kell tárolni a felvételeket és könnyen/gyorsan mozgathatóan. Innentől kezdve az egyik cél,

hogy ne legyen túl nagy méretű a tárolt fájl, hatásos legyen a tömörítés. A gyakorlatban ez az elv nincs túlságosan fókuszban. Az orvosi témakörben a tárolással kapcsolatban további két fontos szempontot is be kell tartani. Ha már a röntgen fizika sok kellemetlenséget okoz a képek előállítása során (pl. zaj), akkor a kép tömörítése ezeknek a mértékét ne növelje, ne okozzon további degradációt. Tehát fontos, hogy veszteségmentes legyen. A negyedik követelmény az, hogy legyen lehetőség meta információk tárolására, például CT felvétel esetén a daganat szegmentációját.

Mindemellett, ha képalkotásról és képfeldolgozásról van szó, akkor nem lehet megkezdni az általánosságban elterjedt képformátumokat sem. Ismertetésre kerülnek veszteségmentes és veszteséges tömörítések. Amit részletesebben taglal a fejezet az a veszteségmentes tömörítésből a PNG, veszteségből a JPEG.

Vannak olyan konténerformátumok, amelyeket különböző szakma használ előszeretettel: nyomdászatnál a TIFF, orvosoknál pedig a DiCom.

2.15.1. BMP

A BMP (Bitmap Image) kiterjesztése a .bmp, egy fájlmérettel dolgozó veszteségmentes primitív formátum. Az összes képpont intenzitásának szerializációját tárolja, esetleg az adatokat LZW tömöríti.

2.15.2. TIFF

Ehhez képest a TIFF (Tag Image File Format) a lehetőségek tárházát biztosítja. Kiterjesztése a .tif, konténerformátum, hasonlóan mint a DiCom. A használatának a módja kódolva van a fejrészében. Tipikusan LZW vagy Huffman kódolást alkalmaznak veszteségmentes tömörítésnél, veszteségesnél JPEG. Mivel nyomdai, illetve grafikai feladatokra használják, ezért több réteg tárolását teszi lehetővé, rétegenként átlátszóságokat, alpha tényezőt, gamma korrekciót lehet benne definiálni. Tehát különböző színábrázolási és tömörítési módokat támogat. Főleg professzionális használatban terjedt el, hétköznapiban nem jellemző.

2.15.3. GIF

Egy időben a GIF (Graphics Interchange Format), .gif volt az alapértelmezett képtárolási formátum. Amit érdemes róla tudni, hogy akármilyen volt a kép, 8 bitre kellett konvertálni, ami RGB paletta használatát tette szükségessé: 2 a nyolcadikon különböző színt lehetett belekódolni. LZW veszteségmentes tömörítést alkalmaz, melynek volt egy hatalmas, előre nem látható hátulütője. 1983-ban az Unisys szabadalmat jegyzett az LZW-re, majd 1994-től üzleti felhasználóktól használati díjat követelt.

2.15.4. LZW

Lempel-Ziv-Welch változó bithosszú veszteségmentes kódolás.

1. Szótárt inicializálunk minden lehetséges pixel intenzitással. (Ennek a szótárnak az induktív bővítése lesz adó vevő oldalon.)

2. Kikeressük a kódolni kívánt sorozat azon leghosszabb eddig még nem kódolt prefixét (W), mely már szerepel a szótárban (k kóddal).

3. Hozzáadjuk a tömörített kép végéhez k-t, majd bővítjük a szótárat [W|a]-val, ahol a a tömörítendő bitfolyam W utáni első eleme.

4. GO TO 2

A harmadik lépésbeli k-t mindig annyi biten írjuk ki, amennyin ábrázolható a szótár összes kódja (ez a változó kódhossz oka).

Egy egyszerű példa az LZW kódolásra: kódoljuk az alábbi intenzitásképet.

1	2	1
2	3	2
1	2	1

2.14. ábra. Intenzitáskép.

Első lépésként a bitsorozathoz sorosítani kell a képet, pl. oszloponkénti szerializálással, melynek elvégzése után ezt a sorozatot kapjuk: [1,2,1,2,3,2,1,2,1].

Inicializációs állapotban, az adó oldalon a szótárban lesz egy 1-es 2-es 3-as és egy fájl vége (#). Ezt a 4 szót, legkevesebb 2 bittel tudjuk leírni, így a hozzájuk tartozó kódszavak rendre a 00, 01, 10, 11. Ezt az inicializációt kapja meg a vevő oldal is.

Meg kell nézni, hogy az kódolni kívánt sorozat legelején melyik az a rész, ami a legjobban illeszkedik a szótár szavainak egyikére. Ez az 1-es lesz. Az adó elküldi azt, hogy 00 és az 12-vel bővíti a szótárat, a hozzá tartozó kódszó pedig az 100 lesz (innentől kezdve már 3 bitre van szükség).

Következő illeszkedés a 2-es, elküldi a 010 kódot és bővíti a szótárat a 21 szóval, melynek kódja 101.

Ezt folytatja az algoritmus, amíg az oszloponként szerializált bitsorozat végére nem ér. A végén a következő kódnak áll elő: [00, 010, 100, 011, 101, 0101, 0011].

Az algoritmus átlagos teljesítménye angol szövegeknél átlagosan felezi a file méretét, képek esetén a $\frac{3}{4}$ -edes arány tekinthető átlagosnak.

2.15.5. PNG

Az LZW és GIF után elterjedt tömörítési formátum a PNG (Portable Network Graphics). Motivációja a díjköteles GIF lecserélése volt és képességeit tekintve is jóval túlmutat az elődein.

Innentől kezdve megjelentek a csatorna kezelési lehetőségek, ideértve az alpha csatornákat (átlátszóság definiálása), és megjelent a gamma korrekciós lehetőség is. Emellett a kódolásban is fejlődött: palettát lehet alkalmazni, 16 bites szürkeskála és 48 bites színábrázolás is van benne. Fontos tulajdonsága a fokozatos megjelenítés. Internetkapcsolattal történő megjelenítésnél megfigyelhető, hogy a kép hamar megjelenik, rosszabb felbontásban, majd elkezd javulni. Animációt alapvetően nem támogatott, de módosították hogy ezt is lehessen. Veszteségmentes kétfázisú tömörítés: először egyszerű lineáris szűrés alapú predikció, majd Deflate (LZ77) tömörítés, ami nincs szabadalmazva.

2.15.6. PNG tömörítése - szűrés

Jellemző, hogy alacsony dimenziós sokaság az, ahonnan a képek kikerülnek. Elvileg a képpontok és a lehetséges pixel értékek alapján rengeteg variáció előfordulhat, viszont a gyakorlatban ez nem így van. Ez annak köszönhető, hogy az objektumoknak kiterjedése van, ritka a hirtelen intenzitás változás. Ez alapján, ha ismerjük egy pixel környezetének az intenzitását, akkor az adott pixel nagy valószínűséggel a környezetének intenzitás átlaga lesz. A tömörítő szűrés pontosan ezt a jelenséget használja ki, figyelve arra, hogy tudja dekódolni a vevő.

Úgyhogy például nem egy 3x3-as ablak középső képpont 8 szomszédjának átlag intenzitását veszi a képen, hanem azon képpontok átlag intenzitásától való eltérést fogja nézni, ami már a vevő számára dekódolva voltak.

A következő példa a környező, már a vevő számára dekódolt pixelek intenzitásait összegzi, mínusz előjellel látja el és hozzáadja 4-szer annak a pixelnek az intenzitását, amit át akar küldeni. Ezzel a szűréssel kapott eredmény fogja megadni a pixel új intenzitását tömörítés után. Az eredményre igaz az, hogy többé kevésbé nulla körül lesz az összes előfeldolgozás utáni pixel intenzitás. Soronként eltérő szűrés megengedett, megválasztásuk heurisztikus eljárással történik és fontos megjegyezni, hogy a szűrt kép minden pixele egész értékű kell, hogy legyen!

-1	-1	-1
-1	4	

2.15. ábra. Szűrő példa.

A szűrés célja, hogy az átküldendő kép entrópiája minimális legyen. A lehetséges szavak eloszlása nem egyenletes, hanem ideális esetben legyen valahol egy Dirac delta és így minden egyes átküldendő pixelnek ugyanaz az intenzitása, ekkor kell a legkevesebbet kommunikálni a két fél között.

2.15.7. PNG tömörítése - deflate

Ezt követi az úgynevezett deflate tömörítési eljárás. Huffman kódolást alkalmaz, amely az optimális kódhosszú tömörítést teszi lehetővé különböző diszkrétizált, kvantált sorozatok átküldésénél. A deflate lényege, hogy véges hosszú pufferben keresi a tömöríteni kívánt bitsorozat leghosszabb prefixét (LZ77 tömörítés), és ezekre pointerrel is mutathat, ezzel hatékonyabbá téve a tömörítést. A fokozatos megjelenítés során több menetben, több felbontásban történik a kép átküldése.

2.15.8. JPEG

Az egyik legelterjedtebb veszteséges tömörítés a JPEG (Joint Photographic Experts Group). Leginkább hobbi fényképezőgépek területén alkalmazzák, orvosi területen a veszteséges tömörítés miatt tipikusan nem. Több réteget lehet kezelni, rétegenként átlátszóságokat lehet definiálni. Alapvetően 16 bit/csatornás értékészletet támogat. Képes veszteségesen és veszteségmentesen tömöríteni, általában a veszteséges tömörítés miatt alkalmazzák.

2.15.9. JPEG - tömörítés

Első lépés a JPEG tömörítés során a színtér invertálható transzformációja. RGB Y'CrCb konverzió történik. Y'CrCb legfontosabb szempontja, hogy a gamma információ, ami az Y' csatornába megy, elkülönül a vörös és kék árnyalat intenzitásától (Cr, Cb). Ennek egyszerű háttere, hogy az emberi szemben csapok és pálcikák helyezkednek el az érzékelő idegben, melyek külön érzékelik a fényerőt és a spektrális információt. Az emberi látás

minél kevesebb bittel történő megtévesztéséhez érdemes több információt hagyni a luminanciának, a gamma csatornának és kevesebbet a színcsatornáknak. Ezt a lépés néha kihagyják, és csatornánként tömörítenek, de ez nem teljesen szabványos.

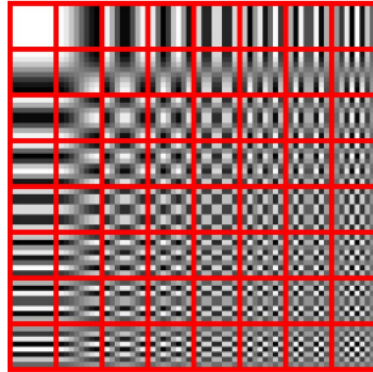
Második lépésben a spektrális információ (Cb, Cr komponensek) alul-mintavételezése történik. Az Y'-ra sokkal érzékenyebb az emberi szem (több pácika, mint csap). Innentől kezdve a 3 csatorna külön van kezelve.

Harmadik lépésben minden csatornát 8×8 méretű diszjunkt blokkokra osztanak fel. A blokkok nem lapolódnak át, ha ilyenekből nem fedhető a csatorna akkor a neurális hálók körében is elterjedt padding-et alkalmazva extrapolációval kibővítik a képet.

Negyedik lépés a lényegi rész, DCT (Diszkrét Koszinusz Transzformáció) tömörítés. Minden 8×8 -as blokkra egyenként transzformál, de előtte 0 középpontúra skálazza az intenzitásokat. A DCT ortonormált, 2D koszinuszos wavelet bázisokra vetíti. A képletben megjelennek a koszinuszos bázisfüggvények, u a vízszintes, v a függőleges frekvencia, α egy adott frekvenciájú komponensnek a koordinátázása.

$$f(u, v) = \alpha(u, v) * \cos\left[\frac{(2x + 1)u * \Pi}{16}\right] * \cos\left[\frac{(2y + 1)v * \Pi}{16}\right]$$

Amikor az u és v nulla értéket vesznek fel a képlet alapján koszinusz nulla a négyzetben jelenik meg, ami a teljesen homogén egyes. Ahogy nő a vízszintes frekvencia, megjelennek benne a vízszintes irányra merőleges hullámfrontok, függőleges irányban is hasonlóan. Így áll elő a következő ábrán látható "sakktábla".



2.16. ábra. DCT.

A DCT egy lineáris transzformáció, egy bemeneti képhez pontosan egy kimeneti kép tartozhat, tehát bijektív is.

Ötödik lépésként a DCT elvégzése után a 8×8 komponensek kvantáláson esnek keresztül. A diszkrét koszinusz transzformált komponensek ($DCT\{I_{(i,j)}\}$) és a beégetett Q mátrix hányadosát kell venni elemenként, minden egyes blokk és csatorna esetén, majd ezeket kerekíteni. Így jönnek ki a kvantálás utáni együtthatók ($B_{(i,j)}$).

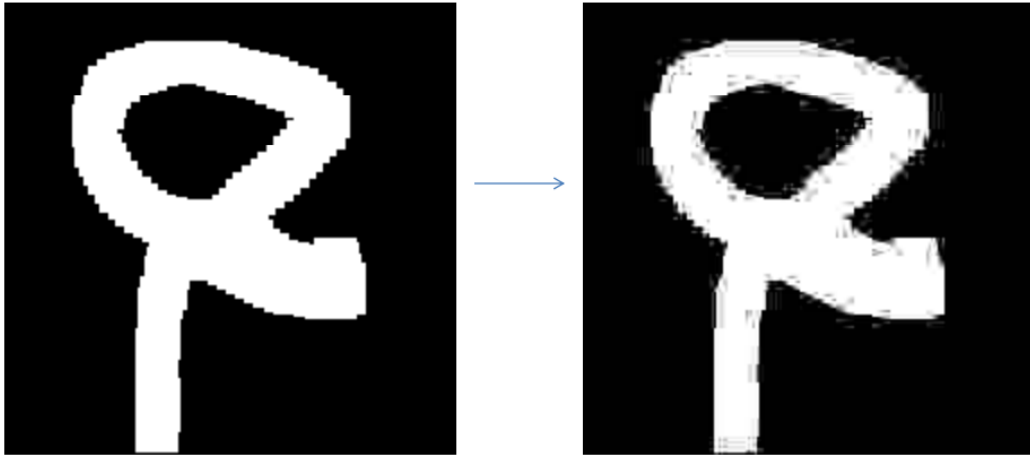
$$B_{(i,j)} = \text{round}(DCT\{I_{(i,j)}\}/Q)$$

Eddig a csatornánkénti alul-mintavétel mellett ez az egyetlen nem invertálható lépés. Tömörítés hatását elemeinek amplitúdója határozza meg, ez a szorzó tényező állítható. Minél nagyobb, annál kevesebb lehetséges értékre kvantálják az adott komponenset.

Hatodik lépés a szerializáció és kódolás. Az együtthatókat cikk-cakk trajektória mentén sorosítja. Ezeket a sorozatokat futáshossz, illetve a korábban ismertetett Huffman kódolást alkalmaz.

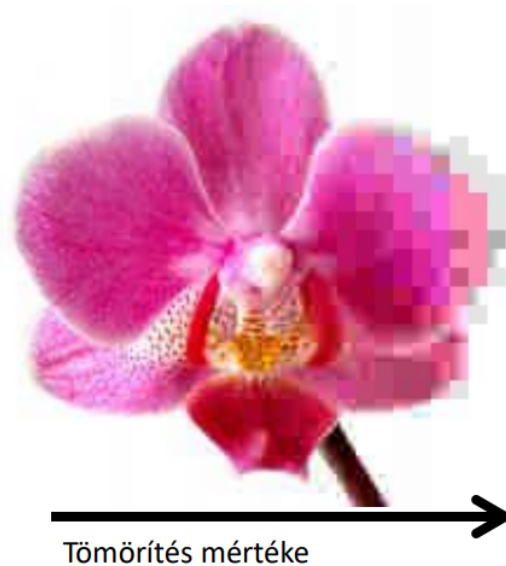
2.15.10. Veszteséges JPEG artifaktumai

A veszteséges JPEG előállításának egyik következménye a ringing effektus, melyre Gibbs artifaktként is szoktak hivatkozni. Meredek átmenetű alul-áteresztés esetén jellemző. Adott frekvenciájú komponensnél hirtelen levágják a jelet, ennek következményeként oszcilláló túllövés marad a jelen, ami a blokkok szélén jelenik meg. Az ábrán látható hiba egyik lehetséges magyarázata a Q túl nagy amplitúdója, mely jelentősebb kvantálási hibát eredményez.



2.17. ábra. Ringing effektus.

Egy másik előforduló jelenség a blokkosodás. Minél nagyobb a tömörítés rátája (Q amplitúdója), annál látványosabb. Hasonló a hatása, mint az előbbi esetben. Ábrán látható, hogy a tömörítés mértékével arányosan egyre jobban kirajzolódnak a blokkok.



2.18. ábra. Blokkosodás.

Másik gyakori probléma JPEG esetén az elszíneződés. A kromatikus információk (Cr, Cb) durvább alulmintavételezésének következményeként figyelhető meg. Ennek következtében a szín információk elvesznek.



2.19. ábra. Elszíneződés.

Érdemes még megemlíteni az elmosódást, melynek mértéke függ a tömörítés fokától.

2.15.11. DCM

A DICM (Digital Imaging and Communications in Medicine) egy konténer formátum, lényegében egy szabvány, melynek része egy file formátum. Tag-ekből épül fel (pl. mint egy XML). A kép is egy ilyen tag, melyhez egy másik tag-ben megadható a formátuma (png, tiff, jpeg). Egyéb meta adatok is tárolhatóak benne:

- milyen páciensről készült,
- melyik intézmény,
- mikori a felvétel,
- milyen felvételi protokoll szerint készült,
- hozzátartozó leletek (például szegmentáció),
- vagy akár szöveges orvosi véleményt is.

Felvétel típusonként orvosi szabványok definiálják, hogy milyen mezőknek kell kötelezően szerepelniük. Ezek egy része személyiségi jogi szempontjából érzékeny adatokat is tartalmazhat, melyektől az úgynevezett "anonimizálás" művelet során szabadítjuk meg a .dcm file-okat.

A szabvány leírja a fájlok archiválásának módját, ideértve a képek megjelenítésében és tárolásában résztvevő szerverek hálózatának felépítését, a hálózat kommunikációs protokollját. A PACS rendszerek ehhez igazodnak. A szigorú szabályozás több célt is szolgál, legfontosabb, hogy a felvételek ne vesszenek el és a különböző időpontban készült felvételek összehasonlíthatóak legyenek.

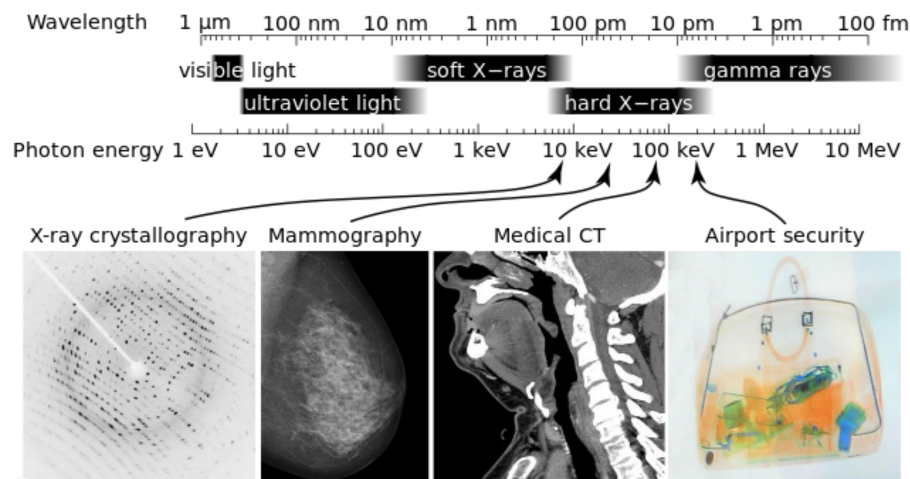
3. fejezet

Röntgen

3.1. A fotonok energiája

A fotonok energiával rendelkeznek, ami a hullámhosszuk függvénye. Ez az energia határozza meg, hogy a foton a különböző anyagokkal milyen kölcsönhatásba lép.

A legkisebb fotonenergiával a látható fény rendelkezik, utána jön az ultraviola fény, a lágy-, majd a keményröntgen, és végül a gamma sugárzás. Az orvosi képalkotáshoz legalább kiló elektronvoltos energia kell, így csak az utóbbi három használható erre a célra.

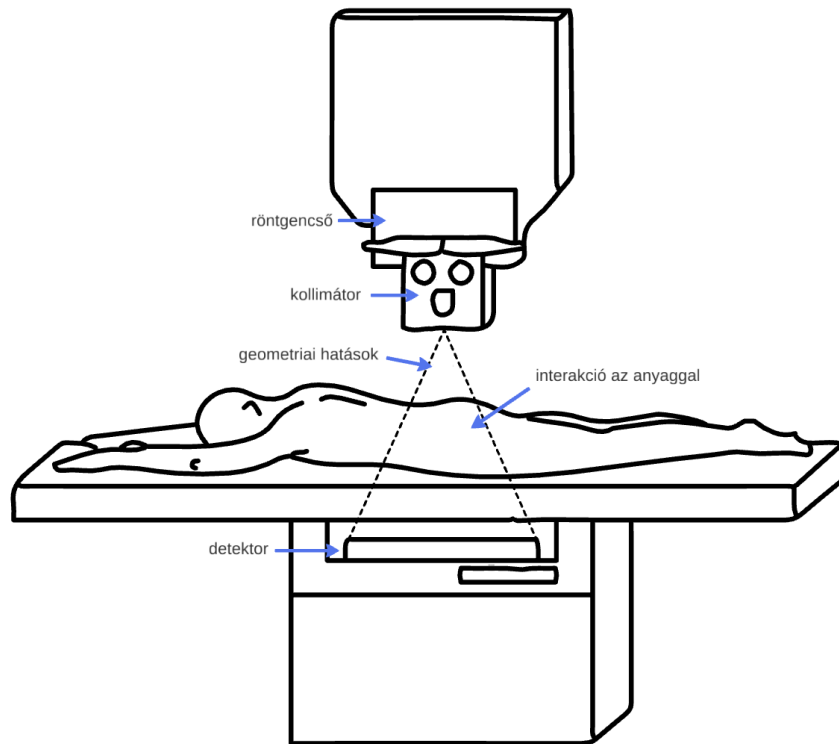


3.1. ábra. Energiatartományok

3.2. A röntgen berendezés

Az orvosi képdiagnosztikában leggyakrabban használt képalkotó berendezés a röntgen. Az alábbi ábrán ennek vázlatos felépítése látható.

A sugárnyaláb röntgensőben keletkezik, majd a kollimátor szabályozza, utána pedig különböző geometriai hatásokot követően eléri az a vizsgált anyagot. Az anyaggal való interakció után megmaradt sugárzást a detektor érzékeli.

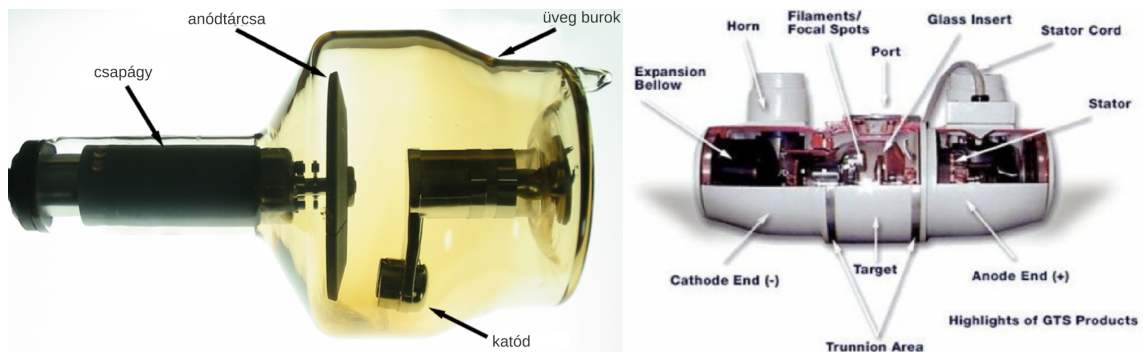


3.2. ábra. Röntgen berendezés

3.3. A röntgenső felépítése és működése

A röntgenső felépítése nagyon összetett, és elkészítése bonyolult feladat, mert több nehézséget is meg kell oldani:

- A röntgensőben nagy energiájú fotonok keletkeznek, így itt nagyon magas, akár 2000°C feletti hőmérséklet is előfordulhat. Ezért a rendszert olajjal hűteni kell.
- A csőben rövid idő alatt nagy áramot kell mozgatni, ezért jó minőségű kábelezést kell szolgáltatni.
- Emellett a radiológus szakaszisztens számára különböző beállítási lehetőségeket kell biztosítani.



3.3. ábra. A röntgenső

A vákuumsőnek kettő csatlakozója ("fegyverzete") van: egy *anód* és egy *katód*. A katód irányából elektronok száguldoznak az anódtárcsa irányába, ahol ezek az elektronok

elvesztik az energiájuk egy részét, és azt röntgensugárként sugározzák ki. A vákumcsőben nagyon magas hőmérséklet van, így az anódtárcsát nagy sebességgel kell forgatni, különben az azonos helyre becsapódó elektronok hatására az anódtárcsa anyaga nagyon rövid idő alatt kiégne, és használhatatlanná válna. A nagysebességű forgatást egy motor oldja meg, amihez megfelelő csapágyakat és kenést kell biztosítani. A kenőzsírok viszont hamar elhasználódnak magas hőmérsékleten, így a csapágyakat gyakran cserélni kell. Ezért az eszközt sokszor kell szervizelni, ami nem egyszerű feladat, mivel az egész csapágy a vákumcsőben helyezkedik el. Ennek következtében a röntgen berendezés beszerzése mellett az üzemeltetése is nagyon magas költségű lesz.

A rendszer működtetéséhez a katód és anód kivezetésére feszültséget (potenciál különbséget) kapcsolunk. Ez a külső elektromos térerősség szabályozza a katódtól az anód irányába haladó elektronok sebességét, így ennek a gyorsítófeszültségnek a függvénye a kilépő spektrum jellege. A fűtőáram pedig a katód felmelegedését, és ezáltal a belőle kilépő elektronok számát szabályozza.

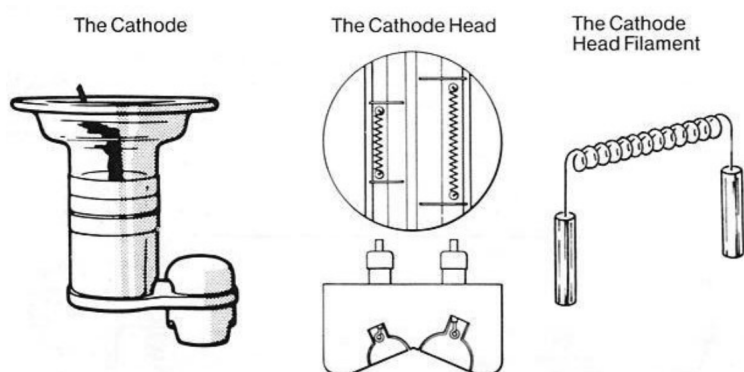
A röntgencső nem rendelkezik nagy hatásfokkal, a katódot elhagyó elektronok mindössze egy százalékából keletkezik olyan röntgen foton, ami elhagyja ezt a szerkezetet, a többi csak feleslegesen melegíti a rendszert.

3.3.1. A katód

A röntgencső katódja általában egy vákumcsőben elhelyezett Wolfrám szál szokott lenni. Ezt olyan magas hőmérsékletre kell hevíteni, illetve annyi elektront kell a felületére biztosítani, hogy elektronokat akarjon kibocsátani magából az anód irányába.

A gyors elhasználódás a katódra is jellemző, mivel a Wolfrám a magas hőmérséklet hatására kicsapódik az üveg felületére, aminek hatására adott hőmérsékleten kevesebb elektront tud elindítani az anód irányába. Ez egy folyamatos degradációt eredményez, és ha már a protokoll által meghatározott fűtőáram-gyorsítófeszültség használata mellett nem képes megfelelő képet készíteni az eszköz, akkor a katódszálat ki kell cserélni. (Ez a jelenség áll a klasszikus izzók tönkrementele mögött is.)

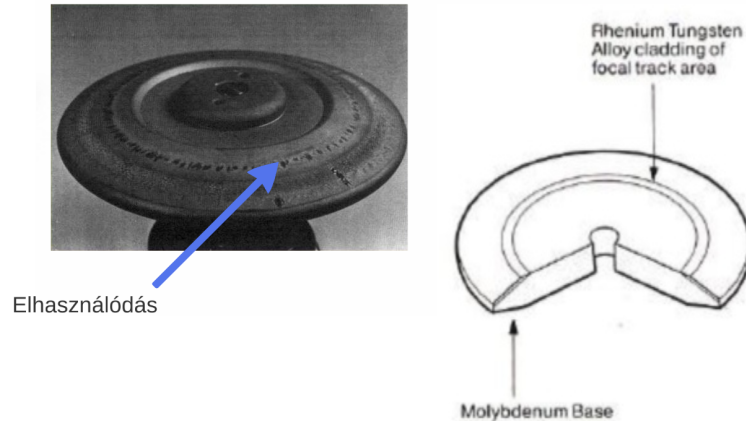
A legtöbb felvételi elrendezés esetén a sugárforrást ki-be kell kapcsolgatni egymás után rövid idő alatt, ám a szálat nagyon nehéz hirtelen felhevíteni, illetve lehetetlen gyorsan lehűteni. Ezért a sugárforrás vezérlését úgy szokták megoldani, hogy a katódból kilépő elektronok irányát egy vezérlőfej segítségével irányítják, ezzel szabályozva azt, hogy a kilépő elektronok hány százaléka érhet el az anódhoz



3.4. ábra. A katód

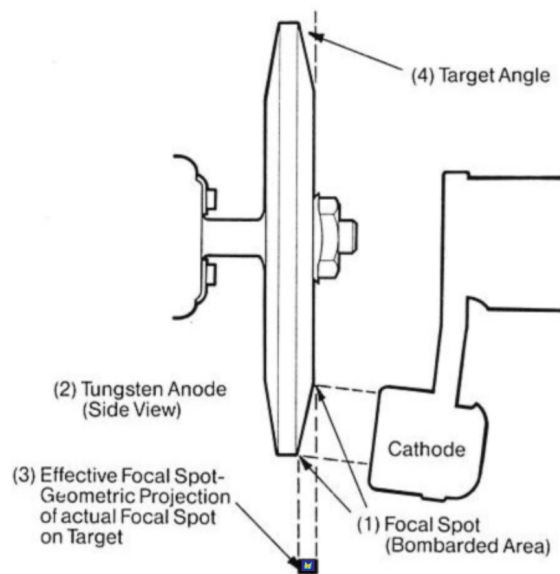
3.3.2. Az anódtárcsa

A röntgencső anódja általában egy nagy méretű, nehéz Wolfrám szálás tárcsa, amit folyamatosan forgatni kell. Egyrészt azért, mert a forgatás hűti az akár 2000°C -ig felhevülő tárcsát, másrészt azért, mert a forgatás következtében mindig más részét éri el a becsapódó elektronok. Ennek ellenére az anódtárcsa felületén megjelennek égésnyomok, és egy idő után teljesen elhasználódik.



3.5. ábra. Az anódtárcsa

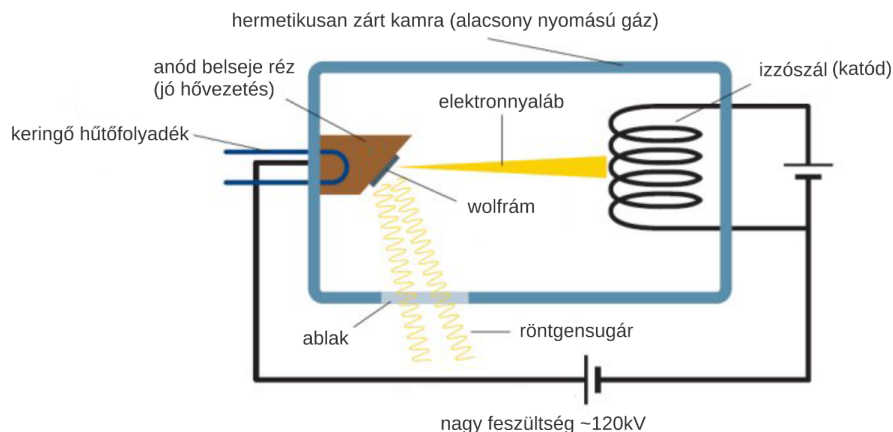
Az anódtárcsa felületét úgy alakítják ki, hogy a beérkező elektronok hatására keletkező fotonokat a megfelelő irányba továbbítsa.



3.6. ábra. Az anódtárcsa kialakítása

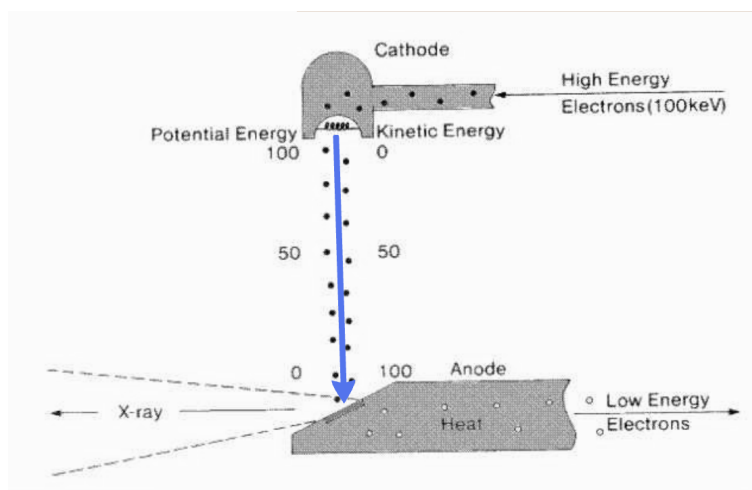
3.3.3. A röntgencső működése

A röntgencsővet egy nagy csillapítási együtthatóval rendelkező anyag, tipikusan ólom borítja, ami csak egy résen (ablakon) keresztül engedi ki a fotonokat. Ezáltal redukálja a random irányba menő ionizáló sugárzást.



3.7. ábra. A röntgenső sematikus felépítése

A röntgen működése során a katódra és az anódra nagy potenciálkülönbséget kapcsolunk. A katód lesz alacsonyabb, az anód lesz magasabb feszültségen, ezért elindulnak az elektronok a magasabb feszültség irányába. Eközben a fűtőáram szabályozza, hogy a katód mennyire hevül fel. A hő hatására elektronok lépnek ki a katódból, majd feszültség hatására felgyorsulnak. Az anódot elérő elektronok a Wolfrám rétegbe becsapódva fotonok formájában kisugározzák az energiájukat, és kis energiájú elektronokként távoznak.

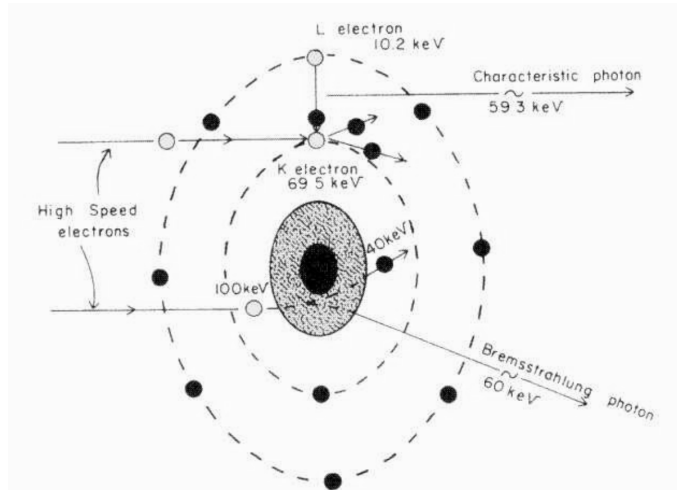


3.8. ábra. Elektronok áramlása a röntgensőben

3.3.4. Elektronok kölcsönhatásai

A Wolfrámba becsapódó nagyenergiájú elektronokból kétféle kölcsönhatás eredményeként keletkezhetnek fotonok. Ezek közül a fékezési sugárzás (Bremsstrahlung) a jelentősebb, de kis mértékben karakterisztikus sugárzás is előfordul.

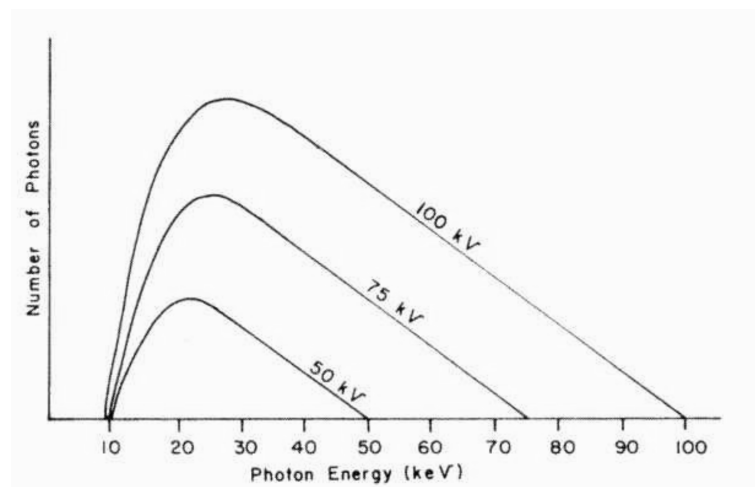
A *fékezési sugárzás* az elektron atommaggal való elektromos kölcsönhatásának eredménye. Amikor a nagy mozgási energiájú elektron elhalad az atommag közelében, a mag vonzó hatása eltéríti és lelassítja azt. Az elektron elvesztett energiája egy új foton formájában marad meg. Ennek energiája pontosan a belépő és kilépő elektron energiájának különbsége lesz.



3.9. ábra. Elektronok kölcsönhatásai

Attól függően, hogy milyen messze halad el az elektron az atommag mellett, más mennyiségű energiát veszít, így a kilépő fotonok is különböző energiájúak lesznek. Ennek következtében a fékezési sugárzás folytonos spektrumot eredményez.

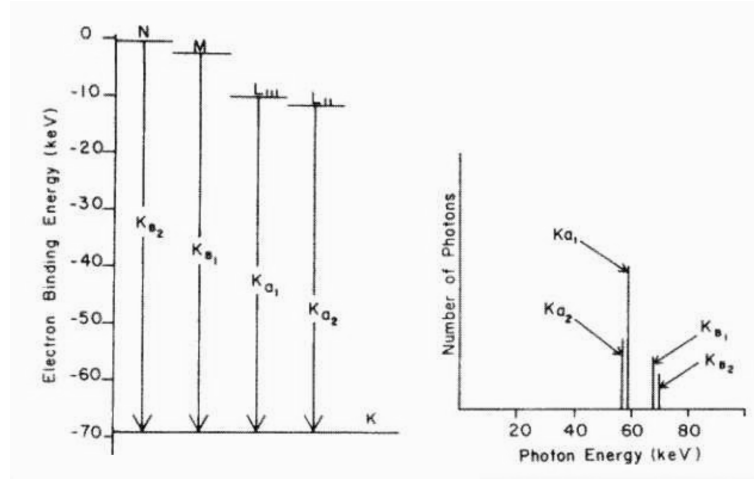
A kölcsönhatás során nem keletkezhet bármekkora energiájú foton. A felső korlátot a belépő elektron energiája adja, mivel ennél több energia nem szabadulhat fel. Az alsó korlátot pedig a Wolfrámból való kilépéshez szükséges energia határozza meg, mivel a keletkezett fotonnak el is kell hagynia az anódtárcsát.



3.10. ábra. A fékezési sugárzás spektruma

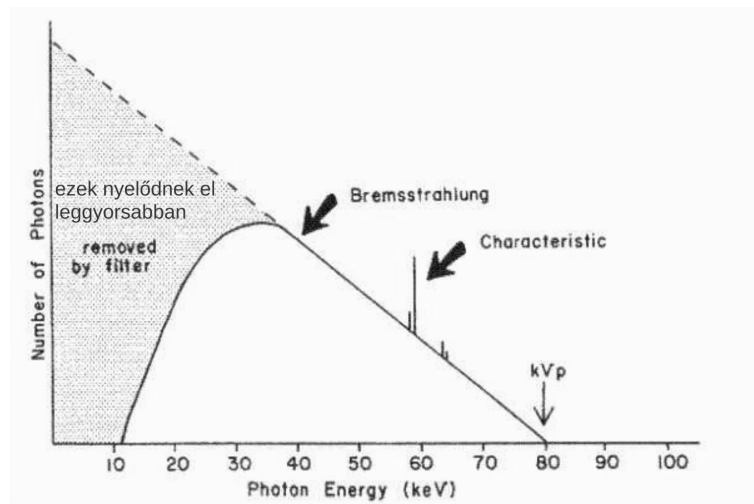
A *karakterisztikus sugárzás* az elektron egy másik elektronnal való elektromos kölcsönhatásának eredménye. Ennek során a nagy mozgási energiájú elektron egy másik, elektronhéjon lévő elektronnal találkozik, és kiüti onnan. A rugalmas ütközést követően kilépő két elektron egy instabil, ionizált atomot hagy maga után, ami stabilizálódni szeretne. Ezért a külső energiahéjról belép egy elektron a kiütött helyére. Mivel a külső elektronpályához magasabb energia szint tartozott, ezért az elektron foton formájában sugározza ki a felszabadult energiakülönbséget.

Mivel a pályák közti energiaszint különbség fix értéket vesz fel, ezért a keletkező fotonok csak bizonyos energiaértékeket vehetnek fel. Ezért a karakterisztikus sugárzás spektrumában ezek az értékek tüskékként jelennek meg. Ezek elhelyezkedése az anyag és a gyorsítófeszültség függvénye.



3.11. ábra. A karakterisztikus sugárzás spektruma

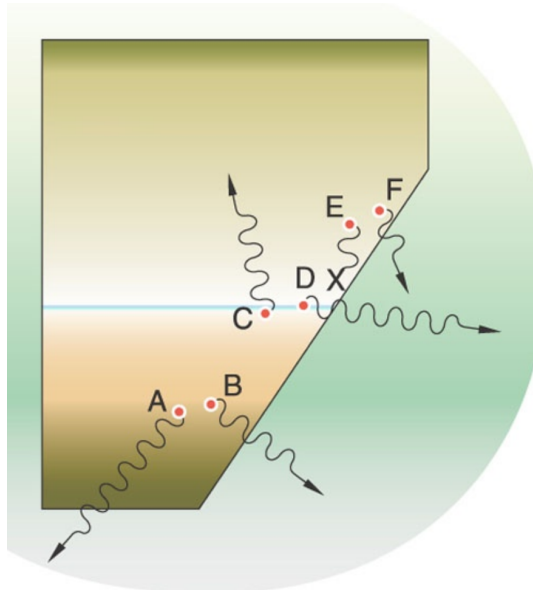
A kétfajta kölcsönhatás során keletkező sugárzás közös, folytonos spektrumát (80 kV-os csőfeszültség mellett) az alábbi ábra mutatja. Jól látható, hogy a sugárzás nagy részét a fékezési sugárzás adja, de bizonyos energiaértékeknél megjelennek a karakterisztikus tüskék is. Azt is jól mutatja az ábra, hogy egy bizonyos energia szintnél alacsonyabb energiájú fotonok nem lépnek ki az anódból, mivel azokat a Wolfrám elnyeli, illetve a csőfeszültségnél nagyobb energiájú foton sem keletkezhethetnek.



3.12. ábra. A fékezési és a karakterisztikus sugárzás spektruma

3.3.5. Fotonok keletkezésének helye

A keletkezett fotonok energiája alapján megbecsülhető azok keletkezési helye a Wolfrám belsejében. Az összefüggés oka, hogy az anódon belül a fotonok energiája csökken, a kilépés során energiát vesztenek.

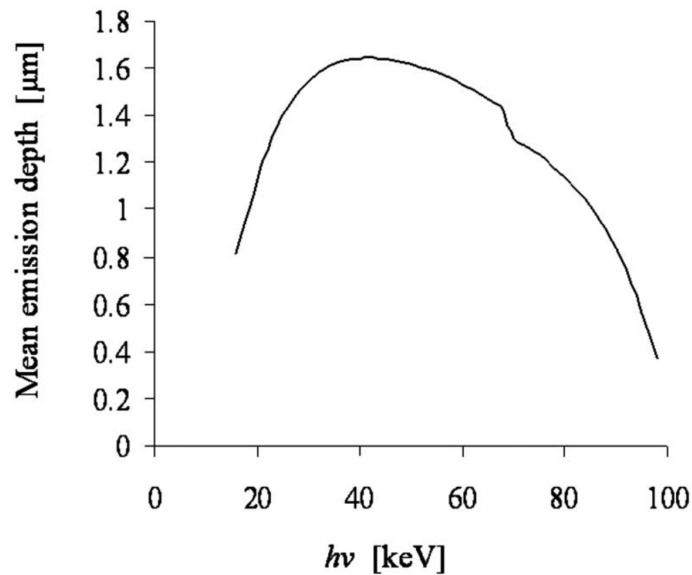


3.13. ábra. Anódban keletkező különböző energiájú fotonok.

Az alacsony energiájú fotonok a felszín közelében tudnak csak keletkezni, mivel kis energiával csak az anyag széléről tudnak kijutni. A Wolfrám belsejében keletkező kis energiájú fotonok nem jutnak ki, ezek elnyelődnek.

A mélyebb rétegekben tudnak nagyobb energiájú fotonok keletkezni, mivel ezeknek elég energiájuk lesz a megfelelő irányba elhagyni az anyagot.

A legmagasabb energiájú fotonoknak pedig azért lehet olyan magas az energiájuk, mert ezek szintén az anyag szélén keletkeztek, és így nem kellett sok energiát elhasználniuk a kilépéshez.

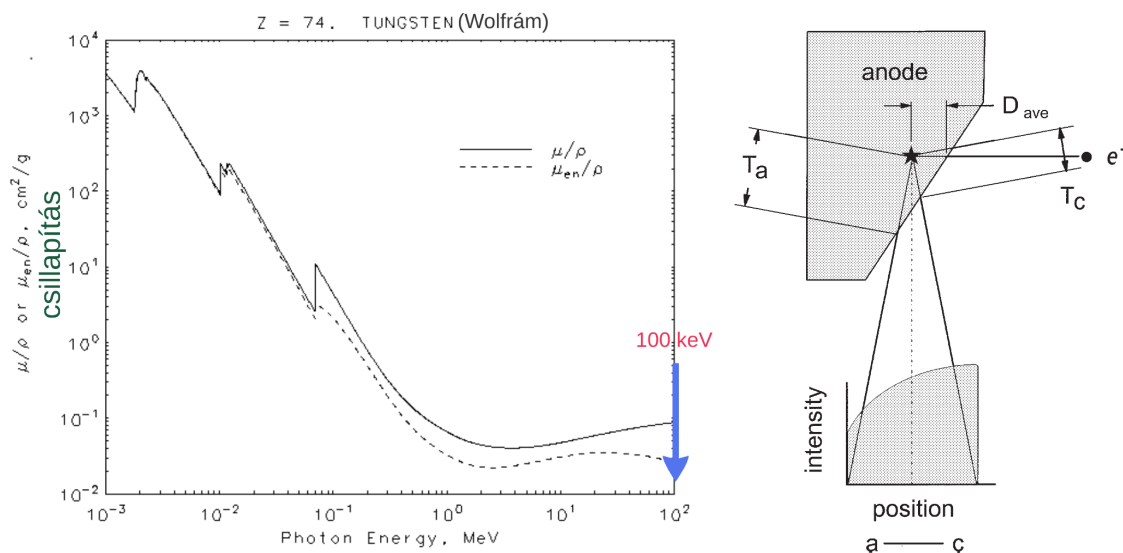


3.14. ábra. A fotonok energiája és keletkezési helye közötti összefüggés

3.3.6. Anódsarok effektus

A foton a Wolfrám anyagban haladva csillapodást szenved. Az ábra mutatja, hogy adott energiájú foton adott sűrűségű anyagon mekkora csillapítást szenved. A folytonos vonal jelzi a csillapítási együtthatót, a szaggatott vonal pedig a tömeggyengítési együtthatót. Jól látható, hogy a Wolfrám a kisebb energiájú fotonokat sokkal jobban elnyeli.

Ennek következménye az *anódsarok effektus*. Ez azt jelenti, hogy az anódból kilépő sugárintenzitás irányfüggő, mivel a bal oldalt kilépő foton több utat tesz meg a Wolfrámban, így jobban csillapodik a sugár intenzitása.

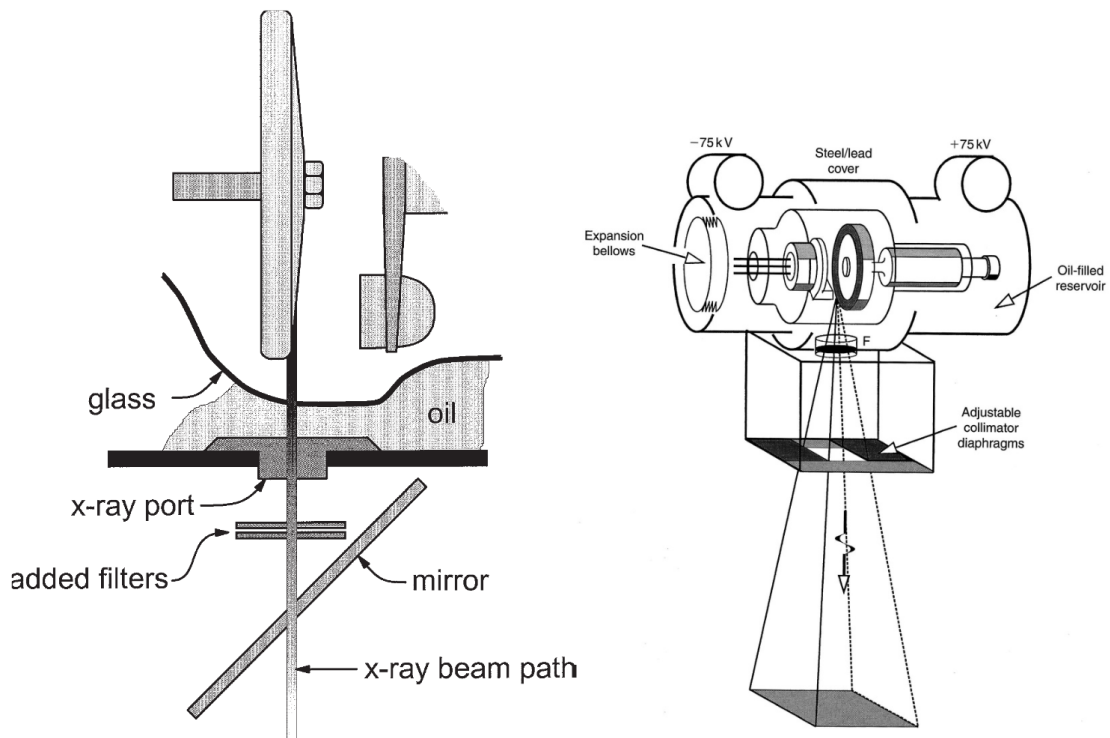


3.15. ábra. Anódsarok effektus

3.4. A kollimátor felépítése és működése

A sugárnyaláb a röntgensőből kilépve több anyagon is áthalad amíg elér a páciensig.

- Az üvegburok körül kering a *hűtőolaj*, ami az anódtárcsába külön is bele van vezetve.
- Ez alatt található a képen vastag fekete vonallal jelölt *ólomréteg*, ami nem engedi ki bármilyen irányba a fotonokat, csak a kis csillapítási együtthatójú, de nagy hőellenállású anyagból készült port-on keresztül léphetnek ki.
- Ez alatt különböző *szűrők* elhelyezésére van lehetőség, melyek kiszűrik a haszontalan fotonokat. Itt általában az alacsony energiájú fotonokat szokták kiszűrni, mivel ezek úgyszólván hamar elnyelődnek a páciensben, nem jutnak keresztül rajta. Ezeket kiszűrve jobb minőségű kép készíthető, és a páciens is kevésbé kell ionizálni.
- Ez alatt egy *tükör* van, ami a radiológus asszisztentst segíti a rendszer beállításában. Ezen keresztül egy lézert megtörve láthatóvá válik, hogy pontosan hol fog a páciensre érkezni a sugárzás, így a kollimátor megfelelő beállításával védeni tudja azokat a szerveket, amiket nem kell vizsgálni.
- Legalul található a *kollimátor*, melynek feladata a sugárnyaláb szélességének korlátozása. Ez egy nagy csillapítási együttható anyag (tipikusan ólom) szokott lenni, ami elnyeli az összes olyan foton, ami az ő irányába indult meg.



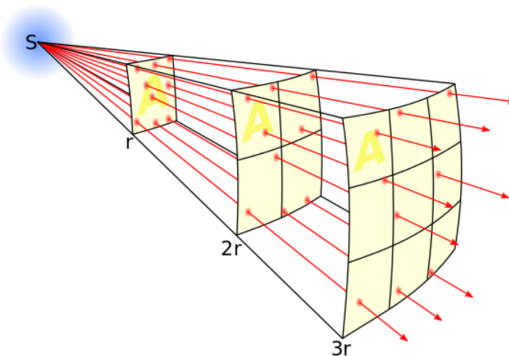
3.16. ábra. A kollimátor

3.5. Röntgensugárra ható geometriai hatások

Egy pontszerű, egyenletes (térzög feletti egyenletes) eloszlású sugárforrástól számított fluxust az inverz négyzetes törvény adja meg.

$$Intensity \propto \frac{1}{distance^2} \quad (3.1)$$

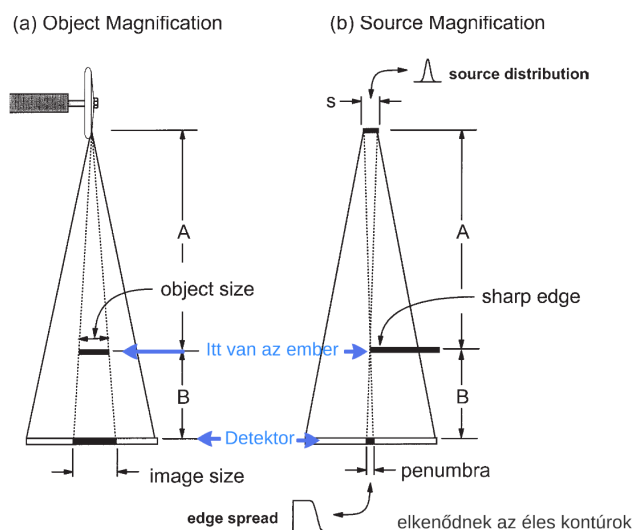
Ennek következtébe a detektorra vetülő sugár intenzitás nem lesz egyenletes. A közelebb intenzívebb lesz, mivel az egy kisebb sugarú gömbbel közelíthető, hiszen közelebb van a pontforráshoz.



3.17. ábra. Inverz négyzetes törvény

A sugár intenzitására csak egy becslést ad az inverz négyzetes törvény, mivel a gyakorlatban nem pontszerű a sugárforrás, hanem egy ablakon keresztül érkeznek a sugarak a kollimálást követően. Így a kilépő fotonok egymáshoz képest divergálnak és egymást keresztező sugarak is kilépnek az ablakon, aminek hatásaként a képen elmosódnak a hatá-

rok, illetve elgyengülnek a kontrasztok. Ezt a jelenséget *Penumbra effektus*nak nevezzük. Ez a jelenség nem eltolás invariáns, mivel ha a eltoljuk a vizsgált objektumot, akkor a detektoron teljesen más geometria alapján jönne ki az a tartomány, amit még elérhet olyan röntgenfoton, aminek nem kellett áthaladnia az objektumon. Emiatt a Penumbra effektust nagyon nehéz kompenzálni, leginkább Monte Carlo-s szimulációval vagy prior becsléssel lehet ellensúlyozni.



3.18. ábra. Penumbra effektus

3.6. Röntgensugár interakciója az anyaggal

A fotonok négyféle kölcsönhatásba léphetnek az emberi testtel.

- Koherens szóródás
- Párkeltés
- Foto-elektromos kölcsönhatás
- Inkoherens (Compton) szóródás

Röntgen képalkotás esetén a felsorolt kölcsönhatások közül az utolsó kettő a jelentős, melyek hatására megjelenik a szóródás és a csillapodás jelensége.

3.6.1. Koherens szóródás

A koherens szóródás az a jelenség, amit a látható fény nagyon gyakran elszenved, például ezért látjuk kéknek az eget.

A kölcsönhatás során, amikor a foton elhalad a hidrogénatom mellett, az energiáját teljesen leadja, ami megrezgeti az elektronokat. Ettől az atom instabil állapotba kerül, mivel az átrendeződött elektronok magasabb energiával rendelkeznek. A stabilizálódás során az elektronok visszarendeződnek, és a felesleges energiájukat kisugározzák egy foton formájában. Ennek az energiája pontosan meg fog egyezni a gerjesztési energiával, aminek hatására a folyamat beindult.

A kilépő foton irányáról semmit sem tudunk, viszont az energiája meg fog egyezni a belépő foton energiájával, és ezért ezt a kölcsönhatást koherens szóródásnak nevezzük.

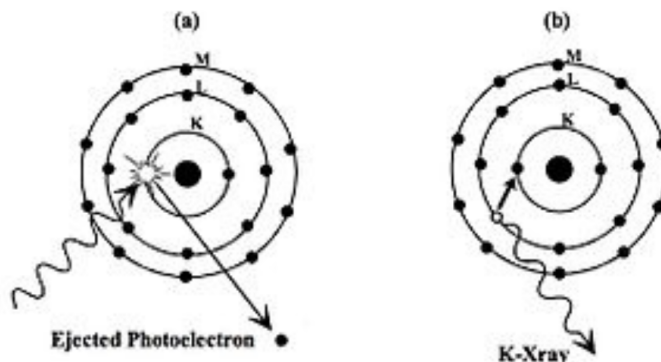
3.6.2. Párkeltés

A Párkeltés során nagyon nagy energiájú fotonok haladnak el az atom körül, és kiütnek egy elektront hátrahagyva egy pozitront. Ez a pozitron egy másik instabil elektronnal összeáll, mely során mindkettő energiát fog veszteni, és ezt az energiaveszteséget gamma foton párként random, de egymással ellentétes irányba sugározzák ki.

3.6.3. Foto-elektromos kölcsönhatás

A foto-elektromos kölcsönhatás során egy nagy energiájú foton érkezik, ami egy nála kisebb kötési energiával rendelkező elektronnal rugalmatlanul ütközik. Ennek következtében a foton megszűnik létezni, és az energiafedezetét kinetikus energiaként odaadja a K héjon lévő elektronnak, ami ezt felhasználva elhagyja az atomot. Így egy instabil atomszerkezet keletkezik, ami stabilizálódni próbál. Ennek során először egy L héjon lévő elektron fogja meg betölteni a K héjon lévő lyukat, mely során potenciális energiát veszít, amit fotonként kisugároz. Ennek következtében az L héjon keletkezik egy lyuk, amit egy M héjon lévő elektron fog hasonló módon betölteni. Ez a folyamat addig tart, amíg minden belső héjon lévő lyuk megszűnik, és csak a külső héjon maradnak lyukak. A kölcsönhatás természetesen nem csak a K héjon történhet meg, de ott a leggyakoribb.

A keletkezett fotonok kisebb energiájúak lesznek annál, minthogy elérjenek a detektorhoz, ezért ezekkel nem fogunk foglalkozni.

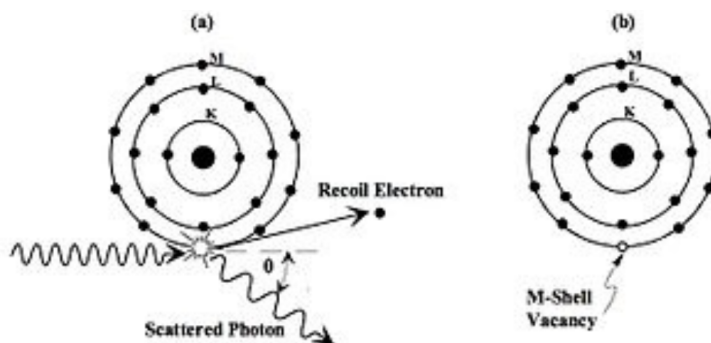


3.19. ábra. Foto-elektromos kölcsönhatás

3.6.4. Inkoherens (Compton) szóródás

Nagy energiájú, például gamma fotonok esetén az inkoherens szóródás lesz a primer kölcsönhatás. A reakció során a nagy energiájú foton kiüt egy külső elektront, de ebben az esetben mindkettő megmarad, az elektron és a foton is. A foton az ütközés során elveszíti az elektron kötési energiáját, illetve az elektronnak átadott kinetikus energiát. Ez az átadott kinetikus energia a szóródás szögétől függ, tehát minél nagyobb mértékben térül el az eredeti haladási iránytól a foton, annál nagyobb energiát veszít.

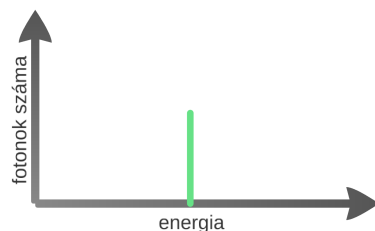
Mivel a foton a kölcsönhatást követően nem szűnik meg, hanem eltérített irányban halad tovább, ezért rontja a képminőséget, elmossa a detektor által érzékelt jelet.



3.20. ábra. Inkoherens (Compton) szóródás

3.6.5. A csillapodás jelensége

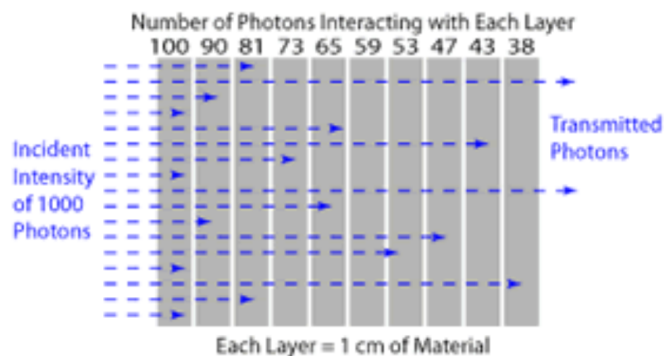
Röntgen esetén matematikai modellként a *monokróm sugár* használjuk. Tehát feltételezzük, hogy az energiaspektrum egy vonalból áll, és csak ezen az energiaértéken van sugárzása.



3.21. ábra. Monokróm sugár

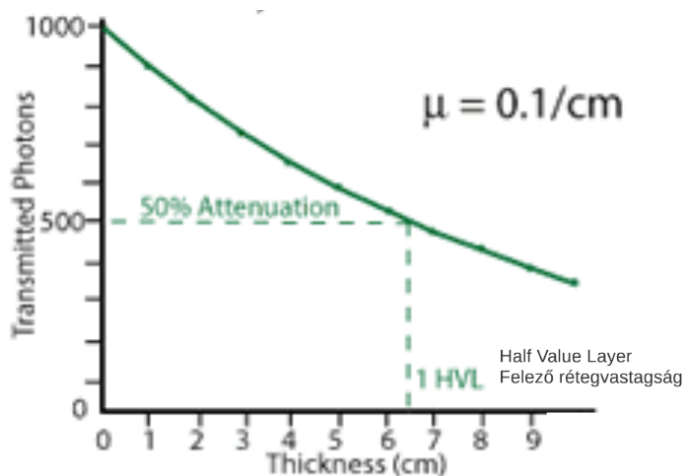
Ezt a konstrukciót a modellezésben jól lehet használni, viszont a fizikai valóságban ilyen nem lehet előállítani. Ezért megpróbáljuk megfeleltetni a gyakorlati viselkedést egy monokromatikus modellnek. Egy adott sugárzás esetén az *effektív energia* fogja azt megadni, hogy milyen monokromatikus sugárnak lehet megfeleltetni.

A csillapodás mértékét alapvetően az anyagvastagság és az anyag csillapítási együtthatója határozza meg. A képen látható homogén anyag egyenlő méretű szeleteit a szürke sávok jelzik. Tegyük fel, hogy monokromatikus sugárzás éri az anyag felületét, tehát az összes belépő sugár energiája megegyezik. Ekkor az első szelet a beérkező sugarak x százalékát nyeli el. Ezt követően a második szelet az első által átengedett sugarak szintén x százalékát nyeli el. Ebből látható, hogy a csillapodás az anyagvastagság exponenciális függvénye.



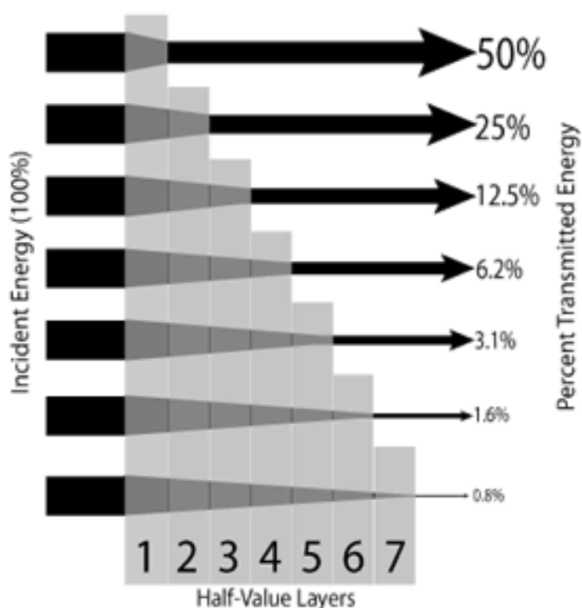
3.22. ábra. Anyagvastagság

Könnyen megfogható minősítője az anyagnak adott effektív energia mellett az úgynevezett *felezőréteg vastagság* (HVL). Ez az az anyagvastagság, ami a felületét érő fotonok felét elnyeli.



3.23. ábra. Felezőréteg vastagság

Az alábbi ábrán ilyen, felezőréteg vastagságú anyagokon átmenő sugárzás látható. Könnyen leolvasható, hogy ez egy exponenciális csillapodás lineáris csillapodási együtthatóval.



3.24. ábra. Exponenciális csillapodás

Az anyagon belül a sugár viselkedését a *Beer-Lambert törvény* írja le. Eszerint a kilépő intenzitás az anyag felületére belépő intenzitás és egy exponenciális függvényvel leírható csillapodási tényező szorzata.

A képletben szereplő lineáris csillapítási együttható megadja, hogy egy adott anyag mennyire nehezen áthatolható a röntgensugár számára. Arányos a sűrűséggel, de az anyag összetételétől is függ. Minden fotonenergiára/röntgensugárra más értéket vesz fel a felezőréteg vastagság függvényében: $\mu = (\ln 2)/HVL$

$$I = I_0 e^{-\mu x}$$

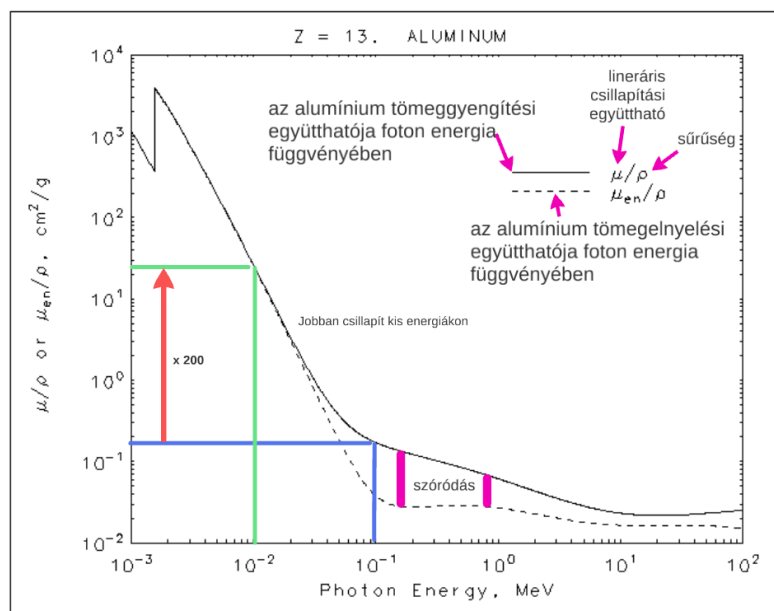
kilépő intenzitás belépő intenzitás lineáris csillapítási együttható réteg vastagsága

3.25. ábra. Beer-Lambert törvény

A fenti képlet a Beer-Lambert törvény legegyszerűbb esete, ami csak homogén anyagra és monokromatikus sugárzásra érvényes. A fizikai valóságban ezek a feltételek általában nem teljesülnek, ezért a gyakorlati alkalmazáshoz ki kell terjeszteni a Beer-Lambert törvényt.

Röntgen esetén gyakorlati modellként a *polikróm sugarat* használjuk. Ebben az esetben az energiaspektrum folytonos, tehát különböző energiájú sugarak érkezését feltételezzük.

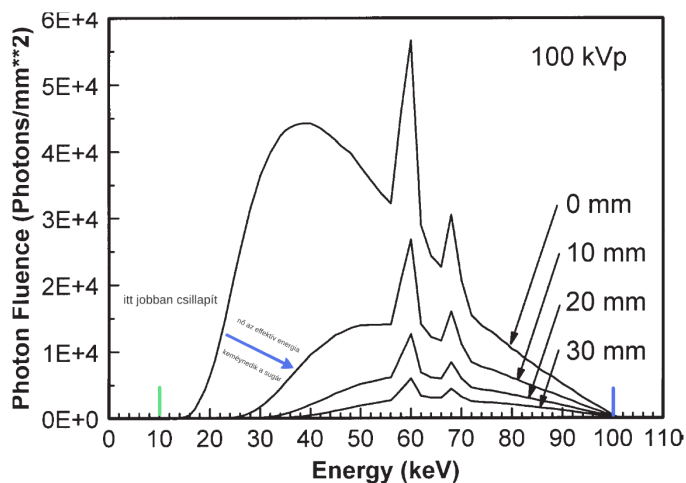
A csillapítási együttható ebben az esetben már nem csak az anyagsűrűségtől és az anyagvastagságtól, hanem a foton energiájától is függ. Az anyagmennyiséget egységnyi felületen mérjük, és g/cm^2 mértékegységgel látjuk el. Ennek a reciproka lesz a csillapítási együttható mértékegysége. Az ábrán az alumínium csillapítási együtthatója látható a foton energiájának függvényében. Jól látható, hogy egy kisebb energiájú foton sokkal nagyobb relatív csillapodást szenved, mintha egy nagyobb energiájú foton próbálna áthaladni az anyagon. Az is leolvasható az ábráról, hogy a minél magasabb a foton energiája, annál jobban háttérbe szorul a foto-elektromos kölcsönhatás, és előtérbe jön a Compton szóródás. Ezért látszólag kevésbé csillapodnak a nagy energiájú fotonok, kevesebb tűnik el belőlük, mint a kis energiájú fotonokból.



3.26. ábra. Alumínium csillapítási együtthatója

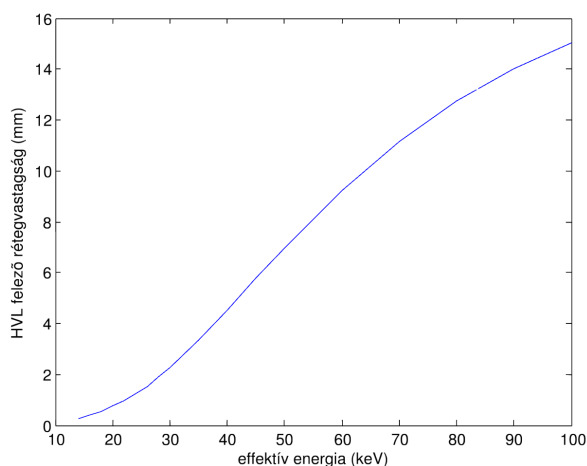
A polikróm sugarak esetén továbbra is befolyásolja a csillapodás mértékét az anyagvastagság. Az alábbi ábrán az x tengely a foton energiáját, az y tengely pedig a kilépő sugárzás fluxusát ábrázolja. A különböző függvények pedig a kollimátorba helyezett különböző vastagságú alumíniumlapok hatását írja le. Ha nem használunk alumíniumot a sugarak szűrésére, akkor a legfelső függvényt kapjuk. Ebben az esetben nagyon sok olyan alacsony energiájú foton éri el a páciens, ami nem fog tudni áthaladni rajta, ezért ezek-

kel feleslegesen ionizáljuk a sejteket. Egyre nagyobb vastagságú alumíniumokat használva egyre laposabb függvényeket lehet elérni, főleg az alacsony energiájú fotonok esetén. Viszont, ha túl vastag lemezt használunk, akkor már túlságosan ellaposodik a függvény, túl sok fotont nyel el az alumínium. Ezeknek az elnyelt fotonoknak eléggé költséges volt a keltetése, illetve ezek feleslegesen fűtötték és amortizálták az anódtárcsát, tehát nem érdemes ilyen vastagságú szűrőt használni. (Ez persze a vizsgálat függvénye, mert ha pontosan ilyen vizsgálósugár használata indokolt, akkor ezek csak másodlagos szempontok.)



3.27. ábra. Különböző vastagságú alumínium hatása a spektrumra

Polikróm sugarak esetén a különböző energiájú fotonokhoz különböző felező rétegvastagság tartozik. Minél nagyobb a spektrum effektív energiája, annál vastagabb alumínium tudja megfelelni az intenzitást. Ebben az esetben nem lesz igaz az exponenciális összefüggés.



3.28. ábra. Energiaspektrum felező rétegvastagsága

A fenti összefüggések alapján a polikróm sugarak esetén a Beer-Lambert törvény egyszerű alakja nem állja meg a helyét. Ezért módosítani kell a Beer-Lambert törvényt, viszont a módosítás nagyon bonyolult modellt eredményez, ezért ennek alkalmazása helyett a gyakorlatban előre elkészített táblázatok alapján dolgoznak a radiológusok.

utána már ilyen vastag felezi csak meg az intenzitást
 minél nagyobb annál kevésbé lesz
 sugárkeményedés

szabványos röntgensugarak **felező rétegvastagság** a kettő hányadosa

első második

Radiation quality	First CSR (mmAl)	Second CSR (mmAl)	Homogeneity coefficient	Effective energy (keV)
RQR2	1.44	1.80	0.80	25.10
RQR3	1.79	2.38	0.75	27.15
RQR4	2.09	2.92	0.72	28.80
RQR5	2.35	3.42	0.69	30.15
RQR6	2.65	3.99	0.66	31.65
RQR7	2.95	4.62	0.64	33.05
RQR8	3.24	5.20	0.62	34.40
RQR9	3.84	6.31	0.61	37.05
RQR10	4.73	7.79	0.61	40.75
RQA2	2.22	2.50	0.89	29.50
RQA3	3.91	4.15	0.94	37.30
RQA4	5.34	5.83	0.92	43.25
RQA5	6.86	7.32	0.94	49.40
RQA6	8.13	8.54	0.95	54.75
RQA7	9.22	9.70	0.95	59.70
RQA8	10.09	10.73	0.94	63.95
RQA9	11.39	12.16	0.94	71.15
RQA10	13.02	13.79	0.94	82.10

3.29. ábra. Különböző minőségű sugárzások előállításához szükséges paraméterek táblázata

A módosított Beer-Lambert modellben minden energiára külön ki kell számolni az adott energián belépő intenzitásnak és az adott energiájú fotonokra vonatkozó csillapítási tényezőnek a szorzatát. Majd ezeket integrálni kell az energia szerint a minimumtól a maximumig.

minden energiára külön kiszámoljuk

$$I = \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} I_0(E) e^{-x\mu(E)} dE$$

kilépő intenzitás belépő intenzitás lineáris csillapítási együttható
 energia függő energia függő energia függő

vastagság

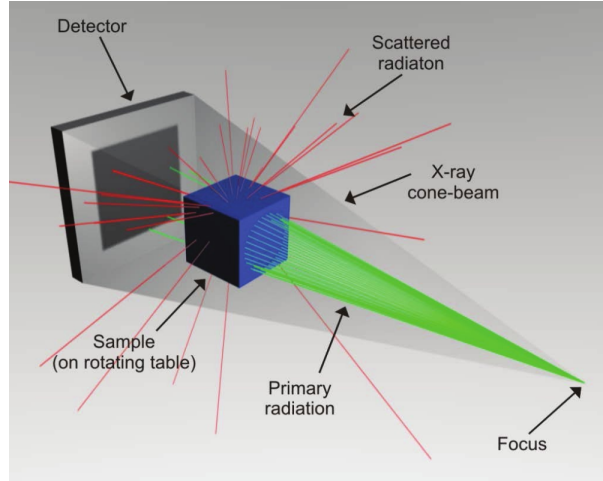
3.30. ábra. Módosított Beer-Lambert törvény

A fenti modell még továbbra is azt az egyszerűsítést használja, hogy az anyag homogén. Ám az emberi testre ez nem mondható el, ezért tovább kell módosítani a Beer-Lambert törvényt, és a háromdimenziós térben haladó primer sugárzás trajektóriája felett is integrálni kell.

Még ezen finomságú modell is egyszerűsítéseket alkalmaz, mivel még továbbra sem veszi figyelembe, hogy az a foton, ami a sugárforrásnál E energiájú volt, az nem biztos, hogy x helyen is E energiájú lesz. Tehát a modell továbbra sem veszi figyelembe a szóródást.

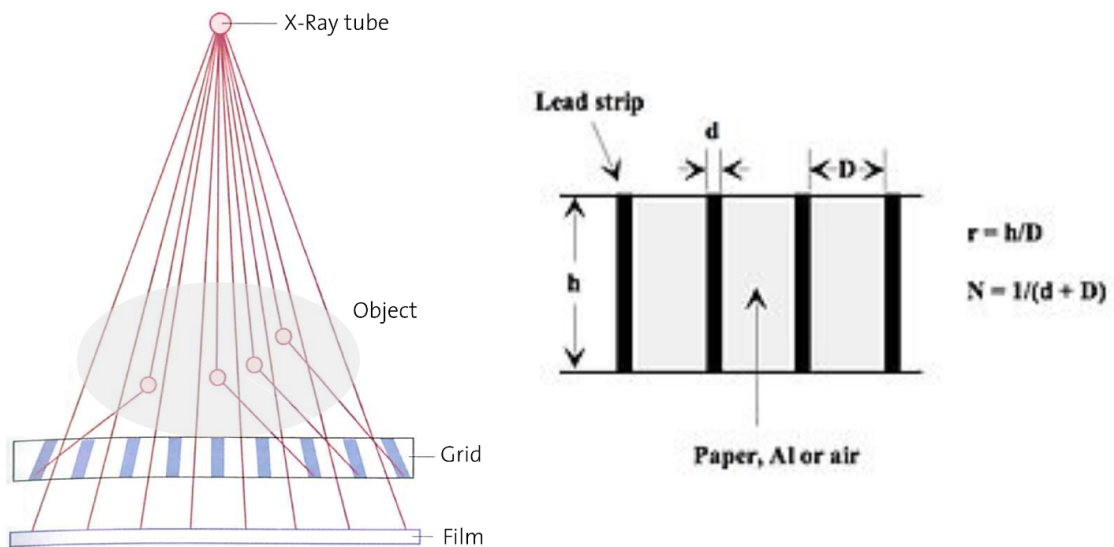
3.6.6. A szóródás jelensége

A fotonok detektálásakor nem élhetünk azzal a feltételezéssel, hogy csak primer sugarak érik el a detektor felületét, mivel a szóródás jelensége miatt szórt sugarak is megjelennek. A szóródás jelensége haszontalan, rontja és zajossá teszi a képet.



3.31. ábra. A szóródás jelensége

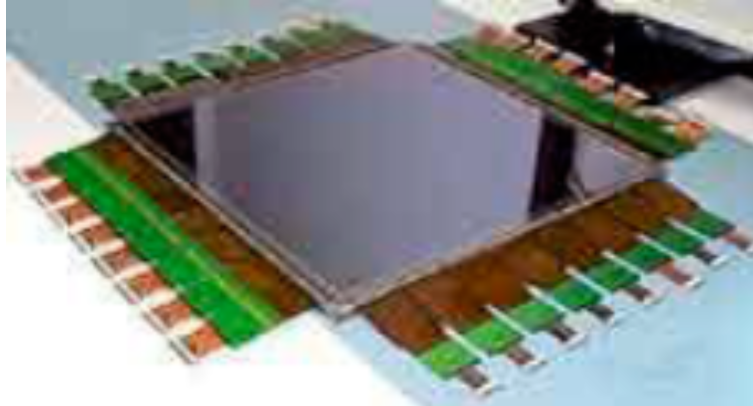
A szóródás okozta zajt nagyon nehéz leszűrni a képről, sokkal célravezetőbb azt megelőzni, hogy ezek a szórt sugarak elérjék a detektort. Azoknál a berendezéseknél, ahol fix a sugárforrás és azzal szemben a detektor elhelyezkedése az integrálás ideje alatt (például projekciós röntgen esetén), ott az *antiscatter grid*-et használják a szórt sugárzás csökkentésére. Ebben a berendezésben ólomlemezek vannak döntve elhelyezve úgy, hogy a sugárforrás irányából érkező primer sugarakat átengedjék, viszont a szóródott fotonoknak ezen keresztül kellene eljutniuk a detektorhoz, amit az ólom nagy csillapítási együtthatója miatt nem fognak tudni megtenni. Ez módszer javítja a képet, viszont a berendezés a páciens alatt van elhelyezve, így a felesleges ionizálást nem csökkenti.



3.32. ábra. Antiscatter grid

3.7. Röntgensugarak detektálása

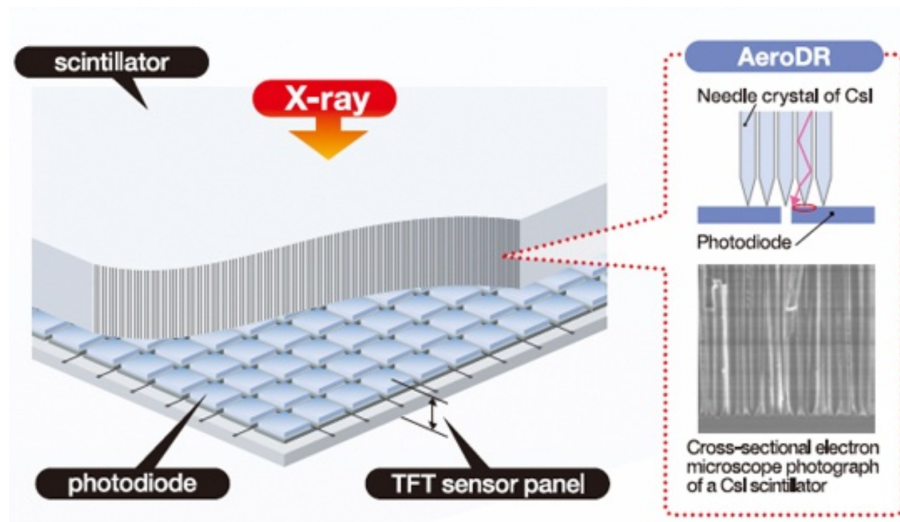
A röntgensugarak detektálása a *flat panel detektor* a feladata. Ez általában nagy méretű, és több különböző elemből épül fel. Ezek az elemek különböző kiolvasási, illetve erősítési hibákkal rendelkeznek.



3.33. ábra. Flat panel detector

A detektor felett egy *szcintillációs réteg* helyezkedik el, ami kisebb energiájú fotonokra alakítja át a nagy energiájú fotonokat. Amikor belép egy nagy energiájú foton ebbe a kristályba, akkor foto-elektromos kölcsönhatásba lép vele. A kölcsönhatás során emittált foton ezt követően a kristályban kell tartani, ami a diódára vezeti azt.

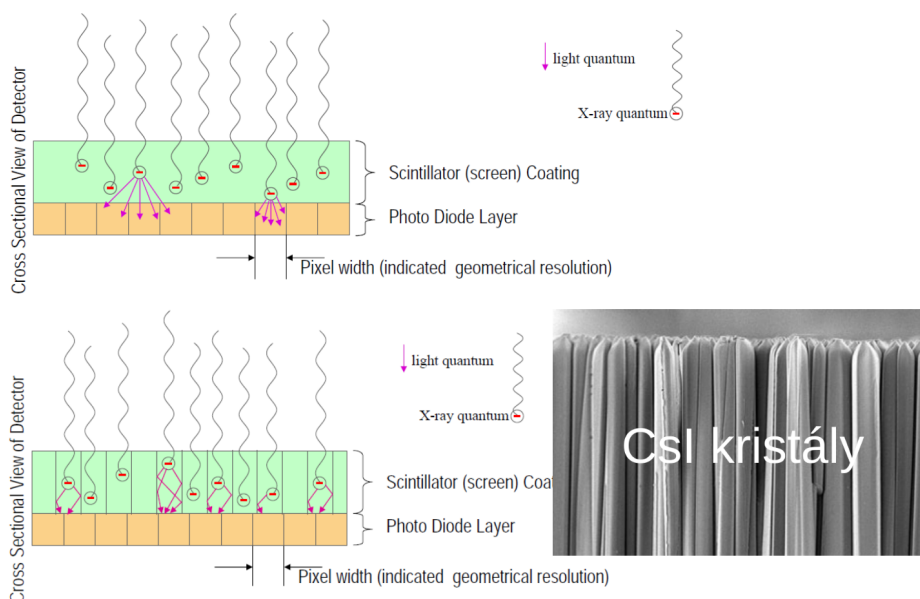
A szcintillátor a röntgensugarat látható fénné alakítja, viszont nem minden felületét elérő foton esetén történik ez meg. Minél vastagabb ez a réteg, annál nagyobb részét nyeli el a bejövő sugárzásnak, és így annál kevesebb foton halad át rajta hasznosítatlanul. Ennek következtében romlik a térbeli felbontás.



3.34. ábra. Szcintillációs réteg

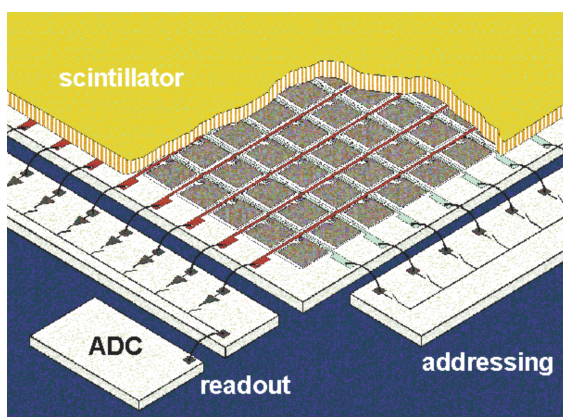
A szcintillátor másik hátrányos tulajdonsága, főleg a régebbi modellek esetén, hogy a képen egy elmosásos hatást tud előidézni. Ennek oka, hogy amikor megérkezik a nagy energiájú foton, és a kölcsönhatást követően keletkezik belőle egy kisebb energiájú foton, akkor ez bármilyen irányba elindulhat. Minél közelebb keletkezik ez a foton az érzékelő felülethez, annál nagyobb eséllyel fog a megfelelő érzékelőelembe becsapódni.

Ezért az újabb típusú szcintillátorokban megtörednek ezek a kristályok annak érdekében, hogy ha egy kristályelemen belül keletkezik egy foton, akkor az onnan ne tudjon kilépni.



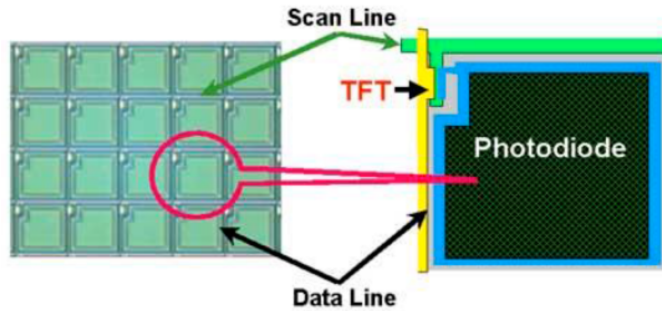
3.35. ábra. Szcintillátor elmosó hatása

A szcintillációs rétegek alatti érzékelőelemeket egy *CCD mátrix* tartalmazza. Ennek fegyverzeteire különböző potenciálokat kapcsolunk. Az expozíciós idő alatt a fotonok fegyverzetei lesznek nagy potenciálon, kiolvasáskor pedig a megfelelő szomszédos fegyverzet. A képen látható, hogy a CCD mátrix egyik oldalán egy címzősín van, a másik oldalán pedig a mérőleges regiszter, amire az analóg-digitális átalakító (ADC) van rákötve.



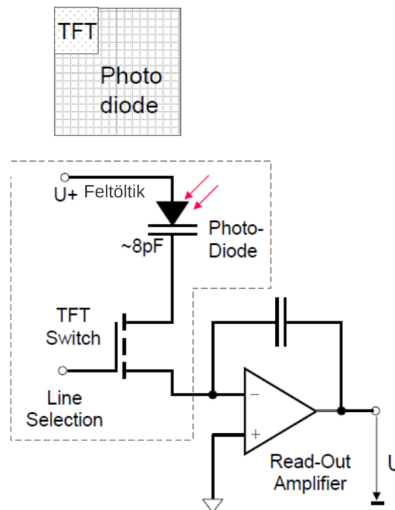
3.36. ábra. CCD mátrix

A fotonok megfelelő érzékelését nehezíti, hogy CCD mátrix fegyverzetei nem lesznek tökéletesen négyzet alakúak. Ennek oka, hogy a címző- illetve léptetővezeték miatt minden érzékelőelem valamelyik sarkából egy kis rész hiányzik.



3.37. ábra. Érzékelőelemek sematikus felépítése

Az alábbi ábrán a fotodióda, illetve az egész elrendezés egy egyszerűsített áramköri rajza látható. (Ez a tárgy anyagához szorosan nem kapcsolódik, a számonkéréseken nem kell tudni.)



3.38. ábra. Fotodióda áramköri rajza

A flat panel detektor hatékonyságát a kvantum detektálási hatékonyság (QDE) méri. Ez azt adja meg, hogy a detektor mennyire jól hasznosítja a röntgensugarat, a fotonok hány százalékát képes detektálni.

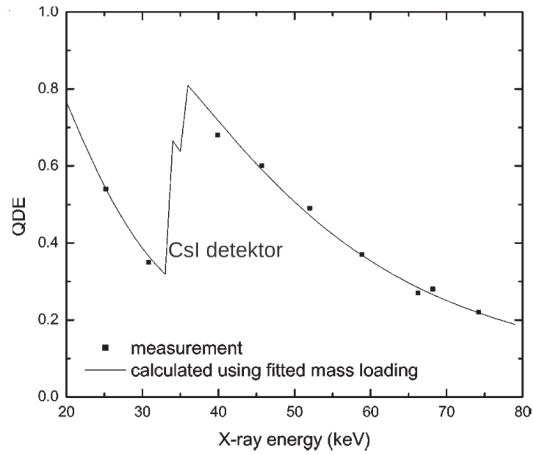
$$QDE = \frac{SNR_{ki}^2}{SNR_{be}^2} = \frac{(\text{kimenetre érkező jel jel-zaj viszonya})^2}{(\text{bemenetre érkező jel jel-zaj viszonya})^2} \quad (3.2)$$

Ez a mennyiség egy anyagra jellemző tulajdonság, de az értéke függ a foton energiájától.

3.8. Röntgenképeket terhelő zajok

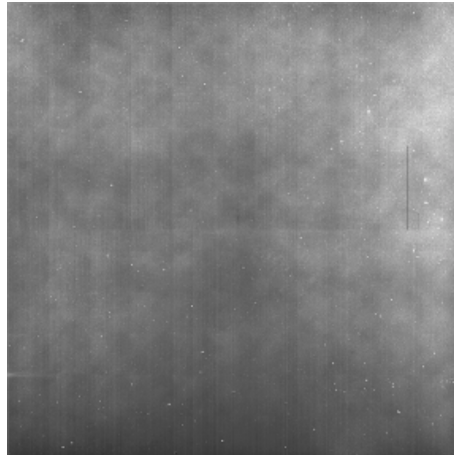
3.8.1. Sötétáram

A félvezetők képesek úgy is áramot vezetni, ha nem kapcsoljuk őket nyitóáramba, vagy záróáramba nem gyűlik össze megfelelő töltésmennyiség. Az ekkor keletkező áramot *sötétáram*nak nevezzük.



3.39. ábra. Kvantum detektálási hatékonyság

Az alábbi felvétel sugárzás nélkül készült, ezért jól látszik raja a sötétáram zaja. Ezen kivehetőek a detektorban található érzékelők határvonalai is.



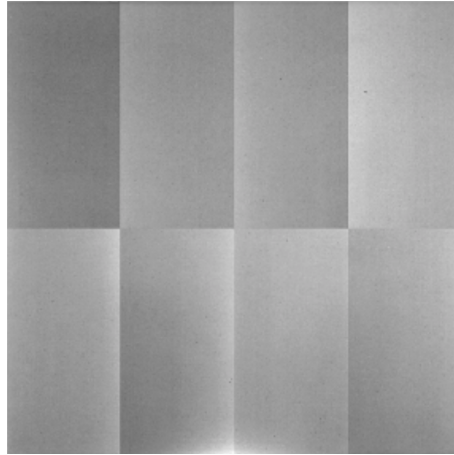
3.40. ábra. Sötétáram

A sötétáram amplitúdója a hőmérséklet emelésével növelhető, viszont állandó hőmérséklet mellett mindig ugyanolyan zajjal terheli a képet. Ezt az állandó offsetet lehet korrigálni az alábbi képlettel:

$$\text{javított kép} = (\text{kép} - \text{offset}) / \text{gain} \quad (3.3)$$

3.8.2. Erősítés korrekció

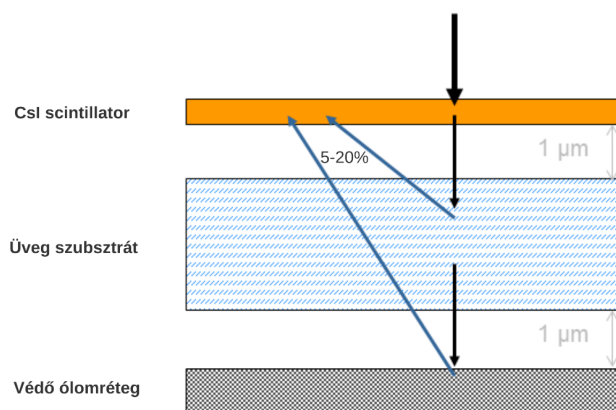
A sötétáram mellett az *erősítés korrekció* is terheli a röntgen által készített képeket. Ennek oka, hogy a kiolvasás nem egy sínen történik, hanem minden blokkhoz külön analóg erősítő és analóg-digitális átalakító tartozik. Ezek pedig különböző módon erősítik a jelet, ami az alábbi, homogén intenzitásviszony mellett készült képen szépen kirajzolódik. Mivel ez egy multiplikatív zaj, ezért a korrigálás során ezzel osztani kell a kapott képet.



3.41. ábra. Erősítés korrekció

3.8.3. Backscatter

A felvételek tovább rontja a *Backscatter* jelensége, ami sokáig még a gyártók figyelmét is elkerülte. A jelenség oka, hogy az érzékelő feletti szcintillátor réteg nem fog meg minden nagy energiájú fotont, előfordulnak olyanok, amik áthaladnak rajta. Ezek nagy valószínűséggel a detektoron, és az alatta lévő vastag üvegrétegen is áthaladnak, és csak a legalul elhelyezett ólomréteg fogja elnyelni őket. Viszont ez képes Compton szóródást generálni, aminek következtében kisebb energiával képes visszajutni a detektorba a foton. Ez pedig egy nagyon nehezen szűrhető zajt eredményez a felvételen. Klasszikus módszerekkel nem is lehet kiszűrni, egyedül olyan modulált vizsgálójel alkalmazásával előzhető meg, ami alkalmas a zaj és a primer sugárzás elkülönítésére. Ilyenkor a backscatter jelenségét elmosásként modellezzük és ideálisan (például sakktábla mintával) modulált vizsgálójel esetén a moduláció hatására a nagyfrekvenciás tartományban megjelenik az alacsony frekvenciás tartományban is látható jel. Ám ezt a jel terjedése közben fellépő, elmosódást eredményező hatások érik, melyek már csak a detektált jel alacsony frekvenciás tartományában okoznak eltérést.

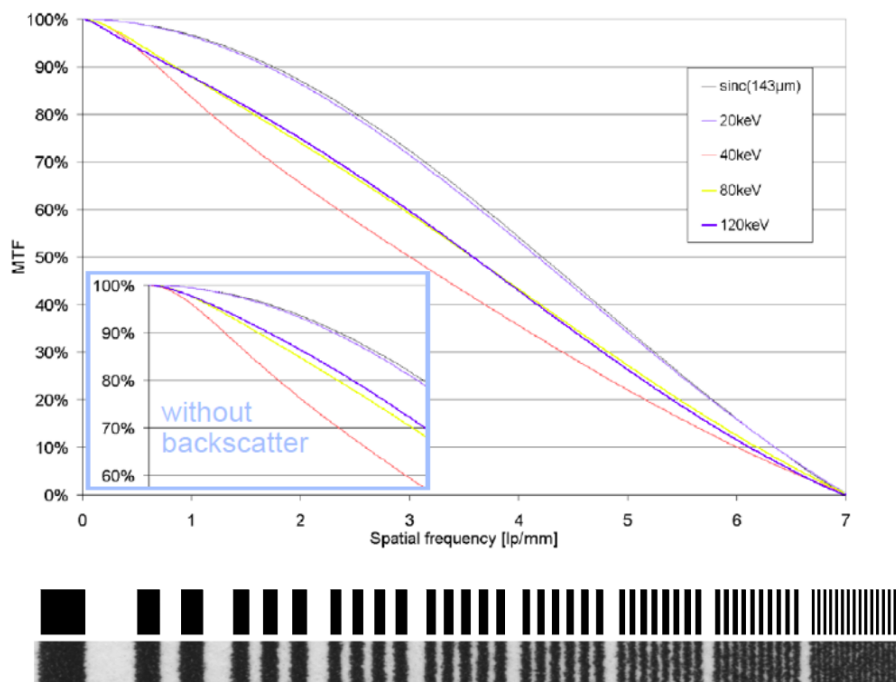


3.42. ábra. Backscatter

3.8.4. Modulációs transzfer

A backscatter jelensége a *modulációs transzfer függvény* segítségével mérhető. Ez a detektor frekvenciabeli jellemzője, az adott síkfrekvenciás vizsgálójel detektálásánál történő csillapodást vizsgálja.

Ez a vonalpár fantommal jól vizualizálható, ahol erősen és kevésbé erősen csillapodó részek egyre sűrűsödő váltakozó sorát vizsgáljuk. Ezeknél azt vizsgáljuk, hogy milyen sűrűségig rekonstruálódik, tehát meddig tudjuk szemmel megkülönböztetni a sávokat. Jól látható, hogy az alsó, backscatterrel terhelt képeken sokkal hamarabb elmosódnak a sávok.



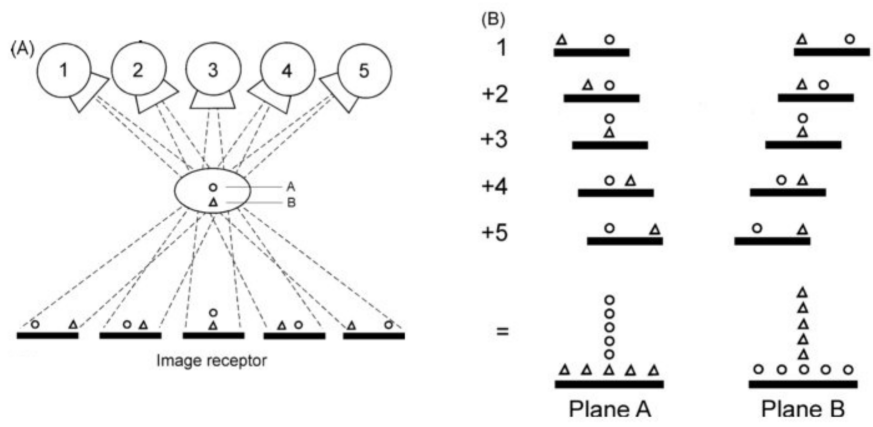
3.43. ábra. Modulációs transzfer függvény

3.9. Kitekintések

3.9.1. Digitális tomoszintézis

A CT csak a 70-es években kezdett el megjelenni, viszont a 80-as 90-es évek előtt még nem vált elérhetővé. Viszont már korábban is képes volt az orvostechika rétegfelvételeket készíteni a tomoszintézis módszerével számítástechnika nélkül.

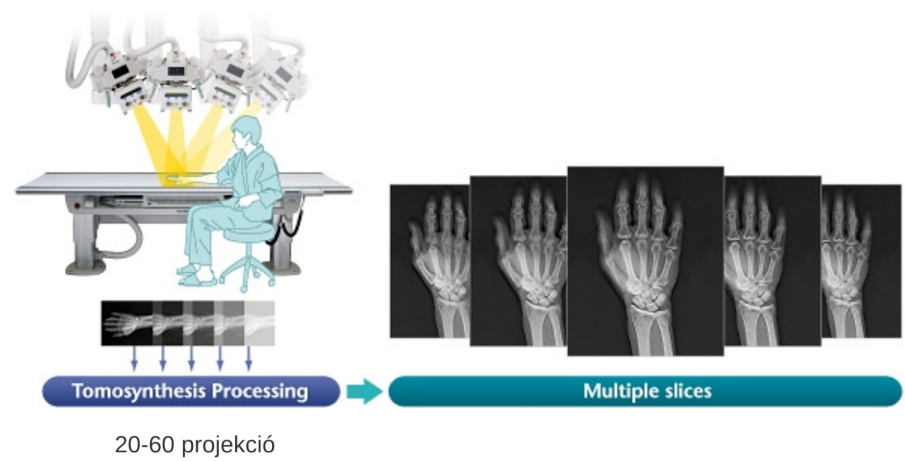
Ennek során több projekciót rögzítettek, majd ezeket egy világító tábla elé felfogták megfelelő eltolással. Az shiftelést úgy számolták ki, hogy a vizsgált rész minden képen ugyanoda essen, így az az integrálást követően szépen kirajzolódott. Ekkor a többi rész minden képen különböző helyre esett, így ezek egy elmosódott háttérrel adtak a képnek.



3.44. ábra. Projekciós shiftelt integrálása

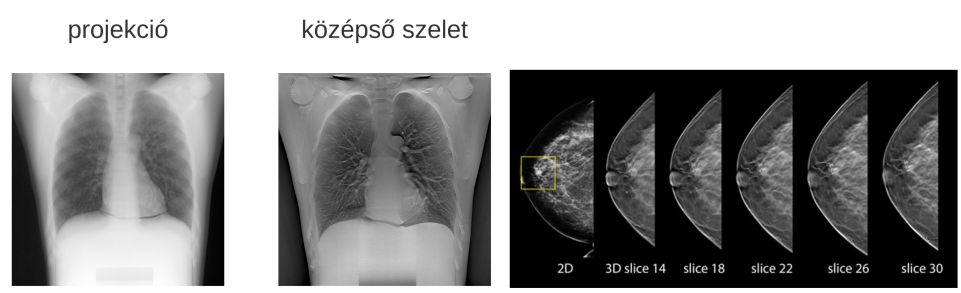
Hasonló elven működik a digitális tomoszintézis, melynek előnye, hogy sokkal alacsonyabb az előállítási költsége, mint egy CT-nek. Ez az eszköz szintén térfogatrekonstrukcióra képes, több-kevesebb korlátozással.

A működése során a vizsgált objektumról különböző elrendezések mellett készít felvételeket, majd ezekből a síkmetszetekből rakja össze a modellt.



3.45. ábra. Digitális tomoszintézis

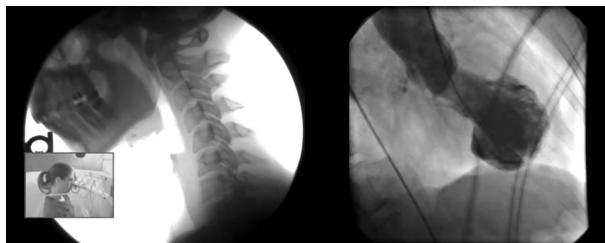
A módszer segítségével olyan felvételeket lehet előállítani, amiken szépen kirajzolódnak a daganatos elváltozások.



3.46. ábra. Digitális tomoszintézis eredményei

3.9.2. Fluoroszkópia

A fluoroszkópia egy olyan röntgen képalkotó eljárás, amely lehetővé teszi a mozgó belső szervek vizualizálását. Gyakran alkalmazzák a gerinc, illetve a szív vizsgálatára. Utóbbihoz sokszor érfejtést is alkalmaznak, amely során nagy csillapítási együtthatójú anyagot, tipikusan jód vegyületet fecskendeznek be a szívkamrákba.

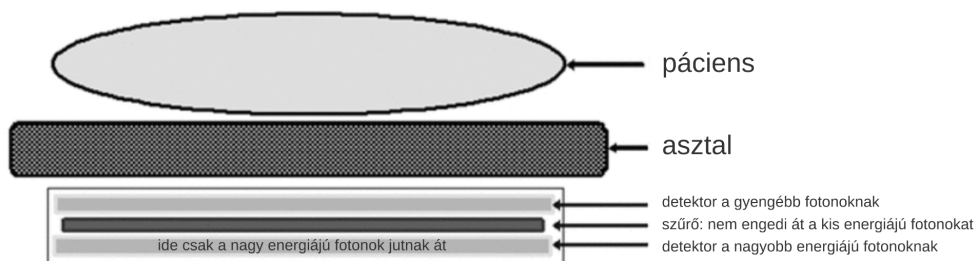


3.47. ábra. Digitális tomoszintézis eredményei

3.9.3. Duál energiás röntgen

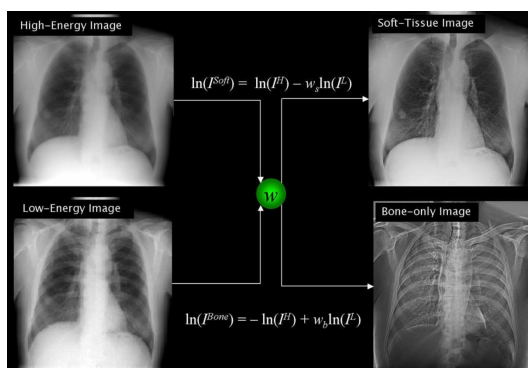
A duál energiás berendezések a beérkező jelet különböző energiatartományokra tudják bontani. Ehhez vagy két különböző effektív energiájú röntgensugárral készítenek két képet, vagy egymás után különböző csőfeszültséget alkalmazva két egymás felett elhelyezett detektorral készítenek felvételt.

Az utóbbi megvalósítás esetén a felső detektor a kis energiájú fotonokat érzékeli. A nagy energiájú fotonok viszont ezen áthaladnak, és ezeket csak az alsó detektor érzékeli.



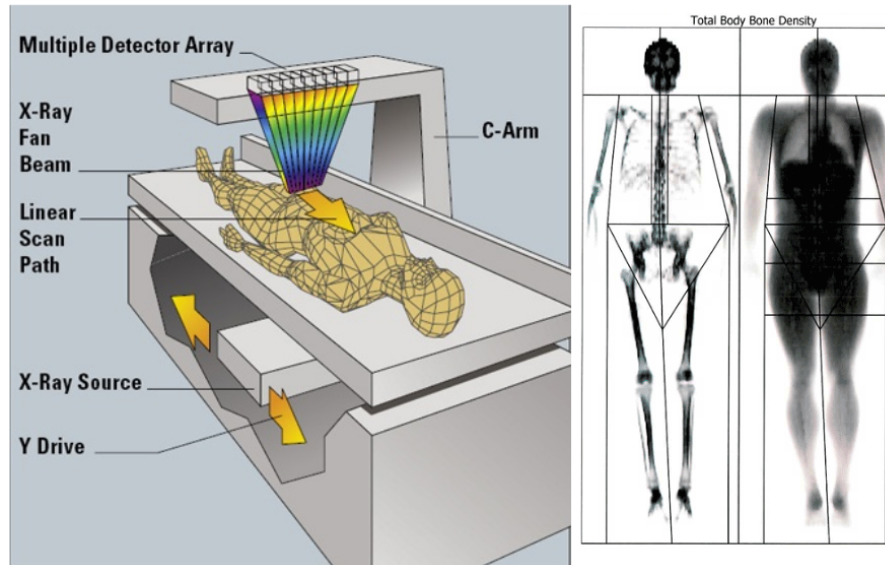
3.48. ábra. Dupla detektoros megoldás

Ezt a módszert a mellkasvizsgálatok során szokták alkalmazni, mivel ennek segítségével eltüntethető a bordák árnyéka a felvételről.



3.49. ábra. Mellkasvizsgálat duál energiás röntgennel

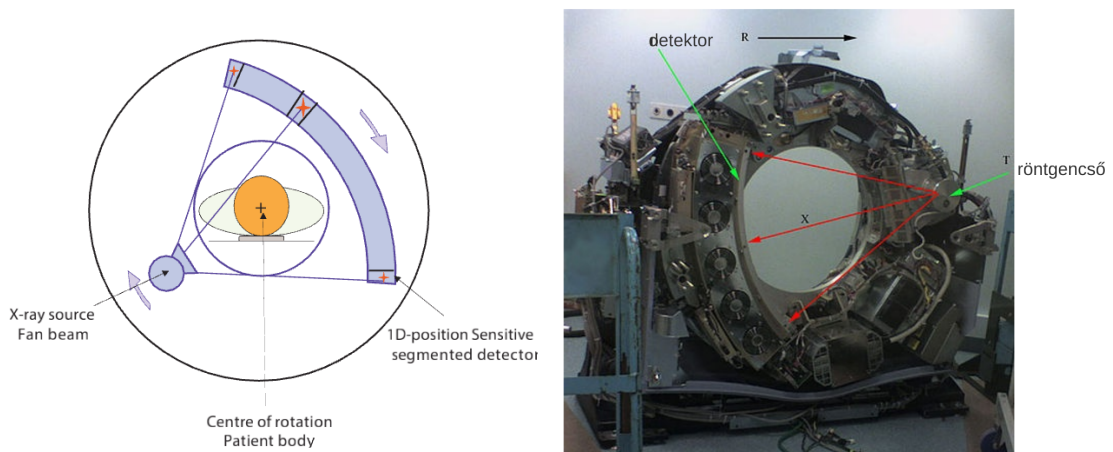
A fenti eljárást alkalmazza a DEXA (Dual-Energy X-ray Absorptiometry) berendezés is, aminek segítségével a csontitkulást lehet diagnosztikálni.



3.50. ábra. DEXA

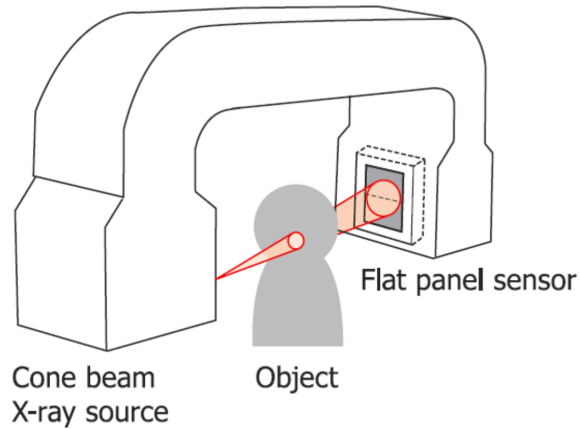
3.9.4. CT

A CT berendezés esetén a sugárforrás és a detektor egy gyűrűben forog, és ennek segítségével pszeudo háromdimenziós képeket lehet készíteni.



3.51. ábra. CT felépítése

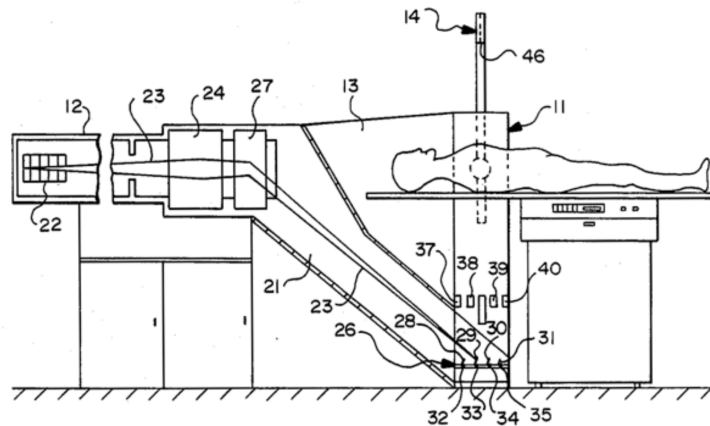
A Cone Beam CT-t a fogászatban használják. Ennél a berendezésnél a vizsgálat során nem kell mozgatni a páciens, hanem a lap detektor és a sugárforrás körbe forog a feje körül. Ezeket a felvételeket jelentős szórt sugárzás fogja terhelni, így a Hounsfield egységek nem lesznek túl pontosak.



3.52. ábra. Cone Beam CT

3.9.5. Electron Beam Tomography

Az Electron Beam Tomography estén nem fotonok keletkeznek, és nincs benne forgó alkatrész, hanem egy körkörös anód veszi körül a pácienszt, és egy elektronnyaláb jár körbe körülötte. A módszer előnye, hogy a felvétel nagyon gyorsan elkészül, így a szívről lehet úgy felvételt készíteni vele, hogy közben ne dobbanjon. Másik előnye, hogy sokkal kisebb a dózis a vizsgálat során, viszont hátránya, hogy nagyon drága a berendezés.

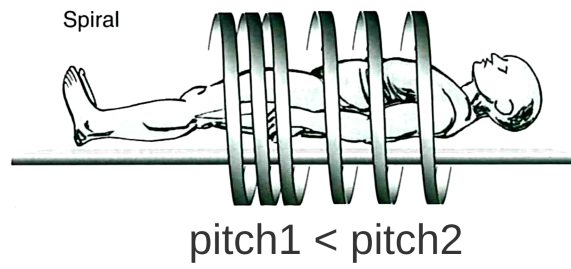


3.53. ábra. Electron Beam Tomography

3.9.6. Pitch

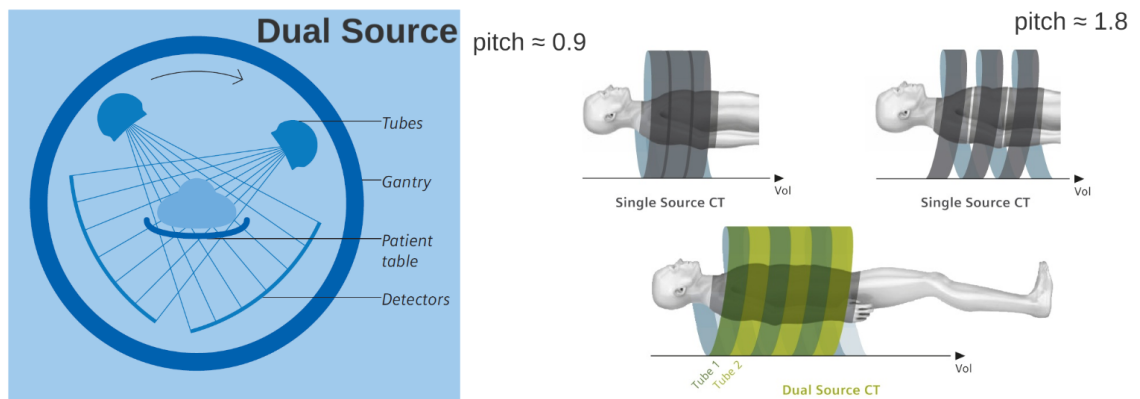
A CT helikális (spirális) szeleteket állít elő. Túl nagy pitch esetén a felvételtől kimaradhatnak részek, amik akár fontos információkat tartalmazhatnak.

$$\text{pitch} = \frac{\text{table travel per rotation}}{\text{nominal slice width}} \quad (3.4)$$



3.54. ábra. Pitch

Erre a problémára a Dual Source CT jelenthet megoldást.



3.55. ábra. Dual Source CT

4. fejezet

Képalkotás modellezése, metrikái

4.1. Áttekintés

Először egy elméleti áttekintést fogunk látni arról, hogy miért van kiemelten nagy jelentőségük a lineáris rendszereknek, milyen jellemzőik vannak, hogyan vizsgálhatóak, hogyan írhatóak le. Külön hangsúlyt kapnak a lineáris időinvariáns (Linear Time-Invariant) rendszerek, amit LTI-ként rövidítünk.

Látni fogjuk, hogy a képalkotást hogyan lehet lineáris rendszerekkel leírni, még inkább minősíteni.

4.2. Lineáris rendszerek

A lineáris rendszer egy olyan leképezés (jelöljük: S), amely egy A halmazból egy B halmazba képez és a lineáris szuperpozíció elve teljesül rá.

Definíció 1 (Lineáris szuperpozíció elve) *Ha az argumentumot 2 tag összegére tudjuk bontani, akkor a 2 tag képének az összege lesz az argumentum képe. Ha skalár szorzót viszünk be a megfelelő bemeneti függvények/jelek elé, akkor azt kiemelhetjük a kép elé.*

4.3. Lineáris eltolás-invariáns rendszerek

Képfeldolgozásban eltolás-invariáns rendszereket használunk, nem időinvariáns rendszereket, ennek az oka, hogy térbeli és síkbeli jeleink vannak (2 és 3 dimenziós kiterjedésű jeleink, nem 1 dimenziós, időbeli jeleink). Úgy tudunk összegezni, hogy ha vesszük az F gerjesztő jelünk és eltoljuk x_0 -al majd megnézzük, hogy a rendszernek mi lesz a válasza az eltolt gerjesztő jelre, akkor a rendszer válasza megegyezik az eredeti, eltolás nélküli F jelünkre adott válasznak az x_0 -al történő eltoltjával.

Jellemzők:

- Rendszer: $S: A \rightarrow B$
- $S\{a \cdot f + b \cdot g\} = a \cdot S\{f\} + b \cdot S\{g\}$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ és $f, g: C \rightarrow A$

Eltolás-invariáns (idő invariáns) rendszer:

$$S\{f * \delta(x - x_0)\}(y + x_0) = S\{f\}(y)$$

Az eltolást itt a Dirac deltával történő konvolúcióval realizáltuk.

Definíció 2 (Konvolúció) Az

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t_0 - t) dt$$

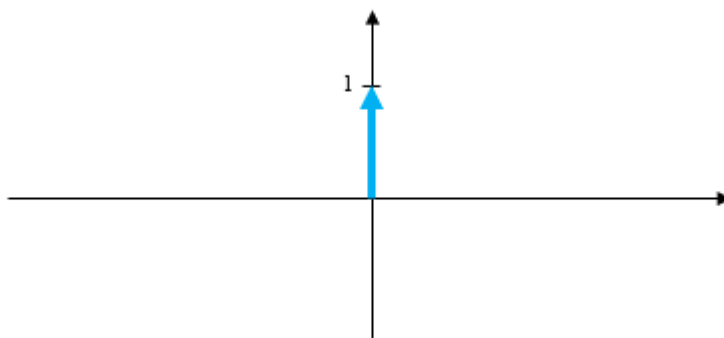
kifejezést az $f(t)$ és $g(t)$ függvények konvolúciójának nevezzük. A $\delta(x - x_0)$ -al történő konvolúció során a bemeneti jelet pozitív irányba x_0 egységgel eltoljuk.

4.4. A Dirac delta

A Dirac deltát egy úgynevezett impulzusjelként használjuk. A Dirac deltát úgy tudjuk definiálni, hogy ehhez felhasználjuk a 0 szigmájú Gauss sűrűségfüggvény:

$$-\delta(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)$$

A szigmával közelítjük a 0-t ($\lim \rightarrow 0$), ennek a következménye, hogy 0 alatt 0, 0 fölött 0 az értéke, 0-ban pedig egy olyan végtelen értéke van, amire az lesz igaz, hogy ha 0 – 0-tól 0+0-ig integráljuk a $\delta(x)$ -et dx szerint, akkor egy 1-est kapunk, tehát az alatta lévő terület az egységnyi:



4.1. ábra. Dirac delta

Ez a Dirac delta jel lesz a vizsgáló impulzusjelünk és az impulzusválasza egy rendszernek az ezen gerjesztőjelre adott válasz.

4.5. Az impulzusválasz

Az impulzusválasz felépítése a következő:

$$h(x, x_0) = S\{\delta(y - x_0)\}(x)$$

Az impulzusválasznak 2 argumentuma van:

- x , a vizsgált időpont, azt keressük, hogy ekkor milyen kimeneti értéke van a rendszernek
- x_0 , hogy milyen időpillanatban érkezett a gerjesztés (Dirac delta)

1 argumentumú jel

Ha nem LTI a rendszerünk, akkor tegyük fel, hogy van 3 gerjesztésünk, mindegyik különböző kimeneti jellel:

- $\delta(0)$ (A amplitúdó)
- $\delta(x - x_0)$ (B amplitúdó)
- $\delta(x + x_1)$ (C amplitúdó)

Ekkor

$$f = A \cdot \delta(t) + B \cdot \delta(t - x_0) + C \cdot \delta(t - x_1)$$

Ha pedig erre nézzük a rendszerünk válaszát, azt úgy tudjuk felírni a lineáris szuperpozíció elve alapján, hogy

$$S\{f\} = A \cdot h(x, 0) + B \cdot h(x, x_0) + C \cdot h(x, x_1)$$

Ha eltolásinvariáns a rendszer, akkor a válasza úgy fog kinézni, hogy

$$A \cdot h(x) + B \cdot h(x - x_0) + C \cdot h(x - x_1)$$

Ekkor valójában tetszőleges x -re és x_0 -ra az értéke a h -nak megegyezik a súlyfüggvény értékével, ahol a két argumentum különbségét vesszük, így valójában 2 változó helyett 1 változó van, ezért nevezhető a függvény 1 argumentumúnak.

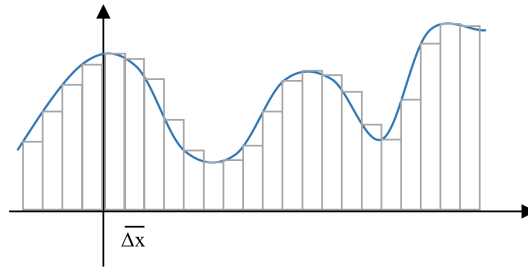
Ha eltolásinvariáns a rendszer, akkor a jel 1 argumentumú jelre esik össze, az értéke a kimeneti időpont és a bemeneti gerjesztés időpontja és helye közötti különbség függvénye:

$$h(x, x_0) \equiv h(x - x_0)$$

Mind a kettő függvényre súlyfüggvényként szokás hivatkozni, látni fogjuk, hogy ha ismerjük a súlyfüggvényt, akkor meg tudjuk mondani, hogy tetszőleges gerjesztőjelre milyen választ fog adni a rendszer: amikor identifikálni akarunk egy ilyen rendszert, akkor az lesz a cél, hogy ezeket a súlyfüggvényeket megismerjük.

4.6. Konvolúciós integrál

Tegyük fel, hogy van egy bemeneti jelünk, az f függvény és erre vizsgáljuk a rendszerünk válaszát x időpontban. Ezt fel tudjuk írni úgy, hogy a folytonos f függvényenél közelítjük nulladrendű, egymáshoz lapolódó, azonos Δx szélességű téglalapokkal az alatta lévő területet:



4.2. ábra. Konvolúciós integrál közelítése

A közelített jelnek az értéke az ezen téglalapok teteje, tehát a folytonos, háttérben lévő kék jelet matematikai mintavételeinek ZOH interpoláltjával (nulladrendű, szakaszonként konstans interpoláció) közelítjük. Ezt az eddigiek ismeretében fel lehet úgy írni, hogy összegzünk j szerint, és a j . téglalapnak vesszük az értékét. Ekkor, ha feltesszük, hogy folytonos az f és 1. paraméterében folytonos h is, akkor közelítőleg igaz lesz, hogy

$$S\{f\}(x) \approx \sum_j f(j \cdot \Delta x) \cdot h(j \cdot \Delta x, x) \cdot \Delta x$$

Ekkor a nulladrendű, interpolált jellel közelítettük a korábban látott kék, folytonos jelet: megnéztük az összes konstans szakaszra, hogy mi lenne a rendszer válasza. Ezt úgy tettünk meg, hogy megnéztük a rendszert választ az egyes téglalapok közepén bejövő értékben és besoroztuk a téglalap Δx szélességével.

Közelítő modell helyességének feltételei:

- f folytonos
- $h(x, y)$ is folytonos függvénye x -nek
- $\Delta x \ll 1$

Ha Δx -szel 0-t közelítjük ($\lim \rightarrow 0$), ekkor egy integrált kapunk

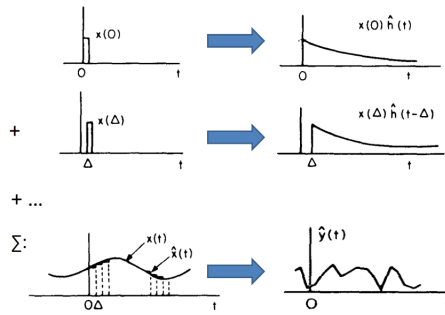
$$\text{I. } \int_{x'} f(x') \cdot h(x', x) dx'$$

Ha eltolásinvariáns rendszerünk van, akkor

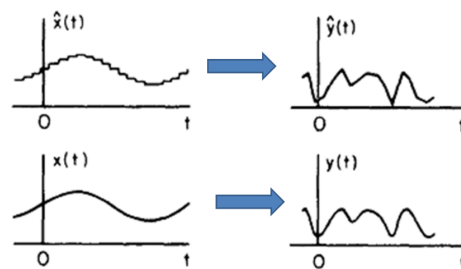
$$\text{II. } h(x', x) = h(x - x')$$

ekkor pedig használhatunk konvolúciót. Ha ezt a helyettesítést a III.-ban látható módon elvégezzük, akkor a bal oldal definíció szerint ekvivalens f és h konvolváltjával x időpillanatban:

$$\text{III. } \int_{x'} f(x') \cdot h(x' - x) dx' = (f * h)(x)$$



4.3. ábra. LTI rendszerek válasza



4.4. ábra. LTI rendszerek válasza

4.7. Impulzusválasz

Mi a h függvény és hogyan fog kinézni képkötés során?

Általános elnevezése a jelfeldolgozásban a h függvénynek a súlyfüggvény, szokásos elnevezés még azonban a gerjesztésválasz függvény, hiszen a Dirac deltás gerjesztésre adott választ írja le. Képkötő rendszerek esetén pedig *PointSpreadFunction*-ként hivatkozunk rá, ahol a *point* maga gerjesztés, a Dirac delta gerjesztésnek a 2 dimenziós megfelelője, amit úgy tudunk elképzelni, hogy ha van egy képünk, amely folytonos koordinátákkal koordinátázható. Ennek a képnek vesszük pl.: a $(0, 0)$ pozícióját, ahol van egy nem-nulla komponensünk – lényegében egy Dirac deltánk – és erre a bemeneti képre nézzük meg a rendszer válaszát. Ami nehézséget okoz, hogy képkötő rendszerek esetén egy kicsit általánosabban is megközelíthetjük a dolgot: a képkötő rendszerek az esetek többségében 3 dimenziós térből valamilyen 2 dimenziós jelet generálnak. Ebben az értelemben pedig a gerjesztés is 3 dimenziós térben kapott bemeneti gerjesztés lesz, ebből kell 2 dimenziós kimeneti jelet előállítani. Ha erre így tekintünk, akkor ugyan matematikailag ez nem egy korrekt jelölés, - de a szakirodalomban megszokott - hogy ezt a műveletet is a konvolúciónak megfelelő csillag-jellel jelöljük:

$$y \approx h * x + \eta$$

A h -nak 3 dimenziós térből kellene 2 dimenziós térbe leképezni, hogy előálljon az y kimeneti kép, ami egy 2 dimenziós valósértékű jel. Itt megjelenik egy másik tag is még, amely étával (η) jelölt és az additív zajt képviseli. A zajnak sok interpretációja lehetséges, mondhatjuk akár, hogy a zaj a képkötés azon része, amit

- nem tudtunk modellezni

- bizonyosan tudható folyamatokkal nem leírható, a vizsgálat sztochasztikus, statisztikai valószínűségeen alapuló része

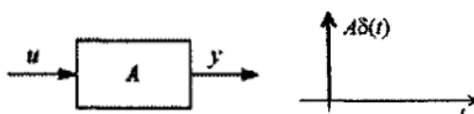
Additív és multiplikáltív zaj is terheli a vizsgálatokat.

4.8. Súlyfüggvények

4 tagot szoktunk rendszerelméletből kiemelt jelentőséggel illetni:

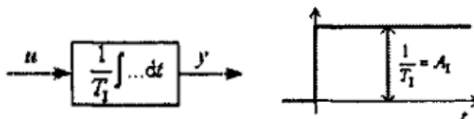
Arányos tag

A bemeneti jelet megszorozzuk valamilyen arányos tényezővel, így kapjuk meg a kimeneti jelet.



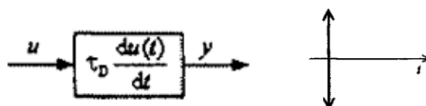
Integráló tag

A bemeneti jelet integrálja egy adott T_1 intervallumon. Ezen integrál-intervallum hosszával leosztunk, aminek az eredménye, hogy ha Dirac delta gerjesztési jelünk volt eredetileg, akkor ebből egy lépcsőfüggvény lesz, 0-nál kisebb bemenetekre 0 az értéke, 0-nál nagyobb bemenetekre 1 vagy $\frac{1}{T_1}$ az értéke, 0-ban pedig egy végtelen meredekségű ugrás van.



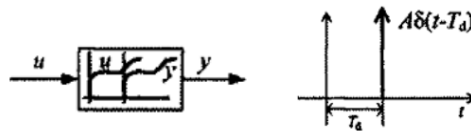
Differenciáló tag

A Dirac deltának a differenciálját veszi, ami úgy néz ki, hogy 0 – 0-nál, tehát alulról közelítve 0-t, lesz egy +Dirac deltás túske, 0 + 0-nál pedig egy -Dirac deltás túske.



Holtidős tag

A Dirac deltával vett konvolúciót jelenti: fogjuk a bemeneti jelet és eltoljuk adott holtidőnek megfelelő mennyiséggel, itt ezt láthatjuk T_d -vel jelölve.



4.9. Fourier transzformáció

A továbbhaladáshoz szükséges megemlíteni a Fourier transzformáltakat, a folytonos Fourier transzformációt kezdjük el vizsgálni. A transzformációnak van egy analízis és egy szintézis iránya, amit érdemes tudni: értelmezhetjük úgy, hogy egy lineáris transzformációt definiáltunk a folytonos függvények tere fölött, mégpedig egy olyan lineáris transzformációt, amely unitér.

Fogalmak a továbbiak megértéséhez:

Ortonormális: ortogonális, tehát derékszögű, valamint normált, tehát egység hosszú.

Ortonormális: ortogonális, tehát derékszögű, valamint normált, tehát egység hosszú.

Ortonormált vektorrendszer: ha egy vektorrendszerben bármely két vektor skaláris szorzata 0 és minden vektora egységnyi hosszú, akkor az egy ortonormált vektorrendszer.

Ortonormált bázis: Az olyan bázist, ahol bármely két vektor skaláris szorzata 0 és minden vektor egység hosszú, ortonormált bázisnak nevezzük.

Definíció 3 (Unitér transzformáció) Az unitér az ortonormált leképezésnek a komplex számokra vett általánosítása, kiterjesztése. A lineáris leképezéseket modellezzük úgy, hogy egy mátrixszal megszorozzuk a bemeneti vektoriális jelünket és ebből keletkezik a kimeneti kép. Az unitér tulajdonság az ortonormalitást fogja jelenteni, inverz A -nak a transzponáltja lesz valós esetben:

$$\underline{\underline{A^{-1}}} = \underline{\underline{A^T}}$$

Komplex esetben pedig:

$$\underline{\underline{A^{-1}}} = \underline{\underline{A^H}}$$

ahol A^H Hermittikus transzponált.

Definíció 4 (Hermittikus transzponált) transzponáljuk a mátrixot és elemenként vesszük a komplex konjugáltat.

A Fourier transzformáció egy ilyen transzformáció, a különbség, hogy nem egy vektor van x helyén, hanem egy folytonos jel.

$$F(\xi) = \int f(x) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot \xi \cdot x} dx$$

Analízis irány

$$f(x) = \int F(\xi) \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot \xi \cdot x} d\xi$$

Szintézis irány

A bázisfüggvények, amire levetítjük a bemeneti f jelünket és vetületek szerinti koordinátái lesznek a spektrum komponensei, unitér rendszert alkotnak. Ebből kifolyólag a bemenetre különböző ξ -t (Xi) adva, összeszorozva őket és az egyiket konjugálva egészen biztosan 0 lesz az integrál értéke, így igaz az, hogy ez egy unitér, vagy ortonormált transzformáció.

4.10. Komplex exponenciálisok

A megértéshez az Euler formulát hívhatjuk segítségül:

$$\exp(j \cdot 2\pi \cdot \xi \cdot x) = \cos(2\pi \cdot \xi \cdot x) + j \cdot \sin(2\pi \cdot \xi \cdot x)$$

Az e argumentumába helyezett komplex számot \cos és \sin függvény összegeként fel lehet bontani, így pedig már értelmezhetővé válik a bázisfüggvény is, ami szerinti koordinátázást fog leírni a spektrum.

$$y(x) = \int_{x'=-\infty}^{\infty} h(x') \int_{\xi=-\infty}^{\infty} F(\xi) \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot \xi \cdot (x-x')} d\xi dx'$$
$$y(x) = \int_{\xi=-\infty}^{\infty} F(\xi) \cdot \left(\int_{x'=-\infty}^{\infty} h(x') \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot \xi \cdot x'} dx' \right) \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot \xi \cdot x} d\xi$$

4.10.1. Konvolúció tétel

$$Y(\xi) = F(\xi) \cdot H(\xi)$$

Ha van 2 folytonos jelünk, ezeknek vesszük a konvoláltját, ennek pedig vesszük a spektrumát az egyenértékű azzal, mint ha 2 folytonos jel spektrumát elemenként összeszoroztuk volna.

$$y(x) = \int_{x'} h(x') \cdot f(x - x') dx'$$

Induljunk ki abból, hogy az f spektrumát ismerjük

$$\int_{\xi} F(\xi) \cdot \exp[2\pi \cdot j \cdot \xi \cdot (x - x')] d\xi$$

Mivel a függvények folytonosak, ezért az integrálás sorrendje megcserélhető lesz, ezt a tagot pedig viszonylag könnyen szét lehet bontani 2 tag szorzatára

$$\exp(2\pi \cdot j \cdot \xi \cdot x) \cdot \exp(-2\pi \cdot j \cdot \xi \cdot x')$$

Ha ezt felírjuk és megcseréljük az integrálások sorrendjét, ξ szerint integrálunk először, ezután pedig x' szerint

$$\int_{\xi} \int_{x'} h(x') \cdot \exp(-2\pi \cdot j \cdot \xi \cdot x') dx' \cdot F(\xi) \cdot \exp(2\pi \cdot j \cdot \xi \cdot x) d\xi$$

Ekkor a x' szerinti integrál pont H fourier transzformáltja, ez pedig az inverz fourier transzformáltja lesz az F és H elemenkénti szorzatának

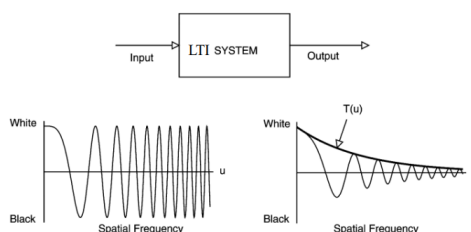
$$\int_{\xi} H(\xi) \cdot F(\xi) \cdot \exp(2\pi \cdot j \cdot \xi \cdot x) d\xi$$

Ebből láthatjuk, hogy a konvolvált jelnek a spektrumát nézve ugyan azt látjuk, mint ha a 2 függvényünk spektrumának az elemenkénti szorzatát vizsgálnánk.

Ez a tétel azért lesz számunkra hasznos, mivel a konvolúciót megnézve láthatjuk, hogy ha egyik vagy másik jelünk nagy, fáradságos lehet a számolás, valamint segít, ha a frekvenciatartományba átmegyünk. Viszont ennél sokkal nagyobb segítséget jelent, ha invertálnunk kell egy rendszert vagy a rendszer torzításának a hatását kell kompenzálnunk (dekonvolúció művelete, később részletesen). Ekkor sokat segít annak megértésében, hogy egy ilyen rendszer mit is csinál a bemenetre. Amíg egy lineáris eltolás, idő invariáns rendszer nehezen átlátható, addig a spektrális tartományban gondolkodva egy egyszerű, triviális rendszerleírást kapunk.

4.11. LTI rendszerek viselkedése

Tegyük fel, hogy a rendszer bemenetére egy 1 dimenziós jelet adunk, a következőképpen néz ki: Az x tengelyen az idő, az y tengelyen pedig u-val jelölve a feszültség, ezt a jelet



pedig áteresztjük az LTI rendszeren, azt fogjuk figyelni mi jön ki a rendszer kimenetén. A bal alsó képen például egy olyan szinuszos jel látható, ami egyre inkább kezd gyorsulni az idő előrehaladtával.

Ha olyan jelünk van, amire igaz, hogy egy időpont körüli szűk tartományban monokromatikus jel - tehát itt egy olyan jel, aminek csak egy frekvenciás komponense, ami dominál - akkor azt fogjuk tapasztalni, hogy ha ezen jelre nézzük meg a rendszer kimenetét és (a jobb alsó képen látható módon) a kimenetre egy $T(u)$ burkológörbét illesztünk, akkor ez meg fogja mutatni, hogy adott frekvenciás komponenst a rendszerünk milyen mértékben erősített vagy csillapított (abban az esetben, ha a rendszerünk impulzus válasza elegendő gyorsan lecseng).

Az LTI-re - azalapján, hogy a konvolúció tétel igaz rá és a komplex exponenciálisok egymásra ortonormáltak, ha eltérő frekvenciájú komponenst nézünk - igaz lesz az, hogy ha ξ frekvenciájú bemeneti komponensünk van, annak a spektrumának csak a ξ frekvenciájú komponense lesz nem-nulla értékű és mivel elemenként történik a szorzás, ezért a kimeneti jel spektrumának csak ugyan ezen frekvenciájú komponensei lehetnek nem-nulla értékűek. Például, ha egy 5 Hz-es bemenetet adunk egy ilyen rendszerre, akkor 5 Hz-es kimenetet kapunk, mást nem kaphatunk, ha mást kaptunk akkor nem LTI volt a rendszer.

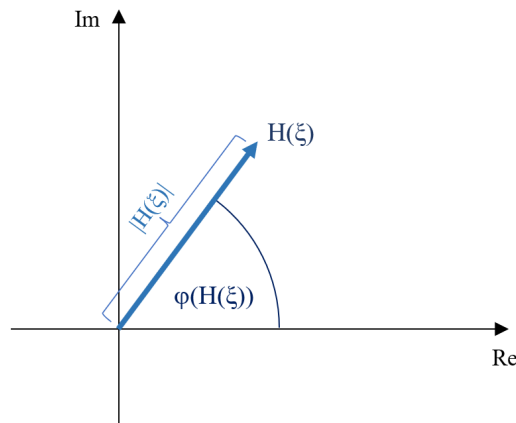
Az, hogy mennyivel fog csillapodni ez az 5 Hz-es jel és hogy mennyivel fog késni a kimenet, azt majd éppen a súlyfüggvény spektruma fogja elárulni.

4.12. H átviteli függvény

Ha ismerjük az Euler formulát, akkor valószínűleg ismerni fogjuk azt is, hogy az Euler alakja hogyan néz ki komplex számoknak, függvényeknek. Felírható lesz a szám abszolútértékének és egy $\exp(j \cdot \text{komplexszámunkfázisának})$ a szorzatával:

$$H(\xi) = |H(\xi)| \cdot \exp(j \cdot \phi(H(\xi)))$$

A motiváció e mögött, ha Euler ábrázolással felvesszük a komplex számunkat, x tengelyen a valós, y tengelyen a képzetes érték, a komplex számunk ekkor egy vektorral jellemezhető. Ennek a vektornak a hossza lesz a komplex számunk abszolútértéke, az x tengellyel bezárt szög pedig a komplex számunknak a fázisa:



A \cos és \sin definíciójából pedig már ki is jön az, ami az Euler formula lényegét adja, hiszen, ha ebben a felbontásban vizsgáljuk, máris megérthetjük, hogy a $H(\xi)$ -t hogyan kell értelmezni.

Bontsuk fel abszolútértéknek és a fázistagnak a szorzatára, ekkor az abszolútérték meg fogja mutatni azt, hogy a ξ frekvenciájú F jelünk amplitúdóját mennyivel nyomtuk el vagy mennyivel erősítettük:

$$\begin{aligned} & |H| \cdot \exp(j \cdot \phi(H)) \cdot |F| \cdot \exp(j \cdot \phi(F)) \\ &= |H| \cdot |F| \cdot \exp(j \cdot (\phi(H) + \phi(F))) \end{aligned}$$

Mi is történik? Az F abszolútértékét csillapítjuk/erősítjük H abszolútértékével, F fázisát pedig eltoltuk H fázisával.

Tehát ha a rendszerünknek ismerjük az átviteli függvényét, a súlyfüggvényünk spektrumát, H -t, akkor meg tudjuk mondani, hogy adott frekvenciájú gerjesztőjelet mennyire fog csillapítani vagy átengedni a rendszer, milyen erősítést szenved a gerjesztőjelet a rendszerünkben történő átmenetel során. Meg tudjuk azt is mondani, hogy milyen fázistolást szenved a komponensrendszerünkön való átmenetel során. $\phi(H(\xi))$ rendszer fázistolása (késleltetése):

$$FT\{f(x - x_0)\} = F(\xi) \cdot \exp(j \cdot 2\pi \cdot x_0 \cdot \xi)$$

A fázistolás fogja a késleltetést leírni, tehát, hogy mennyit késik vagy mennyivel siet (ha nem kauzális, vagy más néven ok-okozati rendszerünk van) a kimenet a bemenethez képest, a másik tag pedig azt írja le, mennyivel csillapodik a jelünk.

Definíció 5 (Rendszer sávkorlátja) *Az a frekvenciaérték, amelynél nagyobb frekvenciájú bemeneti komponenseket a bemenetre adva a kimeneten a rendszer „szinte nullát” ad, tehát elnyomja a jelet. Amely legkisebb ξ -nél ez fennáll, az a ξ sávkorlát.*

A „szinte nulla” fogalma itt pontosítandó persze, képalkotó rendszerek esetén az 50%-os csillapítás/erősítés az, ami a sávkorlát frekvenciáját fogja definiálni. Ezt persze felülírhatjuk, a célunktól függően választhatunk más sávkorlátot is, ha erre szükség van.

4.12.1. Átviteli függvény meghatározása

Leginkább mérésekkel, mérések sorozatával fogjuk tudni meghatározni az átviteli függvényt. Bizonyos esetekben egyszerű dolgunk van, például, ha tudunk δ (Dirac delta) gerjesztést előállítani, akkor ha eltolás-invariáns rendszerünk van, akkor adott időpontban megnézzük mi a válasz és ebből megkapjuk a súlyfüggvényt. A súlyfüggvénynek vesszük a Fourier transzformáltját, ebből pedig megkapjuk az átviteli függvényt.

Fizikailag ezt szinte sosem tudjuk megtenni, ennek oka, hogy olyan rendszereink vannak, amik 0 időtartamú kimenetet nem állítanak elő, hiszen ehhez túl lassúak. Az optikai rendszerek ebből a szempontból „jobbak”, itt kisebb szélességű impulzust is elő lehet állítani, de ez sem 0 lesz.

Amit ebből kifolyólag jobban tudunk használni, ha az integrált kezdjük el vizsgálni, tehát nem az egységimpulzus gerjesztőjelet nézzük, hanem annak az időbeli integrálját.

Az egységugrás vagy lépcsőjellel történő vizsgálat sokkal inkább realizálható.

Egységugrás gerjesztés:

$$l(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x') dx'$$

$$h(x) = dS\{l\}(x)/dx$$

Ha nem képfeldolgozásról, hanem pl. hangfeldolgozásról beszélünk, akkor a szinuszos vizsgálójelekkel történő vizsgálat is lehetséges.

$$f(x) = A_0 \cdot (2\pi \cdot \xi \cdot x + \phi_0)$$

$$y(x) = A_0 \cdot A \cdot (2\pi \cdot \xi \cdot x + \phi_0 + \phi)$$

esetén

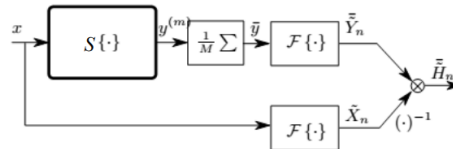
$$H(\xi') = \begin{cases} A \cdot \exp(j \cdot \phi \cdot \text{sign}(\xi')), & \text{ha } \xi' = \pm \xi \\ ?, & \text{ha } \xi' \neq \pm \xi \end{cases} \quad (4.1)$$

Ekkor veszünk egy monokromatikus, ξ frekvenciájú vizsgálójelet, a rendszerünk bemenetére adjuk és megnézzük, mi a kimenet. Amennyivel az amplitúdó módosult, az lesz a rendszer átviteli függvényének ξ frekvenciájú komponensének az amplitúdója, amennyivel pedig a fázis csúszik, az pedig a fázis tagja. Ebből a teljes átviteli függvény egyetlen egy ponton megismertük, ha ilyen vizsgálatból szeretnénk megállapítani az átviteli függvényt, akkor sok ponton kell vizsgálnunk, valamint szükséges még hozzá, hogy az átviteli függvény egy folytonos függvény legyen (ha a súlyfüggvényünk az volt, akkor az átviteli is az lesz). Ha pedig multiszinuszos gerjesztést tudunk létrehozni, akkor kihasználva azt, hogy egy

$$f(x) = \sum_i A_i \cdot \cos(2\pi \cdot (i \cdot \omega) \cdot x + \phi_i)$$

ξ frekvenciájú komponens egy LTI rendszer kimenetén csak a ξ frekvenciájú komponens értékét befolyásolja, akkor több, egymástól különböző, megfelelő távolságra lévő gerjesztőkomponensek keverékét is bemenetként adhatjuk a rendszernek és ezzel is identifikálhatjuk azt.

Az alábbi képen egy multiszinuszos vizsgálójeles rendszeridentifikációnak látható az ábrája:



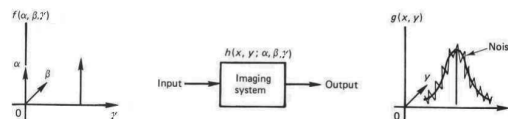
A lényege, hogy a bemeneti jelet a rendszernek adjuk, ekkor több különböző periódusban megnézzük a kimeneti jelet, ezt átlagoljuk. Az átlagolással az additív zajt, ha 0 a várható értéke és tényleg additív, akkor ki tudjuk szűrni. Az átlagolt kimenetnek vesszük a spektrumát, megnézzük 1 periódusra a gerjesztőjeleink spektrumát, a kettőt pedig, ha egymással elosztjuk, akkor megkapjuk az átviteli függvénynek az értékét. Problémát okoztat, ha a gerjesztőjeleink spektruma 0 amplitúdójú volt adott komponensen, hiszen ekkor a kimeneti jeleink is biztosan 0 amplitúdójú lesz, itt pedig 0-t osztanánk 0-val, így ilyen komponensek esetén nem tudjuk megmondani, hogy a rendszerünk hogyan viselkedik.

Fehérzaj: olyan zaj, amiből, ha különböző időpillanatokban mintavételezünk, akkor ezen minták egymástól függetlenek, nincs benne struktúra, vagy periodikusan ismétlődő komponensjellemző, ehelyett egy nagy, széles spektrumtartományt lefedő zajunk van, aminek teljesítménysűrűség-spektruma egyenletes.

Lehetőség még, hogy fehérzajjal mérünk, ekkor a bemeneti zaj teljesítménysűrűség-spektruma egyenletes, a kimeneti zaj esetében pedig $\propto |H|(\xi)|^2$.

4.13. Képképző rendszerek jellemzése

Ekkor 3 dimenzióból kell 2 dimenziós térbe leképeznünk, általában nincs ezen leképezésnek olyan szimmetriái és olyan alacsony dimenziós vetületei, amiben az eltolás-invariancia fennállna. Ebből kifolyólag a 3 dimenziós térünkben tudnunk kell, hogy hol van a gerjesztés és annak α , β és γ komponense, valamint még azt is vizsgáljuk, hogy a kép



mely pontját szeretnénk meghatározni (x és y koordináta). Ekkor 5 változónk van, ezen 5 változós függvényterben kellene definiálnunk a leképezést, a súlyfüggvényt, ezt pedig nem fogjuk tudni megtenni, komplexitási probléma lép fel. Ha a gerjesztést nézzük, ekkor a Dirac delta gerjesztésnek pontszerű gerjesztés a megfelelője a térben, ezt viszont nem szoktuk tudni előállítani. Ha mégis valamivel vizsgálni szeretnénk a jelet, akkor

megnézzük melyik az a jel, amit elő tudunk állítani, és azt mondjuk, hogy ezen Dirac delta gerjesztésű jelet bemenetére kapó rendszer ezután kimenet volt és az így kapott rendszerek kaszkádját fogjuk vizsgálni.

Kaszád: „vízesés”, egymás után helyezett elemek, sokszorozó hálózat egy villamos készülékben, amelynek minden egyes fokozata a következő hatását erősíti, növeli vagy befolyásolja

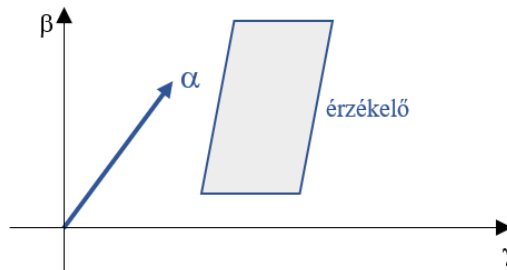
Tehát nem tudjuk ezt a Dirac delta gerjesztőjelet előállítani, de egy l -lel jelölt jelet elő igen: $l(\alpha, \beta, \gamma)$, ezt a jelet adjuk a rendszerünk bemenetére, majd a kimenetet úgy fogjuk vizsgálni, hogy figyelembe vesszük, hogy volt még ezen rendszer előtt egy olyan rendszer ami a Dirac deltából ezt az l -et gyártotta le. Így mi már nem a H -t fogjuk vizsgálni, hanem a $(H * l)$ -t (konvolúció), ahol a H a rendszernek a súlyfüggvénye, az l pedig a gerjesztést előállító rendszer súlyfüggvénye.

4.14. Point Spread Function (PSF), 3D – 2D

Ha egy konvolúciós integrálnak megfelelő integrál esetében szeretnénk felírni, hogy mi is történik, akkor alapvetően a következő összefüggést kell nézni:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} h(x, y; \alpha, \beta, \gamma) \cdot f(\alpha, \beta, \gamma) d\gamma d\alpha d\beta + \eta(x, y)$$

3 változónk van, a terünket 3 dimenzió lévén 3 változóval (α, β, γ) tudjuk koordinátázni. A g leírja a gerjesztőjelünket ebben a 3 dimenziós térben, ezt megszorozzuk a $h(x, y, \alpha, \beta, \gamma)$ -val, ami leírja, hogy ez az (α, β, γ) pozícióban lévő impulzus hogyan megy át a rendszerünkön, hogyan jut el az (x, y) pontba. Ezek szorzatát kell integrálnunk γ, α, β szerint, η pedig ismét a zajkomponens, ami mindig egy additív zajt fog jelölni, általában 0 változóértékkel.



Tegyük fel, hogy 0-van volt a gerjesztőjel, ekkor feltételezzük, hogy a gerjesztőjel mögötti térrészek már nem befolyásolják azt, amit érzékelünk (röntgen képalkotás esetén ez sosem zárható ki).

Összefoglalva a rendszert úgy lehet elképzelni grafikai megközelítésből, hogy a sugárkövetésre gondolva a fenti $g(x, y)$ úgy értelmezhető, mint a fotonoknak különböző tárgyakon történő áthaladásának leíró rendszere, látható fotonalapú képalkotásnál.

Egy másik megközelítés, hogy megnézzük, hogy egy ideális képalkotó rendszer esetén impulzusgerjesztésre adott $f(\alpha, \beta)$ -hoz képest mi lesz a képalkotó rendszernek a kimenetén. 2 dimenziós jelből 2 dimenziós jelet előállító képalkotó rendszernek a viselkedését modellezi és majd az inverz problémáknál ezeket próbáljuk meg kompenzálni, pl. a lencsetorzítás, bemozdulás stb. hogyan modellezhető és hogyan kompenzálható.

4.15. Milyen súlyfüggvényeket, milyen PSF-eket tapasztalunk?

A PSF elnevezés is eltolásinvariáns rendszert feltételezne, azonban ez általában nem teljesül, ekkor valamilyen hibával közelítünk. Viszont, ha olyan szerencsés - valódi fizikai esetekben szinte elő nem forduló - esetünk van, hogy ez teljesül, akkor is érdemes megvizsgálni, hogy milyen jellegű elmosások, torzítások szoktak ekkor megjelenni.

Jellemző, hogy nem izotropikus a torzítás:

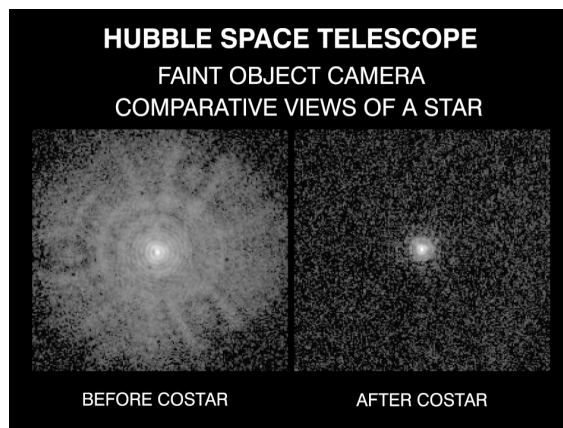
- mikroszkóp lencsájének a torzítása, Hubble űrteleszkóp optikájának torzítása (később), anódsarokeffektus
- röntgenképképzés, CT, DTS esetén tipikusan anizotrop, többé-kevésbé eltolásinvariánsnak tekinthető torzítást visz a képképzésbe
- MRI-nél is van olyan eset, amikor az átviteli függvénye torzítórendszerünknek eltolásinvariánsként modellezhető, vagy legalábbis egy része modellezhető, viszont ekkor is jellemző, hogy nem izotropikus, tehát ha vennénk a PSF-et:

Ez azonban a kisebb probléma, hiszen számítási erőforrásokkal meg lehet oldani, a nagyobb probléma, hogy nem szükségszerűen eltolásinvariáns.

Valójában, ha az (x_0, y_0) gerjesztésre nézzük az (x, y) -beli választ, az nem lesz azonosan egyenlő $h'(x - x_0, y - y_0)$ -lal. Innentől kezdve a frekvenciatartománybeli vizsgálat, dekonvolúció stb. nem működik. Ebben az esetben azt szoktuk mondani, hogy úgynevezett isoplanatic régiókra bontjuk fel a képképzés modelljét vagy magát a képet. Ez folytonos függvények esetén is előszeretettel alkalmazott megközelítés, aminek lényege, hogy ha megfelelően kis részre bontjuk a képünket (a „megfelelően kis rész”-t a számítási erőforrásaink határozzák meg), akkor igaz lesz az, hogy ezen kis részeken belül mégis többé-kevésbé eltolásinvariáns viselkedést mutat a rendszer.

Megjegyzés: az eltolásinvariancia az időinvariancia analógiája képeket bemenetként kezelő 2D rendszer esetén.

A Hubble űrteleszkóp képén láthatóak példák arra, hogy milyen jellegű torzításokat lehet a dekonvolúcióval megoldani. A teleszkópban egy nagyon hosszú optika, amiben hatalmas nagyítás van és az optika többé-kevésbé tudja eltolásinvariáns módon törni a fény terjedési útját. Ha a képérzékelőn látott jelet nézzük, akkor egy ilyen jellegű jelet kapunk, abban az esetben, amikor egyetlen csillagnak vizsgálunk csak a képét:



A bal oldali képen látható pixelek, amiken viszonylag nagy fényintenzitást látunk az erősítési zaj eredményeképpen jelennek meg, ez sajnos meg is marad. A másik zavaró tényező pedig az optikának a szóródása, aminek elmosó hatása lesz, ezt viszont tudjuk kompenzálni. Ezt megfelelően mérni kell, modellezni, egy súlyfüggvényt fel lehet belőle írni, ezen súlyfüggvénnyel történő kompenzáció eredménye a jobb oldali képen látható.

4.16. Modulációs átviteli függvény, Modulation Transfer Function (MTF)

Átviteli függvény (TF):

$$H = F\{h\}$$

Az OTF-et (optikai átviteli függvény) úgy kapjuk, hogy ezt a spektrumot elemenként leosztjuk a dekonvolvált komponens értékével:

$$H/H(0,0)$$

Az *MTF* esetében ugyan így járunk el, csak kidobjuk a fázisinformációt és az amplitúdóinformációt tartjuk meg, tehát, hogy mit mennyire erősítünk vagy nyelünk el:

$$|H/H(0,0)|$$

Vizsgáljuk meg, hogy miért osztunk le a $H(0,0)$ *DC* komponenssel (Direct Current component, egyenáramú komponens), hiszen eddig ilyenről nem volt szó.

Legfőbb motivációnk ekkor, hogy olyan rendszereket vizsgálunk képalkotó rendszerek esetén, amelyek egy vizsgált fizikai mérőjel fog valamilyen másjellegű jellé transzformálódni, ezen rendszerek kimenete pedig digitális kép szokott lenni, digitális képek esetén pedig intenzitásokat szoktunk tudni olvasni.

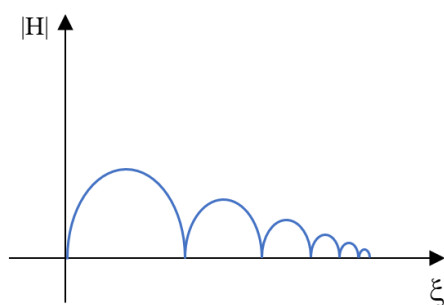
Ha ez a probléma, akkor nem várható el, hogy mi bármilyen módon mérni tudjuk azt, hogy egy képalkotó rendszer esetén a fotonok hány százaléka csapódik be, hiszen amikor a kimeneti képet olvassuk, azt már nem tudjuk megfeleltetni a fotonoknak. A fotonok $X\%$ -ából elektron lett és ezekből az elektronokból analóg erősítés, majd egy AD kvantálás után lett valamilyen pixelintenzitás. Innentől kezdve teljes mértékben meghatározhatatlan - ha rendszereket szeretnénk összehasonlítani, akkor pedig lényegtelen -, hogy a kvantálás és a kvantálás előtti erősítés hogyan nézett ki. Ha két olyan képünk van, ahol az egyik kép úgy áll elő, hogy a másik kép intenzitásait még 5-tel megszoroztuk, attól még ha ugyanaz a rendszer állította elő, akkor azt várnánk, hogy pont ugyan olyan jellegű leírókat kapjunk hozzá.

A *DC* komponenssel történő normalizálás megpróbálja ezt a problémát feloldani.

Egy másik dolgot azonban itt kihasználunk, mégpedig, hogy ezek a rendszerek tipikusan (nem mindig) aluláteresztő jellegűek. Ezalatt azt kell érteni, hogy ha az átviteli függvényét nézzük egy ilyen rendszernek, akkor az a frekvencia amplitúdójának függvényében monoton csökken.

Aluláteresztő rendszerek

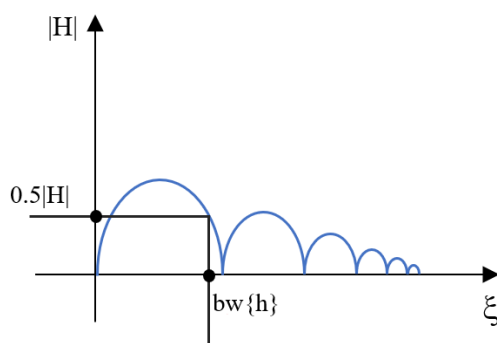
A $|H|$ a frekvencia amplitúdójának függvényében monoton csökken, ekkor a *DC* komponensnél lesz a legnagyobb az értéke.



Effektív felbontás

Bandwidth: bw_h

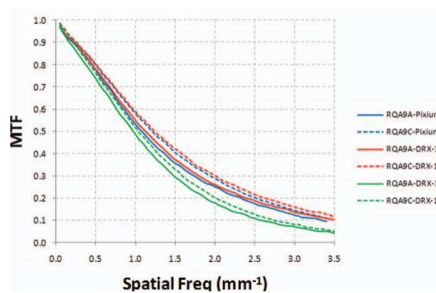
Érdeemes még beszélni a képalkotó rendszerek effektív felbontásáról, ezt úgy definiáljuk, hogy megnézzük, hogy a súlyfüggvénynek mekkora a sáv szélessége, ami éppen azon frekvencia lesz, ahol a súlyfüggvényünk a 0.5-ös átvitelt fogja felvenni.



Összefoglalva a motivációja ennek a függvénynek az, hogy különböző képalkotó rendszereket össze tudjunk hasonlítani.

4.17. Röntgen detektor MTF példák

Különböző röntgendetektoroknak láthatóak az *MTF* mérései az alábbi képen:



Az x tengelyen síkfrekvencia látható, ez a síkfrekvencia egy 1 dimenziós frekvenciát fog jelenteni, itt azzal a feltételezéssel élünk, hogy izotropikus és eltolásinvariáns volt a súlyfüggvénye a rendszernek, inentől kezdve az egyetlen komponens, ami számít, hogy mennyivel vagyunk arrébb a kapott képen a becsapódás helyéhez képest. A képen ezen komponens menti frekvenciát látjuk.

Ennek a mértékegysége az $1/\text{mm}$, ez a Hz-ben kifejezett $1/\text{sec}$ képalkotásban használt változata, az elnevezése ennek a frekvenciának pedig sokszor síkfrekvencia (néha térfrekvencia). Ez arra utal, hogy nem egy időbeli jelünk van, hanem olyan, amit valamilyen sík elemeivel tudunk koordinátázni.

Megvizsgálva a képet láthatjuk, hogy ezek tényleg aluláteresztő rendszerként viselkednek, a DC komponensnél van egy 1-es átvitelük. A DC komponens vagy egyenáramú komponens a $0/\text{mm}$ -es gerjesztőjelre adott válasz, tehát ez lesz a háttérjele a képnek, ami a képnek vagy a vizsgálóelrendezésnek az a jelkomponense, ami nem változik a síkban/térben. Az összes többi jelkomponensnél pedig azt látjuk, hogy ahogy növeljük a frekvenciát, úgy lesz egyre kisebb az átvitelnek az abszolútértéke.

Felmerülhet a kérdés, hogy ha ideális képalkotó rendszerünk lenne, akkor meg tudnánk-e mondani azt, hogy annak milyen MTF -jét szeretnénk látni? A négyszögjel spektruma, a $\sin(x)/x$ lesz, aminél tudjuk azt, hogy a négyszögjellel modellezhetjük, hogy mekkora volt egy érzékelő elem integrálófelületének a nagysága. Amekkora ennek a szélessége (δx), annak a reciproka lesz a szinuszos spektrumnak első kioltási helye. Ha térben integráló detektorunk van, tehát úgy állnak elő a pixelek, hogy egy rácsot alkalmaznak és a beeső foton 1 pixel intenzitást fog eredményezni ugyanezen érzékelőelem belső összes többi pontján, akkor ennek sinc-es burkológörbéje kell, hogy legyen. Ekkor az is igaz, hogy az első kioltási helyen monoton csökken a burkológörbe.

A mintavételi frekvenciánál nagyobb komponens nem fogunk nézni. Tudjuk, hogy mi lenne az ideális jelalak és össze is tudjuk hasonlítani ezeket a görbéket.

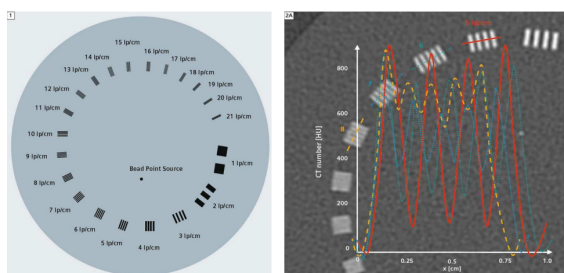
4.18. MTF mérése

Legegyszerűbb lenne megint, ha a Dirac delta gerjesztés spektrumát vennénk a súlyfüggvénynek és ezt vizsgálnánk. Azonban ez nem igazán lesz realizálható.

Helyette olyan fantomokat kezdünk el alkalmazni, amivel olyan vizsgálójeleket tudunk gyártani melyek értékével mérések eredményét közelíthetjük.

Leggyakrabban alkalmazott a vonalpár fantom lesz, azonban a rés- és az élmódszer is gyakran használtak.

4.18.1. Vonalpár fantom



A képen egy olyan CT térfogatnak látható a rekonstrukciója, ahol egy homogén anyagba helyeztek el nagyobb röntgensillapítású együtthatójú (ólom)lapokat. Ezen lapok szélessége, fizikai kiterjedése egyre csökken, ahogy az óramutató járásával megegyező irányba

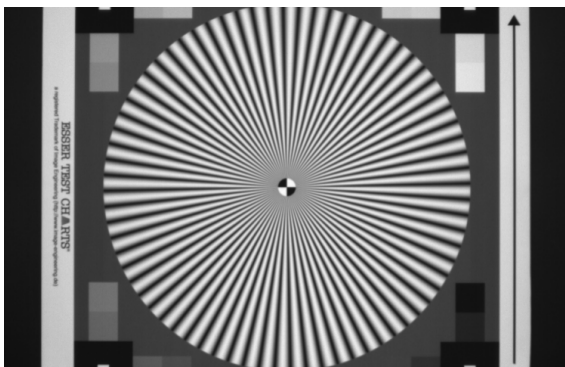
haladunk. Ennek a fantomnak nézzük meg a CT-s rekonstrukcióját, ez látható a jobb oldalon, annak függvényében, hogy ezeknek a lapoknak milyen távolsága van, teljesen eltérő felbontáskontrasztot érzékelünk.

Amikor sűrűn helyezkednek el a lapok egymáshoz képest, akkor azok „összefolynak”, ahol pedig nagy a távolság, ott akár meg is tudjuk számolni őket, a közöttük lévő kontraszt is kivehető.

1 dimenziós profilok jelennek meg a görbén 3 vagy 4 különböző frekvenciájú komponensnél. Először az 5 lp/cm-es lapoknak nézzük a vízszintes profilmenti intenzitását, utána a 6, 7, 8 stb. méretű lapoknak. Ezeknek az intenzitásoknak az 1 dimenziós értékét láthatjuk, markánsan kivehető, hogy a piros görbe esetén nagyobb amplitúdó figyelhető meg, a sárga görbe esetén pedig egy kisebb

Ez lesz az, ami valójában meghatározza, hogy mi látható egy képen és azt a síkfrekvenciás komponens tudjuk-e érzékelni. A piros görbe esetén a hullámok teteje és a völgyek alja között nagy az amplitúdókülönbség, a sárga esetében pedig annyira kicsi, hogy ha megnézzük annak a rekonstrukcióját, akkor látható, hogy teljesen összefolynak, nem is különböztethetőek meg az objektumok.

Ebből már következtethetünk arra, hogy ha az objektum sávszélességének a rekonstrukciójához kellene adott frekvenciájú komponens, az nem fog látszódni a rekonstrukción, legfeljebb elmosódva.

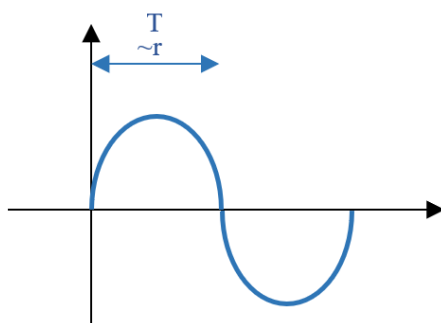


Digitális fényképezőgépekhez készült fantom, amit le kell fényképezni. A képen egy körszerű alakzat látható, ahogy a sugarán haladunk a körnek, úgy lesz egyre nagyobb a periódusideje a kör hullámainak és úgy lesz egyre kisebb a frekvenciája a komponensnek, ami egy adott sugár mentén egy „cikkét” a körnek leírja. A kör közepe fele haladva növekszik ez a frekvencia, amit rekonstruálnia kellene a képalkotó rendszernek.

Amikor egy ilyen ábrát vizsgálunk, akkor lehet azt mondani, hogy az effektív felbontás annál a körnél lesz leolvasható, aminél „kintebb” még elkülönülnek egymástól a nagy és alacsony intenzitású hullámfrontjai az alakzatnak. Egy bizonyos sugáron belül már nem tudjuk elkülöníteni ezeket egymástól (persze a képmegjelenítéstől és a szemünktől is függ). Ha egy középpont körüli profilt nézünk az ábrán a kör kerülete mentén, ezt kifeszítjük és 1 dimenziós intenzitásfüggvényként nézzük, akkor ez egy tisztán szinuszos jelet fog adni, ahol ennek a szinusznak a periódushossza éppen a kör sugarával lesz arányos.

Ekkor tudjuk azt, hogy ha ennek a szinuszos jelnek a periódusideje T , akkor a frekvenciája $1/T$ és ezen $1/T$ frekvenciájú komponensnek kell meghatározni azt, hogy milyen amplitúdóval rekonstruálódik, tehát mennyi lesz a maximumok és minimumok közti távolság. Ezt megint az határozza meg, hogy mennyire vesszük ezt észre, tehát ha a távolság elkezd zsugorodni, akkor egy idő után túl kicsi lesz a kontraszt ahhoz, hogy el tudjuk különíteni az egymás utáni hullámokat.

A vonalpár fantom, maguknak a CT-knek a minősítésére alkalmas, a fantomot rekonst-



4.5. ábra. A Fourier transzformáció azért érdekes, mivel a lineáris eltolásinvariáns rendszerek átviteli függvényét diagonalizálni lehet vele és LTI rendszerek átvitelére pedig jellemző, hogy egy adott frekvenciájú bemeneti komponens ugyanazon frekvenciájú kimeneti komponensként jelentkezik.

ruálni szokták és a rekonstruált képet vizsgálják. Érdeemes megjegyezni, hogy ezen vonal N-esek rekonstrukciójából az *MTF*-et azt nem lehet kiszámítani, ebből tehát legfeljebb az *MTF*-nek egy jellemzőjét tudjuk megmondani, vagy pár jellemzőjére tudunk következtetni.

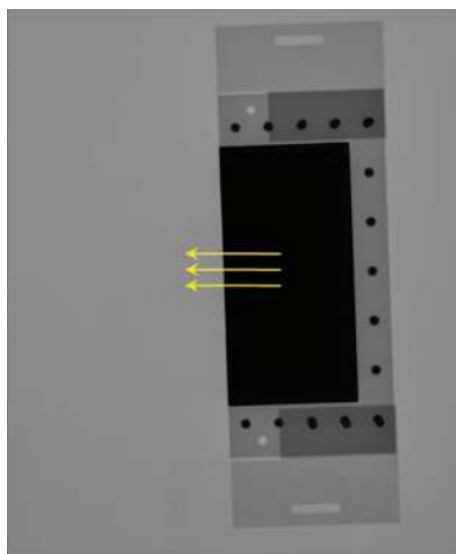
A korábbi ábra vizsgálatából, ha eltolásinvariáns az *MTF*-ünk, akkor az átviteli függvényt ebből már pontosan meg tudjuk határozni.

4.18.2. Él módszer

Ha pl. egy detektort szeretnénk vizsgálni röntgen esetén, akkor ez tipikusan az él módszerrel tehető meg, a módszer az orvosi diagnosztikában használatos.

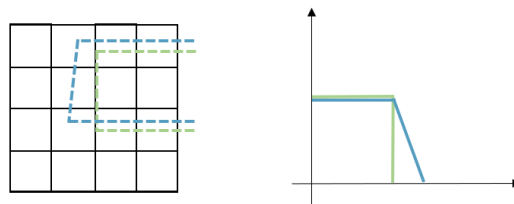
Egy nagy sugárcsillapítási együtthatójú, de vékony anyagból készült lapot (tipikusan ólomból, lézerrel vágva, mm-es vastagság alatt) ráhelyeznek a detektorra, majd konstans sugárforrás-beállítás mellett készítenek erről képet és ezt a képet kezdik el vizsgálni.

Egy érdekes dolog figyelhető meg ekkor, ha azt mondjuk, hogy a detektor pontosan az a régió, ami az alábbi képen szürkével látható



akkor ahhoz képest egy kicsit ferdén helyezkedik el a lap. Ennek a magyarázata, hogy ha jobban belegondolunk, itt egy mintavételezési hiba elkerülhetetlen, hiszen a detektorunk nem folytonos képet fog a kimenetén előállítani, hanem mintavételezett és kvantált (diszkrét értékeket felvevő, nem folytonos) képet.

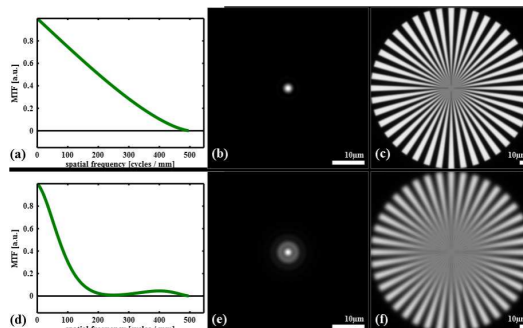
Ha az egyik oldalával párhuzamosan tennénk be a lapot, úgy, hogy az ólomlap pont egy ilyen érzékelő oszlopnak a közepén vagy a szélén ér véget, akkor jelentősen eltérő *MTF*-et mérnénk. Ennek oka, hogy ha a pixelek szélén ér véget a lap, akkor olyan intenzitásprofil látunk vízszintesen, hogy egy elemig 1-es átvitel van, ekkor 1-es intenzitást látunk, utána ez leesik 0-ra, és közte van egy nem végtelen meredekségű, hanem valamilyen értelmezhető meredekségű átmenet. Így teljesen más spektruma lesz annak a jelnek, ami eredetileg egy négyszögjel volt végtelen meredekségű átmenettel, hiszen ott végtelen nagy frekvenciás komponensek is nem-nulla



értékkel lesznek jelen a spektrumban, mintha az átmenet valamilyen meredekséggel csillapodna. Ennek következtében, ha gyakorlatban szeretnénk ezt alkalmazni, akkor nem fogjuk tudni megmondani, hogy az általunk vizsgált objektum bizonyossággal egy ilyen érzékelőoszlop közepére vagy szélére esik-e. Ezért itt azt az elvet követjük, hogy a lapot ferdén elhelyezve kerül az érzékelőbe, arra ügyelve, hogy legyen olyan oszlop, amelynek az egyik oldalán, olyan oszlop is, aminek a sorbeli érzékelőelemén és olyan is aminek a másik oldalán ér véget a lap. Ennek a képét kezdik vizsgálni.

Az itt használt módszer lényege, hogy az átviteli függvény a δ Dirac deltára adott válasz, ez egy lépcsős függvény, ennél soronként meg kell nézni, hogy milyen intenzitásokat látunk, annak kell venni a spektrumát és ezt a spektrumot már a deriválásnak megfelelően a frekvenciával történő szorzással lehet átviteli függvénné alakítani a δ válaszra.

4.18.3. MTF és PSF kapcsolata



4.6. ábra. 2 sorban látható 2 vizsgálat eredménye

A felső sorban az a) képen egy monoton csökkenő és viszonylag nagy frekvencián csillapodó, tehát nagyobb sáv szélességű, nagyobb effektív felbontású rendszert látunk. A 0.5-ös

sáv szélességhez körülbelül a 200 hullám/mm-es sáv szélesség tartozik.

Mellette lévő oszlopban, a b) képen látható ennek a PSF-je, a c) képen pedig a Kodak-os vizsgálóábrának az ezen rendszer által rögzített képe.

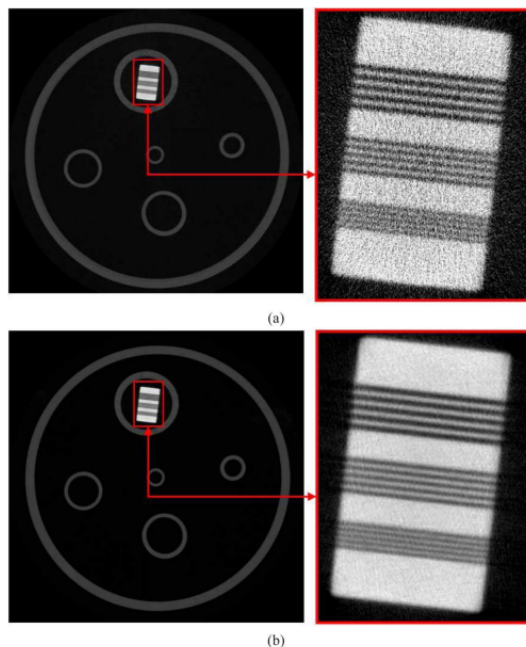
Azt érdemes megfigyelni, hogy egészen kis sugarakig le lehet számolni azt, hogy hány hullámot látunk a vizsgálóábrán és csak adott sugáron belül mosódnak a hullámok össze.

Ezzel ellentétben az alsó sorban látható egy gyengébbnek minősíthető képalkotó rendszernek a vizsgálata. A d) képen az *MTF*-nél azt látjuk, hogy sokkal hamarabb van az effektív felbontás: 100 hullám/mm alatt van, másrészt pedig azt is érdemes észrevenni, hogy egyébként van benne egy kis „hullámzás” a nagyobb frekvenciákon, erről később lesz szó, mi ennek az oka.

A PSF-re nézve az e) képen nem a b) képen látható, Dirac deltának pl. Gauss-szal történő elmosottját látjuk, hanem a PSF-en belül is ilyen hullámzó intenzitásprofil tapasztalunk. Ha erre a rendszerre is elkészítjük a Kodak-os ábra felvételét (f) kép), akkor látható, hogy egyértelműen gyengébb a felbontása ennek a képalkotó rendszernek, kívülről haladva sokkal hamarabb elérkezünk ahhoz a sugárhoz, ami után már nem tudjuk elkülöníteni egymástól a magas és alacsony intenzitású hullámfrontokat. Ez azt is jelenti, hogy az effektív felbontása ennek a rendszernek kisebb, mint az első sorban vizsgált rendszer esetében volt. Ebből az aspektusból nézve tehát az elsőként tárgyalt rendszer a jobb, valamint abból a szempontból is, hogy az *MTF*-eket összehasonlítva mindegy egyes síkfrekvenciás komponensre nagyobb átvitelt biztosít, tehát minden egyes frekvenciájú komponensen informatívabb méréseket tud végezni, informatívabb képet tud adni.

4.18.4. Zaj

A rendszer átvitelét tudjuk már minősíteni, erősítést, csillapítást tudunk mérni, viszont képalkotó- és fizikai rendszerek esetén zaj is keletkezik, ez a zaj pedig nagymértékben meg tudja változtatni a kimenetet.



Itt 2 olyan képalkotó rendszernek látható a rekonstrukciójának egy-egy szelete, ahol az ϕ az az első rendszer esetében nagyobb minden egyes síkfrekvenciás komponens esetén, mint a második rendszerénél.

Ha ránézünk a rekonstruált ábrára, akkor azt láthatjuk, hogy a legalsó vonal N-esnek

a rekonstrukciója a felső ábrán a nagyobb zaj miatt teljesen egybemosódik, a vonalak nehezen elkülöníthetőek, az alsó ábrán viszont tisztán kirajzolódnak és köztük a határvonal is szépen rekonstruálódik.

Ennek következménye, hogy az átvitel és az átvitel szerinti minősítés önmagában nem elég, egy másik fontos tényezőt is figyelembe kell vennie a képalkotásnak, ez pedig a zaj. Főleg azért szükséges a zajjal foglalkoznunk, mivel a képalkotáshoz szükséges vizsgálójel, a fotonoknak a jele, nagymértékű inherens (szorosan hozzátartozó, sajátos) zajt is tartalmaz. A továbbiakban a célunk, hogy a zajt is valahogyan minősíteni tudjuk és a rendszerünk átviteli függvényével, az átviteli függvény különböző jellemzőivel össze tudjuk vetni. Egy olyan vizsgálatpárt/minősítési párt fogunk megnézni, amely még nem fog a lineáris rendszerelméletre támaszkodni.

4.18.5. Signal to Noise Ratio (SNR)

Általános jelfeldolgozásban is gyakran használt, a jel-zaj viszont vizsgálja, általában teljesítményre definiáljuk és logaritmikus skálán minősítjük: a jelkomponensünk teljesítményét elosztjuk a zajkomponens teljesítményével és ennek vesszük a 10-es alapú logaritmusának a tízszeresét, így decibelben (dB) megkapjuk egy adott rendszernek vagy jelnek a jel-zaj viszonyát. Ha pedig ezt amplitúdókra akarjuk váltani, akkor kihasználhatjuk azt, hogy a teljesítmény az amplitúdó négyzetével lesz arányos. Így, ha ezek után amplitúdókra váltunk, akkor még négyzet lenne a logaritmus argumentumán belül, de ezt logaritmus azonossággal az érték elé tudjuk hozni, így adódik a következő, általános jelfeldolgozásban használatos azonosság a $2 \cdot 10 = 20$ -as szorzóval:

$$SNR = 10 \cdot \log_{10}(P_{signal}/P_{noise}) = 10 \cdot \log_{10}(A_{signal}/A_{noise})[dB]$$

Képfeldolgozás során nem igazán használt ez az összefüggés, ennek oka, hogy kvantálás során az intenzitás elválk a fényáramtól, csupán arányos marad vele. Ezen kívül önmagában nem is szoktuk tudni elválasztani egymástól egy kép esetén a jelkomponenst és a zajkomponenst. Ha mégis el szeretnénk választani, ha pl. additív zaj terheli csak a felvételünket, akkor ugyanolyan felbontás és felvételi elrendezés mellett készítünk sok képet ugyan arról az objektumról és kiátlagolódik belőle a zaj, ha az 0 várható értékű volt (additív zaj). Ahogy sokkal inkább ezt vizsgálni szokás az egyábrás felvételi elrendezésben, azt a következő összefüggés írja le:

$$SNR = \mu_{(x,y) \in N} \{I(x,y)\} / std_{(x,y) \in N} \{I(x,y)\}$$

- μ a pixelek intenzitásának várható értéke
- std az intenzitás szórása
- N a pixelek halmaza

Veszünk egy homogén objektumot, amiről tudjuk, hogy homogénnek kell lennie a képének is (adott közelítési hibával fogunk tudni ilyen objektumokat találni, amely közelítési hiba a mérés pontatlanságába belefér). Ennek a pixeleit jelöljük az N halmazzal és megnézzük, hogy milyen átlagos intenzitásokat látunk, ezt pedig elosztjuk ezen halmazon belül a jelnek a szórásával, tehát az intenzitás szórásával.

Fontos hangsúlyozni ezért, hogy ha képalkotó rendszereket minősítünk és kezdünk SNR -t mérni, akkor tisztázni kell, hogy milyen képet mértünk, milyen objektum képét mérjük, és ezen mit tekintünk homogén intenzitású régiónak. Ezek után az, hogy egy képalkotó rendszernek mennyi az SNR -je a peremfeltételek tisztására után nyér csak értelmet.

Önmagában a jel-zaj viszony képek esetében még mindig nem elég informatív. Annak függvényében, hogy egy világos vagy sötét objektumot mondunk homogénnek, teljesen más jel-zaj viszony adódik, ezért is kell tisztázni, hogy milyen mérési eljárást használunk. Sokkal fontosabb viszont, hogy milyen kontraszt-zaj viszony figyelhető meg.

4.18.6. Contrast to Noise Ratio (CNR)

Jellemző, hogy ha van egy többé-kevésbé homogén intenzitású terület, ezen belül pedig vannak kis változások, az nem biztos, hogy észrevehető az emberi szem számára.

Ezzel szemben, ha az objektumainknak vannak jól definiált határai, akkor az ezek mentén mért változás már nagyobb eséllyel érzékelhető, persze ez annak a függvénye, hogy mekkora valójában a kontraszt. Ahogy korábban is említésre került, ha a maximális és minimális intenzitás közötti különbség egy objektum határán kicsi, akkor alapvetően rossz esélyeink vannak az érzékelésre és a körvonalak meghatározására. Viszont, ha a különbség nagyobb, akkor sokkal szerencsésebb a helyzetünk.

Ez megint egy olyan minősítő lesz, amely semmit nem feltételez a képalkotó rendszerünkről, ennek következtében megint nekünk kell kijelölni azt a mérést, amiből a kontrasztot fogjuk számolni és azt a mérést, amiből a zajt fogjuk számolni. Ha pedig ezalapján szeretnénk összehasonlítani különböző képalkotó rendszereket, akkor biztosítani kell, hogy a minősítés során ugyanazokat a mérési feltételeket realizálni lehessen minden vizsgált rendszer esetében.

Tipikus módszer, hogy 2 objektumot vizsgálunk, az egyik pixeleit A halmaz, a másik pixeleit B halmaz jelöli. Ezen 2 objektum pixeleinek átlagintenzitásának a különbségét nevezzük a kép kontrasztjának leírójának ($C_{A,B}$) (ami megint annak a függvénye, hogy milyen objektumok átlagintenzitását vizsgáljuk), ezt pedig elosztjuk a kép egy azon részén látható (empirikus) szórásnak az értékével, amire azt mondjuk, hogy ott már homogén intenzitásokat kellene látni (σ_N):

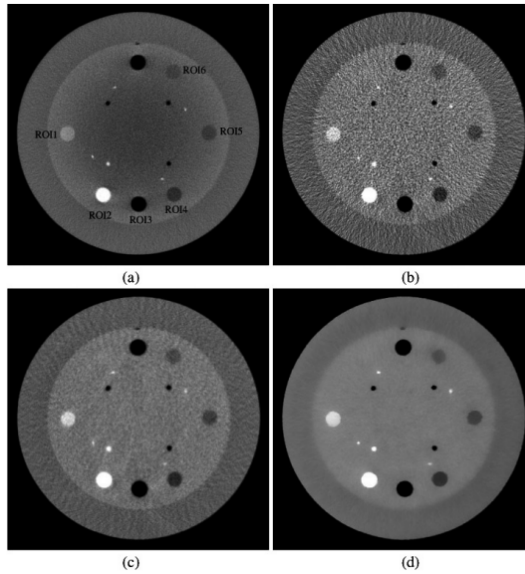
$$CNR_{A,B} = C_{A,B}/\sigma_N = |\mu_{(x,y)\in A}\{I(x,y)\} - \mu_{(x,y)\in B}\{I(x,y)\}| / \text{std}_{(x,y)\in N}\{I(x,y)\}$$

Az N halmaz egyébként lehet része az A vagy B halmaznak is, az $A \cup B$ -nek viszont ne legyen része, hiszen ekkor biztosan nem homogén területről beszélünk. Ekkor ismét a mérést definiáló mérnökre van bízva, hogy hogyan definiálja ezeket a halmazokat, a lényeg, hogy ha valamilyen mérési eljárást kidolgoz, akkor ezeket a definíciókat feljegyezze és ezzel megismételhetővé tegye a mérést.

A módszer orvosi környezetben tipikusan alkalmazott, amikor különböző rekonstrukciókat vizsgálunk, ekkor jellemző, hogy van egy-két elfogadható fantom és ezeken belül kijelölnek olyan régiókat, aminél már értelmezhető a zaj és a régiók rekonstrukcióinak intenzitása közt a kontraszt is.

A képen látható egy ilyen CT fantom és annak rekonstrukciói. Különböző rekonstrukciós eljárásnak látható itt a kiszámolt axiális szeletképe, a b)-t és a d)-t összehasonlítva megállapítható az, hogy ha itt a legfelső sötét folt régiójának átlagintenzitásának a különbségéből határoznánk meg a kontrasztot, ez nem változott. Viszont, ha a közbülső, homogénnek feltételezett régió intenzitásából akarjuk a szórást meghatározni, akkor látható, hogy a b) esetén ez jóval nagyobb, mint a d) esetén. Ez pedig azt is eredményezi, hogy vannak olyan kisebb méretű objektumok, amik kevésbé rekonstruálódnak jól láthatóan.

Ergodikus folyamat: a jelfeldolgozásban egy sztochasztikus folyamatról azt mondjuk, hogy ergodikus, ha statisztikai tulajdonságai a folyamat egyetlen, kellően hosszú, véletlenszerű mintájából levezethetők.



Ahogy már korábban említésre került, ergodikus Poisson folyamatként modellezhetjük, ez annyit jelent, hogy ha homogén világításunk van és a tér egy adott területét kijelöljük, azon mérjük a fotonoknak a fluxusát, tehát az azon átlépő fotonokat adott időintervallumon belül, akkor az tapasztaljuk, hogy nem konstans értéket látunk, hanem egy Poisson eloszlás mintavételével fogjuk szembe találni magunkat. Ezen Poisson eloszlásnak sűrűségfüggvénye

$$p(k) = \frac{\lambda^k \cdot \exp(-\lambda)}{k!}$$

ahol λ a várható érték, k pedig a fotonok száma. Ez egy diszkrét eloszlás, tehát diszkrét értékek lehetnek a kimeneti részen, hiszen fél foton nem létezik.

Tehát vesszük a λ -nak a k . hatványát, megszorozzuk $e^{-\lambda}$ -val és elosztjuk k faktoriállal. Könnyen belátható, hogy λ a várható értéke lesz a Poisson eloszlásnak. A várható értékét egy ilyen eloszlásnak úgy fogjuk tudni felírni, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k \cdot \exp(-\lambda)}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \cdot \exp(-\lambda)}{(k-1)!} = \lambda \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right) \cdot \exp(-\lambda)$$

Átalakítva a következőt kapjuk:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)$$

$$\exp(\lambda) \cdot \exp(-\lambda) = 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k \cdot \exp(-\lambda)}{k!} = \lambda$$

Az $e^{-\lambda}$ nem függ a k -tól, a $\lambda^k/k!$ pedig e^{λ} -nak a Taylor sorfejtése lesz 0-ban (ezt a Taylor sor definíciójából könnyen be lehet látni), a kettőt összeszorozva pedig megmarad a várható érték λ paramétere.

Amit ebből meg kell jegyezni, hogy a Poisson eloszlásnak a várható értéke a λ paraméter lesz, szórása pedig $\sqrt{\lambda}$.

Ez azt eredményezi, hogy ezt a szórást már a vizsgálójelünk tartalmazza, így ha ideális képalkotásról beszélünk, az nem azt jelenti, hogy nincsen semmilyen zajunk, hanem azt, hogy az olyan mértékű, mint ami a vizsgálójelünkben látható, plusz zajt nem generál. Tehát

$SNR_{in} = SNR_{out}$, a vizsgálójelben látható zaj mértéke pedig a vizsgálójel erősségének, intenzitásának vagy fotonjainak a számának a függvénye. A λ megadja a vizsgálójelnek a kvantumszámát, amivel a képalkotást végezzük és ennek a gyöke lesz a szórása a fotonok számának.

4.19. Zaj spektruma

A fő probléma, hogy egy jelnek tudjuk venni a Fourier transzformáltját, az amplitúdóit, meg tudjuk nézni a teljesítményét. Viszont itt egy zajfolyamatk van, nem egy jel, és ezen zajfolyamatnak egy véletlen mintavétele lesz az a zaj, ami az aktuális jelünket terheli. Ehelyett azt kell elkezdni vizsgálni, hogy ez a spektrum milyen eloszlásból fog kikerülni. Ekkor egyértelművé válik, hogy nem teljesítményspektrum hanem teljesítménysűrűség-spektrumról fogunk beszélni, a kérdés, hogy ezt hogyan lehet vizsgálni. Feltételezzük, hogy additív zajunk van, ez azt eredményezi, hogy ha I -vel jelöljük a jelet, amit látunk, akkor

$$I = \mu(I) + \eta$$

ahol a jel várható értékéhez hozzáadtunk valamilyen zajt. Ha ez a zaj hozzáadódik és akár 0 várható értékű is, akkor ennek a zajnak a hatását tudjuk úgy kompenzálni, ha nagyon sok mintavételezést végzünk ezzel a folyamattal és ezeknek vesszük az átlagát. Ekkor az átlagolás miatt az η el fog tűnni (mivel a várható érték képzés is lineáris művelet, így a lineáris szuperpozíció elve érvényes lesz rá). Ennek a várható értéke maga a $\mu(I)$, η várható értéke pedig $E(\eta) = 0$. Így tehát a zajtól meg tudunk szabadulni, viszont minket mégis a zaj teljesítményének az eloszlása, nem a jelünk várható értékének az eloszlása. Ha már végeztünk amúgy is viszonylag sok mérést ahhoz, hogy a μ -ig vagy az ideális I -ig eljussunk, akkor ezeket a méréseket használjuk ki, hiszen a zaj mintavételezésére is jók. Az aktuális j . mérés során látott I -ből levonjuk a μ -t, akkor megkapjuk a zajkomponenst, lényegében így tudjuk mintavételezni a zajt. A lényeg tehát, hogy sok mintavételt végrehajtunk ugyan arról az objektumról, ugyanazzal a felvételi és sugárbeállítási elrendezéssel és abban bízunk, hogy 0 lesz a várható értéke a zajnak, ha nem, akkor kalibrációs mérések után könnyen korrigálható.

4.20. Zaj teljesítmény spektrum, Noise Power Spectrum (NPS)

Az NPS definíciója folytonos esetben

$$NPS = \lim_{N_x, N_y, M \rightarrow \infty} \frac{1}{X \cdot Y} \left\langle |F\{I^{(1:M)} - \bar{I}\}|^2 \right\rangle$$

ahol X és Y az érzékelőnek a szélességét és hosszúságát jelöli méterben, M pedig a méréseknek a száma. A külső, szögletes zárójel az elemenkénti átlagolást jelöli.

Mit is átlagolunk?

Az I . mérés esetén kapott I -nkből kivonjuk I -nek a várható értékét, μ -t, és ezen különbségjel teljesítményének adott frekvenciájú komponensét fogjuk frekvenciakomponensként átlagolni.

Tehát a különbségjelnek vesszük a Fourier-transzformáltját (F), és ezen Fourier-transzformált spektrum amplitúdójának a négyzetét átlagoljuk, így megkapjuk, hogy adott síkfrekvenciás, vagy 1 dimenziós jel esetében frekvenciás komponens esetén milyen teljesítménye van a zajnak egy-egy mintavételezésen belül. Ha pedig ezt a mintavételezések fölött kiátlagoljuk, akkor megkapjuk, hogy átlagosan adott frekvenciás komponensben

milyen teljesítménye van a zajnak. Ennek következtében a zajt is spektrális tartományban tudjuk vizsgálni, ugyanúgy, ahogy majd a rendszerünk átvitelét is spektrális tartományban fogjuk vizsgálni.

Az NPS definíciója diszkrét esetben

$$NPS = \lim_{N_x, N_y, M \rightarrow \infty} \frac{\delta x \cdot \delta y}{N_x \cdot N_y} \left\langle |F\{I^{(1:M)} - \bar{I}\}|^2 \right\rangle$$

ahol

- $\delta x, \delta y$ a detektor x és y irányú kiterjedése
- N_x, N_y a detektor x és y irányú logikai felbontása (pixelek száma)
- $X = \delta x \cdot N_x, Y = \delta y \cdot N_y$ a detektor fizikai mérete

A folytonos eset a fizikai frekvenciás Fourier-transzformált

$$\int_{x,y} f(x,y) \cdot \exp(-2\pi j \cdot (ux + vy)) dy dx$$

ez, a diszkrét eset pedig a klasszikus diszkrét Fourier-transzformált

$$\sum_{m,n} f[m,n] \exp\{-1\pi j \cdot (u \cdot m/M + v \cdot n/N)\}$$

ahol is a normalizálás visszafele irányba történik.

A folytonos NPS-ből a diszkrét NPS-be könnyen, behelyettesítéssel el lehet jutni és ennek megfelelően alakulnak a normalizációs tényezők.

Diszkrét esetben már nem a vizsgált területtel fogunk osztani, a mintavételezés hatását is figyelembe kell már vennünk, a vizsgált mintavételezett képeink sorainak és oszlopainak a pixelszámának a szorzatával osztjuk el a mintavételi távolságok szorzatát.

4.21. Normalizált NPS (NNPS)

Hogyan vethető össze az NPS az *MTF*-fel?

Az *MTF*-nél szó volt a *DC* komponens normalizálásáról, ekkor nem tudjuk, hogy hány fotonból lett adott intenzitás. Ugyan ennek valahogy az NPS-ben is meg kéne jelennie, ha korrekt minősítőket és leírókat szeretnénk.

A Mi a detektor válasza olyan helyen, melybe Q foton érkezik (kvázi a rendszer erősítése)

Ennek a lehetséges megvalósítása, a rendszer átlagos átvitelének a négyzetével történő osztásként jelentkezik, ezt pedig úgy kell érteni, hogy fogunk egy olyan felvételi elrendezést, amiben mérhető, hogy milyen erős volt a gerjesztőjelünk. Például röntgen esetén van egy olyan része a képnek, ahol nem, vagy csak kis mértékben csillapodnak ezek a fotonok (pl. vákuumon vagy levegőn haladtak át), ezen résznek az intenzitásából lehet az A -t megbecsülni.

Ha ez megvan, akkor megtudjuk azt, hogy a Q fotonos megvilágítás milyen intenzitást eredményez a detektorunkon és ha egyébként a rendszerünk aluláteresztő jellegű volt (ami a képképző rendszerek nagy részére igaz), akkor tudjuk, hogy az *MTF* oldaláról ennek a komponensnek lesz a legnagyobb az átvitele, viszont a *DC* komponenssel történő normalizálás esetén ez egységnyi átvitel lesz.

$$NNPS(u, v) = NPS(u, v)/A^2$$

Ha ezzel a hányadossal korrigálunk, akkor máris összehasonlítható lesz a 2 mértékegység. Egy valami ekkor még kiemelendő, ekkor nem A -val osztunk, hanem A^2 -tel, amire azért van szükség, mert teljesítmény-jellegű jelről van szó. Az NPS definíciójában is amplitúdónégyzetek szerepeltek, ez pedig egy teljesítménysűrűség-spektrum, tehát nem amplitúdókkal vagy spektrális komponensekkel, hanem amplitúdónégyzetekkel kell számolni.

4.22. Zaj-ekvivalens kvantum, Noise Equivalent Quanta (NEQ)

Eljutottunk tehát a normalizált NPS-ig, így, hogy ez megvan, elkezdhetünk a zaj-ekvivalens kvantummal foglalkozni.

Zaj-ekvivalens kvantum esetében egy adott képalkotó rendszerben az NEQ éppen azon fotonok számával fog megegyezni, amely ideális képalkotó rendszer esetén ugyan olyan SNR -ű képet eredményezett volna, mint amit mi kaptunk.

Ha ebből az aspektusból vizsgáljuk, akkor ez számunkra nagyon hasznos, hiszen könnyen összehasonlíthatóvá tesz számunkra rendszereket, nem kell intenzitásokkal foglalkozni. Azt azonban érdemes hozzátenni, hogy már az NPS -t és az MTF -et is azért spektrális tartományba vezettük be, mivel különböző frekvenciás komponensek mentén jelentősen eltérő zaj-teljesítmény sűrűség és átvitel látható, ekkor az eltolás invariáns viselkedés miatti diagonalizáció miatt a spektrális tartományban érdemes vizsgálni. Ennek lesz az az eredménye, hogy ha 2 dimenziós képről beszélünk, akkor 2 spektrumkomponensünk lesz, egy vízszintes és egy függőleges frekvencia, amely (u, v) -vel van jelölve:

$$NEQ(u, v) = MTF^2(u, v)/NNPS(u, v) = SNR^2(u, v)$$

amit a következő komponensek alkotnak

- $NEQ \rightarrow$ spektrális tartományban vizsgálódunk
- $MTF^2 \rightarrow$ várható érték adott síkfrekvencián
- $NNPS \rightarrow$ zaj várható értéke adott síkfrekvencián
- $SNR \rightarrow SNR = E\{I\}/\sigma\{I\} = \lambda/\sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda}$

Adott frekvencián a zaj-ekvivalens kvantumot úgy számolhatjuk ezen definíció alapján, hogy megnézzük, a frekvencián milyen volt az SNR teljesítménye, az SNR^2 .

Ennek oka, hogy mint az ergodikus Poisson esetében is, ha van egy olyan vizsgálójelünk, ami egy ilyen ergodikus Poisson folyamat, akkor azt tudjuk mondani, hogy minden egyes síkfrekvenciás komponens esetén ugyan olyan átvitelt és zajt látunk, egyébként pedig tudjuk, hogy a Poisson eloszlásnak szórása az éppen a várható értékének a gyöke. Innentől, ha van egy ilyen Poisson-os vizsgálójelünk, akkor az SNR -jére azt tudjuk mondani, hogy egyenlő a jelünk várható értékének és a jelünk szórásának a hányadosával:

$$SNR = E\{I\}/\sigma\{I\} = \lambda \cdot \sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda}$$

A várható értékre beláttuk, hogy λ , a szórásra azt, hogy $\sqrt{\lambda}$, a kettő hányadosa pedig $\sqrt{\lambda}$. Ha Poisson folyamat által keltett jeleket vizsgálunk, akkor annak az SNR -je mindig a jelünk kvantumának a gyöke lesz.

Ebben a rendszerben annyi van, hogy egy Poisson folyamattal keltettük a vizsgálójelet, semmilyen más torzítás még nincs, ezeket az egyéb torzításokat minősítjük a zaj-ekvivalens kvantummal. Mivel az $SNR = \sqrt{\lambda}$ adott síkfrekvenciás komponens esetén, ezért ha mi

kvantumszámot akarunk, akkor ennek a négyzetét kell venni, ekkor kapjuk meg a zaj-ekvivalens kvantumot.

Viszont, ha már bevezettük az MTF -et és NPS -et, akkor valahogy az SNR -rel ezeket érdemes összekapcsolni. Ennek nagyon egyszerű módja, hogy a jelünk teljesítményét a megfelelő normalizálás után az MTF^2 fogja síkfrekvencián leírni, míg a zajunk teljesítményét, annak várható értékét pedig az $NNPS$ fogja adott síkfrekvencián leírni:

$$MTF^2(u, v)/NNPS(u, v)$$

Így megvan a rendszerünk átvitele, ami a jelnek az amplitúdóját és teljesítményét szabályozza és megvan a zaj és a zaj teljesítménysűrűsége, ami a zajnak a teljesítményét írja le. Ennek a kettőnek a hányadosa az adott síkfrekvenciánként tényleg egy SNR jellegű mennyiség és mégpedig egy kvantumban mérhető SNR mennyiségnek a négyzete. Innentől kezdve a zaj-ekvivalens kvantum az (ha elfogadjuk, hogy ergodikusan Poisson folyamat gyártotta a vizsgálandó jelünket) tényleg definíciójának megfelelően működik.

4.23. Detektálási kvantumhatékonyság, Detective Quantum Efficiency (DQE)

A DQE már egy hatásfok jellegű minősítő, veszi a képalkotó rendszerünk adott síkfrekvencián visszamért zaj-ekvivalens kvantumját és leosztja azzal a kvantum számmal, ami adott frekvencián a képalkotó rendszerünk bemenetér érkezett. Innentől kezdve ennek a kettőnek a hányadosa minősíti hatásfok jelleggel azt, hogy mennyire volt jó a képalkotó rendszerünk, mennyi jelet engedett át, milyen átvitele volt és ahhoz képest mennyi zajt generált adott síkfrekvenciás helyen:

$$DQE(u, v) = NEQ(u, v)/Q$$

ahol Q a vizsgált detektort elérő kvantum (fotonok száma, definiálható így is a dózis). Az eredmény egy 0 és 1 közötti szám, minél kisebb az érték, annál inkább jellemző, hogy a zajnak a megjelenése sokkal erősebb, mint a jelünknek az átvitele ezen rendszer esetén. Az NEQ -hoz kapcsolódóan kiderült, hogy az a teljes rendszerünknek az SNR^2 -e lesz, ha ezt elosztjuk a Q -val, az meg a rendszerünk bemenetére érkező jelnek lesz az SNR^2 -e adott síkfrekvenciás komponens esetén, ilyen értelemben véve pedig $2 SNR^2$ hányadosaként is felírható a zaj-ekvivalens kvantum:

$$DQE(u, v) = SNR^2(u, v)/SNR_i^2(u, v)$$

Ehhez vesszük az aggregált rendszerünknek (ami már a vizsgálandó jel zaját és a vizsgálandó folyamat zaját is tartalmazza) adott síkfrekvenciás SNR^2 -ét és ezt elosztjuk a vizsgálandó jelünk adott síkfrekvenciás SNR^2 -ével és ez is a zaj-ekvivalens kvantum definíciójából adódik. Valódi képalkotó rendszerek esetén ez síkfrekvenciánként eltér annak következtében, hogy az MTF is jelentősen frekvenciafüggő.

A DQE minél jobban közelíti az 1-et, annál inkább az ideális képalkotást, a 0-t közelítve pedig a véletlen zaj generálást modellezi a rendszerünk.

5. fejezet

Fourier térbeli analízis

5.1. Folytonos Fourier transzformáció

A következő fejezetekben megnézzük, hogy milyen jellemzői vannak a különböző spektrum-ábrázolásoknak. Megnézzük, hogy a folytonos fizikai jelünkből a mintavételezett kvántált jelünk hogyan torzul, továbbá ez milyen spektrális torzulást eredményez. Az egy általános kívánság, hogy a diszkrét és a folytonos Fourier transzformáció ekvivalensként lehessen alkalmazni/tekinteni. Látni fogjuk, hogy sajnos ennél sokkal komplexebb a helyzet. Amíg egy folytonos jelből egy mintavételezett diszkrét értékű jelünk lesz, addig ez sok nem kívánatos dolgot eredményez (a dekonvólúciónál is láthatunk majd erre példákat).

Definíció 6 (Fourier transzformáció) *Adott egy bemeneti jel, ahol az x tengely az időt jelöli, ezen végrehajtunk egy lineáris transzformációval báziscserét. A bázisunk ebben az esetben egy ortonormált bázis. Adott egy bemeneti jel, ahol az x tengely az időt jelöli, ezen végrehajtunk egy lineáris transzformációval báziscserét. A bázisunk ebben az esetben egy ortonormált bázis.*

Definíció 7 (Ortonormált bázis) *Függvények halmaza, amelyben az egyes függvények páronként ortogonálisak (merőlegesek, kereszt-korrelációjuk 0), egyenként normalizáltak (egység vektorok)¹, és kifeszítik a teljes teret. Vektorendszer, amelyben az egyes vektorok páronként ortogonálisak (merőlegesek), egyenként normalizáltak (egység vektorok), és kifeszítik a teljes teret*

Az 5.1. ábrán látható is, hogy egy periodikus jelet a sin-os és a cos-os függvények segítségével fel lehet írni. A Fourier transzformációnál hasonló helyzetről van szó, leszámítva, hogy ennél komplex exponenciális ábrázolást alkalmaztunk

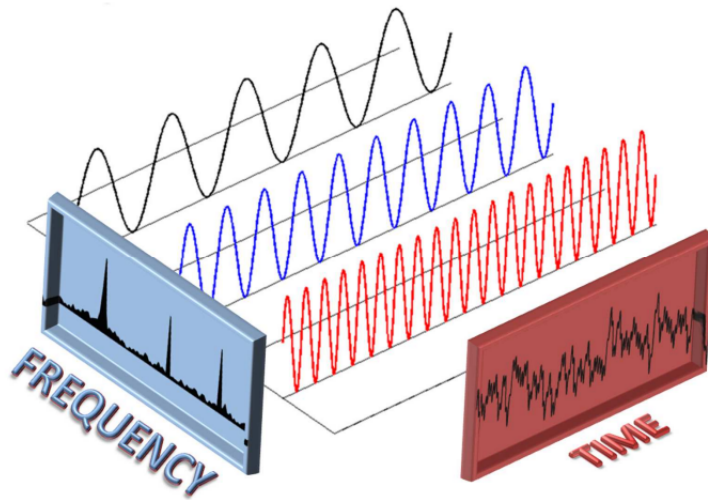
Egy adott bázisjelre történő vetítés után a spektrális ábrázolásnak egy adott komponensét kapjuk meg, és ennek során lesz ebből a folytonos idejű jelből egy ilyen spektrumú jel. Ezen spektrum komponensei pedig azt hivatottak jelölni, hogy mekkora amplitúdója van egy-egy ilyen bázis elemnek az eredeti jelen.

A Fourier transzformációhoz kritériumokat figyelembe kell vevünk, hogy L^2 jelünk van, azaz négyzetesen integrálhatónak kell lennie a bemeneti jelnek:

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$$

Ha ez nem teljesül, akkor jelenik meg, nem létezik majd folytonos Fourier transzformáltja. Ezt azt jelenti a mi esetünkben, hogy véges hosszú jelekkel fogunk foglalkozni.

¹A kettőt együtt: páronként ortonormáltaknak hívjuk.



5.1. ábra. Folytonos Fourier Transzformáció

Kétféle felírása gyakori a folytonos idejű transzformációnak. Az egyik a fizikai frekvenciás lesz. Jellemző konvenció egyébként az, hogy ha kisbetűvel jelöljük a jelünket bemeneti tér meg időtartományba, és annak a spektrális felírását nagy kapitálisan fogjuk jelölni.

Definíció 9 (Fourier transzformáció fizikai felírása)

$$F(\xi) = FT\{f\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi jx\xi} dx$$

$$f(x) = FT^{-1}\{F\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)e^{2\pi jx\xi} d\xi$$

Ahol a ξ mértékegysége, ha időről van szó $Hz = \frac{1}{s}$, ha térről $\frac{1}{mm}$ vagy ritkábban $\frac{1}{m}$.

Emellett a matematikusok jobban szeretnek egy másik felírást, és gyakrabban alkalmazzák. Ez pedig a körfrekvenciás felírás, itt annyi a módosítás, hogy a $2\pi\xi$ -t összevonjuk ω -ban, így:

Definíció 10 (Fourier transzformáció körfrekvenciás felírása)

$$F(\omega) = FT\{f\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-jx\omega} dx$$

$$f(x) = FT^{-1}\{F\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{jx\omega} d\omega$$

A következő tulajdonságok miatt kényelmes a Fourier transzformáció:

- Konvolúciós tétel teljesül, azaz ha van két jelünk, akkor azon két jel konvoltjának a spektruma megegyezik a két jel spektrumának a szorzatával:

$$(f * g) = FT^{-1}\{(F \cdot G)(\omega)\}$$

- Nincs nagy különbség a analízis (Fourier transzformálás), és az szintézis (inverz transzformálás) irány között, a komplex exponenciális tagok megegyeznek egy -1 -es szorzótól eltekintve, ennek következtében, egymást felírhatjuk ezen bázisok fölött,

így kétrirányú lesz több tételünk is, dualitás jelleg megjelenik, így például a konvolúciós tétel fordítva is igaz lesz: fordított konvolúciós tétel:

$$((f \cdot g)(x)) = \frac{1}{2\pi} FT^{-1}\{F * G\}|_x$$

- Parseval tétel, ha van egy véges energiájú jelünk, akkor az energia megegyezik a jelünk spektrumának az energiájával:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|d\omega$$

- ha valós jelünk spektrumát vizsgáljuk, akkor arra ez a komplex konjugált szimmetria érvényes lesz. Ez mit eredményez? Ha tudjuk, az ω frekvenciás komponensünket, annak vesszük a komplex konjugáltját, az a $-\omega$ frekvenciás komponense lesz a spektrumunknak. Ilyen értelemben véve nem kell a spektrum teljes egészét letárolni, valós jelek esetén, elegendő csak a felét.

Onnan láthatjuk, hogy a bázisban az egyes függvények ortogonálisak egymásra, hogy skaláris szorzatuk 0-t ad ki.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi j\xi_1 t} e^{-2\pi j\xi_2 t} dt = 0$$

Ha $\xi_1 \neq \xi_2$.

5.1.1. Fourier transzformáció tulajdonságai

A következő tulajdonságok teljesülnek a Fourier transzformációra:

- Valós jel spektruma: $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$
- Ha páros valós jelünk van, akkor a tisztán valós értékű páros spektrumot eredményez:

$$F(-\omega) = \text{Re}\{F(-\omega)\} = \text{Re}\{F(\omega)\} = F(\omega)$$

- Páratlan valós jelünk van, az tisztán képzetes értékű, páratlan spektrumot eredményez.
- Ha egy periodikus jelünk van annak a spektrumon vonalas (diszkrét):

$$F(\omega) = 0, \text{ ha } \omega \neq k \cdot (2\pi \cdot f)|_{k \in Z}$$

- Ekvivalens egy unitér transzformációval, amiből például a bijektivitás következik. Az Unitér transzformáció az ortonormalizáltságnak a komplex számú terében történő kivetülése. Ez azt jelenti, hogy ha a Fourier transzformációnak az adjungált transzformációját végrehajtjuk az éppen az inverz Fourier transzformáció lesz, erre látunk majd példát a DFT-nél.

Példa 1 (Periodikus jel spektruma vonalas négyyszögjelnél is) Nézzünk példát arra, ahol egy periodikus jelnek vesszük a Fourier transzformáltját. A jel legyen a négyyszög-jel, periódusa legyen T , ekkor a jelnek a spektruma $1/T$ -nek egész számú többszöröseinél tartalmazhat nem 0 értéket 0-át is beleértve (ezekben a pontokban lesz Dirac-delta).

A következőkben fogunk végigmenni azon, hogy a folytonos idejű folytonos értékét jeleinkből hogyan lesz mintavételezett jel, és milyen transzformációval lehet a mintavételezés különböző fázisaiban vizsgálni ennek a jelnek spektrumát, és ezen spektrumok között milyen összefüggések figyelhetők meg. A motiváció kettős: egyrészt az eltolás invariáns rendszerek viselkedése egyszerűbben kezelhető. Másrészt, mivel ilyen rendszerek torzítják a méréseinket, ezért, hogyha ezen torzításokat akarjuk majd kompenzálni, ott is frekvenciatartományban tehetjük meg könnyen. Harmadrészt lesz jó pár olyan algoritmus a későbbiekben, ami szintén spektrális tartományban fog jól működni.

5.2. Folytonos Fourier Sorfejtés

A következőkben a Fourier sorfejtést tekintjük át alaposabban. A periodikus jeleknek alapvetően vonalas spektrumuk van. Ennél egy kicsit nehezebb a helyzet, mert véges energiájú jeleknek van egyáltalán folytonos Fourier transzformációval vizsgálható spektruma. Hogyha ezzel szemben nekünk van egy periodikus jelünk az biztos nem lesz véges energiájú. De ettől eltekintünk, akkor nagyon könnyen jutunk el a Fourier sorfejtésnek a definíciójához. Itt arról lesz szó, hogy az alap harmonikus egész számú többszörösei lehetnek csak nem nulla értékűek a spektrumban.

Véges energiájú jelnek létezik folytonos Fourier transzformáltja, periódikus jelnek nem. Nézzük, hogy egy periódikus jelet, hogy tudnánk periódikus folytonos függvények tere felett lineárisan transzformálni:

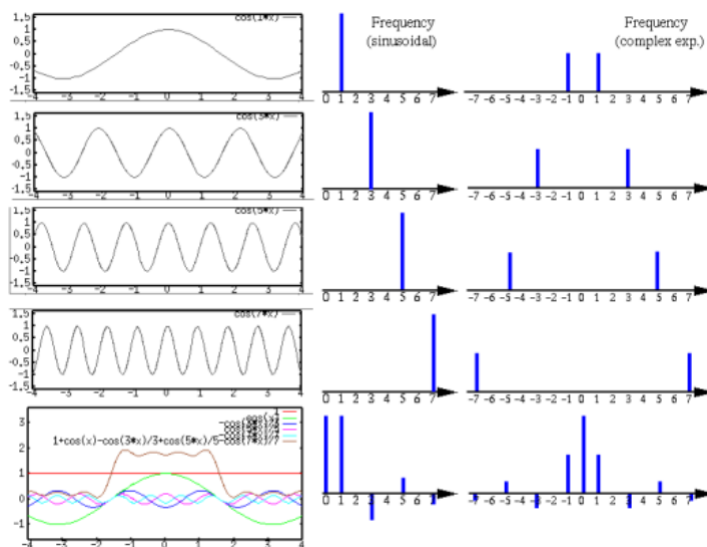
Definíció 11 (Fourier Sorbafejtés)

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-jx2\pi \frac{n}{T}} dx; n \in Z$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jx2\pi \frac{n}{T}}$$

Érdeemes összehasonlítani ennek a definícióját a folytonos Fourier transzformáció definíciójával. Feltűnő különbség, hogy ennél csak egyetlen egy perióduson történik az integrálás, míg a transzformációnál a teljes számegegyenesen. Másfelől észrevehetjük, hogy a ξ megegyezik $\frac{n}{T}$ -vel. A transzformáció során T periódusú jeltől $1/T$ alapharmónikus, és ennek egész számú többszörösei lesznek a felharmonikusok. ezekben a pontokban vesz fel értéket (Dirac-delta) csak a transzformált függvény, így ezeknek az amplitúdóját összegyűjtve egy vektorban szoktuk ábrázolni. A többi tulajdonságot örökli a Fourier transzformációtól.

Láthatunk a 5.2. ábrán egy példát négyszögjel sorbafejtésére, ehhez közelít a barna jel az összege az egyes jeleknek. Mivel a négyszögjelben ugrás van, így csak közelíteni tudjuk, ezt jelenti a Gibbs artifactot. Ez a frekvencia tartományban úgy jelenik meg, hogy végtelen nagy frekvenciás komponensek is megtalálhatóak nem nulla energiával, mivel végtelen meredekségű komponens kifejlesztésére pedig végtelen frekvencia kell. Sajnos ezt semmilyen módszerrel nem fogjuk tudni leírni, ehelyett egy nagyobb túlvéssel igyekszik a sorbafejtés ezt kompenzálni, ami a Gibbs artifactot okozza. A képeken majd ez az éllel/kontúrokkal párhuzamosan fog megjelenni. Az ábráról leolvashatjuk a különböző értékeket. Az első egész szám nulla lesz, ez a DC komponensét fogja megadni a jelnek, másrészt, ez az átlag értéke lesz, így értelemszerűen egy lesz (piros vonallal). Az első nem DC komponens harmonikus az alapharmónikus lesz. Ezt látható zöld vonallal. A második komponens sötétkékekkel, utána a lilával, utána világos kékekkel, és ezek összegzéseként áll elő a barnával jelzett jel.



5.2. ábra. Négyzetjel sorbafejtése

5.3. Diszkrét idejű Fourier transzformáció (DTFT)

Adott egy $f[n]$ mintavételezéssel előállt végtelen hosszú, abszolút összegezhető jel.

Lényegében egy Fourier transzformációt hajtunk végre egy fésű függvénnyel szorzott jelen (mintavételezés, ez a frekvenciatartományban konvolúcióba megy át). A mintavétel távolsága Δt , így a fésűfüggvény $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t)$, így a fouriert transzformált:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t)) e^{-j\omega t} dt$$

Ezzel átvittük a folytonos világba ezt a problémát, ezt átalakítva megkapjuk a következő formát.

Definíció 12 (DTFT)

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (5.1)$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega \quad (5.2)$$

Az alap Fourier transzformáció egy bijektív transzformáció volt, viszont ebben az esetben a bijektivitást elveszítjük, azzal, hogy egy megszámlálhatóan végtelen bemenetből egy megszámlálhatatlanul sok jelre térünk át. Egy másik érdekesség, hogy a Fourier transzformációnál láthattuk, hogy periodikus jelnek vonalás a spektruma, most vonalás jelnél periodikus spektrumot fogunk kapni. Ez a transzformáció is akkor fog létezni, ha véges energiájú jelünk van.

A következőkben nézzük meg DTFT tulajdonságait.

Tétel 1 (DTFT-t követő jel spektruma) *A DTFT-t követően a spektrum periodikus lesz.*

Bizonyítás *Használjuk ki, hogy a bemeneti jelet $n \in \mathbf{Z}$ egész számú helyeken mintavételeztük, és a kimeneti jel folytonos ($\omega \in \mathbf{R}$). Legyen $\omega' := \omega + k \cdot 2\pi, k \in \mathbf{Z}$. Helyettesítsünk be a DTFT képletének az exponenciális tagjába:*

$$e^{-j\omega n - jnk2\pi}$$

Az $n \cdot k$ szorzat egész (szorzatra vezessük be a k' -t), hiszen mindkét szám egész, így:

$$e^{-j(\omega n + 2k'\pi)} = \cos(\omega n + 2k'\pi) - j\sin(\omega n + 2k'\pi) = \cos(\omega n) - j\sin(\omega n)$$

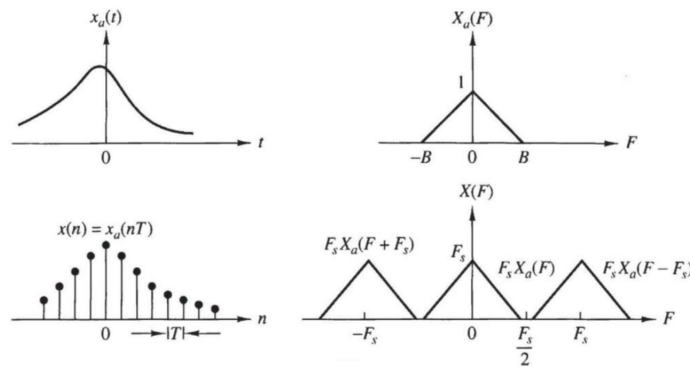
Ebből látható, hogy a spektrum tényleg periodikus. Ez oldja fel azt is, hogy a periodikus jelnek nincs folytonos Fourier transzformáltja.

A többi egyéb tulajdonságait örökli a folytonos FT-ből a DTFT transzformáció is.

A következőkben feltehetjük a kérdést, hogy vajon hogy tudnánk visszakapni az eredeti jelet? Ennek megválaszolására meg kell lássuk, hogy a dirac fésűvel való szorzás mit is jelent pontosan. A korábban bemutatott dualitás állítja, hogy az egyik "világ"-ban a szorzás a másik "világ"-ban konvolúciónak felel meg, így a dirac fésű a frekvencia tartományban a neki megfelelő Fourier transzformáltjával való konvolválást jelent. A dirac fésű spektruma egy olyan dirac fésű lesz, amelynél a fogak közti távolságokt reciprokra változnak (körfrekvenciánál még szorozva 2π -vel), és a megfelelő amplitúdójuk pedig (ha egységnyi volt időtartományban, akkor $2\pi/\Delta x$ lesz frekvencia tartományban. Nézzük meg ezt a konvolúciót formálisan:

$$F_s(\omega) = (F(\omega)) * \left(\frac{2\pi}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta \left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{\Delta t} \right) \right) = \frac{2\pi}{\Delta t} \sum_k F \left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{\Delta t} \right) \quad (5.3)$$

Az F_s jelöli a diszkréten mintavételezett jel spektrumát, még F az eredeti folytonos jel spektrumát írja le. Amit kaptunk úgy értelmezhető, hogy az eredeti spektrum egymás mellett végtelenszer megismétlődik a megfelelő távolságokra és amplitúdóval és így kapjuk meg a mintavételezett jelet. Később látjuk, hogy ha megfelelően ki tudjuk vágni az ismétlődő spektrumot, akkor visszakaphatjuk bizonyos feltételek teljesülése mellett az eredeti jelet. A mintavételi frekvencia, más néven Nyquist frekvencia $f_s = \frac{2\pi}{\Delta t}$ körfrekvencia esetén (fizikainál $\frac{1}{\Delta t}$), . Amiért ez érdekes, mert a mintavételezési távolság Δt volt, ez az időtartományban a fésűfogak távolságát adta meg. Amennyiben spektrumban nézzük meg a fésűt, ott a távolság pont az f_s frekvencia lesz (korábban leírtak miatt), ez azt jelenti, hogy ekkora távolságokra ismétlődik az eredeti F spektrum. Ha célunk, hogy tökéletesen visszaállítsuk az eredeti F spektrumot, akkor az ismétlődések között nem lehet átfedés, azaz az eredeti spektrum a $-f_s$, és $+f_s$ nyílt intervallumon kívül mindenhol 0 értéket kell felvegyen. Amennyiben a jelek között van átlapolódás, akkor aliasing hatás jelenik meg.



5.3. ábra. DTFT transzformáció

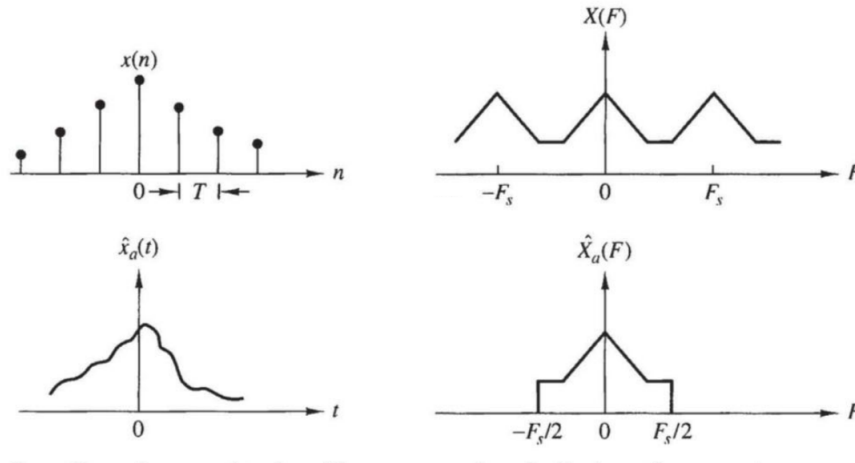
Az 5.3 ábrán jól látható a teljes folyamat. A bal felső sarokban látható az eredeti jel időtartományban. Jobbra fent látható a jel spektruma (Fourier transzformáltja). Látható az is, hogy a spektrum $-B$ és $+B$ sáv szélesség között vesz fel nem nulla értéket, ezen

kívül nullát. Ha megnézzük a mintavételezett jelet, aminek tudjuk, akkor annak a spektrumában (jobb alsó kép az ábrán) felfedezhetjük az eredeti jel spektrumát f_s távolságokkal eltolva, hiszen az eredeti spektrumot behelyettesítettük az 5.3 képletbe. A $k = 0$ -ra visszakapjuk az eredeti spektrumot, az első fősávot. A $k = -1, k = +1$ behelyettesítéssel pedig megjelennek mellette az első melléksávok. A melléksávok az eredeti spektrum f_s hosszal való eltoltsai, és az emeleti melléksávok, ennek a kétszeresével, stb. Kimondható, hogy ha az $f - s$ -el való eltolás a spektrumban a B sávszélesség mellett a B -nek a kétszeresénél több kell legyen, azaz:

Tétel 2 (Shannon–Nyquist-féle mintavételezési tétel)

$$f_s > 2 \cdot B \quad (5.4)$$

Ha ez nem teljesül, akkor spektrum térben történő átlapolódás, más néven aliasing jön létre. Az egyenlőség sem megengedett, hiszen, akkor 1-1 pontban átlapolódik, és így már az az érték is elveszik.



5.4. ábra. Átlapolódás a spektrumban

Areffig:dtftaliasing ábrán jól látható, hogy a törvényt nem betartva a mintavételezett jelnél már az eredeti spektrum átlapolódott változata fog létrejönni spektrumban, így torzul az eredeti jel. Megpróbálhatjuk szűrés alkalmazásával levágni így is az adott sávban a jelet, és ezzel az inverz transzformáció után kapunk egy rekonstrukciót az eredeti jelről, de ez már egy másik jel lesz. Ezért azt mondhatjuk, hogy aliasing hatásánál legtöbbször már az eredeti jel nem állítható vissza, és veszteséggel kell számoljunk.

5.5. ábrán láthatunk példát spektrum átlapolódásra, aliasingra. Ha megnézzük a téglákat az épület jobb tornyán, akkor rajta az alulmintavételezés következményét láthatjuk. A téglák közti távolság (Δt) túl alacsony, és nem teljesül a $(1/\Delta T) \cdot 2 < f_s$ egyenlőtlenség, ezzel aliasing (hullamzó) hatást hozott be. Érdekeség még, hogy ha csak egyetlen egy téglát homlokzati képéből indulunk ki, az mindig felül áteresztett lesz, hiszen ugrás van benne a téglát élénél, amihez végtelen frekvencia szükséges. Ezzel szemben több téglánál még az alapharmónikus sem rekonstruálható, és ezért lesz hullámozás (és a felharmonikusok a téglát élésége miatt még úgy sem).

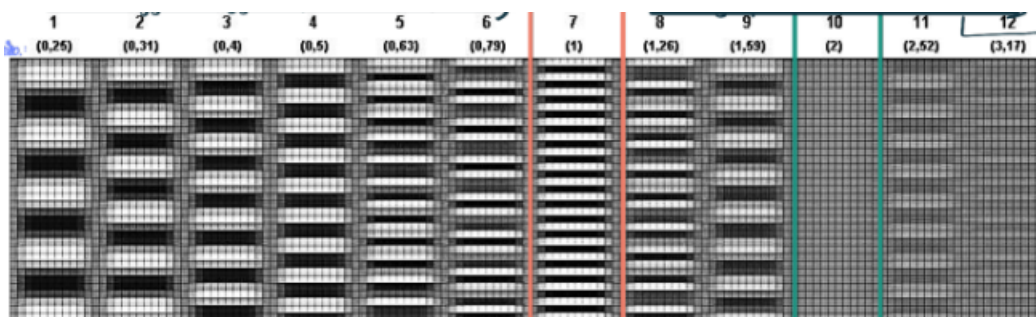
Megoldási lehetőségként élhetünk, azzal, hogy aluláteresztű szűrővel² elmoszuk a rögzítendő jelet, ezáltal csökkentve a sávszélességét (persze, ha megmondják a megfelelő mintavételezési távolságot, így levágjuk az aliasing-ot okozó részt), ezzel elmosódottabb képet kapunk, cserébe a hullámozás eltűnik. Ha nagyon alulmintavételezett képünk van, akkor

²alsó frekvenciát átengedi, magasabbat nem



5.5. ábra. Példa spektrum átlapolódásra

vagy elfogadjuk, vagy esetleg a későbbi fejezetekben (dekonvolúció, és inverz problémák) kifejtett Maximum a posteriori becslést hajtunk végre. Másik opció a nagyobb mintavétel bevezetése, akár azzal, hogy nagyobb képérzékelőt használunk vagy azzal, hogy közelebb megyünk az objektumhoz.



5.6. ábra. Aliasing hatása

Ha szeretnénk megvizsgálni egy képalkotó berendezésnek a Nequist frekvenciáját, akkor erre egy nagyon jól bevált módszer az 5.6 képen látható *sin*-uszos intenzitású vonal lapka használata. Minden oszlopban egy monokromatikus jel intenzitásai láthatóak, mely frekvenciája jobbra haladva nő. Látható, ahogy balról jobbra haladva egyre nagyobb frekvenciáknál először elérjük a 7-es oszlopnál legnagyobb frekvenciájú, még rekonstruálható jelet (melynek frekvenciája a Nyquist frekvencia), majd egyre nagyobb aliasing hatás keletkezik. Érdekes megfigyelni, hogy innentől kezdve ránézésre olyan mintha újra egyre kisebb frekvenciájú képeink lennének az alul mintavételezettség miatt. Ilyesmi a biciklikről történő felvételnél is megfigyelhető, bizonyos sebesség felett már más sebességűnek tűnik a forgás. Ráadásul a 10. oszlopban a mintavételezési frekvencia úgy alakul, hogy mindig ugyanabban a fázisban kaptuk el a jel értékét, így egy homogén jelet kaptunk.

A gyakorlatban a lencse is tud elmosást, és torzítást létrehozni a képen, ez számunkra a detektoroknál fog megjelenni, erre még lehet megoldás egy detektálás előtti elmosás. Röntgenes képalkotásnál a szórt fotonok nehezítik meg a feladatunk.

Anit-aliasing szűrővel a mintavételezés előtt aluláteresztő szűrést hajthatunk végre. Bayer szűrős fényképezőgépeknél optikai szűrővel, de ez radiológiában például az elkent PSF-ek miatt pedig elhagyható.

5.4. Mintavett jel jekonstrukciója

A mintavételezés során a mintavételek közötti értékeket elveszítjük, alkalmazások nagy részében célunk, hogy a köztes értékekre is adjunk valamilyen értéket, ekkor rekonstrukcióról, vagy interpolációról beszélünk. A korábbiak alapján tudhatjuk, hogy a tökéletes rekonstrukcióhoz nem sérülhet a mintavételezési törvény.

A fősávot kitudjuk szűrni egy ideális interpolációs kernellel:

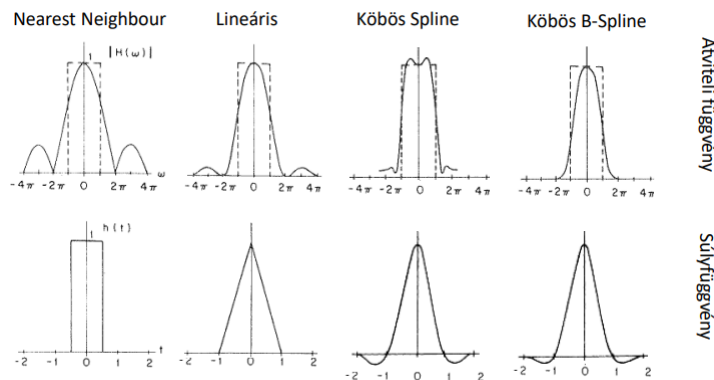
$$H_R(\omega) = \begin{cases} K, & \text{if } -\frac{f_s}{2} \leq \omega \leq \frac{f_s}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.5)$$

A kiszűrés után a rekonstruált jel csak a Nyquist törvény betartása mellett állítható vissza veszteség nélkül ezzel a kernellel. Ha nem tartjuk be, akkor csak későbbi témakörben leírt becslésekkel priorokkal tudunk számolni.

A $H(\omega)$ itőtartomány beli jele a *sinc* függvény ($\sin(x)/x$). Ez az ideális interpolációs kernel, ennek a legnagyobb problémája, hogy elfogadható közelítései széles tartójú jelek, mely a gyakorlatban problémákat okoznak. Ennek okáért nem is ezt a kernelt szokták alkalmazni, hanem helyette például különböző rendű interpolációkat.

5.5. Interpolációk összehasonlítása

A gyakorlatban használt súlyfüggvényeinkkel megvalósított rekonstrukciók nem az ideális rekonstrukciót adják, de bizonyos szempontból azt igyekeznek utánozni. Az egyes súlyfüggvényekre és a hozzájuk tartozó átviteli függvényekre a 5.7. ábrán láthatunk példákat, ahol a súlyfüggvény átviteli függvénye fent, időtartományban pedig lent látható ábrázolva. A kernel függvények általában igyekeznek az ideális kernelhez hasonlítani.



5.7. ábra. Súlyfüggvények

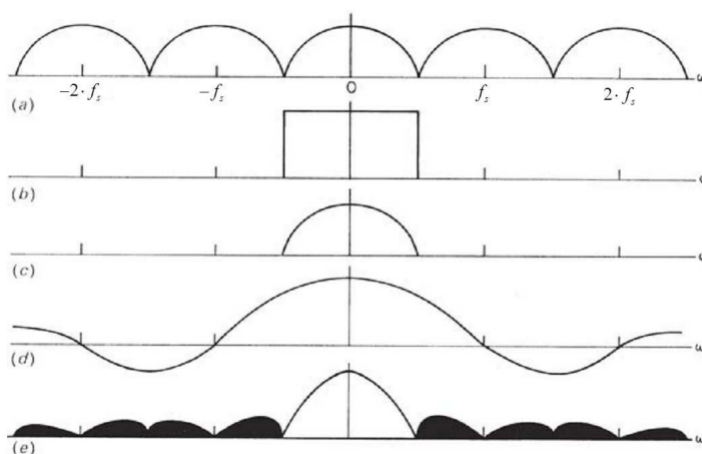
Legkönnyebben implementálható súlyfüggvény a legközelebbi szomszéd, az ábrán az első oszlop. Itt a mintavételek környékén konstans jelként folytatjuk a mintában vett értéket, így egy lépcsős mintázatot kapunk. Látható, hogy az átviteli függvénye aliasing hatást hoz be, hiszen az ideális kernelen (szagatott vonallal van jelölve) kívül is felvesz értékeket, és a sáv szélességen belül az egyre magasabb frekvenciát egyre tompábban veszi be, ami szintén torzuláshoz hoz be.

A legközelebbi szomszédnál egy jobb a lineáris interpoláció (térben triniális), amely a szomszédos mintáknak komplex kombinációjával írja le az adott kívánt jelet. A súly azzal lesz arányos, hogy milyen közel van az adott pozíció a szomszédos mintáktól. Ennek

a súlyfüggvénye a sátorfüggvény (háromszögfüggvény), aminek szélessége a mintavételi távolság kétszerese, közepén 1 értéke, $+1$, -1 -ben és azon kívül pedig 0 lesz az értéke.

A köbös Spline súlyfüggvényt a sátorfüggvény háromszorosi önmagával vett konvolúcióját vesszük.

Nézzük meg azt az esetet, ha betartjuk a mintavételezési törvényt, de a nulladrendű tartónk (a legközelebbi szomszéd szűrő) zajt hoz a rendszerbe. Erre jó személtető eszköz a az 5.8 ábra. A végtelenül mintavételezett jel spektrum képe az (a) sorban látható. Végtelenszer ismétlődik a jel átlapolódás nélkül. Ezt a jelet visszaállítani az ideális szűrővel tudjuk ((b) sorban), és azzal visszkapjuk az eredeti spektrum képét ((c) sor). Sajnos mivel mi egy egyszerű 0-adrendű tartót használtuk (aminek az átviteli függvénye a (d) sorban látható), ezért a kapott "megszűrt" spektrum az (e) sorban látható jel lesz. Jól látható, hogy az eredeti (b) sorban látható jeltől jelentősen eltér, ezért ez mindenféle torzulást hoz be. Egyrészt a Nyquist frekvenciákon belül is eltérő eredményt kapunk, másrészt azon kívül is a fekete háttérrel jelölt nem nulla sokaság is eltérő eredményt és torzulást ad.



5.8. ábra. Hibás interpoláció vizualizációja

5.6. Integráló mintavételezés

Nagyon szép a korábban felsorolt matematikai mintavételezés, hogy egy végtelen Dirac fésűvel szorzunk, de a valóságban ezt kevésbé tudjuk realizálni fizikai rendszerek esetén. Ezzel szemben sokkal inkább az integráló mintavételezést használjuk. Aminek lényege, hogy nem adott pillanatokból veszünk mintákat, hanem valamilyen tartományon integráljuk a megfelelő jelet, és az értéke ezen tartományon vett integrál értéke lesz. A valóságban mintavételezésnél használt érzékelők integrálják a detektált fotonokat.

Ez ideális esetben ezt is egy lineáris eltolás invariáns szűrésként vett konvolúcióként tudjuk modellezni, és a legideálisabb eset az integráló mintavételezésre, azaz ha a jelünknek az energiáját megfogjuk tudni tartani a mintavételezés során. Ez pedig akkor lehetséges, ha éppen olyan súlyfüggvényünk (box függvény) van aminek a szélessége Δt , a magassága pedig $1/\Delta t$, s ezzel a súlyfüggvénnyel egy lineáris eltolás invariáns rendszernek a súlyfüggvényével még konvolváljuk először a jelünket, s az így kapott jelet mintavételezzük. Ez ekvivalens azzal, mintha azt mondanánk, hogy a mi érzékelő elemeink nem nulla szélessége hanem éppen mintavételi távolság szélességűek, és ezen tartományon belül vennénk a jelünk értékének az átlagát, s azzal a helyettesítenénk a mintavételezett értéket. Ez sok szempontból korrektebb dolog is, mert önmagában az, hogy mi ezzel a súlyfüggvénnyel matematikailag konvolváljuk a jelünket, ha a Dirac fésűs mintavételezés megtörténik, lé-

nyegében aluláteresztési fogjuk a jelünket, ami csökkenteni fogja a spektrumszivárgásnak lehetőségét is.

Definíció 13 (Integráló mintavételezés ideális súlyfüggvénye időben)

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x}, & \text{if } -\frac{\Delta x}{2} \leq x \leq \frac{\Delta x}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.6)$$

Azért ez a súlyfüggvény lesz ideális, mert így amikor átengedjük az eredeti jelen, akkor a konvolúció definíciója szerint minden pont $\Delta x/2$ környezetében felvett átlag értéket fogja visszaadni, egy fajta elmosást hozva a rendszerbe (zajt alapjába véve csökkenti). És ezt a jelet, ha mintavételezzük, azaz szorozzuk a megfelelő Dirac fésűvel, akkor kapjuk meg az integráló mintavételezést matematikailag. Ne felejtkezzünk meg, hogy itt még mindig végtelen jelről van szó.

Ha a rendszert a spektrumban szeretnénk megvizsgálni, akkor az időtartományban definiált súlyfüggvény itt egy $\text{sinc}(\frac{\Delta x \cdot \omega}{2})$ lesz. Az eredeti jel spektruma itt szorozódik a ezzel a sinc függvénnyel (dualitás miatt), és ez a mintavételezés miatt konvolválódik a megfelelő Dirac függvénnyel, és így kapjuk meg a jelünket.

5.7. Diszkrét Fourier Transzformáció (DFT)

Ha a matematikai modellt tovább szeretnénk finomítani, akkor be kell lássuk, hogy a jelnek nem ismerhetjük sose végtelen mintavételét, ehelyett időben csak N darab mintát vehetünk. Ez a DTFT-t úgy módosítja, mintha egy ablakfüggvénnyel (az N mintánál 1 értékű, többiben 0) szoroznánk időtartományban a jelünket. Vagy nézhetjük úgy is, mintha a Dirac fésűt szoroznánk össze az ablakozó függvénnyel, és ezzel N darab fokkal rendelkező fésűvel szorozzuk az eredeti jelünket, és úgy kapjuk meg a mintavétellel szerzett digitális jelünket.

Definíció 14 (DFT transzformáció) Analízis irány:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-jn(k2\pi/N)} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-jnk\Delta\omega} \quad (5.7)$$

Szintézis irány (ebben az irányban szoktunk normalizálni):

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j \cdot 2\pi kn/N} \quad (5.8)$$

Észrevehetjük, hogy az eredeti DTFT 5.1 képletét lényegében mintavételeztük a $k \cdot 2\pi/N$ helyeken, és ezzel kaptuk meg a DFT spektrumát.

Vizsgáljuk meg alaposabban, hogy mi a definíció. Ha megnézzük a szintézis irány képletét (5.8), akkor láthatjuk, hogy ha az Euler alakra gondolunk ($e^{j2\pi kn/N} = \cos(kn/N) + j\sin(kn/N)$), ahol a k az egész, akkor belátható, hogy a visszakapott időtartománybeli jel periodikus. Mit is jelent ez? Azt, hogy mi amit a DFT-vel elértünk, az igazából nem az N jelből álló jel spektrumát adja vissza, hanem helyette, egy az eredeti N darab jelet mindkét irányba végtelenszer egymás mellé rakott periodikus jel spektrumát kaptuk meg. Ez hozza be a spektrumszivárgást a rekonstruált jelünkben. Ennek a csökkentésére az ablakozó függvényt átdefiniálhatjuk (például a szélein 0-hoz közelíteni), ezzel kisimítja a jelünket. Továbbá az, hogy áttudunk térni véges mintavételre, így áttudunk térni egy

egyszerű unitér mátrixal való szorzásra, ehhez a szintézis és analízis irányban is normalizálással számolunk, és nem csak ahogy a 5.8 képletben van normalizálás $1/N$ -el (helyette mindkét irányban $1/\sqrt{n}$ kell).

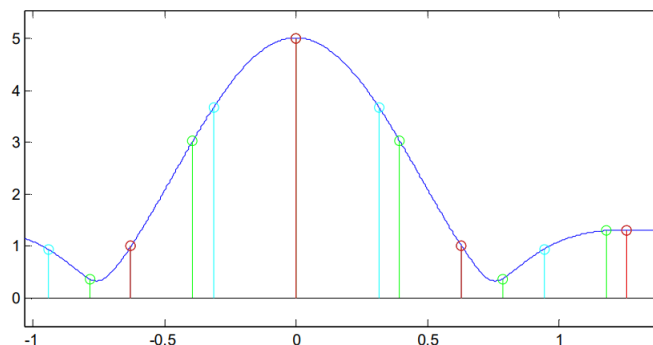
Definíció 15 (Unitér mátrix)

$$A \in \mathbb{C}$$

$$A^H \cdot A = I$$

5.7.1. DFT pontszáma

Általában technikailag szoktuk azt megjátszani, hogy az általunk hatékonyan alkalmazható Fast Fourier Transform (FFT) eljárások, 2 hatványával megegyező hosszúságú vektorokat tudnak jól kezelni, ezért az N -et megnövelik a következő legkisebb hatványra. Ez azt jelenti, hogy a mintavételezett jelet kiegészítik annyi darab 0-val, ahány kell a kívánt mennyiségű jel eléréséhez. Azzal, hogy így az N értéket módosítjuk N' -re (amit értelem-szerűen 2 hatványnak választunk meg) a képletből is látható, hogy az eredeti DTFT jelet az új $k \cdot 2\pi/N'$ helyen mintavételezzük, de a mintavételezett spektrum nem változik. A 5.9 ábrán ez jól látható, az eredeti mintavételezés pirossal az eredeti jel spektrumán, ez a legritkábban vett mintavételezés, majd az N növelésével már sűrűbben mintavételezzük újra a spektrumot (zöld), és végül legfinomabban a türkizkékkel. Sajnos ezzel a spektrum-szivárgást nem tudjuk eltüntetni, de cserében lehetőséget kínál az FFT használatára nem 2 hatvány esetben is 0-kal való paddinggal.



5.9. ábra. Spektrum újramintavételezése

Az algoritmus hatékonysága $O(N \cdot \log(N))$, ezzel szemben a 5.7 definícióból $O(N^2)$ jön ki. Ez a különbség kifejezetten képeknél jön ki élesen, de már egy dimenzióban is nagyobb bemenetnél.

5.8. DFT és DFS kapcsolata

Feltehetjük a kérdést, hogyha végső soron nekünk a DFT egy periodikus jelet állít vissza, akkor milyen kapcsolatban lehet a Diszkrét Fourier transzformációval? Erre a válasz, hogy formailag teljesen ekvivalens a kettő, a képletük is megegyezik. Az egyetlen eltérés, hogy másra alkalmazzuk a két formalizmust. A sorbafejtés esetében azt várjuk el a jeltől, hogy egy periodikus jel legyen, és tudjuk annak egy fázisát, és annak N mintáját, míg a DFT-nél a bemeneti jeltől nincs semmi ilyenféle elvárásunk, hanem egy adott intervallumon diszkrét vett digitális jelünket szeretnénk a spektrális térben leképezni. Ennek hatása szintén az lett, hogy egy olyan spektrumot kaptunk, aminek a visszatranszformálása egy periodikus jelet ad eredményül, de ez nekünk inkább hátrányként spektrumszivárgásként jelenik meg.

5.9. DFT és FFS kapcsolata

DFT-vel egy véges számú mintavételezést hajtunk végre. Ezzel szemben FFS-nél a Folytonos Fourier sorbafejtésnél egy diszkrét és nem periodikus jelnek nézzük a spektrumát. Változtassuk meg a folytonos Fourier transzformációt úgy, hogy egy diszkrét jelet helyettesítsünk be. Ekkor egy periodikus és diszkrét jelünk lesz, így a spektrum is periodikus is diszkrété fog válni, pontosabban megfogjuk kapni a DFT definícióját.

A periódusidő legyen T , és vegyünk N darab mintát, ekkor a Δt az T/N lesz. Az $f[k]$ úgy áll elő, hogy az eredeti f' függvényt vettük az $\Delta t \cdot k$ helyen ($f[k] = f'(\Delta t \cdot k)$). Ha ezzel felírjuk a folytonos Fourier sorbafejtést:

$$F'_k = \int_{t=0}^{N \cdot \Delta t} f'(t) \cdot \sum_{n=0}^N \delta(t - n \cdot \Delta t) \cdot \exp\left(-2\pi j k \frac{t}{T}\right) dt \quad (5.9)$$

Kicseréljük az integrált és a szummát:

$$F'_k = \sum_{n=0}^N f'(n \cdot \Delta t) \cdot \exp\left(-2\pi j k \frac{n \cdot \Delta t}{N \cdot \Delta t}\right) \quad (5.10)$$

Leegyszerűsíthetünk a Δt -vel:

$$F'_k = \sum_{n=0}^N f'(n \cdot \Delta t) \cdot \exp\left(-2\pi j k \frac{n}{N}\right) \quad (5.11)$$

Ezzel megkaptuk a DFT-nek a képletét. A Fourier sorbafejtés lényegében a fizikai frekvenciás Fourier transzformáció csak egy periodikus jelre kiterjesztve. Ezt tovább módosítottuk, úgy hogy a bemeneti jelet diszkrétizáltuk (megfelelő fésűvel szoroztuk), ezzel megkaptuk a DFT definícióját. Érdekes, ha visszanyúlunk egészen a fizikai felírással megadott Fourier transzformációhoz, akkor a ξ lesz a keresett frekvencia, azaz $\frac{k}{T} = \frac{k}{N \cdot \Delta t} = \frac{k \cdot f_s}{N}$. Az $n \cdot \Delta t$ megfeleltethető az eredeti t változónak, így olyan mintha mintát vennénk az eredeti Fourier transzformált függvényből az $\frac{k \cdot f_s}{N}$ helyen. Ez pedig azt jelenti, hogy a DFT az mindig a periodikus spektrum egyetlen egy periódusából egyenlő részre felosztva vett mintát. Ha belegondolunk ez is tűnik a leglogikusabbnak.

5.10. Spektrumszivárgás - ablakozás

A spektrumszivárgás látszólag periódikusra torzítja a jelet. Vizsgáljuk meg DFT kapcsolatát DTFT-vel és a DFS-el. DFS impliciten cirkuláris jelet feltételez. Tegyük fel, hogy az eredeti jelünk (végtelen terjedelmű) véges részét tudtuk mintavételezni: $h[n] = \text{rect}_T[n]$, $y[n] = y_\infty[n] \cdot h[n]$, ideális esetben ez $Y_{(k)} = Y_\infty(k \cdot \Delta\omega)$, míg a valóságban $Y_{(k)} = 1/2\pi \cdot (Y_\infty * H)(k \cdot \Delta\omega)$. Ami azt jelenti, hogy a jelünket sajnos az ablakozó függvény spektrumával kell konvolválni, azaz a *sinc* függvénnyel. A cél az lenne, hogy a DTFT spektrumot szivárgás nélkül tudjuk mintavételezni ($Y_{(k)} := Y_\infty(k \cdot \Delta\omega)$). Ezzel szemben a konvolvált *sinc* függvény a mintavételezett jeleket egymásba mossa, így a valós spektrum jele, és a mintavételezett jel eltér.

Tehát a megfigyelt jel DFT spektruma $Y_k = 1/2\pi \cdot (Y * H)(k \cdot \Delta\omega)$. Itt $h[n]$ pedig az ablak függvény. Ha expliciten nem ablakozunk, akkor $h[n] = \text{rect}_T[n]$. De lehetőségünk van más függvénnyel ablakozni a DFT előtt. Például egy Gauss jellel szorozva a bemeneti jelet, a jel szélein 0-ba simítja az értékeket. Ezzel az ismétlődési feltételezés javul, hiszen mindkét szélén 0 lesz. De ezzel információt veszítünk. Ezt jól mutatja, hogy a spektrumban

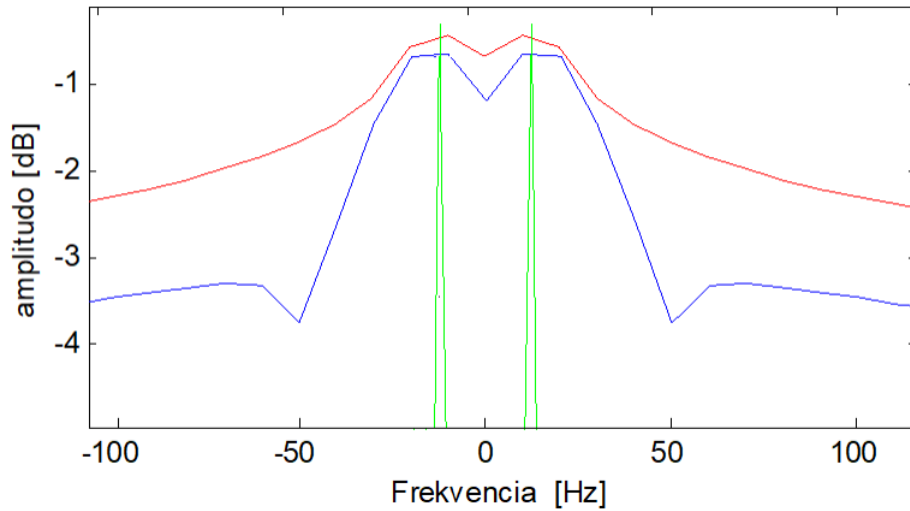
ekkor a *sinc*-es függvény lokalizációja romlik, azaz az alacsonyabb frekvenciákon szélesebb bemosódást eredményez, míg a magasabb frekvenciákon javul a teljesítménye.

A torzulás nem minden esetben következik be. Ha egy periodikus jelet megfelelő frekvenciával mintavételeztünk, akkor a DFT-vel nem jelentkezik spektrumszivárgás. Ekkor a *sinc*-es jelünk kitolási helyeire esnek a nemnulla komponensek esnek, ezzel koharens mintavételezést hajtottunk végre.

A többi esetben a spektrumszivárgás torzít. Periodikus jelből egész számú periódusnyit mintavételeztünk (y_N) : $N/f_s = k/f, k \in \mathbb{Z}^+$

- f : periodikus jelünk frekvenciája, N : minták száma
- N pontos négyzetes ablak DTFT spektruma:
 - $H_{rect} = \text{sin}(\omega/\Delta\omega)/(\omega/\Delta\omega)$
 - $H_{rect}(k \cdot \Delta\omega) = \delta_{k,0}$ ha $k \in \mathbb{Z}$
 - $Y_s(\omega) = 0$, ha $\omega \neq k \cdot \Delta\omega|_{k \in \mathbb{Z}}$

5.10. ábrán láthatjuk a zöld színnel a koherensen mintavételezett jel spektrumát, kézzel a Hamming ablakosát, és pirossal a téglalap ablakos spektrumot.



5.10. ábra. Koharensen mintavett / ablakozott, nem koherensen mintavett jel spektruma

5.11. 2D DFT

Képeknek is sok esetben keressük a 2D-s spektrumát. Mivel a kép is véges, ezért 2D DFT transzformációval tudjuk ezt leképezni. Ennek az analízis iránya a következő:

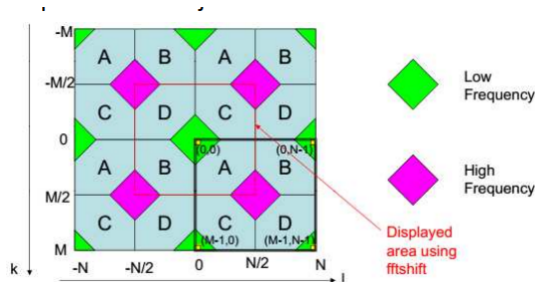
Képek esetére is kiterjeszthetjük a DFT-t, ekkor két komponensünk van egy vízszintes és függőleges irány. Az ezt leíró analízis:

Definíció 16 (2D DFT)

$$\begin{aligned}
 F_{u,v} &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f[m,n] \exp\{-2\pi j \cdot (u \cdot m/M + v \cdot n/N)\} = \\
 &= \sum_{m=0}^{M-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} f[m,n] \cdot \exp\{-2\pi j \cdot (v \cdot n/N)\} \right) \exp\{-2\pi j \cdot (u \cdot m/M)\}
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Ahol a képnek M sora, és N oszlopa van. Ha az egyenlőség első részét nézzük, akkor az egy $O(n^4)$ futásidőzűhöz vezetne. Ha ezt átalakítjuk, akkor két DFT transzformációval fel lehet írni a képet. Először az oszlopokon hajtunk végre 1D-s DFT-eket, majd az így kapott eredmény sorain egy újabb DFT transzformációval megkapjuk a végső 2D DFT transzformációt. Hozzá kell tenni, hogy a sorrendnek nincs jelentősége. Ezzel a megvalósítással gyorsíthatjuk $O(n^3)$ futásidőre az algoritmusunkat. Természetesen használhatjuk DFT helyett az FFT-t is (2^n széles, és magas képeknél), ebben az esetben csupán $O(n^2 * \log(n))$ futásidőt kapunk.

Ami kapunk eredményként spektrumot, az nem feltétlen az lesz, amit elvárnánk. Alap esetben szeretnénk, hogy középen legyen az origo, és balra és felfele a negatív spektrumok, míg jobbra és lefele a pozitív spektrumok jelenjenek meg. Ezzel szemben ha az 1D-s DFT-re gondolunk, akkor a 0. indexnél a DC komponens van, és az egyre növekvő indexeknél az egyre nagyobb frekvenciájú komponenseket kapjuk meg. A 2D általánosítással pedig, ugyanezt tettük meg, csak először az oszlopokra tettük, így felül lesznek a DC komponensek, és lent a legnagyobb frekvenciájúak, majd az egyes sorokra, ezzel pedig elértük, hogy bal felső sarokban legyen a DC komponensünk, és jobbra, és lefele növekedjenek a frekvenciák, és a jobb alsó sarokban a legnagyobb frekvenciájú jel legyen. Feltevődik a kérdés, hogy akkor a negatív frekvenciákkal mi a helyzet?

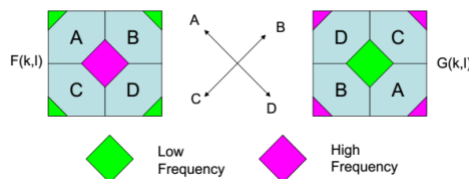


5.11. ábra. Spektrum blokkjai

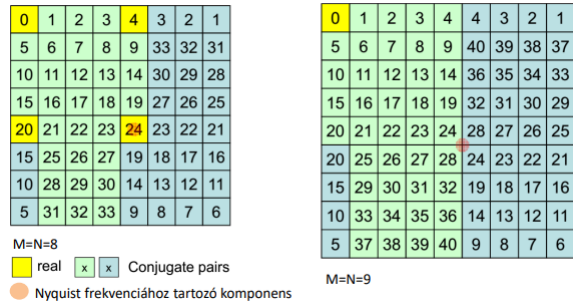
Jól látható az 5.11 ábrán, hogy a spektrum amit kaptunk, az a középső origo (DC)-tól jobbra lent lévő fekete négyzettel jelölt rész. Ezt a részt 4 fő további érdekes bontani. Mivel a bemenet diszkrét, így a teljes fekete ablak ismétlődik minden irányba végtelenszer.

Ha mi szeretnénk kivágni a középső piros kerettel rajzolt négyzetet, akkor csak megfelelően át kell csavarni az A, B, C, D-vel jelölt blokkokat. Az A helyére a D-t, B helyére a C-t, és a C helyére a B-t, és a D helyére az A-t tenni az 5.12 ábrának megfelelően. Ezzel az "fft shift"-tel a nézőpontot az origóba tudtuk így helyezni.

Egy másik fontos érdekesség, hogy ha a kapott spektrumot nézzük, akkor valós bemeneti jel esetén konjugált párokban jelennek meg a komplex számok a spektrális térben. Az 5.13 ábrán a sárga színnel jelölt értékek valósak lesznek, míg a zölddel és kékkel jelölt értékek megfognak egyezni, hiszen egymás konjugáltjai (csupán a frekvenciában lesznek egymás ellentétei, ha az átrendezett origóközpontú spektrumra gondolunk). Ezt a képek



5.12. ábra. Amplitudó moduláció

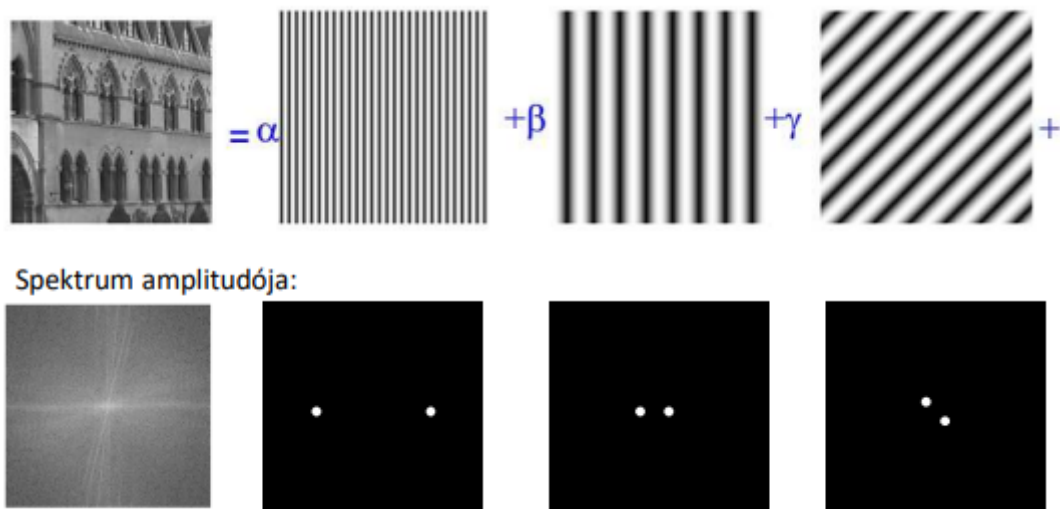


5.13. ábra. Konjugált szimmetria valós jelek esetén

spektrumjainak letárolásában úgy lehet kihasználni, hogy mindegyik pár egyik eleménél csak a valós részt, és a másik helyén csak a képzetes részt tároljuk le. Ezzel pontosan az eredeti képpel megegyező képméretű spektrumot kapunk, és megspóroltuk a redundanciát, és nem kell minden képponthez egy komplex számot letároljunk.

Az 5.13 ábrán még azt figyelhetjük meg, hogy ha a kép mérete páros, akkor 4 valós szám jelenik meg, az első érthető módon a DC komponens (0-s). Az első sor a többi sor összegéből kaphatjuk meg (hiszen vehetjük úgy, hogy először az egyes sorokra hajtottuk végre a DFT-t, majd ezeknek az oszlopain mégegyszer, és így a másodiknál a DC - ami az egész átlagos homogenitását írja le adja ezt meg az első sorra). Az összegzett értékeknél a 4-es lesz a Nyquist frekvenci helyén, ennek a párja csak saját maga lehet, így muszáj valósnak lennie. A 20-as indexnél hasonlóan, és a középső Nyquist frekvencián lévők valósnak kell lennie (nem lenne konjugált párja).

A 2D DFT-t lehet bázistranszformációként is értelmezni ortogonális bázisokra. A 5.14. ábrán láthatjuk az egyes bázisok skalárszorosainak összegeként a képet, a bázisfüggvények szinuszos hullám formájában jelenik meg. Érdekes észrevenni, hogy amilyen irányú egyenes mentén vannak a pontok a spektrumban, azzal merőleges irányú vonalak jelennek meg az megfelelő hullámfrontban. Ez a képeknél is általánosítható, sőt későbbiekben bevezetjük, hogy egy adott középponton átmenő egyenesre merőlegesen rávittett kép, az ugyanazon egyenesen (annak DFT-je) lesz megtalálható a hozzá tartozó spektruma.

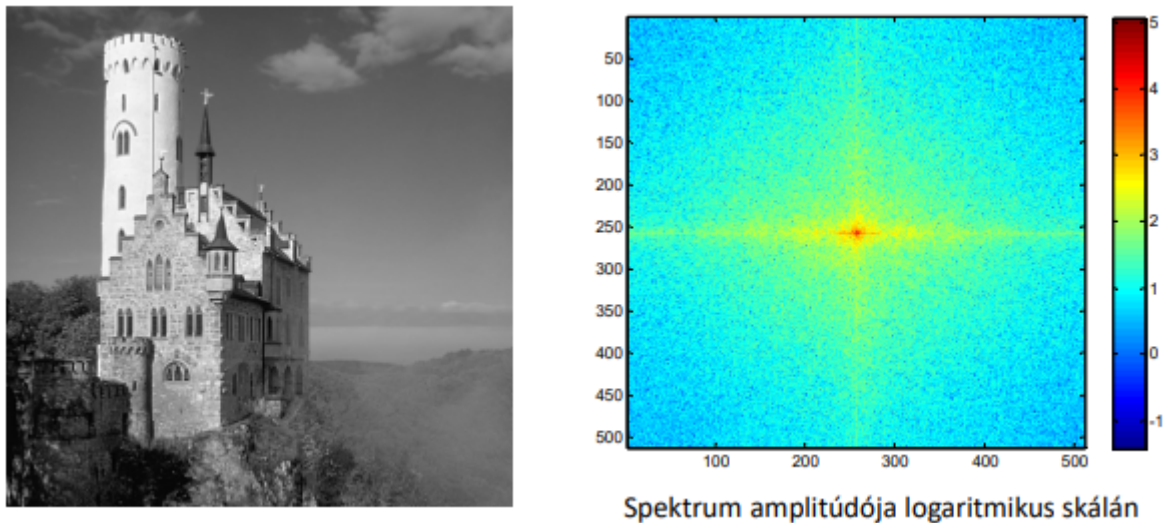


5.14. ábra. Vizuális értelmezése a 2D DFT-nek

Mit is jelent pontosan akkor a spektrum kép? A kép különböző amplitúdójú és fázisú hullámfüggvényekre bontható. A spektrumon egy adott érték, attól függően, hogy hol

nézzük, minnél távolabb a középponttól annál sűrűbb hullámkomponest nézünk (nagyobb frekvenciájút), és attól függően, hogy milyen szögben vagyunk az x tengelyhez képest annak megfelelő elfordított hullámfrontot veszünk. Az adott pixelhez tartozó komplex szám amplitúdója meghatározza, hogy milyen erősséggel adjuk hozzá a többi hullámképünkhöz, és a komplex szám fázisa meghatározza, hogy milyen eltolással vesszük az adott hullámképet. Így lényegében ezen sok hullámképek összegeként megkapjuk a képünket.

Az 5.15 ábrán a spektrumban a megfigyelhetjük a vízszintes és a függőleges vonalakat. Első ötletünk az lehet, hogy hát, akkor erre merőleges vonalak dominálhatnak a képen. Ebben van egyfajta igazsága, hiszen a képen tényleg az épület és a horizont miatt adottat a vízszintes és vonalak, viszont ezért leginkább csak a magas energiájú komponensek felelősek (többnyire a narancssárga rövid vonal középen). A többi a spektrumszivárgásból adódik, hiszen a kép bal szélé a jobb szélével nem egyezik meg, és a periodikus jelet feltételezett transzformáció nagy ugrásként érzékeli a különbséget, így ezen vonalak mentén a spektrumban is megjelenik. A felső és alsó résznél hasonlóan.



5.15. ábra. Képek spektruma

A spektrumban megfigyelhetjük, hogy logaritmikus skálát használunk, ez azért van, mert a képek az alacsony frekvencia mentén használnak nagyon magas energiájú komponenseket (10^5 nagyság akár), míg a magasabb frekvenciában jóval alacsonyabb csupán $10^1, 10^0, 10^{-1}$ energiájú komponensek vannak. Ez majd leginkább akkor okoz gondot, amikor fehér zaj is terheli a képeinket. A fehér zaj egyenletes energiával csúnyítja el a spektrumot. Az alacsonyfrekvenciás komponenseknél ennek nem igazán lesz jelentősége, hiszen jóval kisebb méretű elnyomást jelent relatívan, míg a magas frekvenciájú komponenseknél, ami az éleket és a kontúrokat írják le legjobban, a hasonló energiájával teljesen elrontja. Ezért lesz kihívás, hogy egy orvosi alkalmazásnál pont a kontúrok mentén lévő zajt javítani tudjuk.

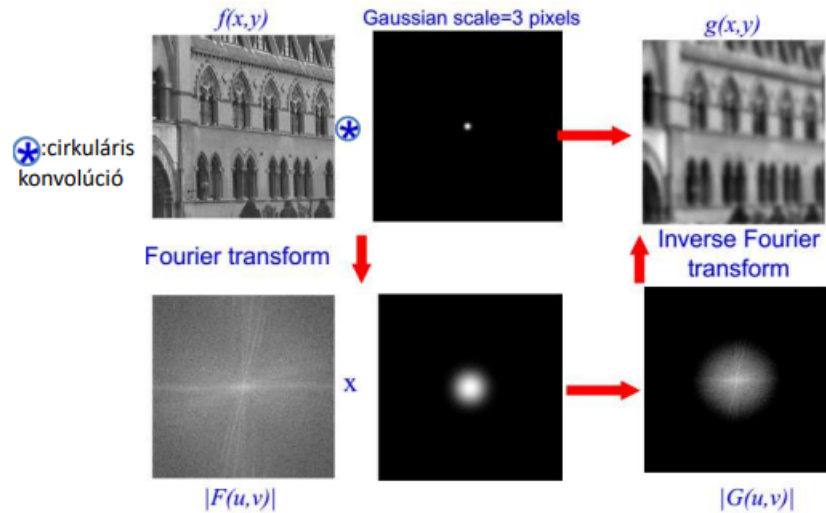
5.12. 2d DFT konvolúciós tétele

2D DFT esetén a konvolúció továbbra is egy szorzássá alakul a spektrális térben:

$$(f \otimes g)[n] = \sum_{m=0}^N f[m] \cdot g[\text{mod}_N(n-m)] = (f' * g')[n]$$

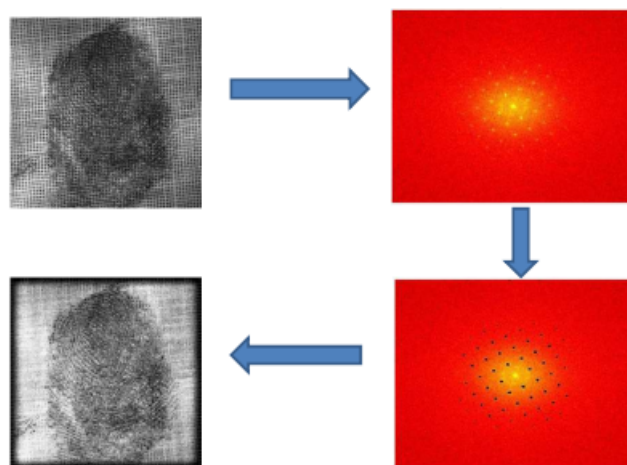
$$f'[n] = f[\text{mod}_N(n)], \text{ mig } g'[m] = g[\text{mod}_N(m)]$$

Amiért ez különösen hasznos, mert különböző szűrőket futtathatunk végig a képünkön. Például egy sokszor előkerülő alkalmazás, hogy szeretnénk a képünket elhomályosítani. Ekkor csinálhatjuk, hogy például egy 3x3-as átlagoló szűrővel végigmegyünk a képen, és megkapjuk az elhomályosított képet. Ez egy nagyon jól működő eljárás, viszont ha elkezdünk 5x5-ös vagy annál nagyobb szűrőkkel dolgozni, akkor az algoritmus futásideje nagyon lelassul.



5.16. ábra. Lineáris szűrés frekvenciaterben

Megoldás, hogy az 5.16 ábrán látható módon a kép spektrumát összeszorozhatjuk a szűrő spektrumával. Majd az eredmény spektrumot visszatranszformáljuk időtartományba. Jelentős sebességnövekedést érhetünk el, hiszen az FFT $O(n * \log(n))$ időben lefut. Nem teljesen azt kapjuk ezzel megoldásként, mintha az eredeti szűrővel mentünk volna végig rajta, mert a spektrum a képet egy periodikus jelnek értelmezi, és az ezen vett szűrő időtartományban a kép egyik szélén átnyúl a másik szélére, és így a két szél kicsit összemosódik. Ezt jól lehet látni, a jobb felső eredményként kapott képen.

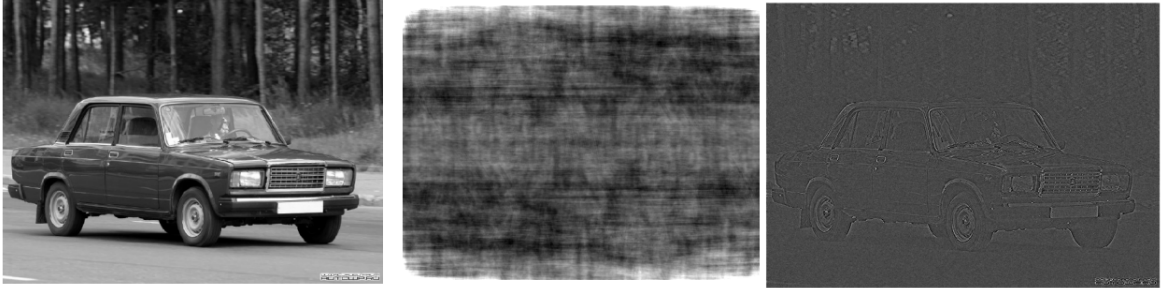


5.17. ábra. Periódikus mintázat és csúcsok a spektrumban

Az 5.17 ábrán az újlenyomat mögött észrevehetünk periodikus textúra mintázatot. Ez páronként megjelenik a spektrumban. Ha el szeretnénk ezt tüntetni, akkor egyszerűen a spektrumban kivágjuk az ezen mintázathoz tartozó magas energiájú komponenseket. A

kapott eredmény visszatranszformált képén láthatjuk, hogy elég jól sikerült eltüntetni a textúrát.

A spektrum kép, mint korábban említve is van, minden pontban egy komplex számként van ábrázolva. Általában az ábrázolt képeknél csak ezen komplex számok amplitúdóját látjuk. Viszont nem csak az amplitúdó, hanem a fázis is meghatározza a képünket. Erre jó példa az 5.18 ábra. Az eredeti képet bal oldalon láthatjuk. Ha csak az amplitúdókból rekonstruáljuk vissza a képet, akkor nagyjából csak foltokat látunk az intenzitásról, viszont a kontúrok teljesen elvesznek. Ezzel szemben, ha csak a fázisokból rekonstruáljuk a képet, akkor a kontúr teljes mértékben megjelenik, de a kép homogén lesz.



5.18. ábra. 2D DFT példa rekonstrukcióra

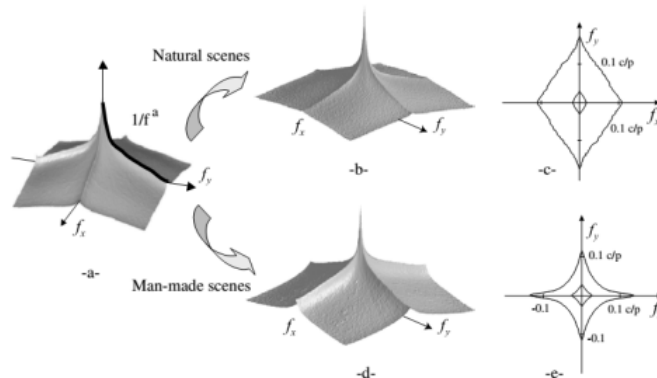
Azzal, hogy csak a fázisokat tartottuk meg hasonló eredményt kaptunk, mintha egy felül áteresztő szűrővel szűrtük volna meg, és csak a magasabb frekvenciákat tartottuk meg.

5.13. Polár koordinátás DFT

Lehetőségünk van nem csak klasszikus módon ábrázolni a spektrumot, hanem polárkoordinátákkal. A motiváció mögötte, hogy radon transzformációt írhatjuk fel ennek segítségével és majd annak az invertálását. A regisztráció is könnyebben számolhatóvá válik (elforgatás és eltolás). Számítása folytonos esetben:

$$F\{\theta, \rho\} = \iint_{x,y} f(x, y) \cdot \exp(-2\pi j \cdot \rho \cdot (x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta))) dy dx \quad (5.13)$$

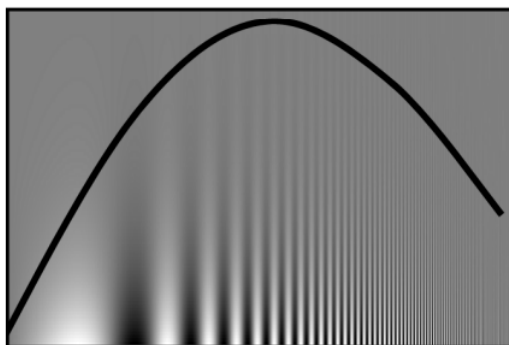
Később látni fogjuk, hogy a Fourier vetítősík tétele nagyon jól alkalmazható lesz rá.



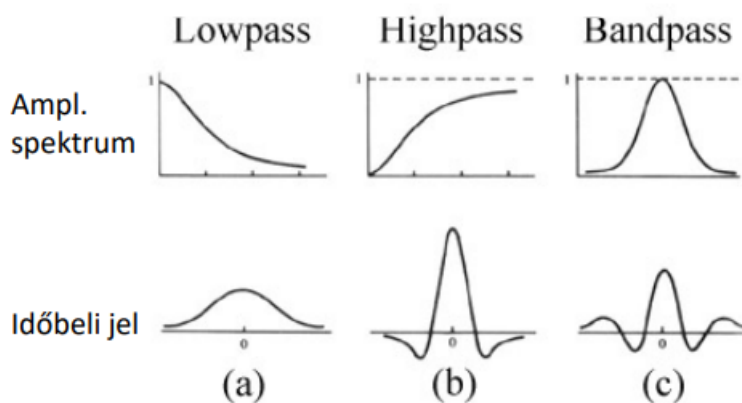
5.19. ábra. Digitális képek átlagos energiaspektruma

A polár koordinátás ábrázolásról visszatérve a képek általános spektrális ábrázolására, az 5.19 ábrán leolvashatjuk az átlagos természetben készült képek spektrumát, és összehasonlíthatjuk a képzőművészeti alkotásokkal. A vízszintes és függőleges vonalon áthaladó nagyobb energia mögött, egyrészt a korábban kifejtett spektrumszivárgás, másrészt a tényleges vízszintes és függőleges vonalak jelenléte az eredeti képen. Érdekes megfigyelni, hogy a természetben készült képeken jóval alacsonyabb számban fordulnak elő ezen két irányú egyenesek. Ennek oka, hogy a képzőművészetben szeretnek vízszintes és függőleges vonalakat alkalmazni.

Érdekes lehet az emberi szemnek az érzékenységet is megfigyelni a különböző frekvenciájú hullámokra. Az 5.20 ábrán az ember kontraszt érzékenységét és a frekvencia érzékelését hozza össze. A fekete görbe alatt látjuk jól a változó frekvenciájú mintát, míg a görbe felett homogénnek tűnhet a terület. Ennek oka, hogy az emberi szem az alacsonyabb kontraszt mellett a középszerű frekvenciát látja jól. Ha a frekvencia túl alacsony, akkor homogénnek érzi, ha túl magas, akkor szintén összemosódik már. Az utóbbi a szemünk optikájához tartozik.



5.20. ábra. Campbell-Robson kontraszt érzékenységi görbe

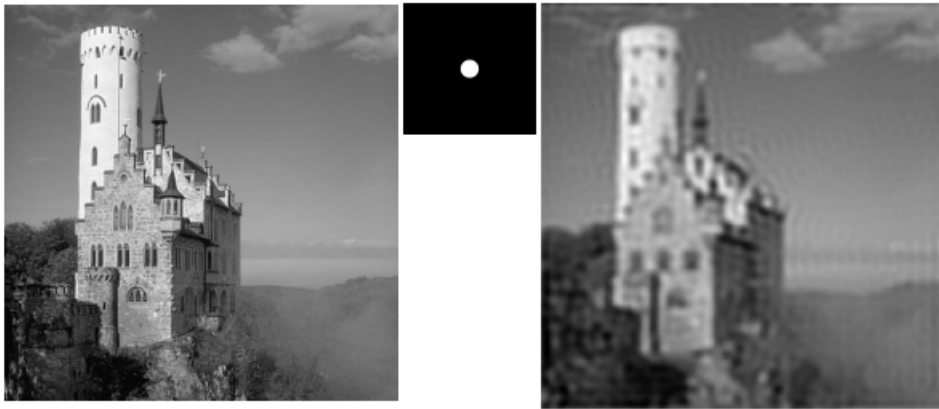


5.21. ábra. Szűrők idő és frekvencia tartományban

Az 5.21 ábrán az egyes főbb szűr típusokat vehetünk szemügyre. A baloldali "lowpass" - aluláteresztő szűrő, az alsó frekvencia tartományt átengedi, míg a felsőt elnyomja, kiszűri. Ez a spektrumbeli amplitúdójából látható is, hiszen az alacsonyabb frekvencián 1-hez közeli értékeket vesz fel, magasabbakon pedig a nullához közelít. A szorzás miatt fogja a leírtak alapján szűrni a spektrumot. Ezzel a szűrővel egy homályosítást hajtunk végre, ez látható is az időbeli jelhez tartozó elmosó jelalakról. A Highpass, azaz a közép

látható felüláteresztő szűrő, a felső frekvenciát engedi le, és az alsót szűri. Időbeli alakban érződik a szomszédságban lévő negatív értékek megjelenésével, hogy egyfajta kivonást végez, így kapva egy kontúros jelet. Az utolsó Bandpass sávszűrő a kettő között szűr. Az időtartományban a konvolúciót a szűrőben egyfajta oszcillációval hajtja végre.

A 2D-s DFT-knél megfigyelhetjük a Gibbs jelenséget. Ha a kép spektrumára egy olyan szűrőt rakunk, amely élesen vált. Például az 5.22 ábrán látható kör az nem átsimul, hanem egyből feketére vált a fehérről. Ez a visszatranszformált képen felül hullámzásokat hoz a képbe az éllel párhuzamosan. Ennek az oka, hogy az éles vágást visszafele sem tudja a transzformáció szépen átvinni (másik irányban az egységugrás transzformáltjához hasonló jelenség).



5.22. ábra. Amplitudó éles vágásnál Gibbs jelenség

Ennek megakadályozására olyan szűrőt alkalmazva van lehetőségünk, amely szépen átsimul. Erre a Gaguss szűrő nagyon alkalmas, annál kevésbé simuló szűrőnél már érződik a Gibbs artifact. A Butterworth szűrő, még simább spektrumú szűrő, ezért azt is használhatjuk.

6. fejezet

Inverz problémák

Bármilyen képalkotó rendszert is tekintünk, a legfontosabb megoldandó probléma a torzítás kompenzálása, nagyon ritka az eset, amikor egy adott képalkotó rendszer nem okoz markáns torzítást.

Először a matematikai bevezetést tekintjük. Van egy általunk ideális esetben megfigyelni kívánt jelünk (f) és egy LTI rendszer, ami ezt torzítja (h), ahol a h súlyfüggvény a PSF-nek lesz az analógiája. Ezen kívül pedig van még egy zajkomponensünk (η), ami torzítja a mérést. A zajkomponenssel különböző zajtípusokat jelölhetünk, nem kell feltétlenül additívnak lennie, de az esetek nagy részében additív zajjal foglalkozunk.

$$g = h * f + \eta$$

Szisztematikus torzítás okai és típusai:

- orvosi oldalról a páciens felvétel közbeni bemozdulása miatti elmosódás
- adott szervek természetéből adódóan, például a szív esetében
- out-of-focus elrendezés, ez a drasztikus képalkotásra jellemző, tomográfiánál is probléma tud lenni
- elmosást, torzítást okozhat a szóródó fotonok sokasága, amikor egy foton nem abba az érzékelőelembe csapódik be, amely felé elindult és ahol számítottunk rá

A következőkben feltételezzük, hogy az f és a g , valamint a zaj is 2 dimenziós, tehát négyzetes jel.

A látott jel spektrumát elosztjuk az átviteli függvényvel:

$$F(u) = (G/H)(u)$$

Egy dolog okoz nehézséget, az pedig az η (éta), hiszen ez hiányzik a fent látható összefüggésből, emiatt a zaj miatt kell majd rengeteg eljárást figyelembe vennünk. Foglalkozunk-e a zajjal, mást is figyelembe veszünk-e a becslésnél, ennek megfelelően milyen eredményre jutunk?

Amit még érdemes figyelembe vennünk, az a regularizáció.

Alapvetően 2 féle becslés típust lehet alkalmazni inverz problémák esetén

- Maximum likelihood (ML)
- Maximum a posteriori (MAP)

amelyek statisztikai becslések.

A statisztikai oldal onnan ered, hogy η -t sosem fogjuk ismerni, legfeljebb az eloszlását fogjuk tudni, ha pedig egy eloszlást ismerünk, akkor statisztikai becslésekről fogunk tudni beszélni, ennek az eloszlásnak egy mintavétele fogja torzítani a jelet.

6.1. Maximum likelihood (ML) becslés

Alapesetben:

$$f_{ML}^* = \arg \max_f \{P\{g|f\}\}$$

Additív zaj modell esetén a következőket szokás keresni:

$$P\{g|f\} = P_\eta\{g - h * f\}$$

$$f_{ML}^* = \arg \min_f \{-\log\{P\{g|f\}\}\}$$

Ha a maximum likelihood becsléssel foglalkozunk, akkor az általunk keresett jel maximalizálja az úgynevezett likelihood függvényt, ami adott η zajeloszlás mellett a feltételes valószínűsége a megfigyelt jelnek és a feltétel pedig a megfigyelni kívánt jel.

Amikor maximum likelihood becslésről beszélünk és tényleg additív a zajkomponens, akkor általában azzal a becslési problémával kell megbirkózni, hogy vesszük az η eloszlásának megfelelő sűrűségfüggvényt a következő módon:

$$\begin{aligned} \underline{f}^* &= \arg \max \{P_{\eta,h}\{g|\underline{f}^*\}\} = \\ &\arg \max \{P_\eta\{\underline{g} - \underline{h} * \underline{f}\}\} \end{aligned}$$

és ennek a jelnek az η eloszlás szerinti valószínűségét akarjuk maximalizálni.

Azt mondhatjuk, hogy ha ilyen becslést végzünk, akkor azt a jelet keressük, ami a leginkább megmagyarázza az általunk megfigyelt jelet.

Sajnos látni fogjuk, hogy ha ezzel dolgozunk, akkor majdnem mindig a direkt dekonvolúció valamilyen változatát fogjuk alkalmazni, aminek viszont megvannak a korlátai.

6.2. Maximum a posteriori (MAP) becslés

Alapesetben:

$$\begin{aligned} f_{ML}^* &= \arg \max_f \{P\{f|g\}\} = \\ &\arg \max_f \{P\{g|f\} \cdot P\{f\}\} \end{aligned}$$

Nem az előbb látott feltételes valószínűséget próbálja meg maximalizálni, hanem az úgynevezett posterior valószínűséget (becslés posterior valószínűsége a mért értékek függvényében):

$$\arg \max_{\underline{f}} \{P\{\underline{f}|g\}\}$$

és ennek a feltételes valószínűségnek keressük a maximum helyét.

A kettő közötti kapcsolatot a Bayes tétel fogja definiálni:

$$P\{f|g\} = \frac{P\{f,g\}}{P\{g\}} = \frac{P\{g|f\}P\{f\}}{P\{g\}}$$

Megjelenik ugyan úgy a likelihood tag, amely egyenlő az ideális jel megfigyelésének valószínűségével adott zajeloszlás mellett. Ez szorozódik az általunk becsülni kívánt jelnek a prior valószínűségével, ami úgy fog kinézni, hogy a becslés elején megmondjuk, hogy az összes lehetséges realizációját ennek a jelnek mennyire tartjuk valószínűnek.

Megjelenik benne még egy tag, amit általában le fogunk hagyni, ezt leginkább csak normalizációs tagnak tekintjük. Ez az általunk végzett megfigyelésnek a valószínűsége és mivel 1 megfigyelést csináltunk, ezzel az taggal legfeljebb normalizálni tudunk.

Ez f posterior valószínűsége, erre utal az elnevezés is és azt mondjuk, hogy ez arányosan egyenlő lesz a likelihood tagunk és az általunk keresett jel valószínűségének a szorzatával:

$$P\{f|g\} \propto P\{g|f\} \cdot P\{f\}$$

Ennek még egy technikai motivációja lesz, ekkor a numerikus optimalizáció eszköztárához fogunk nyúlni, a numerikus optimalizáció pedig nem igazán alkalmas maximalizálásra, sokkal inkább minimalizálásra. Még egy probléma, hogy sok esetben így a szélsőértéket ezekre a függvényekre nehezebb a szorzások miatt megtalálni, ezért nagyon sokszor módosítunk úgy, hogy a p logaritmáltjának a (-1) -szeresének keressük a minimumát f szerint, ez fogja az optimális becslést megadni.

Az első esetben, ha ML becslésről beszélünk, minimalizáljuk (*argmin*, vagy a *min* után egy pont, ez is ugyan ezt a műveletet fogja jelenteni) f szerint a mínusz logaritmáltját a $P\{g|f\}$ -nek:

$$ML : \min_{\underline{f}} -\log(P\{g|f\})$$

Erre az alakra tekintve a függvény, amit kapunk, f függvényeként az úgynevezett *fidelity* tag vagy hűség tag, ami leírja azt, hogy mennyire hűen illeszkedik egy adott f becslés az általunk létrehozott méréshez.

A másik, MAP becsléstípusnál (1. később), amikor priorunk van, akkor ez még kiegészül egy új taggal, ami annak lesz a következménye, hogy itt a $P\{g|f\} \cdot P\{f\}$ szorzatáról beszélünk, a logaritmálást elvégezve a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} MAP : \min_{\underline{f}} -\log(P\{g|f\}P\{f\}) = \\ \min_{\underline{f}} -\log(P\{g|f\}) - \log(P\{f\}) \end{aligned}$$

Itt is jelen van a $\log(P\{g|f\})$ fidelity tag, emellett pedig megjelenik $\log(P\{f\})$, egy úgynevezett regularizációs tag, aminek a feladata, hogy azokon a komponenseken, ahol a hűség tag nem, vagy csak kis mértékben függ f értékétől, a mérés alapú becslés eredményét felülbírálja.

Definíció 17 (Regularizáció) Azt a folyamatot nevezzük regularizációnak, amikor a méréseinkből származó becslést felülbíráljuk valamilyen általunk birtokolt előzetes ismeret segítségével.

6.3. Direkt dekonvolúció

Frekvenciatartományban:

$$G = F \cdot H + N$$

Tehát G az F és H elemenkénti szorzatának és a zajkép mintavételezésének az összege. Ekkor a spektrális tartományban vagyunk: bevett jelölés, hogy ha kisbetűket használunk, akkor a képtartományban/intenzitástartományban vagyunk, nagybetűket pedig a frekvenciatartomány esetén használunk.

Invertáljuk a korábbiakat úgy, hogy az egészet megszorozzuk H^{-1} -nel:

$$G \cdot H^{-1} = F + N \cdot H^{-1}$$

Elemenkénti szorzás invertáltja:

$$G/H = F + N/H$$

A direkt dekonvolúció szerint az N/H -val nem foglalkozunk

$$F = G/H$$

$$\tilde{F} = G/\tilde{H} = F \circ (H/\tilde{H}) + N/\tilde{H} \neq F$$

Ahol $\tilde{F} \approx F^{-1}$.

A valódi problémát az okozza, hogy nagyon sok olyan szűrőnk van, aminek lesznek olyan spektrumkomponensei, amelyek már egészen kis amplitúdóval vannak jelen, kicsi a H értéke, akkor pedig látjuk, hogy

$$G/H = F + N/H = \hat{F}$$

A feltételezésünk, hogy ezek megegyeznek. Minden olyan frekvencián tényleg jól közelíti az F -et, ahol igaz az, hogy az N_u komponensének és a H_u komponensének a hányadosának az abszolútértéke az nagyjából 0:

$$|N_{(u)}/H_{(u)}| \approx 0$$

Problémába akkor ütközünk, ahol nem 0, vagy a hányadosnak az amplitúdója elnyomja F amplitúdóját.

Hol lesz nagy a hányadosnak az amplitúdója?

Ha fehér zajunk van, akkor az N egy frekvenciatartományban lévő, nagyjából sima teljesítménysűrűség spektrum lesz és ekkor azon komponensek esetén, ahol van fehér zaj a mérésünkben és a H átviteli függvény az 1-nél nagyságrenddel kisebb (tehát 0 közeli értékkel lesz jelen):

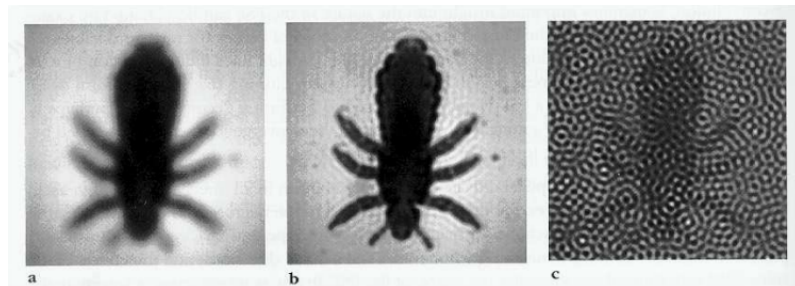
$$|H_{(u)}| \ll 1$$

ott már problémát eredményez.

Még általánosabban már ott problémáink lesznek, ahol nem teljesül, hogy

$$|F_{(u)}| \gg |N_{(u)}/H_{(u)}|$$

tehát, hogy az $F_{(u)}$ amplitúdója bőven elnyomná az $N_{(u)}/H_{(u)}$ amplitúdóját. Ennek pedig itt látható az eredménye:



6.1. ábra

Ideális esetben, ha nem lenne zaj, a direkt dekonvolúciót elvégezve a b) eredményt kapnánk. Nagyon közelről megfigyelhető a numerikus pontatlanságokból eredő Gibbs artifakt. Additív zaj esetén a direkt dekonvolúció utáni eredmény a c) képen látható.

A c) kép pedig sajnos szinte használhatatlan, az eredeti képünk részletei felismerhetetlenek rajta, pedig elvégeztük a konvolúciót, megfelelő átviteli függvénnyel elemenként osztottunk, majd a konvolúció tételt kihasználtuk.

Sajnos nem ilyen egyszerű használható eredményt elérni, mivel ha elmosásunk van, ami egy aluláteresztő szűrésnek tekinthető, akkor lesz egy széles tartománya a frekvenciák halmazának, ahol már 0 az átvitel. Ott, ahol egy rendszer teljesen lenyeli a bemeneti jelet, nem fogjuk tudni megmondani ML becsléssel, hogy mi volt az.

Ekkor nagyjából tudjuk, hogy azok a komponensek a „hibásak” ebben a helyzetben, ahol a torzító rendszerünk átviteli függvényének amplitúdója túl kicsi volt. Ekkor megtehetjük, hogy a becslésben az amplitúdóknál nem az osztás értékét vesszük a becslt kép spektrumában. Így jutunk a csonkolt dekonvolúcióhoz.

SVD (Singular value decomposition)

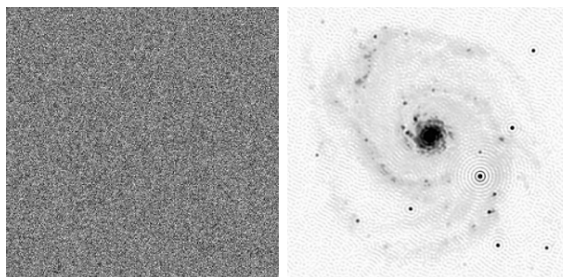
A lineáris algebrában a szinguláris érték felbontás (SVD) egy valós vagy összetett mátrix faktorizálása. Általánosítja egy ortonormális sajátbázisú négyzetes normálmátrix sajátdekompozícióját bármely $m \times n$ mátrixra.

Megjegyzés: Eltolásinvariáns cirkuláris rendszerek torzítását leíró mátrix SVD felbontása lényegében a Fourier felbontásra vezet, ahol az SVD szinguláris értékei a Fourier spektrum komponenseinek bijektív függvénye (lsd. valós bázisok fölötti diszkrét Fourier sorfejtés).

Egy lineáris rendszert szeretnénk invertálni, ezt csonkolt SVD-s invertálással tehetjük meg. Az adott átviteli érték szerint van 0-s behelyettesítés. Ha az átviteli függvény, ami torzította az ideális képünket, ϵ -nál nagyobb amplitúdóval engedte át a jelet, akkor a hányadosképzés eredményét helyettesítjük be a dekonvolvált kép spektrumába. Ha ennél kisebb volt az átvitel, akkor pedig azt mondjuk, hogy adott komponensen 0 az energia:

$$\tilde{F}_{(u)} = \begin{cases} G_{(u)} \cdot / H_{(u)} & |H_{(u)}| > \epsilon \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad (6.1)$$

Alább egy űrteleszkóppal készült képet láthatunk, bal oldalt látható a direkt dekonvolúció, jobb oldalt pedig a csonkolt dekonvolúció eredménye látható:



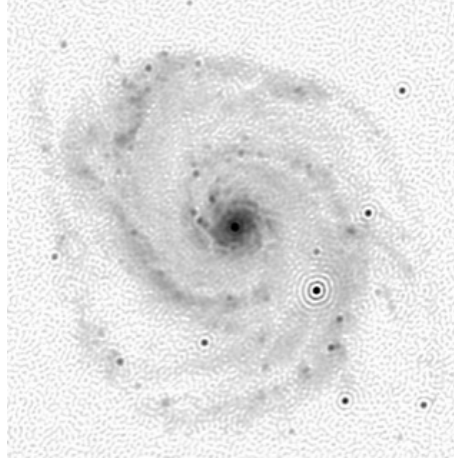
6.2. ábra

A jobb oldali, csonkolt képnek is vannak még hibái. Látható például, hogy egy ringing artifact jellegű, körkörös hiba megjelent: van egy csillag, aminek sötétebb intenzitása lenne, ekörül koncentrikus körök figyelhetőek meg. Ezen kívül más zajforrások is megfigyelhetőek, de a direkt dekonvolúcióhoz képest már egészen értelmezhető az eredmény és ekkor

csak egy olyan regularizációt alkalmaztunk, aminél a direkt dekonvolúciót 0 amplitúdóval végeztük.

6.4. Wiener inverz-szűrés

Ennél már sokkal jobb eredményt fog adni a Wiener inverz-szűrés.



6.3. ábra. Wiener szűrés eredménye: jobb részletgazdagság, de a gyűrűk egy része megmaradt

Ez is a csonkolt dekonvolúció egy általánosításának tekinthető. Az elve, hogy egy olyan lineáris szűrőt tervezünk, ami lineáris eltolás-invariáns és arra törekszik, hogy ha ugyan arról a képről, ugyan azzal az elrendezéssel, de más-más zajkomponens egymástól független mintavételezésével készült különböző ilyen dekonvolúció eredményének a várható értékét nézzük, akkor ezen várható értékeknek a különbsége négyzetes értelemben minimális legyen (a legkisebb teljesítménysűrűségű hibakomponensen marad).

$$F_{(u)}^{Wiener} = H_{(u)}^{Wiener} \cdot G_{(u)}$$

$$f^{Wiener} = \arg \min \{ E \{ \| f^{Wiener} - f^{valódi} \|_2^2 \} \}$$

Leggyakrabban ezt az inverz szűrést szokás alkalmazni dekonvolúció esetén. Érdeemes megnézni az átviteli függvényét:

$$H_{(u)}^{Wiener} = \frac{H_{(u)}^*}{|H_{(u)}|^2 + E\{|N_{(u)}|^2\} / E\{|F_{(u)}|^2\}}$$

$$SNR_{(u)} = \sqrt{\frac{|H_{(u)}|^2 \cdot E\{|F_{(u)}|^2\}}{E\{|N_{(u)}|^2\}}}$$

tehát az átviteli függvény úgy fog kinézni u frekvencián, hogy H_u (a torzító rendszerünk átviteli függvénye) komplex konjugáltját elosztjuk H_u amplitúdójának a négyzetével, amihez hozzáadtuk a zaj teljesítménysűrűsége és a becsülni kívánt jel eloszlásának a teljesítménysűrűségének a hányadosát.

Megvizsgáljuk, hogy a csonkolt dekonvolúcióhoz képest mi történik, a vizsgálat pedig úgy fog kinézni, hogy H_u amplitúdójának a négyzetével a számlálót és a nevezőt is leosztjuk.

$$\frac{H_u^2 / |H_u|^2}{1 + E\{|N_u|^2\} / E\{|F_u \cdot H_u|^2\}}$$

Ha ezt megtettük, akkor a számlálónkban H_u komplex konjugáltja és H amplitúdó négyzetének hányadosa szerepel, a nevezőben pedig egy 1-es marad, ehhez hozzáadjuk a hányadosát a zaj teljesítményének és a zaj nélküli jel és a torzított, általunk megfigyelt jel teljesítményének.

Azért hasznos ez az alak, mert a

$$H_u^*/|H_u|^2 = H_u$$

és ami itt pedig marad, az a látott, torzított rendszer zaj-jel teljesítménye, ami a G SNR-jének a négyzete

$$E\{|N_u^2|\}/E\{|F_u \cdot H_u|\} = \frac{1}{SNR_u^2} = NSR_u^2$$

Ahol NSR Noise to Signal Ratio, SNR pedig Signal to Noise Ratio. Így a csonkolt dekonvolúciónak egy jobb változatát kaptuk meg. A csonkolt dekonvolúció azt állította, hogy

$$\begin{cases} H_{(u)}^{-1} & |H_{(u)}| > \epsilon \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad (6.2)$$

Tehát, hogy H_u inverz lesz az átvitel, ha a H_u amplitúdója ϵ -nál nagyobb, 0 az átvitel, ha kisebb.

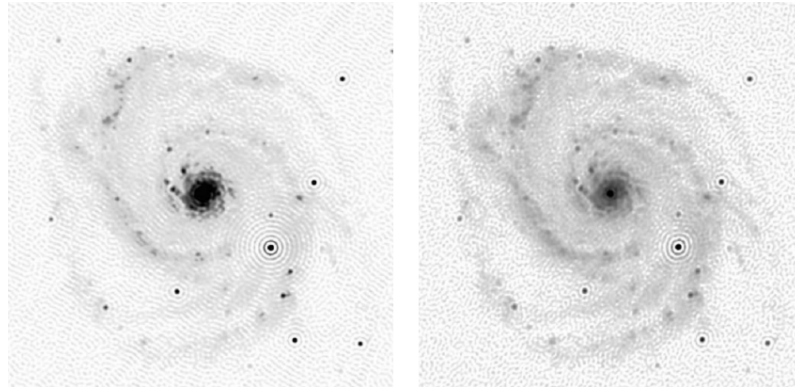
A most látott módszer azt kezdi el vizsgálni, hogy a torzított jelnek milyen a jel-zaj viszonya.

Ugye azt lehet látni, hogy ha az NSR_g sokkal kisebb 1-nél, akkor

$$NSR_g \ll 1 \Rightarrow H_u^W = H_u^{-1}$$

ha pedig nagyságrendekkel nagyobb, mint 1, akkor

$$NSR_g \gg 1 \Rightarrow H_u^W = 0$$



6.4. ábra. Csonkolt dekonvolúció (baloldalt) és Wiener inverz szűrés (jobbaldalt)

A Wiener inverz szűrés segítségével részletgazdagabb képet kapunk a csonkolt dekonvolúció eredményéhez képest.

A ringing artifact azonban még ebben az esetben is jelen van az eredményül kapott képen. Az intenzitásokat vizsgálva azt tapasztaljuk, hogy a ringing artifact középpontjában kis intenzitás található és ideális intenzitás-átmenetet helyett egyre kisebb oszcillációkkal éri el a magas tartományt. Ennek magyarázata, hogy a becslés hajlamos a negatív intenzitások rekonstrukciójára is.

Korábban már volt szó arról, hogy statisztikai oldalról 2 becsléstípussal foglalkozunk:

- Maximum likelihood becslés

$$\arg \max_f \{P\{g|f\}\}$$

- Maximum a posteriori szűrés

$$\arg \max_{\underline{f}} P\{\underline{f}|\underline{g}\} \propto P\{\underline{g}|\underline{f}\}P\{\underline{f}\}$$

ha nem szeretnénk negatív intenzitást látni a képen

$$P\{f\} = \begin{cases} 0 & | \quad \exists i \quad f_i < 0 \\ \alpha & \text{egyébként} \end{cases} \quad (6.3)$$

Tegyük fel, hogy van egy Maximum likelihood becslés, ahol a megfigyelési zaj tényleg olyan normáleloszlást mintavételez, mely várható értékben a nullvektor, kovariancia mátrixát W^{-1} -gyel jelöljük:

$$\eta \sim N(\underline{0}, \underline{W}^{-1})$$

Ismerve a következőt:

$$\underline{g} = \underline{h} * \underline{f} + \underline{\eta}$$

Ebből próbáljuk a következőt megfejteni:

$$\arg \max \{P\{\underline{g}|\underline{f}\}\}$$

Ennek a becslési problémának a felírása abban az esetben, ha feltesszük, hogy g és f is n -dimenziós vektorok

$$P\{\underline{g}|\underline{f}\} = \frac{1}{(2\pi)^{H/2} \cdot |\underline{W}^{-1}|^{1/2}} \cdot \exp(-1/2 \cdot (\underline{g} - \underline{h} * \underline{f})^T \cdot \underline{W}(\underline{g} - \underline{h} * \underline{f}))$$

Ekkor a feladatunk, hogy ennek megkeressük az f szerinti maximumát. Ehhez egy trükköt alkalmazunk: a konvolúció egy lineáris művelet, így biztosan létezik a következő:

$$\underline{H}' \cdot \underline{f} = \underline{h} * \underline{f}$$

ahol H' egy diagonális mátrix, aminek a főátlójában a 0 eltolás szerepel. A jobboldali első mellékátlóban azt látjuk, hogy a későbbi jelértéktől hogyan függ az aktuális érték ($h-1$), a baloldali első mellékátló pedig azt mondja meg, hogy mi volt az adott kimenetet egyvel megelőző jelérték.

$$\begin{bmatrix} h_0 & h_{-1} & \dots & \dots & \dots \\ h_1 & h_0 & h_{-1} & \dots & \dots \\ \dots & h_1 & h_0 & h_{-1} & \dots \\ & & \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & h_{-1} \\ \dots & \dots & \dots & h_1 & h_0 \end{bmatrix}$$

Amikor egy feltételes valószínűségnek a maximumát keressük, akkor a következő lépésünk:

$$-\log P\{\underline{g}|\underline{f}\} = K + (1/2) \cdot (\underline{g} - \underline{H}'\underline{f})' \underline{W}(\underline{g} - \underline{H}'\underline{f})$$

ahol azt mondjuk, hogy az első tag logaritmáltja K , a szorzás a logaritmálás után összeadásnak lesz megfelelő művelet, az e a logaritmálás során eltűnik, az argumentumának a (-1) -szerese megmarad, hiszen negatív előjelű logaritmust vettünk. Kifejtve egy f fölötti kvadratikus kifejezést kapunk:

$$-\log P\{g|f\} = K + (1/2) \cdot (g^T \underline{W} g - 2f^T \underline{H}^T \underline{W} g + f^T \underline{H}^T \underline{W} \underline{H} f)$$

Ennek a kifejezésnek kell az f szerinti minimumát venni.

Azt, hogy ez f fölött kvadratikus onnan tudhatjuk, hogy ha W tényleg egy kovariancia mátrix inverze, akkor pozitív definitnek kell lennie. Ezen kívül $H^T W H'$ is pozitív definit lesz.

Definíció 18 (Pozitív definit) *Ha az A mátrix pozitív definit, az ekvivalens azzal, hogy bármilyen x vektort választunk, igaz lesz, hogy*

$$x^T A x > 0 \iff \underline{A} > \underline{0}$$

Ha A szimmetrikus, akkor s.é., s.v. felbontással diagonalizálható és teljesülnek a továbbiak:

$$A = \underline{Q} \underline{\Lambda} \underline{Q}^T$$

ahol Q oszlopaiban vannak a sajátvektorok, a Λ pedig egy olyan diagonális mátrix, amelynek minden eleme nagyobb, mint 0.

Ekkor azt látjuk, hogy az összes sajátérték nagyobb, mint 0, ha pedig ez teljesül, akkor pozitív definit mátrixról beszélünk.

Ha pozitív definit mátrix van kvadratikus kifejezésben, akkor tudjuk, hogy a probléma konvex. A konvex problémából pedig az következik, hogy a szélsőérték meghatározható az alábbi módon:

$$\frac{\partial -\log\{P\{g|f\}\}}{\partial f} = 0$$

Tehát a keresett változó szerint megvizsgáljuk, mi a gradiens vektor.

Vegyük a kifejezés f vektor szerinti parciális deriváltját:

$$\frac{\partial -\log\{P\{g|f\}\}}{\partial f} = \underline{H}^T \underline{W} g + \underline{H}^T \underline{W} \underline{H} f = 0$$

Azokkal a tagokkal ekkor nem kell foglalkozni, amelyek nem függenek f -től

$$f = (\underline{H}^T \underline{W} \underline{H})^{-1} \cdot \underline{H}^T \underline{W} g$$

Tegyük fel, hogy fehér zajunk volt, ekkor tudjuk, hogy

$$\underline{W} = \alpha \cdot \underline{I}$$

ahol I az egységmátrixot jelöli és $\alpha = 1/\sigma^2$. A kapott W -t behelyettesítve:

$$f = (\underline{H}^T \underline{H})^{-1} \cdot \underline{H}^T g$$

Definíció 19 (Hermittikus transzponált) *transzponáljuk a mátrixot és elemenként vesszük a komplex konjugáltat.*

$$\underline{H}' = \underline{F}^H \underline{\underline{diag}}(\underline{H}) \underline{F}$$

$$\underline{H}'^T = \underline{F}^H \underline{\underline{diag}}(\underline{H}^*) \underline{F}$$

$$\underline{H}'^T \underline{H}' = \underline{F}^H \underline{\underline{diag}}(\underline{H}^*) \underline{F} \underline{F}^H \underline{\underline{diag}}(\underline{H}) \underline{F}$$

Mivel unitér mátrixról beszélünk, így $\underline{\underline{F}}$ és $\underline{\underline{F}}^H$ szorzata az egységmátrix lesz.

$$= \underline{\underline{F}}^H \underline{\underline{diag}}(\underline{\underline{H}}^* \circ \underline{\underline{H}}) \underline{\underline{F}}$$

Ahol tehát vettük H^* és H elemenkénti szorzatát.

Ha H konjugáltját megszorozzuk elemenként önmagával, akkor egy olyan vektort kapunk, ami H amplitúdójának a négyzetével egyenlő.

$$(H'^T H')^{-1} = \underline{\underline{F}}^H \underline{\underline{diag}}(|H|^2)^{-1} \underline{\underline{F}}$$

Ezt behelyettesítve:

$$f = \underline{\underline{F}}^H \underline{\underline{diag}}|H|^{-2} \underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^H \underline{\underline{diag}}(\underline{\underline{H}}^*) \underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^H \underline{\underline{F}} g$$

$$f = \underline{\underline{F}}^H \underline{\underline{diag}}(H^*/|H|^{-2}) \underline{\underline{F}} g$$

$$= \underline{\underline{F}}^H \left(\frac{H^*}{|H|^2} \circ G \right)$$

$$= \underline{\underline{F}}^H \left(\frac{H^*}{H^* \cdot H} \circ G \right)$$

Tehát vesszük az inverz Fourier transzformáltját a H konjugált és H amplitúdó négyzet hányadosának a G spektrumával vett elemenkénti szorzatával. Az egyszerűsítéshez felhasználtuk, hogy a H amplitúdójának a négyzete H^* és H szorzata, az ezzel a nevezővel felírt tört pedig éppen H^{-1} .

$$= \underline{\underline{F}}^H (\underline{\underline{H}}^{-1} \circ G)$$

Ekkor H spektrumával kell elemenként elosztani G spektrumát, amely igazából direkt dekonvolúció.

Ekkor beláttuk, hogy Gauss megfigyelési, fehér additív zaj esetén az ML becslés a direkt dekonvolúcióra vezet. Más zaj eloszlásoknál módosul az eredmény, de az alul-határozottság problémáját ML becsléssel nem lehet a lényegét pontosan tükrözően kezelni.

Egyetlen feltétel használtunk ehhez: azt mondtuk az additív Gauss zajról, hogy várható értéke 0, ezzel pedig beláttuk azt, hogy ha rossz a jel-zaj viszonya a $(h * f + \eta)$ -nak adott spektrumkomponensen, akkor fehér zajt feltételezve ML becsléssel nem fogjuk tudni ezt a problémát megoldani, a kimenet nem fog javulni.

Azonban tekinthetjük a következőt is:

$$G_{(u)} = H_{(u)} \cdot F_{(u)} + N_{(u)}$$

A megfigyelésünk szerint a zaj amplitúdója túl nagy, vagyis rossz a jel-zaj viszony:

$$|H_{(u)} \cdot F_{(u)}| < |N_{(u)}|$$

Tehát ha a megfigyelt rendszerünk egy adott spektrális komponensről nem tartalmaz elegendő információt, ML alapú becsléssel nem rekonstruálható f .

6.5. Richardson Lucy algoritmus

Interpretáljuk a képpontok intenzitását fotonok becsapódási valószínűségeivel:

- $P_{f_{(i)}}$: annak a valószínűsége, hogy egy foton a detektor i . érzékelőelemébe csapódik, ha nincs zaj és torzítás Ez felírható így is: $P_{f_{(i)}} = f_i / \sum_k f_k$
- $P_{g_{(j)}}$: annak a valószínűsége, hogy egy foton a detektor j . érzékelőelemébe csapódott a megfigyelt kép rögzítése során Ez felírható így is: $P_{g_{(j)}} = g_j / \sum_j g_j$

- $P_{g(j)|f(i)}$: annak a valószínűsége, hogy ideális esetben az i . érzékelőelembe csapódó foton a j . érzékelőelembe csapódik bele a képalkotó LTI rendszer torzítása miatt

A likelihood függvény helyett írjuk fel annak a Bayes-tételre vett fordítottját.

Bayes-tétel:

$$P\{f_i|g_j\} = \frac{P\{f_i, g_j\}}{P\{g_j\}} = \frac{P\{g_j|f_i\} \cdot P\{f_i\}}{P\{g_j\}}$$

Ekkor viszont nem $P\{g_j\}$ -vel végezzük a becslést, hanem annak egy becsült értékével ($P\{\hat{g}_j\}$):

$$\sum_k P\{g_j|f_k\} \cdot P\{f_k\}$$

Fejezzük ki $P\{f_i\}$ -t:

$$P\{f_i\} = \sum_j P\{f_i|g_j\} \cdot P\{g_j\}$$

$$P\{f_i\} = \sum_j \frac{P\{g_j|f_i\} \cdot P\{f_i\}}{\sum_k P\{g_j|f_k\} \cdot P\{f_k\}} \cdot P\{g_j\}$$

Ekkor bevezetjük a következőt, iterálunk a célváltozó felett:

$$P_{(r+1)}\{f_i\} = \sum_k \frac{P\{g_k|f_i\} \cdot P\{g_k\}}{\sum_j P\{g_k|f_j\} \cdot P_{(r)}\{f_j\}} \cdot P_{(r)}\{f_i\}$$

tehát az egyenlet baloldalán található f_i ekkor egy $(r+1)$. iterációbeli értékkel szerepel, ami az egyenlet jobb oldalán látható, az pedig egy r . iterációbeli értékkel.

Ha $P^0\{f_i\} > 0$, akkor a becslési eredmény esetén pozitív marad.

Oldjuk fel a valószínűségi értelmezést:

$$P\{f_i\} = f_i / (f^T \cdot 1); P\{g_i\} = g_i / (g^T \cdot 1)$$

$$P\{g_k|f_i\} = h_{k-i}$$

Tegyük fel, hogy $\underline{g}^T \underline{\Lambda} = \underline{f}^T \underline{\Lambda}$

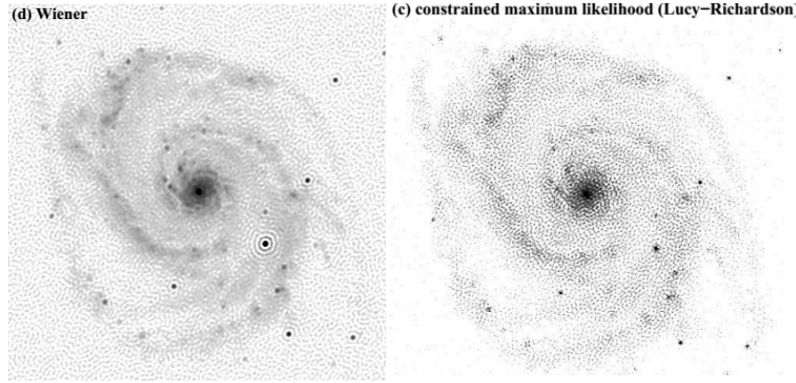
$$f_i^{(r+1)} = \sum_j \frac{g_j}{(f^r * h)_j} \cdot h(j-i) \cdot f^r(i)$$

- $P\{f_i\} = f_i / f^T \cdot 1$: f -nek és az f transzpontált és 1 skaláris szorzatának az elemenkénti hányadosa, dekonvolvált kép i -edik pixelének normált intenzitása
- $P\{g_i\} = g_i / g^T \cdot 1$: képalkotó rendszer (LTI + zaj) által torzított kép i -edik pixelének relatív intenzitása
- $P\{g_k / f_i\} = h_{(k-i)}$: csak az LTI rendszerrel leírható torzítást modellezzük
- $h^T \cdot 1 = 1$: minden olyan foton, mely a torzítatlan rendszer esetén a detektorba csapódna be a torzított rendszer esetén is a detektorba csapódik be (maximum más érzékelőelembe)

Végig monokróm spektrumú fotonokat feltételezve a detektált intenzitás (fluxus) egyenesen arányos a becsapódó fotonok számával.

Elvégezve a behelyettesítést:

$$f_i^{(r+1)} = \sum_k \frac{h_{(k-i)} \cdot g_k}{\sum_j h_{(k-j)} \cdot f_j^r} \cdot f_i^r = \sum_k \frac{h_{(k-i)} \cdot g_k}{(h * f^r)_k} \cdot f_i^r$$



6.5. ábra. Nincsenek gyűrűk, de zajosabb a kép

Ez pedig egy olyan eljárás, ahol nem jelent meg semmilyen spektrális átalakítás.

Ha $f^{(0)} \geq 0$, akkor minden iterációban $f^{(r)} \geq 0$, tehát teljesül a nem-negativitási kényszer. Ha konvergens, akkor optimumhoz konvergál. Ez a fajta becslés ekvivalens egy Poisson zajt feltételező ML becslés EM megoldásával (fidelity-ből jön a pozitivitás).

A Wiener inverz szűrésnél még láthatóak bizonyos hullámzó zajok, ezek a zajok a Richardson-Lucy elvégzése után egyáltalán nem észlelhetőek a képen, azonban mégis zajosabb képet kapunk.

ML becslések összegzése:

- Jelentősen felerősítik a zajt:
 - a probléma rosszul kondicionált jellegét nem képesek megfelelően kezelni
 - kivétel az iteratív algoritmusok köre, ha $f^{(0)}$ elegendően sima, és konvergencia előtt leállunk
- Explicit regularizáció szükséges:
 - Definiáljuk $f^{(0)}$ a priori eloszlását, és azt rögzítsük a minimalizálandó célfüggvényünkben

6.6. MAP becslések

Ennél a fajta becslésnél nem a likelihood függvényt kerül felírásra, hanem a posterior eloszlása a keresett változónak (f).

A posterior eloszlás maximuma arányosan egyenlő a likelihood függvény és a prior eloszlás szorzatával:

$$P\{f|g\} \propto (P\{g|f\} \cdot P\{f\})$$

Ha a minimumát keressük, ahhoz a logaritmálás művelete szükséges:

$$-\log(P\{f|g\}) = \phi_{ML}(f) + \phi_{prior}(f) + K$$

Az optimalizációs függvényekre jellemző, hogy megjelenik bennük

- f egy regularizációs függvénye, $\phi_{prior}(f)$, amely meghatározza, hogy milyen dekonvolváló képet preferálunk (pl. zajmentesség, pozitivitás, simaság stb.)
- f hűségfüggvénye, $\phi_{ML}(f)$, amely bünteti a mérések és a zaj nélkül becsült, torzított kép eltérését a látott méréstől az ismert rendszermodell mellett

$$\|g - \tilde{g}\| = \|g - h * f\|$$

A regularizációs függvény ekkor a problémától függően megválasztandó, nincs általános meghatározása.

6.6.1. MAP becslés példa – stacionárius Gauss zaj, frekvenciatérbeli prior

A regularizációs büntetőfüggvény a keresett F jel spektrumára kerül felírásra:

$$\phi_{prior}(F) = \mu \cdot \sum_u W_{(u)} \cdot |F_{(u)}|^2$$

Ehhez a következő prior függvény tartozik:

$$P\{F_u\} = N(0, (W_u \cdot \mu \cdot 2)^{-1})$$

Ez a sűrűségfüggvénye egy 0 várható értékű ($W_u \cdot \mu$) inverz kovarianciájú Gauss eloszlásnak. Az, hogy mennyire büntetjük az ettől való eltérést, a Gauss eloszlásnak lesz a függvénye. A likelihood függvény, szintén f -re felírva:

$$\phi_{ML}(f) = \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum_j (g_j - (H' \cdot f)_j)^2$$

Ez az additív zajnak felel meg:

$$\underline{g} = \underline{h} * \underline{f} + \eta$$

ahol $\underline{\eta} \sim N(0, \underline{I}\sigma^2)$, tehát η mintavételezi a 0 várható értékű σ^2 egységmátrix kovarianciamátrix eloszlását.

A Parseval tétel értelmében egy jel energiája megegyezik a jel spektrum amplitúdó elemeinek a négyzetének az integráljával, valamint figyelembe veendő a normalizációs tényező is.

$$\phi_{ML}(F) = \frac{1}{2N \cdot \sigma^2} \cdot \sum_u |G_u - H_u \cdot F_u|^2$$

Ekkor spektrális tartományban is felírásra került a hűségfüggvény, a regularizációs függvény pedig már korábban ilyen módon került felírásra, ekkor az optimalizációs probléma:

$$\phi(F) = \frac{1/2}{N \cdot \sigma^2} \cdot \sum_u |G_u - H_u \cdot F_u|^2 + \mu \cdot \sum_u W_u \cdot |F_u|^2$$

Azonban ezeket fel tudjuk írni az alábbi módon is:

$$|G_u - H_u \cdot F_u|^2 = (G_u^* - F_u^* \cdot H_u^*)(G_u - H_u \cdot F_u)$$

$$|F_u|^2 = F_u' \cdot F_u^*$$

Ebből a felírásból látszik, hogy mivel $\phi(\cdot)$ konvex, ezért az F_u szerinti parciális deriváltat kell egyenlővé tenni 0-val ($\nabla \phi(F^{opt}) = 0$):

$$\frac{\partial \phi(F)}{\partial F_u} = 0 \iff \frac{1}{\mu \sigma^2} (H_u^* H_u F_u - H_u^* G_u) + 2\mu W_u F_u = 0$$

$$F_u^{opt} = \frac{H_u^* \cdot G_u}{|H_u|^2 + 2\mu N \sigma^2 W_u}$$

Ezt kifejezve látható, hogy F_u optimális értéke:

$$\underline{F} = \frac{(1/\mu \sigma^2) \cdot H_u^* \cdot G_u}{(1/\mu \sigma^2) \cdot |H_u|^2 + W_u}$$

Ha megfelelően definiáljuk a W értékét, akkor a Wiener inverz szűrést fogjuk megkapni, tehát a Wiener dekonvolúció is egy MAP becslés, ahol a priori a spektrális komponensekre

$$|F_u| \sim N(0, W_u^{-1})$$

az η megfigyelési zaj pedig:

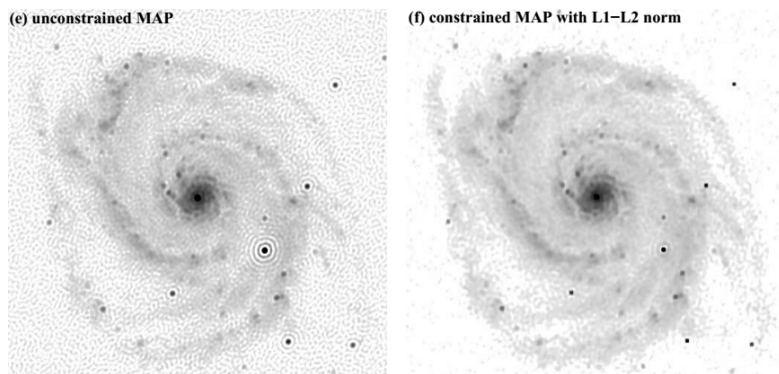
$$\underline{\eta} \sim N(0, \underline{I}\sigma^2)$$

A Wiener inverz szűrés nehézségei közé tartozik többek közt, hogy ismernünk kellene a háttérzajeloszlásnak a teljesítménysűrűség spektrumát, ezt azonban legfeljebb becsülni lehet: ugyanazzal a felvételi elrendezéssel elkészítünk N darab mérést és ha additív, 0 várható értékű a zaj, akkor ezen mérések átlagát kivonjuk a mérések értékéből és ezen különbségképeknek vesszük a spektrumát, majd a teljesítményt. Ezek átlaga becsülni tudja a zaj teljesítménysűrűség-spektrumát, ahogy az NPS-nél definiálva lett.

Az f jel teljesítménysűrűség-spektrumát már nehezebb becsülni. Mivel a természetes képek általában alacsony frekvenciás komponensek által domináltak, így definiálhatjuk a következő módon a W_u -t:

$$W_u = \frac{1}{E|F_u|^2} \propto u^\beta$$

ahol W_u az u -nak egy 1-nél nagyobb hatványú függvénye, ekkor minél távolabb vagyunk a DC (Direct Current) komponenstől, annál inkább 0-közeli lesz a becslés eredménye, ezáltal a nagyfrekvenciájú komponenseket elnyomjuk.



6.6. ábra. Viszonylag artifaktmentes

Ahelyett, hogy a frekvenciatartományban előre meghatározzuk, hogy milyen komponenseken mekkora amplitúdójú értéket szeretnénk látni, pontosabb priort is használhatunk. A tömörített érzékelés során alkalmazott prior esetén feltételezzük, hogy a becsülni kívánt képnek a gradiens képét, deriváltját tekintve azt tapasztalnánk, hogy ritkán tartalmaz nem-nulla vektorokat, tehát az általunk preferált képek szakaszosan konstans intenzitásúak.

6.7. Ismertetett módszerek összegzése

A statisztikai becslélméletet tekintve 2 fő becsléstípusról beszélhetünk: a ML és a MAP becslés.

A Maximum Likelihood becslés esetén a likelihood függvény ad kiindulóalapot, tehát a $P\{g|f\}$ feltételes eloszlásnak keressük a maximumát f szerint, vagyis keressük azt az f -et, ami adott modell szerint a leginkább megmagyarázza a méréseket. Azonban, ha az átviteli függvénynek 0, vagy 0 közeli értéke van, akkor adott frekvenciakomponensen a kép semmilyen információt nem tartalmaz f -ről, ezért f -et nem is tudjuk megbecsülni. A becslés inkonzisztenciája a likelihood tag minimalizálásával redukálható, azonban zajos input képhez a becsült torzítatlan kép túllilleszkedését vonja maga után (rosszabb képminőség).

Példák:

- Direkt dekonvolúció (additív Gauss zajos ML becslés)
- Richardson – Lucy (Poisson megfigyelési zaj - ekkor a pozitívítási kényszer már egy prior, emiatt vitatott, hogy a RL algoritmus ML vagy MAP becslésnek tekintendő)

A Maximum a posteriori becslés a posterior függvényt vizsgálja, a $P\{f|g\}$ arányosan egyenlő a $P\{g|f\}$ -nek és $P\{f\}$ -nek a szorzatával, ennek keresi a maximumát. Célja a stabilizáció kikényszerítése, azt bünteti, ha adott modell szerint nagyon eltér a g -től az f vektor, a $P\{f\}$ pedig prior megfogalmazását teszi lehetővé.

Példák:

- Csonkolt dekonvolúció
- Wiener dekonvolúció (additív Gaussz zaj + frekvencia függő energia minimalizáció)
- Egyéb, regularizált dekonvolúciók

7. fejezet

Képfeldolgozó eljárások áttekintése

Általános képfeldolgozással egy egész tárgy tematikáját ki lehetne tölteni, úgyhogy a következő fejezetben orvosi képdiagnosztika perspektívájából a számunkra legrelevánsabb különböző képmanipulációs eljárás részletezésére kerül sor, ilyen például a kép minőségének javítása, melyre több elterjedt módszer is létezik: kontraszt módosítás, intenzitás viszonyok módosítása, hisztogram korrekciós műveletek, különböző eltolás invariáns szűrések, zajszűrés.

A képmanipuláció mellett a képek elemzésére is kitér a fejezet. A legnépszerűbb megközelítések közé sorolható az éldetektálás, egyszerűbb és komplexebb képszegmentálási eljárások és morfológiai műveletek.

7.1. Képjavítás

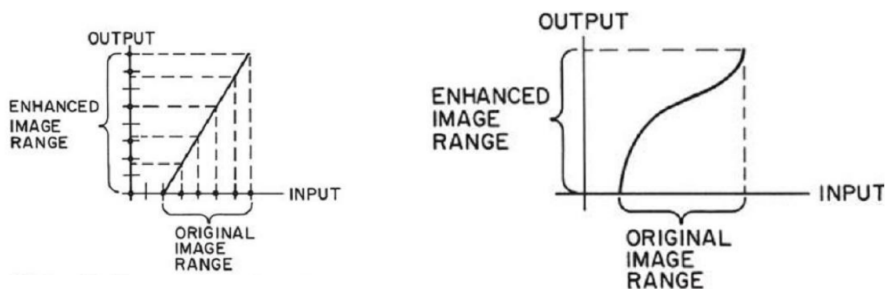
A képjavítás célja a kép vizuális megjelenésének javítása. Alapvetően az emberi szem számára javítunk a kép megjelenésén, de segíti a gépi képelemzést is. Tipikus módszerei:

- kontraszt módosítás,
- intenzitás viszonyok módosítása,
- szűrések:
 - lineáris szűrések,
 - nemlineáris szűrések,
 - * homomorfikus feldolgozás,
 - * order statistics filters: median, rank és ezek variánsai,
- élek kiemelése,
- zajok mérséklése.

7.1.1. Kontraszt javítás

A kontraszt javításhoz intenzitásokat módosító leképezésre van szükség. A bemeneti képhez egy olyan függvény van definiálva, amely intenzitást vár a bemenetén és intenzitás értéket állít elő a kimenetére. Ezt a kép minden egyes képpontjára végrehajtja. Célja az intenzitás tartomány és az intenzitás viszonyok megváltoztatása lineáris vagy nemlineáris módon.

Az alábbi ábra grafikonjain az vízszintes tengelyen van a bemenet, függőleges tengelyen a kimeneti intenzitás értékek.



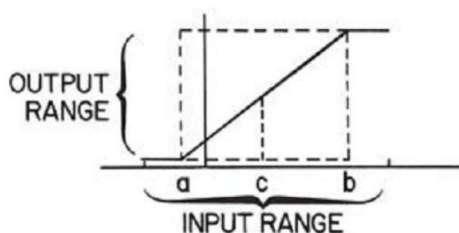
7.1. ábra. Intenzitásokat módosító leképezés.

Legegyszerűbb ilyen módosító művelet az ablakozás. Ablakozás során a bemeneti intenzitás tartomány egy szűkebb résztartománya lesz széthúzva a teljes tartományra valamilyen lineáris karakterisztika segítségével. Ennek a motivációja, hogy az emberi látás nem tudja tartani a lépést a képkalkotó eszközök finomságával, a monitorok felbontása meg végképp. Így lehetőség van kijelölni egy résztartományt.

Ezek az ablakozók, angolul window-level transzformációk monoton függvények szoktak lenni, melyben két értéket lehet definiálni:

- Window: az ablak tartomány szélessége (például a komputertomográfia során is lehetőség van definiálni, hogy milyen széles tartományát jelenítse meg a radiodenzitásoknak).
- Level: az az érték, amely körül maradnak az intenzitások.

Azon értékek, amelyek kisebbek a $Level - (Window/2)$ -nél nullára fognak leképeződni és amelyek nagyobbak, mint $Level + (Window/2)$ a maximális intenzitás értéket kapják meg. Ez nem összetévesztendő azzal az ablak függvénnyel és alkalmazásával, melyet a diszkrét Fourier transzformáció (DFT) előtt érdemes használni spektrumszívargás hatásainak kompenzálása érdekében.



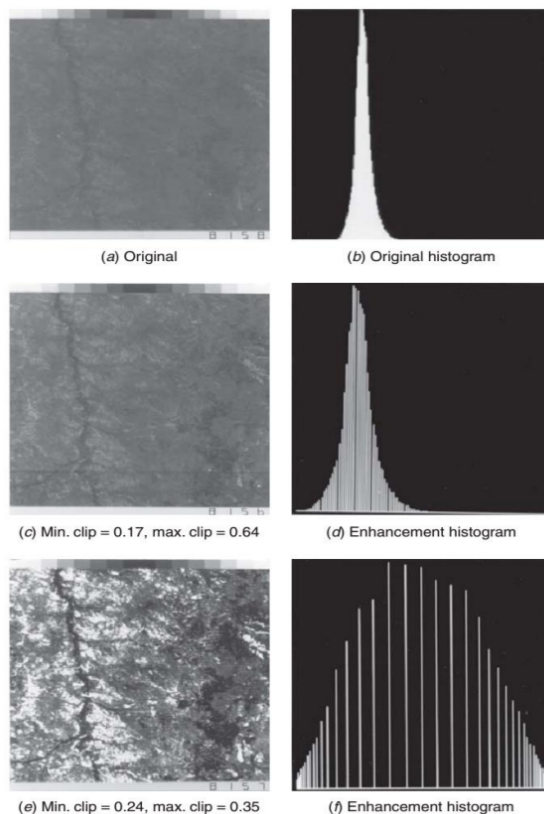
7.2. ábra. Window-level transzformáció.

7.1.2. Hisztogram széthúzás

Egy nagyon gyakran bevett transzformáció a hisztogram kiegyenlítés művelete. A hisztogram nem más, mint a kép intenzitásainak sűrűségfüggvénye. Mind klasszikus fotózásnál, mind orvosi képkalkotás során előfordul, hogy alul- vagy túlexponált kép születik. Rosszul exponált képek azok, melyek az intenzitás tartomány csak egy szűk részét használják ki.

Orvosi képkalkotásban például a CT, ami egy kalibrált eszköz a különböző rekonstruált denzitásoknak bizonyos anyagi jellemzői miatt nem tud teljesen széthúzott hisztogramot készíteni.

Az ábra első sorában egy ilyen homogén szürke kép látható. A kép kontrasztjának javítására különböző műveletek léteznek. A kontrasztot például egy objektum-háttér pár esetén az objektum és a háttér átlag intenzitásának különbsége definiálhatja. Az objektum detektálás során az objektum kontúrján lévő kontraszt segít a lokalizációjában. Az első sorban látható rosszul exponált kép histogramja összeesik egy nagyon szűk modulusba, így annak a tartalma elveszik, nem kivehető. Globális intenzitás módosító műveletekkel szét lehet húzni a histogramot. Alsó sorban már szépen kirajzolódik egy folyónak a medre.



7.3. ábra. Histogram széthúzás.

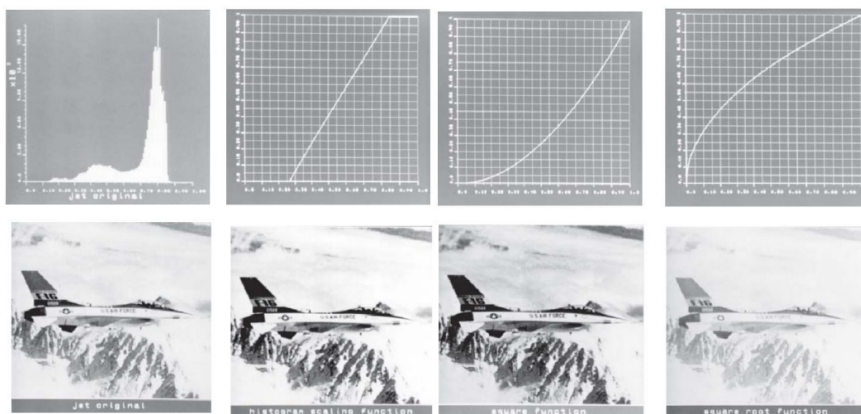
7.1.3. Gamma korrekció

Legáltalánosabb kontraszt javító eljárás a gamma korrekció. A gamma korrekció definíciója:

$$G(j, k) = [F(j, k)]^p \quad (7.1)$$

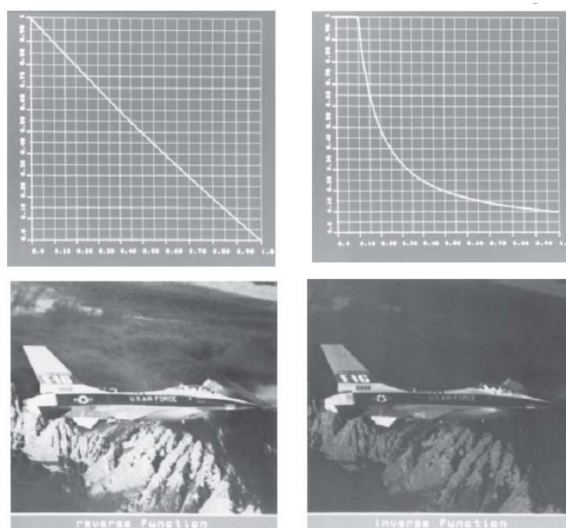
A bemenő intenzitásnak egy p . hatványa lesz a kijövő intenzitás. Motivációja eredetileg a monitorok által eszközölt képtorzítások hatásának kompenzálása.

Az ábra utolsó két oszlopában a gamma korrekció 1-1 példája látható. Egynél nagyobb p esetén a kisebb intenzitású régiók tartalma jobban kirajzolódik, míg a magasabb intenzitású, világos részek tartalma elveszik. Egynél kisebb p esetén fordítva. A balról második oszlopban ablakozásra látható egy példa.



7.4. ábra. Kontraszt javító eljárások.

Alapvetően monoton leképezésről van szó, de nem kötelező. Az ábra első oszlopában a kép invertáltja látható, mellette az invertált kép egy gamma korrekciós változata.



7.5. ábra. Nem szigorúan monoton leképezés.

Baloldali oszlop:

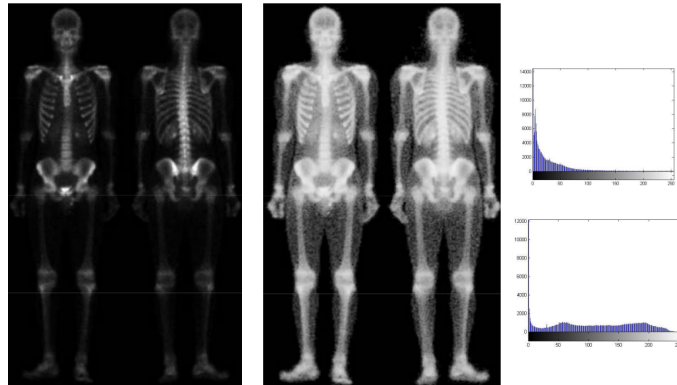
$$G(j, k) = 1.0 - F(j, k)$$

Jobboldali oszlop:

$$\begin{aligned} G(j, k) &= 1.0 & 0.0 \leq F(j, k) < 0.1 \\ G(j, k) &= 0.1/F(j, k) & 0.0 \leq F(j, k) \leq 1.0 \end{aligned}$$

7.1.4. Globális hisztogram kiegyenlítés

Hisztogram kiegyenlítés előtt és után. Bemeneti képen csak a gerincoszlop, sternum, bordák rajzolódtak ki, kiementi képen már megjelennek a felkar és alkar csontok is. A hisztogram kiegyenlítés egyik jellemzője is kivehető a ?? ábrán, mégpedig a zaj felerősítése.

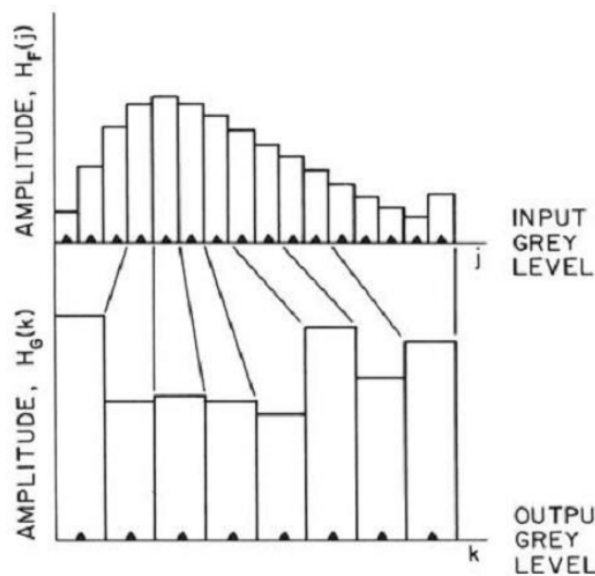


7.6. ábra. Hisztogram kiegyenlítés csontvázon.

Hisztogram kiegyenlítésnek két típusa van: globális illetve lokális, más szóval adaptív. A globális hisztogram kiegyenlítés úgy működik, hogy egy intenzitás leképezést kell definiálni, amely intenzitásból állít elő intenzitást. Továbbá szükség van egy B -re, amely a széthúzott hisztogram bin-jeinek a száma, más szóval értékhalmoz mérete. Tegyük fel, hogy N a kép pixeleinek száma. Az a intenzitást akkor fogja b -re leképezni ha igaz rá a következő egyenlőtlenség, ahol $h(x)$ az eredeti kép hisztogramja:

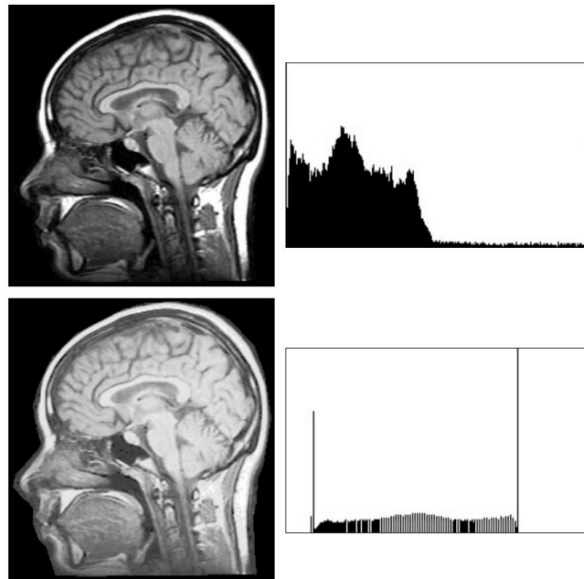
$$\varphi(a) = b$$

$$(b - 1) * N/B < \sum_{x=0}^a h(x) \leq b * N/B$$



7.7. ábra. Leképezés bin-ekbe.

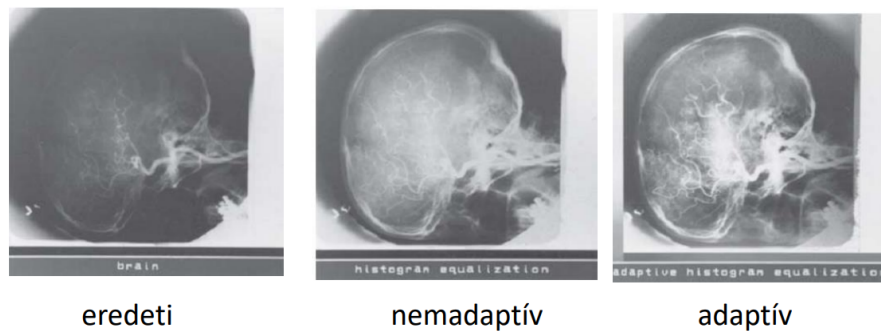
Még egy példa: A ?? ábrán látható, hogy bizonyos agytekervények kontúrjai nagyobb kontraszttal jelennek meg, ahogy a szájúreg belseje is, viszont vannak részek, ahol a kontraszt romlása figyelhető meg.



7.8. ábra. Hisztogram kiegyenlítés fejen.

7.1.5. Adaptív hisztogram módosítás

Vannak esetek, amikor a globális hisztogram módosítás nem célravezető. Sok esetben olyan képek állnak rendelkezésre, melyek se nem alulexponáltak, se nem túlexponáltak, de ahogyan a ?? ábrán is látható lokálisan viszont azok, így bizonyos részletek elvesznek. Ha nem adaptív hisztogram kiegyenlítést végeznek a képen, akkor a kisebb intenzitásúkat túlságosan felerősíti, a világosabb részeket elsötétíti, mint például a jobb alsó sarkot.



7.9. ábra. Adaptív hisztogram módosítás.

Orvosi alkalmazás területén is teljesül, hogy egy teljes képet nem fog kitölteni a vizsgált objektum, ebben az értelemben véve globális hisztogram kiegyenlítésnél ezt a problémát mindig figyelembe kell venni.

Javaslat: a lokális, adaptív hisztogram módosítás. Definiálva van egy (axa) méretű csúszó ablak, amely végigmegy az eredeti képen és az eredeti képből kivágott (axa) méretű részen számítja ki a hisztogram kiegyenlítését. Ezen (axa) méretű kivágott kép középső pixelének a hisztogram kiegyenlítés utáni intenzitása lesz az adott csúszóablak középső pontjára illeszkedő pixelnek a szűrt értéke. A probléma ezzel a módszerrel, hogy túlságosan

is képes felerősíteni a zajt.

$$G(j, k) = b : (b - 1) * a^2 / B < \sum_{x=0}^{F(j,k)} h^{(j,k)}(x) \leq a^2 * b / B$$

$h^{(j,k)}$: (j,k) pixel középpontú (axa) méretű ablak hisztogramja.

7.1.6. Lineáris zajszűrés

Globális és lokális intenzitás módosító leképezések után jöjjenek drasztikusabb szűrési eljárásokra. Első ilyen alkalmazási típus a zajszűrés. Célja a képen található zaj szűrése, az informatív részének megtartása mellett. Első lépésben könnyű feladatnak tűnik, de a korrekt kivitelezése a gyakorlatban szinte lehetetlen. Viszont hatalmas szükség van rá olyan eljárások alkalmazására mellett, melyek adott zaj amplitúdó mellett már nem működnek.

Először a lineáris, eltolás invariáns szűrések részletezése következik, majd szó lesz arról, hogy a transzformált tartományokban is lehetőség van szűrésre. Végül a nemlineáris változataikra is kitér a jegyzet.

A lineáris, eltolás invariáns szűrések a konvolúció alapl művelettel leíró szűrés típusokat jelentik. Érdekes megjegyezni, hogy a klasszikus jelfeldolgozásban tényleg konvolúciót jelent, a képfeldolgozásban inkább korrelációt szoktak ez alatt érteni.

$$G(j, k) = \sum \sum I(m, n) H(j - m, k - n)$$

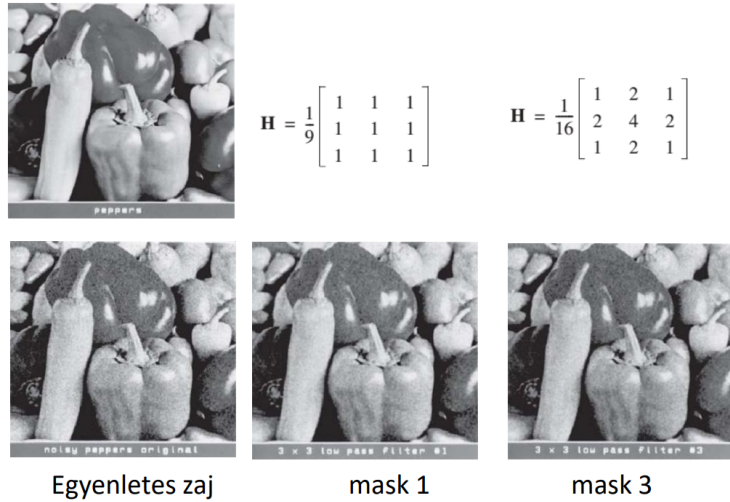
Különböző szűrő implementációk alkalmazhatók zajszűrésre. A 7.10 képen aluláteresztő szűrők láthatóak.

$$\mathbf{H} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \left(\frac{1}{b+2} \right)^2 \begin{bmatrix} 1 & b & 1 \\ b & b^2 & b \\ 1 & b & 1 \end{bmatrix}$$

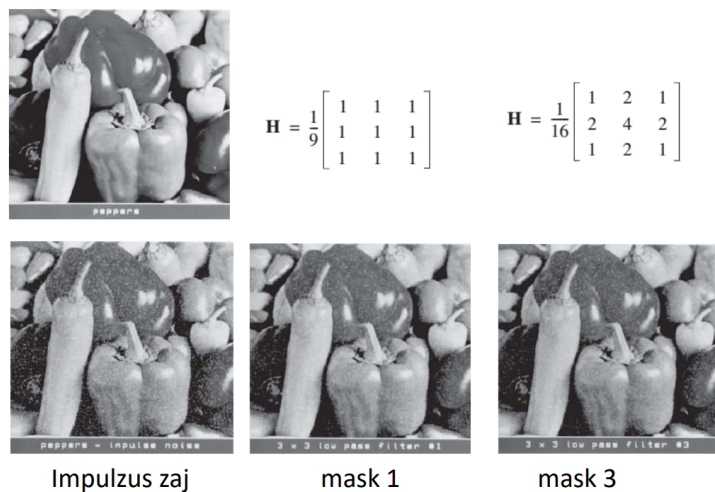
7.10. ábra. Aluláteresztő szűrők.

Az egyenletes zajjal terhelt paprikás bemeneti képen két különböző aluláteresztő szűrő alkalmazásának az eredménye látható. Amit érdemes megfigyelni, zajszűrés hatására a finom, kis kiterjedésű viszont nagy intenzitás tartományban lokalizálódó pontszerű zajt szépen lehet redukálni, ezzel párhuzamosan az objektumok kontúrja mentén lévő intenzitáskülönbségek is redukálódnak, ezáltal homályosabb képet kapunk.



7.11. ábra. Zajszűrés egyenletes zajjal terhelt képen.

A következő példán a szűrők változatlanok, viszont a zaj típusa más. Előző esetben homogén, itt meg impulzus zajjal terhelt képen történik a szűrés. Az impulzus zaj esetén random sorsolt pixelek intenzitása vagy maximálisra vagy minimálisra állítódik.



7.12. ábra. Zajszűrés impulzus zajjal terhelt képen.

Az eltolás invariáns zajszűrések problémája, hogy bármilyen módon definiált kernel mellett a zaj szűrése a kép élességének rovására történik.

7.1.7. Éldetektáló szűrők

Szűrőkből nem csak aluláteresztő szűrő létezik, hanem feluláteresztő is. A feluláteresztő szűrők célja, hogy az intenzitás ugrásokat, hirtelen intenzitás változásokat megtartsák és a homogén intenzitású szakaszokat elnyomják.

Rengeteg szűrőt lehet definiálni, melyek adott iránymenti deriváltakat követnek. Legelterjedtebb szűrők közé tartozik a Sobel és a Prewitt. Az ábrán a baloldali kernelek a vízszintes élek detektálását teszik lehetővé, míg a jobboldaliak a függőleges élekét. Mindkét iránymenti derivált ismeretében, a gradiens vektor is ismert a 2D-s kép egy adott mintavételezett pontjában.

-1	0	+1
-2	0	+2
-1	0	+1

Gx

+1	+2	+1
0	0	0
-1	-2	-1

Gy

7.13. ábra. Sobel operátor.

-1	0	+1
-1	0	+1
-1	0	+1

Gx

+1	+1	+1
0	0	0
-1	-1	-1

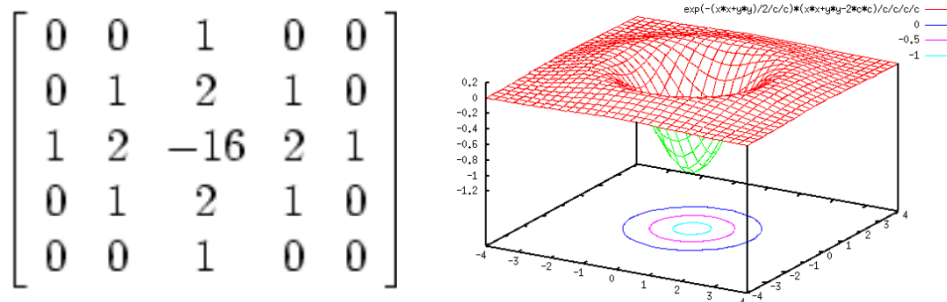
Gy

7.14. ábra. Prewitt operátor.

7.1.8. Élkiemelő szűrők

Éldetektálás során a gradiens vektor amplitúdóját kell küszöbölni. Ha adott érték fölé megy, akkor megvan az él, ellenkező esetben nincs. Ezzel a fő probléma az, hogy az élek kiemelésével párhuzamosan a nagyon finom zaj is megnő. Valós esetekben sokszor egymástól megkülönböztethetetlen amplitúdóval lesz kiemelve a zaj és az objektum körvonalánál lévő él.

A zaj kompenzálásához az aluláteresztő, az intenzitás ugrásokhoz feluláteresztő szűrő szükséges. A kettő kombinációját sáváteresztő szűrésre lehet használni, ilyen sáváteresztő szűrés lesz az LoG (Laplacian of Gaussian szűrés), amely adott σ értékű Gauss szűréssel elmossa a képet és az elmosott képnek veszi a Laplace operátort, ahol a Laplace operátor a Hesse mátrix nyoma, más szavakkal az iránymenti második deriváltak összege.

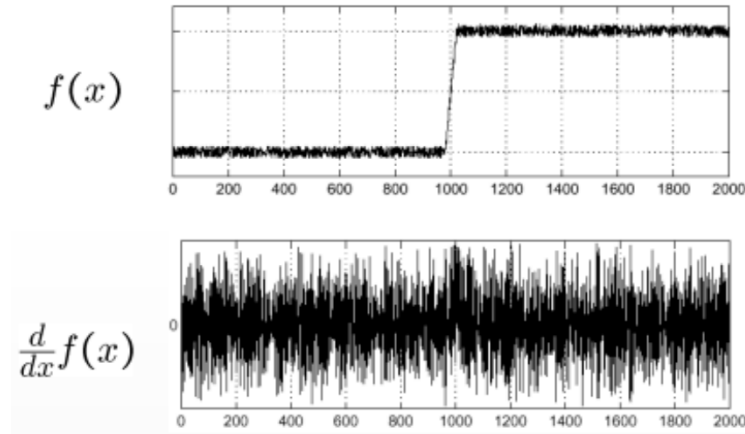


7.15. ábra. 2D LoG és közelítő kernele.

$$LoG = \Delta G_\sigma(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} G_\sigma(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} G_\sigma(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 2\sigma^2}{\sigma^4} e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2}$$

7.1.9. Éldetektálás zajérzékenysége

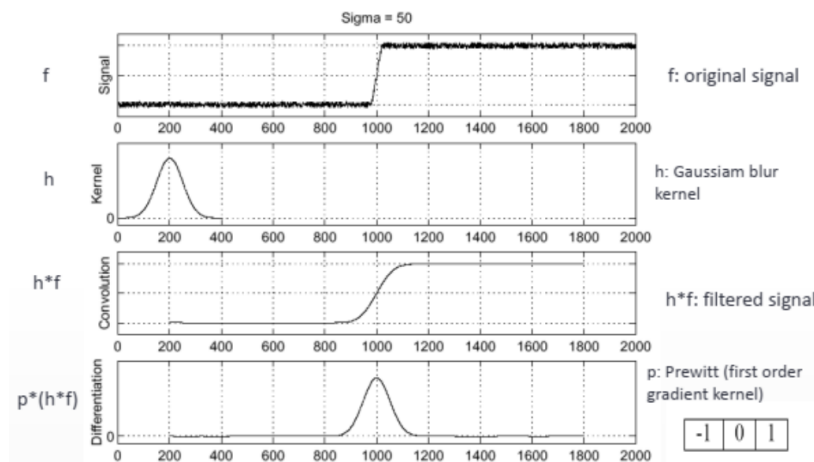
A szűrés célja a nullátmenetek megtartása. A következő ábra azt szemlélteti, hogy az éldetektálás mennyire érzékeny a zajra. Van egy kisebb és egy nagyobb intenzitású homogén tartomány, melyeket zaj terhel. Alatta a profil menti deriváltján hasonló tűskével jelennek meg az alapvetően kis amplitúdójú zajok, mint a két tartomány közötti átmenet. Tehát szimplán a derivált küszöbölésével az eredmény használhatatlan lenne.



7.16. ábra. Éldetektálás zajérzékenysége.

Ezért van szükség simító szűrésre, amire egyik megoldás a Gauss kernellel történő aluláteresztő szűrés. Gauss mosás simítja a jelet: redukálja a zajt, de a gyenge éleket is.

Először az eredeti zajos jel és Gauss kernel konvolúciója előállítja a simított jelet, ami akkor megfelelő, ha a konstans területeken az intenzitás váltások, tehát a gradiens amplitúdója nagyságrendekkel kisebbé válik, mint az objektumok határán megfigyelhető intenzitás változás gradiense. A konvolvált jel gradiensét a Prewitt operátorral lehet venni.

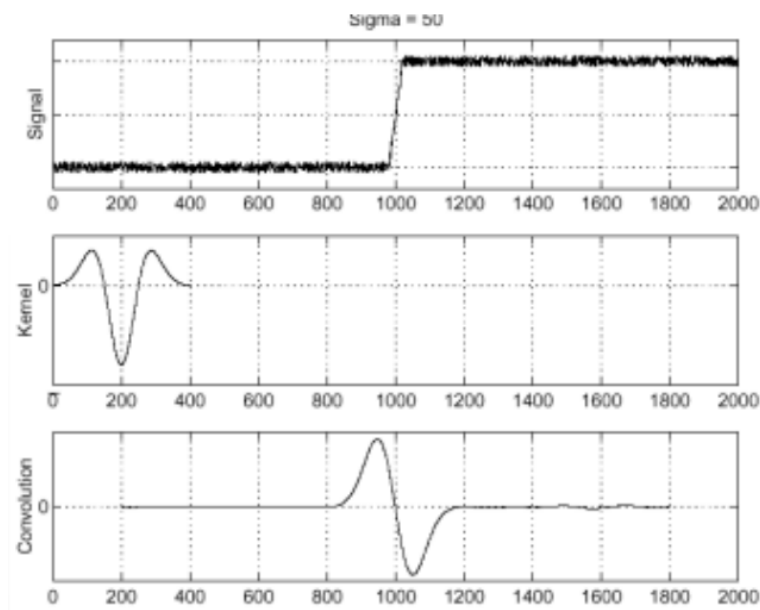


7.17. ábra. Éldetektálás Gauss mosással

7.1.10. Élkiemelés elmosással

Éldetektálás témakörében sokszor előjön a Laplacian of Gaussian (LoG) szűrés, amely a második deriváltat használja fel. Nem a nagy intenzitások küszöbölésével detektálja az

éleket, hanem a szűrt kép nullátmeneteivel. Ez a megoldás gyorsabb, mivel az előbbivel ellentétben elég 1 db konvolúció, amely a Gauss szűrő második deriváltjával történik.

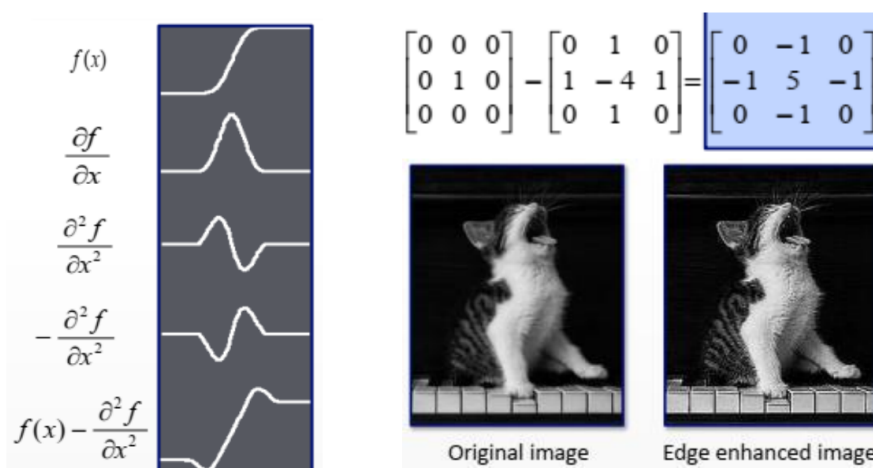


7.18. ábra. LoG szűrés.

7.1.11. Élek kiemelése éldetektáló szűrőkkel

A gyakorlat azt mutatja, hogy a LoG jóval stabilabb, mint a Derivatives of Gaussian. Nagyságrendekkel kevésbé zajérzékeny éldetektálás esetén. Viszont egy másik alkalmazása is elterjedt, ez az élek kiemelése, az élekre történő ráerősítés. Bal oldali oszlopban látható a szűrés teljes menete.

Az eredeti jel és a jel második derivált különbségét véve az alacsony értékek negatív, a magas értékek pozitív irányban mozdulnak el, ezzel kiemelve az éleket. Az ábrán megfigyelhető a kiemelés eredménye (pl. a macska szőrösomói jobban kivehetők).



7.19. ábra. Élek kiemelése éldetektáló szűrőkkel.

Számos alkalmazási területe van. Orvosi területen maradv, CT képek elemzésénél is gyakran szoktak intenzitás különbségeket, kontrasztokat felerősíteni. A szűrés egyik legnagyobb előnye, hogy a *Sigma* paramétere állítható, ezáltal meghatározható, hogy

milyen széles tartományban legyen vizsgálva az intenzitás átmenet. Különböző *Sigma* értékek esetén különböző részleteket lehet kiemelni. Az előbbi ábránál maradv a zongora billentyűi közötti szüneteket sokkal kevésbé emeli ki a szűrés, mint a bundán található szőröcsomókat. Ez az alkalmazott *Sigma* miatt van.

7.1.12. Nemlineáris szűrés

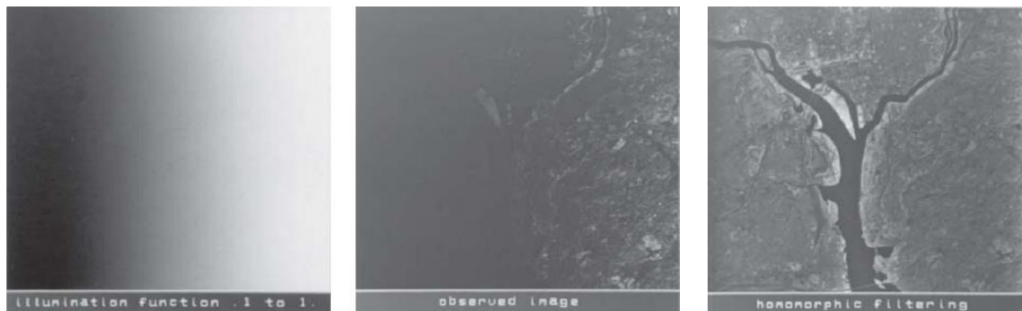
A lineáris szűrések alapproblémáját jelenti a frekvenciatartományban adott komponensen történő zaj szűrése másik komponensek módosítása nélkül. Ezt meg lehet oldani az adott komponens elnyomásával, viszont az esetek többségében ennél többre van szükség és az eltolás invariáns, nem lineáris szűrések irányában kell keresni a megoldást.

Tipikus ilyen szűrés például:

- a homomorfikus szűrés,
- az order static vagy rank szűrések (pl. medián),
- a polinomiális szűrések,
- a morfológiai szűrések (ezt részletesen nem érinti a jegyzet)
- vagy a neurális hálóval történő szűrések.

7.1.13. Homomorfikus szűrés

A homomorfikus szűrés célja az egyenlőtlen megvilágítás következményeként fellépő információvesztés helyreállítása.



7.20. ábra. Homomorfikus szűrés alkalmazása.

Az alábbi ábrán egy légifelvétel látható. A bal oldali egyenlőtlen megvilágítás következtében csak az egyik oldalon vehetőek ki részletek. Jobb oldalon a homomorfikus szűrés eredménye, a helyreállított kép látható.

Formálisan:

$$F(j, k) = I(j, k)S(j, k)$$

$$\log\{F(j, k)\} = \log\{I(j, k)\} + \log\{S(j, k)\},$$

ahol $I(j, k)$ a megvilágítás, $S(j, k)$ a zajmentes kép. A logaritálás után hagyományos szűrési eljárásokkal lehet javítani a kép minőségén. A homomorfikus szűrés multiplikatív zajok mellett kifejezetten hatékony eljárásnak minősül.



7.21. ábra. Homomorfikus szűrés folyamata.

Az egyszerű, alacsony frekvenciás komponensek szűrésével a kép relatíve sötét, kis kontrasztos részén elveszne az információ és nem jelenne meg az a struktúra, amelyet az emberi szem már képes kivenni. Viszont a logaritmálás segítségével a multiplikatív zaj additívvá alakítható és a logaritmus karakterisztikájából (például kis értékek mellett nagyobb meredekségből) adódóan széthúzza ezt a tartományt. Egy másik jellemzője a homomorfikus szűrésnek, hogy új, a kép által nem eredetileg nem tartalmazott részleteket nem tud visszaállítani, ellentétben a neurális hálókkal.

7.1.14. Order statistics szűrés

Legyen

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)},$$

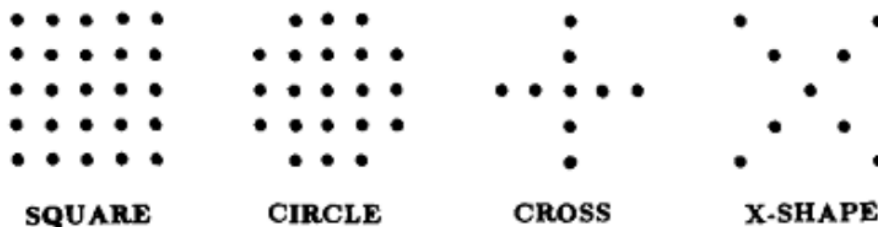
ahol $X_{(i)}$ az i -edik statisztika. Tehát az algoritmus sorbarendezi a szomszédos pixeleket növekvő intenzitásérték szerint, kiválaszt egyet a rangnak megfelelően és ez lesz a kimenet. Legelterjedtebb speciális rank szűrők közé sorolható a medián:

$$\text{med}(X_i) = \begin{cases} X_{(\nu+1)}, & \text{if } n = 2\nu + 1, \\ (X_{(\nu)} + X_{(\nu+1)})/2, & \text{if } n = 2\nu \end{cases}$$

vagy a két dimenziós medián szűrő:

$$y_{ij} = \text{med}(x_{i+r,j+s}; (r, s) \in A), (i, j) \in Z^2$$

Az A egy előre definiált séma, amely csúszó ablakként végigmegy a képen. Érdeemes megjegyezni, hogy ennek mérete általában *(páratlanxpáratlan)* elemszámú. Az ablak alakja befolyásolja a szűrő tulajdonságait, amely alapján különböző céolakra lehet alkalmazni, mint például élmegetartás vagy bizonyos képrészletek megtartása.



7.22. ábra. Különböző ablak típusok.

Zajsűrés során várható értéket kell becsülni annak függvényében, hogy a mintavételezett értékek milyen eloszlást írnak le. Például egy Gauss jellegű gyorsan lecsengő eloszlás esetén a várható érték az átlaggal ekvivalens. Ezzel szemben egy lassan lecsengő zajjel-

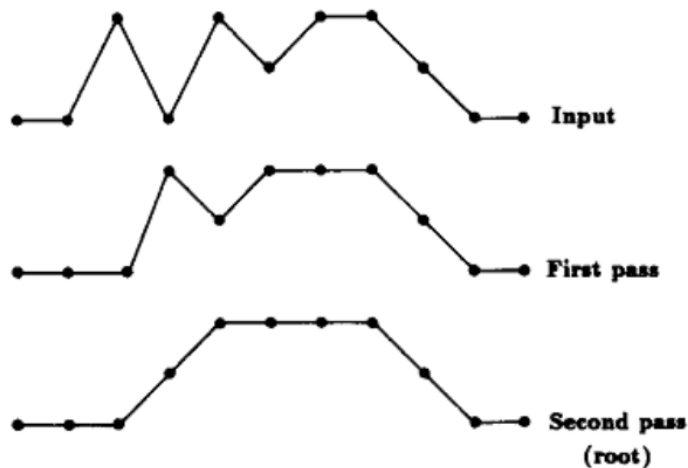
oszlás (például Laplace-eloszlás) esetén nem célszerű átlagot számolni, helyette a medián szűrés jelenti a megoldást, amely a kilógó (outlier) értékekre egy kevésbé érzékeny becslés. A medián sorbarendezi a mintavételezett értékeket és kiválasztja a középsőt, ami nem függ attól, hogy a felső és alsó 10% mekkora értékekkel bír.

7.1.15. Medián szűrés

Az előre definiált csúszóablak végigmegy a képen, ahol az ablak szerinti pixelek intenzitásainak sorbarendezése után a középső lesz a szűrés értéke az ablak középpontjának helyén.

Az eljárás hasonló eredményt tud adni a középső helyett egy tetszőleges k -adik érték kiválasztásával is. Ez a rank szűrés, amely során a sorbarendezett értékek például 20-adik percentilise kerül az ablak középpontjába.

Egyik érdekes jellemzőjük, amely kevés eltolás invariáns szűrésnél figyelhető meg, hogy rendelkeznek sajátjellel, melyet nem módosítanak. Ez alatt azt kell érteni, hogy a medián szűrő ismételt alkalmazásával minden véges hosszúságú nemroot jel a root jelhez konvergál. Az alábbi ábrán az egy dimenziós jelen 3 széles kernellel történik a medián szűrés.



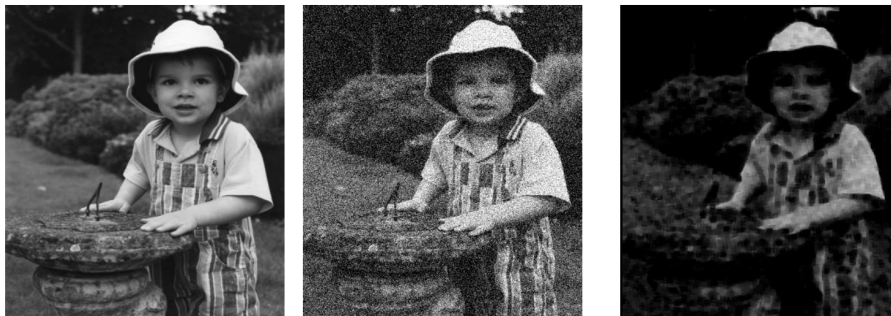
7.23. ábra. Adott jel sajátjele.

A medián szűré kifejezetten jól teljesít lassan lecsengő zajeloszlásnál és rosszul gyorsan lecsengő, például Gauss-eloszlású zajeseten. A következő ábrán egy salt and pepper típusú impulzus zajjal terhelt képen végzett átlagoló és medián szűrés eredménye hasonlítható össze. Megfigyelhető, hogy a medián szűrés jobban megtartja az éleket.



7.24. ábra. Rendre: zajjal terhelt kép, átlagoló szűrés eredménye, medián szűrés eredménye.

Ahogy korábban szó volt róla, nem feltétlen kell a középső elemet választani, például egy alacsonyabb percentilis kiválasztása sötétebb irányban tolja el a szűrés zajmentes eredményét. A rank szűrés felhasználható adott régiókon belüli kontrasztviszonyok mérésére is.



7.25. ábra. Zajjal terhelt képen 4. rangú pixelek kiválasztása 7×7 -es maszk mellett.

7.1.16. Adaptív szűrők (általános jelfeldolgozás)

Adaptív lineáris jelfeldolgozás során az általunk vizsgált zajnélküli változókat ($d(i)$) csak additív zajjal ($n(i)$) tudjuk megfigyelni, így áll elő a megfigyelés mintavétele ($x(i)$).

$$x(i) = d(i) + n(i)$$

Több megfigyelés is lehetséges ugyanarról a változóról, ez az $y(i)$ vektor. Az adaptív szűrő minden i -edik időpillanatban egy $y(i)$ értéket állít elő, ami lényegében egy $a(i)$ vektorral súlyozott összeg.

$$\hat{d}(i) = y(i) = \sum_{j=1}^n a_j(i)x_j(i) = a^T(i)x(i),$$

ahol $a(i) = [a_1(i), \dots, a_n(i)]^T$ súlyvektort szerenénk meghatározni. Ideális esetben $y(i)$ megegyezik $d(i)$ -vel, úgyhogy a kettő közötti különbség csökkentése a cél. Erre egy bevett eljárás a négyzetes hiba minimalizálása.

$$J = E[e(i)^2] = E\left[\left|d(i) - \sum_{j=1}^n a_j(i)x_j(i)\right|^2\right]$$

Az adaptív szűrés lényege, hogy ezek az a -k indexelve vannak az idő pillanatában és amíg fut az eljárás időről időre a bemenetre érkeznek a jel zajos mintavétele. Ezzel párhuzamosan, ahogy előáll a szűrt kimeneti jel adaptálódik a súlyvektor. Hasonló, mint a gépi tanulás területén ismert RT learning fogalom által leírt jelenség.

Ennek optimalizálására hatékony megoldást nyújt az LMS (Least Mean Squares) algoritmus, amellyel a komplexebb számítások is elkerülhetőek azáltal, hogy a költségfüggvényben az átlagos hiba helyett csak a pillanatnyi hibát figyelembevéve követi a legmeredekebb lejtő módszerét.

$$a(i+1) = a(i) + \mu e(i)x(i)$$

Érdemes megjegyezni, hogy nem csak lineáris módszerek léteznek az adaptív szűrésre:

$$y(i) = f\left(\sum_j a_j(i)x_j(i)\right),$$

ahol f valamilyen nemlineáris függvény.

7.1.17. Adaptív szűrők (képfeldolgozásban)

Az adaptív jelfeldolgozást máshogy kell értelmezni a képfeldolgozás területén. Hasonló analógiát kell követni, mint az egy-dimenziósról a két-dimenziós jelekre való áttérésnél, ami időként van értelmezve és az alapján változik az képeknél a térbeli lokációt és annak változását jelenti. Az adaptív szűrés nem shift invaránsan viselkedik – szűrés definíciója függ az adott képrészlet jellemzőitől.

Legismertebb adaptív lineáris jellegű szűrés a Lee szűrés. A ξ paramétertől eltekintve teljesen adaptívan végzi a zaj szűrését az élek megtartása mellett. A bemeneti I kép alapján előállított kimeneti kép i -edik sorának j -edik oszlopának elemét a következő összefüggés definiálja:

$$F\{I\}(i, j) = \beta_{(i,j)}I(i, j) + (1 - \beta)\mu_{(i,j)}\{I\}$$

Ahol $\mu_{(i,j)}$ egy aluláteresztő szűrés $(2N+1) \times (2N+1)$ -es méretű kernel mellett, melynek középpontja (i, j) . A kép intenzitásának összegét leosztja az ablak nagyságával:

$$\mu_{(i,j)}\{I\} = \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{|i-v| \leq N, |j-u| \leq N} (I(u, v))$$

Ennek az aluláteresztő szűrésnek az erősítése $(1 - \beta)$ értékű, melyhez hozzáadódik az eredeti kép β -szorosa.

β értékét a σ és ξ paraméterek határozzák meg az alábbi összefüggés szerint:

$$\beta_{(i,j)} = \max((\sigma_{i,j}^2\{I\} - \xi) / \sigma_{i,j}^2\{I\}, 0)$$

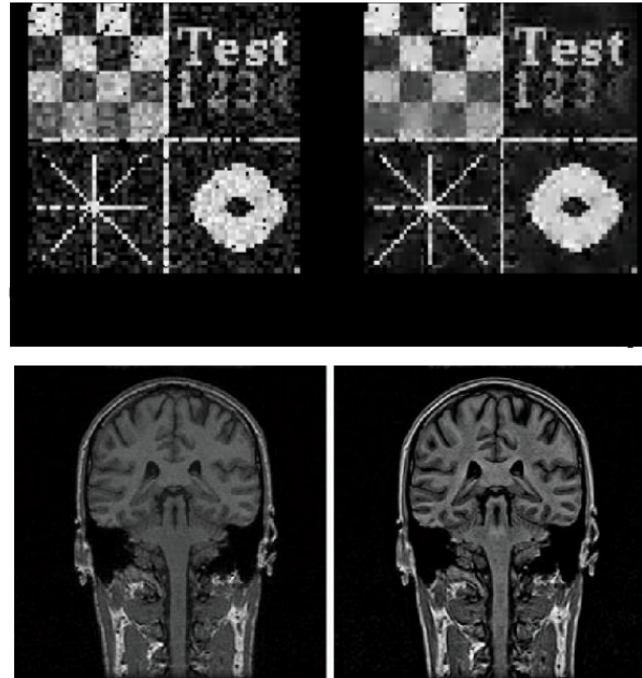
$\sigma_{i,j}^2$ egész egyszerűen a torzított variancia becslése a képnek $(2N+1) \times (2N+1)$ -es méretű ablak (i, j) középpontja körül.

$$\sigma_{i,j}^2\{I\} = \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{|i-v| \leq N, |j-u| \leq N} (I(u, v) - \mu_{(i,j)}\{I\})^2$$

Könnyen belátható, hogy nullához közeli béta érték esetén az (i, j) középpont körül az átlag intenzitás dominálja a szűrés eredményét és 1 közeli β esetén a kép eredeti intenzitást fogja megtartani a szűrés. A $\beta_{(i,j)}$ definíciójából következik, hogy negatív értéket nem vehet fel. A képletét átrendezve az $1 - \xi / \sigma_{i,j}^2$ annál kisebb, minél nagyobb a szűrés paramétere (ξ), melynek értéke szabályozza, hogy mekkora szórás mellett értelmezendő az eredeti jel változása zajként. A nála nagyobb szórás esetén az eredeti kép fog dominálni, ellenkező esetben az aluláteresztő szűrés adja a kimenetet.

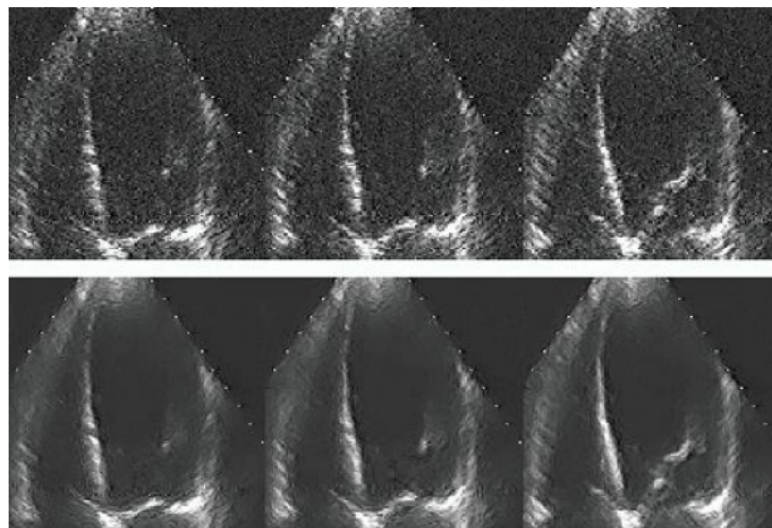
A következő ábrán a felső sorban egy nagy mennyiségű zajjal terhelt mesterséges kép látható, jobb oldalon a szűrt változata, melyen látványosan redukálva lett a zaj energiája

az élek megtartásáva mellett. Ilyen szűrést természetesen agyi látgrész MRI felvételein is el lehet végezni. Látható, ahogy a rekonstruált képeken a lebenyeken belüli kisebb intenzitásugrású területein aluláteresztés történt, viszont a határain az élek intenzitása megmaradt, nem mosódott el.



7.26. ábra. Felül teszt képen, alul MRI felvételen elvégzett Lee szűrés eredménye látható.

Ultrahang felvételek esetén is hasonló eredmény látható. Ahol a ξ paraméternél nagyobb variancia látható (tipikusan az éleknél), ott megtartja a kép eredeti intenzitását és ahol nincs objektum, kis szórású régiókat terhelő zajt pedig sikeresen eliminálja. Ilyen szempontból a Lee szűrés egy robusztus, hatékony eljárás, amely bizonyos esetekben a medián szűrésnél is jobb eredményeket tud adni.



7.27. ábra. Ultrahang képeken végzett Lee szűrés.

7.1.18. Élkiemelés adaptív szűréssel

A Lee szűrésnél kifinomultabb és szélesebb körben alkalmazzák a szintén statisztikus differenciáláson alapuló Wallis szűrést. Az adaptív élkiemelő szűrés minden pixel értékét elosztja a szórásával, ahol a szórást a környezetében lévő pixelek határozzák meg.

$$G(j, k) = \frac{F(j, k)}{D(j, k)}$$

Minden pixelre ki kell számolni az átlag értéket valamint a szórást:

$$M(j, k) = \frac{1}{W^2} \sum_{m=j-w}^{j+w} \sum_{n=k-w}^{k+w} F(m, n),$$

ahol $W \times W$ méretű a szűrő ablak és $W = 2w + 1$.

$$D(j, k) = \frac{1}{W} \left[\sum_{m=j-w}^{j+w} \sum_{n=k-w}^{k+w} [F(m, n) - M(m, n)]^2 \right]^{1/2}$$

Azon régiók intenzitásait (és annak különbségeit) súlyozza fel, melyek homogének voltak

A Wallis operátort a következő összefüggés definiálja:

$$G(j, k) = [F(j, k) - M(j, k)] \frac{A_{max} D_d}{A_{max} D(j, k) + D_d} + [p M_d + (1 - p) M(j, k)],$$

ahol M_d, D_d, A_{max} rendre a kívánt átlagos középérték, szórás és a maximális erősítési tényező. A_{max} szerepe a túl nagy kimeneti érték meggátlása, amennyiben a szórás túl kicsi $0 \leq p \leq 1$. A kívánt szórás célja, hogy a képfüggő erősítés A_{max} és A_{min} között legyen:

$$D_d = \frac{A_{min} A_{max} D_{max}}{A_{max} - A_{min}}$$

és D_{max} a $D(j, k)$ maximuma.

Általánosabb formában:

$$G(j, k) = [F(j, k) - M(j, k)] A(j, k) + B(j, k),$$

ahol $A(j, k)$ a képtartománytól függő erősítés, $B(j, k)$ a képtartománytól függő háttér.

A Wallis szűrés eredményeként egy dinamikusabb, részletgazdagabb kép áll elő azáltal, hogy az eredetileg kevésbé kontrasztos régiókat (pl. a híd alatti területet) felerősíti és az eredetileg kontrasztos részleteket (pl. a híd korlátját) elnyomja.



7.28. ábra. Eredeti kép, mellette az átlag (0-0,98), a szórás (0,01-0,26) és háttér (0,09-0,88).



7.29. ábra. Képfüggő erősítés (0,75-2,35) és a Wallis eredménye.

7.1.19. Lineáris szűrés transzformált tartományban

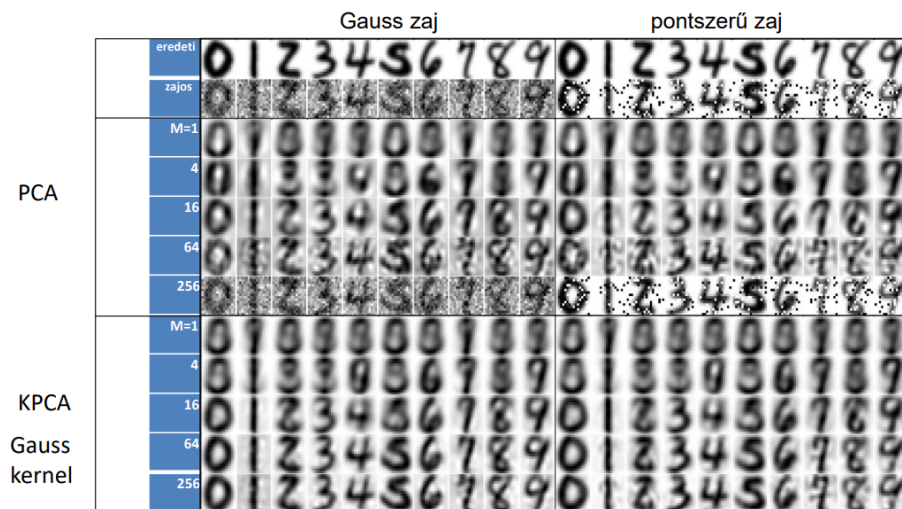
Egy más jellegű adaptív szűrés a transzformált tartományos adaptív szűrés. Lényege, hogy a kívánt műveletet (szűrést) egy transzformált tartományban végzi el az adott jelen. Mindegyiknek megvan az előnye és hátránya, a frekvenciatartományban a konvolúciós szűrés sok esetben nehezen interpretálható, viszont a periodikus zajt könnyen lehet szűrni. Bizonyos esetekben ezt érdemes használni, de más bázisrendszerek alkalmazása sincs kizárva:

- Fix bázisrendszerek (Haar, Hadamard, Walsh stb.)
- Bázisrendszer család (Wavelet)
- Képfüggő bázisrendszer (KLT)

Van egy adott mintahalmaz eredeti általunk preferált jelekről (például rajzolt számjegyek) és a cél egy olyan szűrés létrehozása, mely ebbe a mintahalmazba projektálja a bemenetre adott nagy mértékben zajosított jeleket (képet).

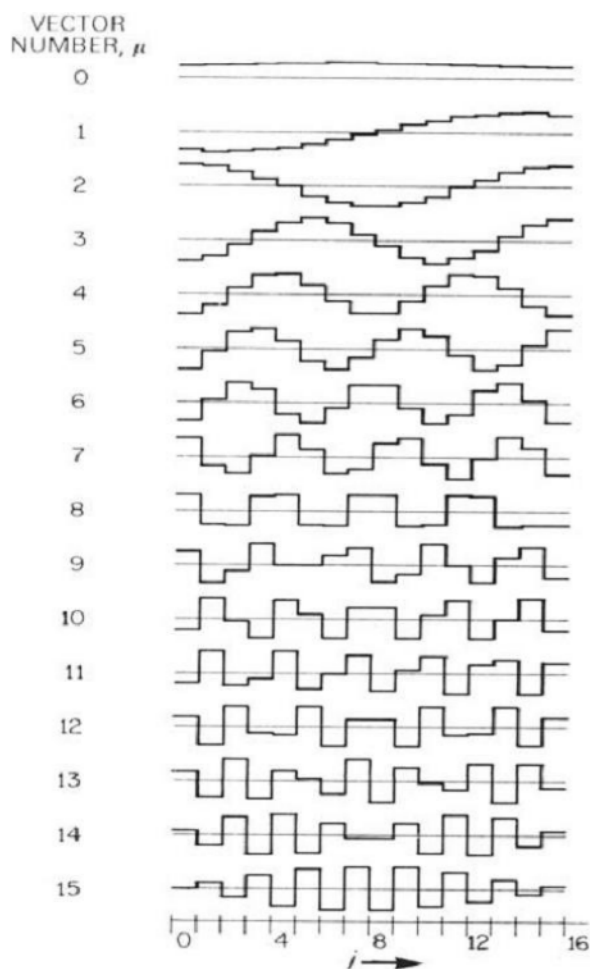
Ez a fajta zaj szűrés egy tömörítő eljárásnak is tekinthető. Megválasztunk olyan bázisfüggvényeket, melyekre az eredeti jelet levetítve kis hibával visszaállíthatóak azok. A zajos bemenetként kapott mintákat nem lehet ideális esetben jól kifeszíteni és ezáltal lehetséges a zaj szűrése.

Az alábbi ábrán az látható, ahogy különböző hosszúságú leírók (M) segítségével van előállítva a bemeneti jel PCA és KPCA esetén. A 16 komponensre való vetítés során a zajos jelekből viszonylag jól visszaállíthatóak a számjegyek a zaj rekonstruálása nélkül. A 256 komponensre történő vetítés esetén visszakapható az eredeti zajjal terhelt kép.



7.30. ábra. PCA-KPCA zajszűrő hatás összehasonlítása.

Karhunen-Loève transzformáció (KLT) egy jelfüggő ortogonális transzformáció. Az alábbi ábrán a fő bázisjelek értékei láthatóak. Az eredeti és a bázisjelek elemenkénti szorzatának összege (lényegében skaláris szorzata) állítja elő a transzformált koordinátákat.



7.31. ábra. Karhunen-Loève transzformáció (KLT).

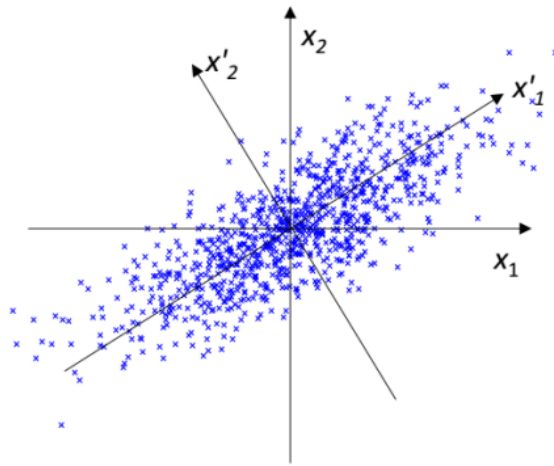
7.1.20. PCA

A szemléltetés kedvéért van egy két-dimenziós ponthalmaz, melynek mintáit a kék pontok mutatják. A cél ennek az átkoordinátázása úgy, hogy a lineáris transzformáció után vett egy-dimenziós felírásából a négyzetes hiba értelmében a lehető legoptimálisabban vissza lehessen állítani az eredeti jelet.

Folytatás...

7.1.21. Polinomiális szűrők

7.1.22. Volterra soros polinomiális szűrők



7.32. ábra. PCA.

8. fejezet

Képszegmentáló eljárások

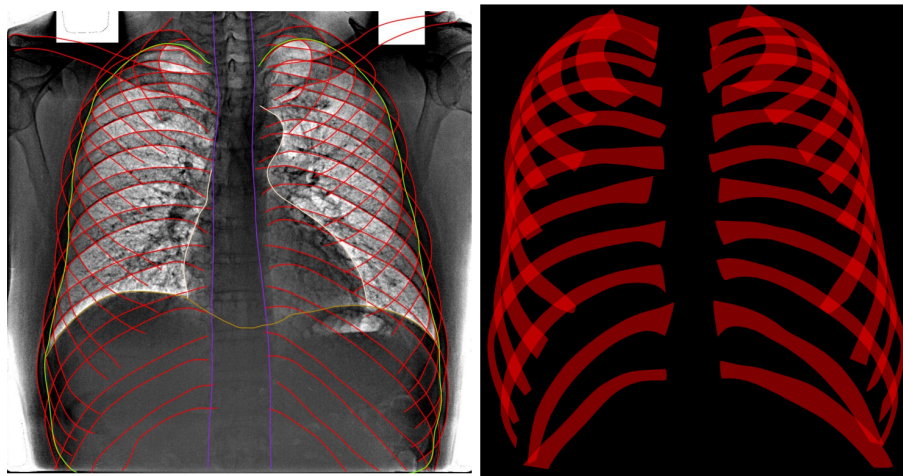
8.1. Képszegmentálás

Eddig olyan eljárásokkal foglalkoztunk, melyek célja a kép módosítása volt. Ezek célja például a zaj leszűrése, a kép tömörítése, illetve a felbontás javítása volt. Ebben a fejezetben viszont a képek interpretálásával fogunk foglalkozni, ami a szegmentálás témaköréhez kapcsolódik.

A képszegmentálás során a képen látható objektumokat pontosan lokalizálni szeretnénk, tehát pixel szinten szeretnénk a körvonalakat megtalálni. A keresendő objektumok lehetnek például anatómiai részek (pl. csontok, szív, erek, szürkeállomány, fehér állomány...), elváltozások, vagy az éppen vizsgálandó terület (pl. tüdőterület).

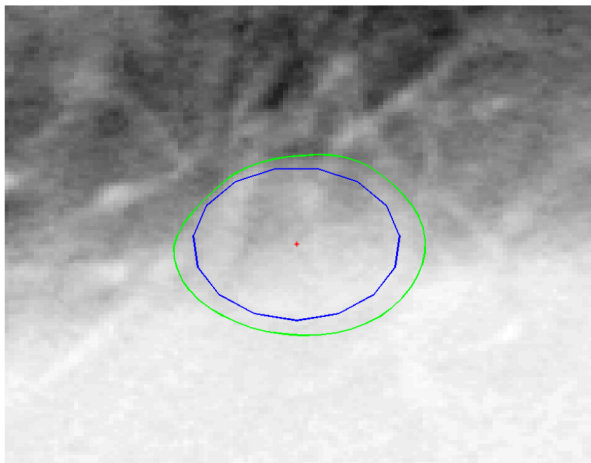
Az emberi agy nagyon jól működik a mintázatok felismerésében, sokszor még a képen nem szereplő dolgokat is képesek vagyunk beelátni abba. Viszont algoritmikusan ez egyáltalán nem egyszerű feladat, mivel sokszor nincsenek jelen az objektumok olyan egyértelműen, mint amilyen egyszerűen a mi agyunk azt felismerte. Sokszor nehézséget jelentenek az elmosódott határok, a nem megfelelő felbontás, illetve az intenzitás egyenetlensége. Ha nem tudjuk, hogy milyen mintát akarunk beelátni a képbe, csak a kép alapján próbálunk meg szegmentációt végezni, akkor könnyen belefuthatunk a Maximum Likelihood becslés problematikájába, tehát sokszor nincs elég információ a képen ahhoz, hogy az objektumot felismerjük, és a kontúrját teljesen le tudjuk követni.

Az alábbi képen egy tanszéki projekt látható, melyen PA mellkasröntgenről különítették el a bordákat.



8.1. ábra. Anatómiai részek körülhatárolása

Egy másik tanszéki projekt során pedig daganatot próbáltak meg szegmentálni, és annak pontos körvonalait meghatározni. Ennek segítségével pontosan nyomon lehet követni a daganat térfogatát, ami alapján megállapítható, hogy milyen típusú és milyen súlyos az elváltozás, illetve, hogy milyen kezelést igényel.



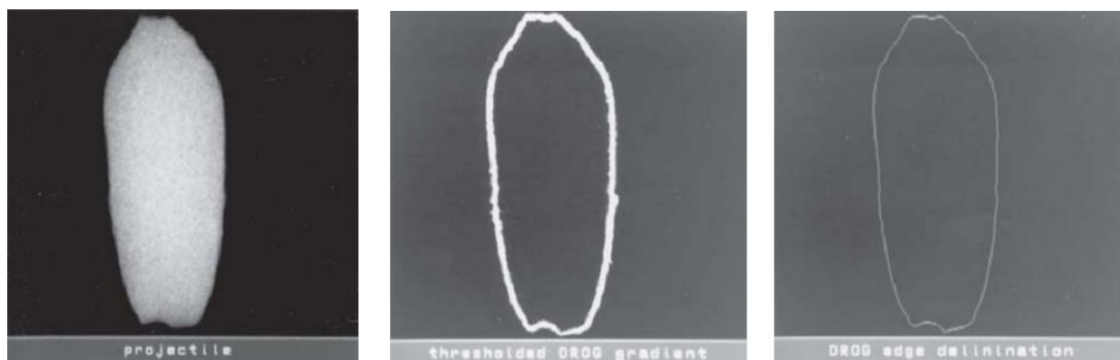
8.2. ábra. Elváltozás pontos körülhatárolása

A képszegmentáló eljárásokat alapvetően három csoportba lehet osztani, melyek közül ez a jegyzet az első kettővel foglalkozik.

- Régió alapú szegmentálás
 - A régió alapú szegmentálási módszerek a legegyszerűbbek, ezek a pixelek intenzitásával dolgoznak.
 - Általában a régió belüli hasonlóságot, illetve a régiók közötti különbséget használják ki.
 - Ide tartozik a klaszterezés, a régió növesztés, a régió hasítás, az összeolvasztás, a watershed, a Prewitt, a Sobel, a Kirsch, illetve a Canny módszer is.
- Él alapú szegmentálás
 - Az él alapú szegmentálás célja a kontúrok követése.
 - Az élkereséshez gyakran használják az első, illetve második deriváltat.
 - Ide tartozik a dinamikus programozás és a Hough transzformáció.
- Pixel (voxel) (és környezete) alapú (osztályozás)
 - A pixel alapú szegmentálás hasonlít a régió alapú szegmentálásra, de azt különböző szűrésekkel kombináljuk.
 - Ide tartoznak a tanuló rendszerekre, neuronhálókra, illetve deep hálókra épülő módszerek.

8.2. Él alapú képszegmentálás

Az alábbi egyszerű képen könnyen alkalmazható az éldetektálás módszere, Egyszerűen a gradiens képet kell venni, és ezen kell lokális maximumokat keresni.



8.3. ábra. Él alapú szegmentálás egyszerű képen

8.2.1. Élkiemelő szűrők

Sajnos a fenti egyszerű módszer sok esetben nem működik. Általában a gradiens kép előállításához szükség van valamilyen élkiemelő, lineáris eltolás invariáns szűrőre. Ilyen élkiemelő szűrő például a Sobel, a Prewitt, a Canny, illetve a LoG szűrő. Ezek alkalmazásával meghatározhatóak a vízszintes és a függőleges gradienssek.

$$\begin{array}{cccccc}
 -1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\
 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1
 \end{array}$$

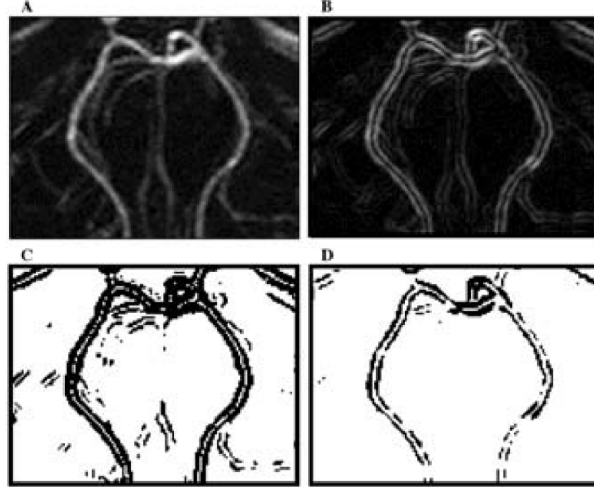
8.4. ábra. Sobel operátor G_x és G_y számításához

Ezt követően meghatározható $f(x, y)$ -nál a gradiens abszolút értéke és a gradiens iránya a lokális pixel-intenzitás gradienssek alapján.

$$|G| = \sqrt{[G_x^2 + G_y^2]} = \sqrt{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]} \quad (8.1)$$

$$D = \tan^{-1}\left(\frac{G_x}{G_y}\right) \quad (8.2)$$

Az alábbi ábrán a fenti módszer alkalmazására látható egy példa. Az *A* ábrán egy érfestéses röntgenkép látható, a *B* képen pedig az ebből kapott gradiens kép egy 3x3-as Sobel maszk alkalmazását követően. Ezen a gradiens képen észrevehető, hogy a vastag élek esetén két oldalról keletkeznek gradienssek. A *C* és a *D* ábrán egy alacsony (300) és egy magas (600) küszöb alkalmazásával készített él kép látható. Megfigyelhető, hogy egyik küszöbérték sem eredményezett optimális eredményt, mivel az első esetben megjelennek zajok a képen, a második esetben pedig nem folytonos a kontúr.



8.5. ábra. Éldetektálás Sobel operátor segítségével

8.2.2. Határvonal követés

A határvonal követés módszere próbálja kiküszöbölni azt a problémát, hogy az éldetektáló eljárás sokszor nem feltétlenül összefüggő kontúrt eredményez. A legegyszerűbb ilyen eljárás az élek intenzitását, tehát a gradiensvektorok amplitúdóját ($e(x, y)$), illetve a az élek irányát, tehát az irányvektorok bázisát ($\phi(x, y)$) használja. Ezek segítségével két szomszédos pixelt (b_j és b_{j+1}) akkor tekintünk élpontnak, ha

- a két szomszédos pixel gradiens amplitúdójának különbsége kisebb, mint T_1

$$|e(b_j) - e(b_{j+1})| < T_1 \quad (8.3)$$

- és az irányvektoruk korrelált, tehát a kettő közötti szögnek a 2π szerinti modulusa T_2 -nél kisebb

$$|\phi(b_j) - \phi(b_{j+1})| \bmod 2\pi < T_2 \quad (8.4)$$

- és mindkét pont egy alacsonyabb gradiensküszöbnél nagyobb, tehát potenciális élpont

$$|e(b_j)| > T \quad (8.5)$$

$$|e(b_{j+1})| > T \quad (8.6)$$

Ennél a módszernél egy kicsit bonyolultam a Canny módszer, ami hiszterézises küszöbölést alkalmaz. Ebben az esetben egy magasabb T_1 küszöb segítségével meghatározzuk a p' pontok halmazát:

$$p' = \{(x, y) \mid e(x, y) > T_1\} \quad (8.7)$$

Majd ebből kiválasztjuk azokat, amik egyben lokális maximumok is:

$$p = \{(x, y) \mid e(x, y) > T_1 \wedge \forall (x', y') \in N(x, y) : e(x, y) \geq e(x', y')\} \quad (8.8)$$

Ezen p halmaz tartalmazza az elsődleges pontok halmazát. Ez tipikusan egy alulszegmentált ponthalmaz szokott lenni, megszakadó körvonalakkal. Ezért szokás definiálni egy másik, s -sel jelölt ponthalmazt is, amibe egy jóval alacsonyabb küszöbérték alapján ($T_2 \ll T_1$) kerülnek bele a pontok.

$$s = \{(x, y) \mid e(x, y) > T_2 \wedge \forall (x', y') \in N(x, y) : e(x, y) \geq e(x', y')\} \quad (8.9)$$

A T_1 küszöbértéket úgy kell beállítani, hogy az alulszegmentáljon, tehát a kontúrt ne kövesse le jól, ne emeljen ki elég pontot. A T_2 küszöbértéket pedig úgy kell beállítani, hogy az túlszegmentáljon. Ezt követően az s halmazból azokat a pontokat kell kiválasztani, és p -hez venni, amik p különböző régióit kötik össze.

A fenti módszerek a Maximum Likelihood becslésre épülnek, tehát csak a kép információtartalma alapján próbálják meg a kontúrokat követni. Viszont ezek sajnos általában nem eredményeznek folytonos éleket, sokszor megszakadozott, töredékes kontúrokat készítenek.

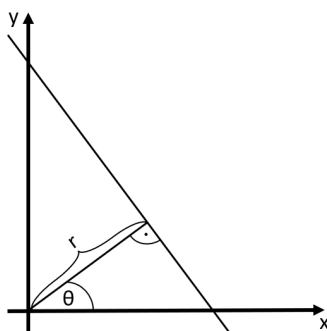
8.2.3. Hough transzformáció

A Hough transzformáció során azt is meghatározzuk, hogy milyen típusú éleket keresünk a képen. Tehát az éldetektálás eredményeként kapott különálló pontokra egyenest, kört vagy valamilyen általánosabb szakaszt próbálunk meg illeszteni. Ennek a módszernek különböző paraméteres görbékre definiált változata is ismert.

Az alábbi ábrán az egyenesekre definiált változat látható. Ehhez az egyenes normálvektoros egyenletét használjuk fel:

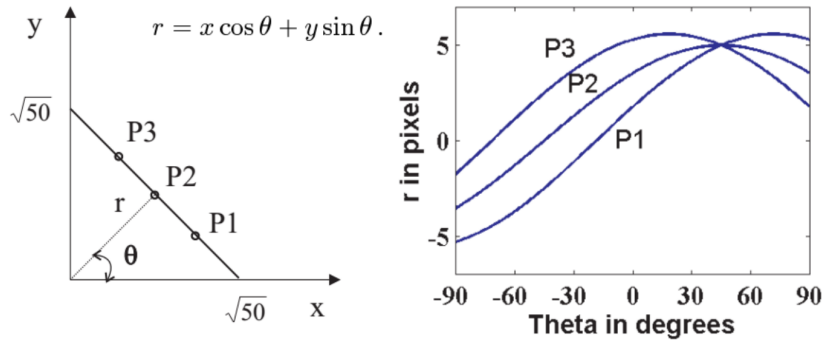
$$r = (x, y) \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (8.10)$$

Azon x, y pontok, amik kielégítik a fenti definíciót, az x -hez képest pozitív irányba θ szöget bezárva éppen r távolságra vannak.



8.6. ábra. Egyenes normálvektoros egyenlete

A Hough transzformációk elve az, hogy ha olyan görbéink vannak, amik kevés paraméterrel leírhatóak, akkor transzformáljuk át az egész bemeneti képet ebbe a paramétertartományba, és ezen paramétertartományon koordinátázható ábrázoláson fogunk szélsőértékeket keresni. Egyenesek esetén két paraméter van (r és θ). Az alábbi ábrán az látható, hogy ha P_1 , P_2 és P_3 pontok koordinátáit behelyettesítjük az $r = x \cos \theta + y \sin \theta$ összefüggésbe, és megnézzük, hogy melyik θ, r párok teszik igazgá ezt az összefüggést adott x és y értékek mellett, akkor három darab szinuszos görbét kapunk. Ez a három szinuszos görbe egy pontban metszi egymást, és ez a pont fogja megadni az egyenes normálvektoros egyenletét leíró r -t és θ -t.

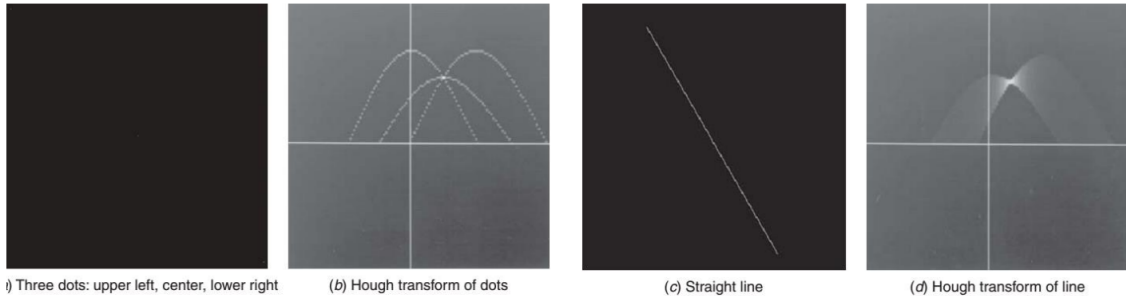


8.7. ábra. Egyenes Hough transzformáltja

A Hough transzformáció során bemeneti képen objektum pontoknak megjelölt, tehát az O halmazbeli x, y -okhoz tartozó sinusoid görbéket fogjuk összegezni. Az alábbi képlet ezt a műveletet fejezi ki dirac deltás felírásban.

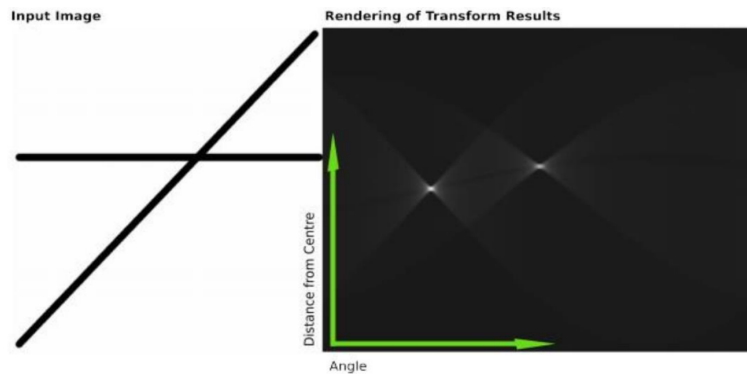
$$H(\theta, r) = \sum_{x,y \in O} \delta \left([x, y] \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} - r \right) \quad (8.11)$$

A teljes módszer elve az, hogy a küszöbölt gradiens képen kiválasztunk pontokat, és ha tudjuk, hogy egy adott görbe vagy alakzat mentén elhelyezkedő éleket kell beeláttni a képbe, akkor áttranszformáljuk a Hough tartományba, és ott kiemeljük a lokális maximumot, ami megadja a görbe vagy alakzat paramétereit.



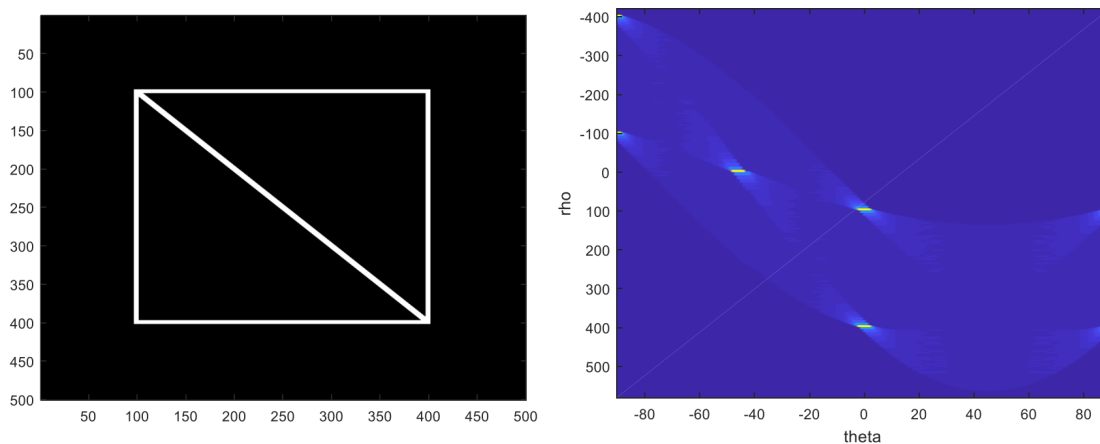
8.8. ábra. Pontok és szakasz Hough transzformáltja

Az alábbi ábrán két egyenes található a bemeneti képen, egy vízszintes és egy 45°-os normálvektorú egyenes.



8.9. ábra. Két egyenes Hough transzformáltja

A következő ábrán a bemeneti képet több szakasz alkotja. Itt arra kell figyelni, hogy a bemeneti képeket általában úgy szoktuk koordinátázni, hogy az origó a bal felső sarokban található, az x tengely függőleges irányba lefelé nő, az y tengely pedig vízszintes irányban jobbra nő. Ez alapján meghatározható, hogy a vízszintes egyenesek normálvektorai 0° -ot zárnak be az x tengellyel, a függőleges egyenesek 90° -ot, míg az átló -45° -ot.



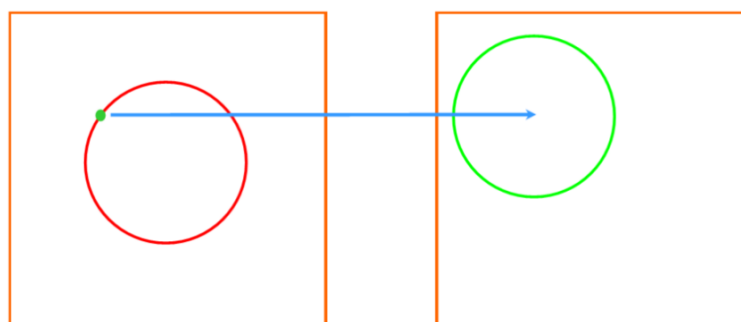
8.10. ábra. Több szakasz Hough transzformáltja

Az így kapott Hough tartomány folytonosan ciklikus lesz, mivel, ha a normálvektort 180° -kal elforgatjuk, akkor az eredeti Hough transzformált -1 -szeresét kapjuk. Tehát a Hough transzformáció ilyen értelemben hasonló tulajdonságokkal bír egyenesek esetén, mint a DFT.

A Hough transzformáció egyéb, előre definiált alakzat detektálására is alkalmas. Körök esetén például az alábbi, három ismeretes összefüggést használjuk fel:

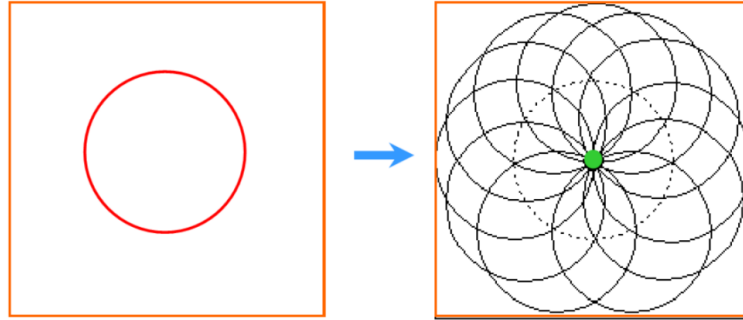
$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \quad (8.12)$$

Ha ismert sugarú kört keresünk, akkor a kétdimenziós Hough térben minden élpontnak egy, a potenciális középpontokat tartalmazó kör felel meg.



8.11. ábra. Kör élpontjának Hough transzformáltja

Az eredeti kör középpontját a Hough tér maximumhelye adja meg, ami lényegében az élpontokhoz tartozó körök metszéspontja.



8.12. ábra. Kör Hough transzformáltja

A Hough transzformáció megvalósítható úgy is, hogy a sugár nem rögzített, de ebben az esetben a Hough tartományt már nem tudjuk két dimenzióban ábrázolni. Ezen kívül a Hough transzformációnak létezik általánosabb alakot detektáló verziója is.

A Hough transzformáció előnye, hogy robusztus a kilógó értékekre, tehát nem foglalkozik azokkal a gradiens pontokkal, amik nem a keresett görbén vannak. Illetve robusztus arra is, hogy a keresett görbének nem kell folytonos kontúrral követhetőnek lennie.

8.3. Régió alapú képszegmentálás

A régió alapú szegmentálások esetén a kép pontjainak halmazát (I) particionáljuk. Ezekre a régiókra igaz, hogy

- Az uniójuk kiadja a teljes képpontok halmazát ($\cup R_i = I$).
- Minden R_i régió topológiailag összefüggő.
 - Tehát ha tetszőleges két pontját kijelöljük egy ilyen régióknak, akkor a köztük vezető út a régión belül található.
- Az egyes régiók diszjunktak ($R_i \cap R_j = \{\emptyset\} \mid \forall i \neq j$).
- Minden régió homogén (az adott célfeladat értelmében).
- Nincs két olyan (topológiailag szomszédos) régió, melyek uniója homogén lenne.

A fent definiált feladatra leggyakrabban a régió növesztést, illetve a régiók darabolása és egyesítése eljárást szokták alkalmazni.

8.3.1. Régió növesztés

A régió növesztés során első lépésben kiválasztunk N darab magpontot, ezek adják a kezdeti régiókat ($R_i^{(0)} = s_i$), és ezek száma egyben meghatározza az algoritmussal szétválasztandó régiók számát is. Ezt követően iteratívan, amíg van változás, megnézzük minden $R_i^{(k-1)}$ -re a vele szomszédos, régiókba még nem osztott pixeleket, hogy azokat $R_i^{(k-1)}$ -hez hozzávonva a régió homogén marad-e, és ha igen, akkor hozzáadjuk.

1. Algorithm Régió növesztés algoritmus

```
Select N core points ( $R_i^{(0)} = s_i$ )
while there is change do
    Examine the neighbouring pixels of  $R_i^{(k-1)}$  which does not belong to another region
    if the pixel is added to the  $R_i^{(k-1)}$  region, it remains homogeneous then
        Add pixel to  $R_i^{(k-1)}$ 
    end if
end while
```

Az algoritmus előnye, hogy gyors és egyszerű, hátránya viszont, hogy csak ritkán ad optimális eredményt. Másik hátránya ennek a mohó eljárásnak, hogy az eredmény annak a függvénye, hogy milyen sorrendben járjuk be a régiókat, illetve a régió körvonalain található pixeleket. Ezen probléma feloldására különböző heurisztikákat szoktak alkalmazni, de ezek egyike sem képesek tökéletesen megoldani azt.

8.3.2. Régió darabolás és egyesítés

A régió darabolás és egyesítés módszere egy fokkal bonyolultabb az előzőnél, és általában jobb eredményt is szokott adni. Itt abból indulunk ki az első lépésben, hogy a teljes képünk egy régió ($R_1^{(0)} = I$). Majd két ciklust futtatunk, az első során egy erős homogenitási kritérium (P_e) szerint feldaraboljuk a régiókat, a második során pedig egy gyenge homogenitási kritérium (P_{gy}) szerint egyesítjük őket. A feldaraboló ciklus addig fut, amíg létezik nem homogén régió ($\exists i : \neg P_e(R_i^{(k)})$). Ekkor az adott régiót két részre bontjuk a leginkább „problémás” pixel mentén egy vágással. Az egyesítő ciklus során azokat a szomszédos régiókat ($N(R_i^{(k)}, R_j^{(k)})$) vonjuk össze, melyek uniójára érvényesül a gyengébb homogenitású kritérium ($P_{gy}(R_i^{(k)} \cup R_j^{(k)})$).

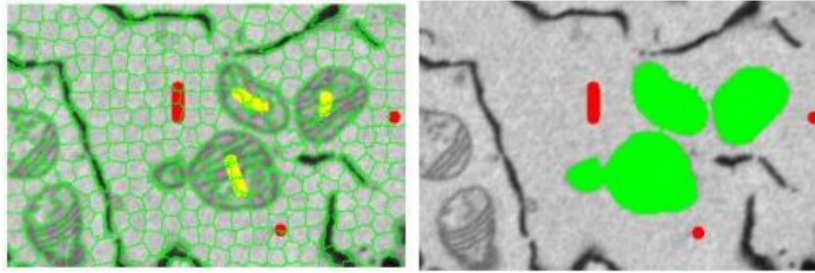
2. Algorithm Régió darabolás és egyesítés algoritmus

```
 $R_1^{(0)} = I$ 
while  $\exists i : \neg P_e(R_i^{(k)})$  do
    Split the  $R_i^{(k)}$  region in two
end while
while  $\exists i \neq j : P_{gy}(R_i^{(k)} \cup R_j^{(k)}) \wedge N(R_i^{(k)}, R_j^{(k)})$  do
     $R_i^{(k+1)} := R_i^{(k)} \cup R_j^{(k)}$  and  $R_j^{(k+1)} := \{\emptyset\}$ 
end while
```

Ez az algoritmus szintén sorrend és heurisztika függő, de már kevésbé, mint a régió növesztés. Általában jobb szegmentálást eredményez, viszont nehezebben számolható.

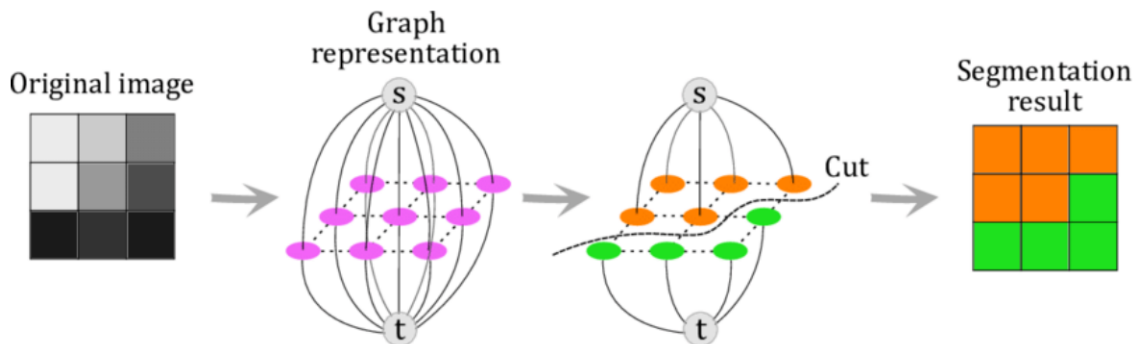
8.3.3. Graph cut eljárások

A Graph cut eljárás során a bemeneti képen kiindulási régiókat, úgynevezett szuperpixeleket kell meghatározni. Erre vannak beépített függvények, amik ezeket jól meg tudják határozni. Ezek általában kontúrokat vizsgálnak, és arra törekszenek, hogy ne legyenek túl nagyok a megjelölt tartományok. Ezt követően a felhasználó megadhatja kézzel, hogy mely pontokat szeretné az egyik, vagy a másik régiótípushoz rendelni.



8.13. ábra. Szuperpixelek meghatározása gráf vágáshoz

Ezt követően felépítünk egy gráfot a szuperpixelekből, amin a gráf vágást kell elvégezni. A gráf csúcsait a szuperpixelek adják, és két szuperpixel között akkor vezet él, ha azok szomszédosak. Az élek súlyjai azt határozzák meg, hogy mennyire lenne homogén a tartomány, ha a két szuperpixel beletartozna. Az így felépült gráfban kell megkeresni a minimális vágást (ami megegyezik a maximális folyamattal). Ennek elvégzésére hatékony algoritmusok léteznek, de akár dinamikus programozással is megoldható a probléma.



8.14. ábra. Graph cut eljárás

Az orvosok szemi-automatikus szegmentálásokat szeretnek használni, tehát olyan módszereket részesítenek előnyben, ahol a szegmentálás folyamata kontrollálható, az eredmény iteratívan finomítható. Ennek az elvárásnak a Graph cut eljárás teljes mértékben megfelel, mivel az algoritmus lefuttatását követően újabb címkek megadásával hatékonyan lehet javítani az eredményen.

8.3.4. Textúra alapú analízis

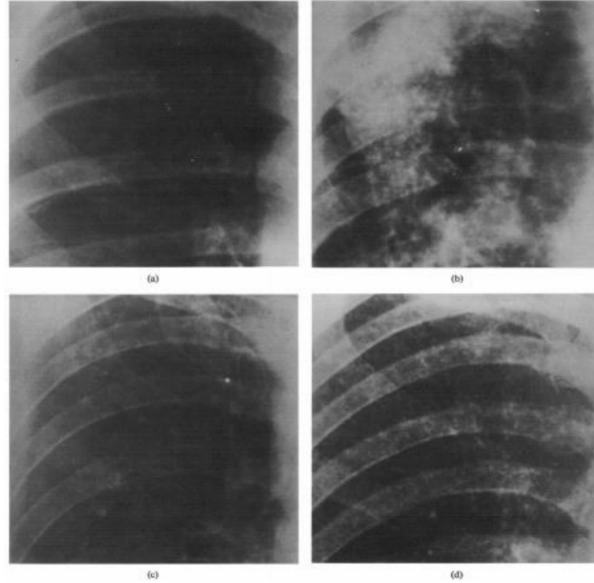
A textúrának tipikusan kettő megközelítése van, az első inkább egy grafikus (strukturális), a második inkább egy képfeldolgozós (statisztikai) megközelítés.

- Strukturális megközelítés: egyszerű texelek halmaza, melyek szabályszerűen ismétlődnek
- Statisztikai megközelítés: intenzitások (térbeli) eloszlásának kvantitatív mértéke

Generálásnál a strukturális, míg felismerésnél a statisztikai megközelítés dominál.

A textúráknak az emberi értelmezésnél fontos szerepük van, viszont gépi látás eszközeivel nehéz feladat a kezelésük, mivel nehéz jó textúra leírókat definiálni.

Az alábbi ábra a textúrák jelentőségét mutatja az orvosi képalkotás során. Ez a négy PA mellkas röntgen ugyanarról a páciensről készült más-más betegségek alatt. Az (a) képen látható az egészséges állapot, a (b) képen valamilyen gyulladás figyelhető meg, a (c) képen TBC látható, a (d) képen pedig hörghurut okozza az elváltozásokat.



8.15. ábra. PA mellkasröntgen különböző betegségekkel

Megfigyelhető, hogy ezeken a képeken egyedül a textúra változik masszívan, a bordák és a tüdő körvonala ugyanúgy helyezkedik el. Tehát a felvételek analizálása során a textúrában történő változásokat kell megfigyelni, a textúrában történő jellegzetes elváltozásokat kell felismerni.

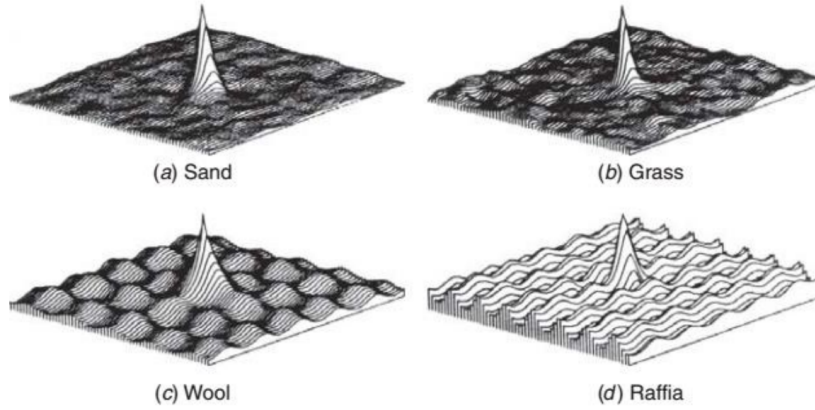
Ennek egy egyszerű módszere az élek sűrűségének és irányának megfigyelése. Ezek az értékek korrelálnak egy-egy homogén textúrájú régió belül, az együttes hisztogramjuk pedig pár kiemelkedően nagy értékkel bír.

A textúrák jellege vizsgálható a Fourier tartomány segítségével is. Ennek motivációja az, hogy a grafikai aspektus alapján a texelek ismétlődnek, és egy ilyen kvázi-periodikus mintázatnak a Fourier spektrumon az alapharmonikus, és az alapharmonikus egész számú többszöröseinél markáns csúcsokat (impulzusokat) kellene eredményeznie. De ez a gyakorlatban ritkán szokott előfordulni, így ez a módszer nehezen alkalmazható.

Sokkal jobban alkalmazhatók helyette az autokorrelációs módszerek. Ennek során a kép autokorrelációs mátrixát ($\rho(m, n)$) kell felírni, ahol az I a bemeneti kép, az (m, n) pedig az eltolás. A mátrix segítségével azt vizsgáljuk, hogy a kép mennyire korrelál önmagával, ha eltoljuk egyik irányba m , másik irányba n pixelértékkel. Majd ezt az értéket még lenormáljuk a kép energiájával, hogy nulla és egy közötti értékeket kapjunk.

$$\rho(m, n) = \frac{\sum_j \sum_k I(j, k) \cdot I(j + m, k + n)}{\sum_j \sum_k I^2(j, k)} \quad (8.13)$$

Az alábbi ábrákon különböző anyagok autokorrelációs mátrixának felületi függvényként való ábrázolása látható. Finom textúrák esetén, mint például a homok és a fű, nincs markáns periodikus ismétlődés, a tartomány nagy részén csak kis amplitúdók figyelhetőek meg, és a hullámzás nem tiszta. Ezzel szemben a durva textúrák esetén, mint például a gyapjú és a raffia, masszív periodikus ismétlődés figyelhető meg, a hullámzások a száltávolság függvényében egyértelműen kirajzolódnak. Ezeket a hullámzó nagyobb autokorrelációs értékeket sokkal könnyebb modellezni és szegmentálni.



8.16. ábra. Különböző textúrák autokorrelációs mátrixa

A textúrák másik fontos leírója a ko-okkurencia mátrix, aminek neve az együttes előfordulásra utal. A ko-okkurencia mátrix az alábbi képlettel határozható meg:

$$C_d(a, b) = \left| \left\{ (x, y), (v, w) \in M \times M \left| \begin{array}{l} I(x, y) = a, I(v, w) = b \\ (x, y, v, w) \in d(M) \end{array} \right. \right\} \right| \quad (8.14)$$

ahol:

- a és b intenzitás értékek
- (x, y) és (v, w) képpontok
- $I(x, y)$ és $I(v, w)$ a képpontok intenzitása
- M a vizsgált régió képpontjainak a halmaza
- $d(M)$ az adott térbeli elhelyezkedésű pontpárok koordinátáinak halmaza
 - pl. $(x, y) - (v, w) = T$

A ko-okkurencia mátrixban lényegében leszámoljuk azon képpont párokat, amelyekre igaz az, hogy az egyik képpont intenzitása a , a másik képpont intenzitása b , és a két képpont egymással d geometriai relációnak megfelelő elhelyezkedési kapcsolatban áll. Ilyen d reláció lehet az, hogy például a két pixel közötti távolság egy megadott pixelszám, vagy a két pixel egy megadott sugarú körön belül található.

Az így kapott leíró egy hisztogram jellegű mennyiség, amit úgy tudunk egy integrálúvá tenni, hogy az alábbi módon lenormalizáljuk.

$$N_d(a, b) = \frac{C_d(a, b)}{\sum_{(a, b)} C_d(a, b)} \quad (8.15)$$

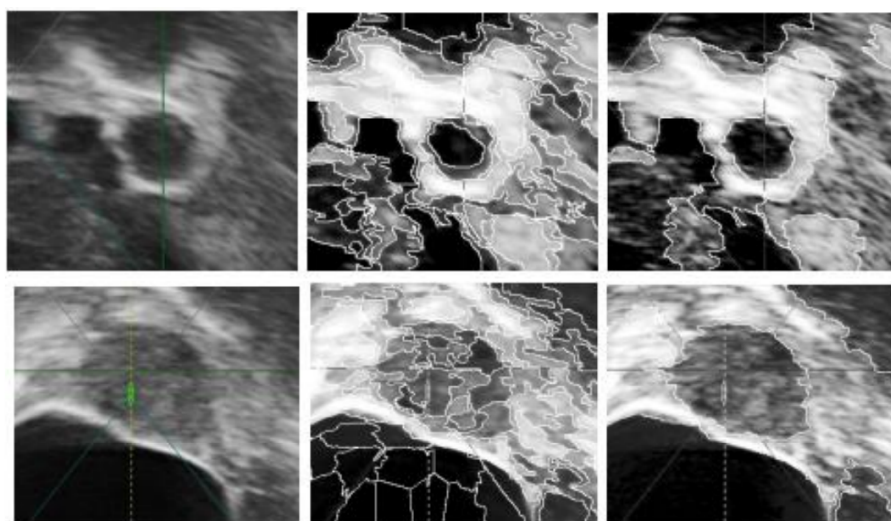
Sokszor alkalmazunk olyan geometriai kritériumot, ami nem szimmetrikus. Ilyen esetben az alábbi módszerrel lehet elvégezni a szimmetrizálást a konjugált geometriai leíró felhasználásával.

$$S_d(a, b) = C_d(a, b) + C_{d^*}(a, b) \quad (8.16)$$

A fent bemutatott ko-okkurencia mátrixok segítségével különböző statisztikák származtathatóak. Az alábbi textúra leírókat Robert Haralick definiálta, így ezeket Haralick jellemzőknek nevezzük.

- Energia: $\sum_{(a,b)} N_d^2(a, b)$
 - Ennek értéke akkor nagy, ha nagy értékek fordulnak elő benne kevés helyen.
 - A nagy energiaérték azt is jelzi, hogy a textúra durva és masszív periodicitást mutat. Ilyenkor ezekben a periodus távolságokban lesznek azok a tüskék, ahol az együttes hisztogramban nagy értékeket fogunk látni.
- Entrópia: $-\sum_{(a,b)} \log(N_d(a, b)) \cdot N_d(a, b)$
 - Ennek értéke akkor nagy, ha minél jobban szétmosott a ko-okkurencia mátrix.
 - Minél szétmosottabb a mátrix, annál több bitnyi információt képvisel az, hogy egy adott ko-okkurencia szerinti sűrűség függvényű együttes eloszlásból milyen értéket láthatunk a mintavételezés során.
- Kontraszt: $\sum_{(a,b)} (a - b)^2 \cdot N_d(a, b)$
 - Ennek értéke akkor nagy, ha nagy az intenzitások különbsége.
- Homogenitás: $\sum_{(a,b)} \frac{N_d(a, b)}{1 + |a - b|}$
 - Ennek értéke akkor nagy, ha kicsi az intenzitások különbsége.
- Korreláció, χ^2 statisztikai teszt, stb.

Ezen jellemzők lehetőséget adnak a textúra alapú szegmentálás megvalósítására. Az alábbi képek olyan régió növesztés, illetve régió darabolás eljárások eredményeit mutatja, ahol a régiók hasonlóságát a textúra alapú jellemzők definiálták.



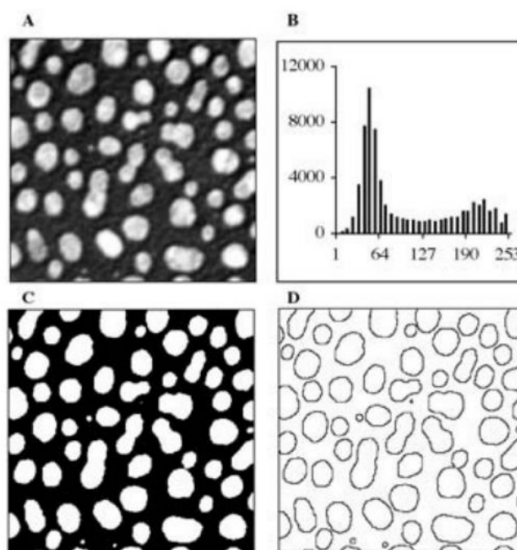
8.17. ábra. Textúra alapú szegmentálás

8.3.5. Küszöbözés

A küszöbözés legegyszerűbb verziója a globális küszöbözés. Ez a módszer egy rögzített határérték alapján egyszerűen csak két részre osztja a képet.

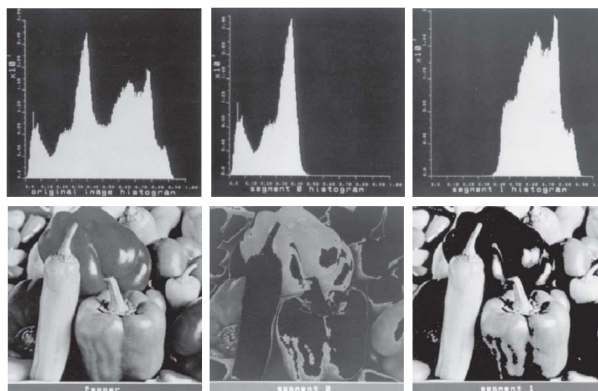
$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } (x, y) > T \\ 0 & \text{if } (x, y) \leq T \end{cases} \quad (8.17)$$

Ez a módszer akkor működik jól, ha a képet nagy homogén területek alkotják és ezeken belül az intenzitásértékek egyenletesek, vagy ha olyan szűrést alkalmazunk, ami ezt biztosítja.



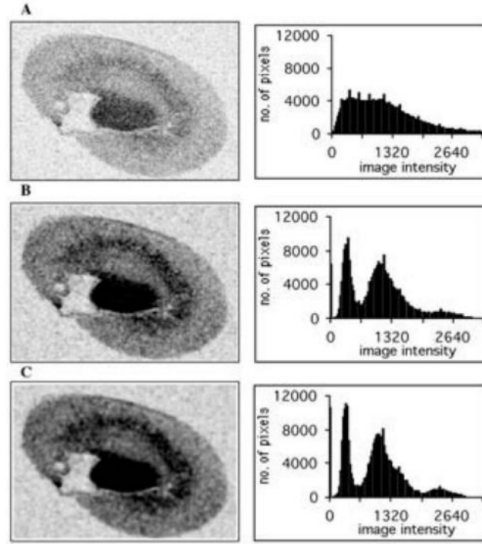
8.18. ábra. Globális küszöbözés

Sajnos a gyakorlatban sokszor zajos, kis intenzitáskülönbséggel rendelkező képeink vannak, amiken gyakran a háttérintenzitás erősen változó. Ilyen esetekben a globális küszöbölés nem működik jól. Az alábbi ábra erre mutat példát, a felső sorban a kép histogramja látható, amin megfigyelhető, hogy elég sok csúcsa van, és így nehéz eldönteni, hogy hova kell tenni a küszöböt. Az ábrán a medián intenzitás alapján történik a küszöbözés, amelyik pixel ennél kisebb intenzitású az az egyik osztályba kerül, amelyik pixel ennél nagyobb intenzitású az a másik osztályba. Az alsó sorban látható, hogy ennél a képnél ez a módszer nem képes pontos eredményt adni.



8.19. ábra. Globális küszöbözés

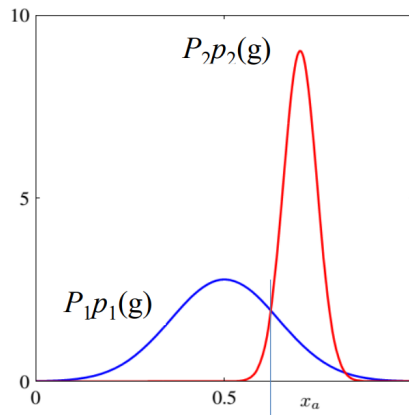
Az eredmény javítása érdekében lehetőség van a küszöbözés előtt a kép hisztogramját szűréssel (pl. mediánszűréssel) módosítani. Ez a lokális, adaptív küszöbözés módszere, viszont a gyakorlatban ez is csak ritkán ad jó eredményt. Az alábbi ábrán a *B* esetben egy 7×7 -es medián szűrő alkalmazásának eredménye látható, a *C* esetben pedig egy 9×9 -es szűrő eredménye.



8.20. ábra. Lokális, adaptív küszöbözés

A küszöbözés során általában a fent felvázolt módszert alkalmazzuk, tehát a kép hisztogramját vizsgáljuk, azon keresünk "nevezetes" pontokat, vagyis szélsőértékeket. Ezekre sűrűségfüggvényeket illesztünk, és ahol ezek metszik egymást, oda illesztjük a küszöbértéket. Belátható, hogy ha olyan intenzitásaink vannak, amik kettő darab Gauss mintavételezés eredményeként állnak elő, akkor tényleg ezen két Gauss eloszlás sűrűségfüggvényének a metszetében lesz az optimális küszöbérték. Erre a küszöbértékre lesz igaz, hogy az ennél kisebb intenzitású pixelek nagy része a P_1 eloszlásból jön, míg az ennél nagyobb intenzitású pixelek nagy része a P_2 -es eloszláshoz tartozik.

$$p(g) = \frac{P_1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(g-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{P_2}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(g-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} = P_1 p_1(g) + P_2 p_2(g) \quad (8.18)$$



8.21. ábra. Küszöb meghatározása Gauss görbék esetén

A két Gauss görbe metszéspontját az alábbi módon lehet meghatározni:

$$\alpha T^2 + \beta T + \gamma = 0 \quad (8.19)$$

$$\alpha = \sigma_1^2 - \sigma_2^2 \quad (8.20)$$

$$\beta = 2(\mu_1\sigma_2^2 - \mu_2\sigma_1^2) \quad (8.21)$$

$$\gamma = \mu_2^2\sigma_1^2 - \mu_1^2\sigma_2^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2 \ln\left(\frac{\sigma_1 P_1}{\sigma_2 P_2}\right) \quad (8.22)$$

Ha $\sigma_1 = \sigma_2$, akkor

$$T = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} + \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_2} \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \quad (8.23)$$

8.3.6. Expectation–maximization algoritmus

Az EM algoritmus során egy Maximum Likelihood becslést szeretnénk elvégezni, ami i darab megfigyelést ($x^{(i)}$) tartalmaz.

$$\theta^* = \arg \max_{\theta} \left\{ l(\theta) = \sum_i \log(p(x^{(i)} | \theta)) \right\} \quad (8.24)$$

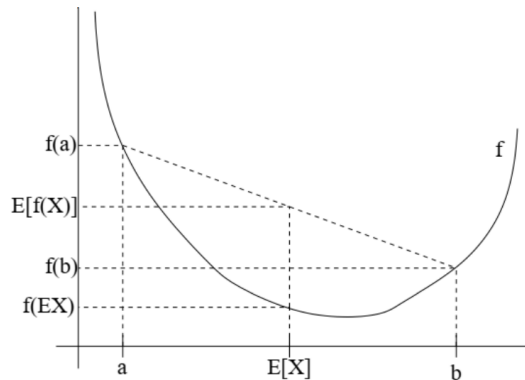
A fenti becslési probléma megoldása alapvetően nem egyszerű feladat, könnyebb lenne, ha ismernénk bizonyos látens, más néven orákulum változók ($z^{(i)}$) értékeit.

$$\theta^* = \arg \max_{\theta} \left\{ l(\theta) = \sum_i \log(p(x^{(i)}, z^{(i)} | \theta)) \right\} \quad (8.25)$$

A kevert Gauss-os mintavételezés esetén az $x^{(i)}$ -k ezen Gauss eloszlások mintavételei, $z^{(i)}$ azt mondja meg, hogy egy minta milyen valószínűséggel jön az egyik vagy a másik Gauss eloszlásból, és θ pedig ezen Gauss eloszlások paramétereit adja meg.

PET rekonstrukció esetén az $x^{(i)}$ -k a beütések gyakoriságát fogják mutatni, a θ pedig a rekonstruálandó térfogat funkcionalitását, lényegében az anyagfelhalmozását adja meg.

Ha az i megfigyeléshez tartozó $z^{(i)}$ orákulumok értékei ismertek lennének, akkor a θ^* becslést könnyebben ki lehetne számolni. A probléma abból fog adódni, hogy ezek a $z^{(i)}$ -k számunkra nem lesznek megfigyelhetőek. Ezért a kevert Gauss-os paraméterbecslés segítségével próbáljuk meg becsempészni ezen orákulumok értékét a képletünkbe. Ennek során a Jensen egyenlőtlenséget használjuk fel. Ez azt mondja ki, hogy ha f egy konvex függvény, X pedig egy valószínűségi változó, akkor $E\{f(X)\} \geq f(E\{X\})$.



8.22. ábra. Jensen egyenlőtlenség szemléltetése

Első lépésként a szorzásról térjünk át logaritmusok összegére. Majd az orákulum változóval bővítjük ki a feltételes valószínűséget. Ezt követően definiáljuk $Q^{(i)}$ eloszlásfüggvényt, és ezzel bővítjük a $z^{(i)}$ orákulumokat. Ezt átírhatjuk úgy, hogy $z^{(i)}$ mintavételezi a $Q^{(i)}$ eloszlást, és így egy olyan alakot kapunk, amin már alkalmazható a Jensen-egyenlőtlenség. Viszont mivel a logaritmus egy konkáv függvény, ezért fordul a reláció és így a kifejezést alulról tudjuk becsülni.

$$\begin{aligned}
& \operatorname{argmax}_{\theta} \left\{ \prod_i p \left\{ \underline{x}^{(i)} \mid \underline{\theta} \right\} \right\} = \\
& \operatorname{argmax}_{\theta} \left\{ \sum_i \log p \left(\underline{x}^{(i)} \mid \underline{\theta} \right) \right\} = \\
& \operatorname{argmax}_{\theta} \left\{ \sum_i \log \left(\sum_{z^{(i)}} p \left(\underline{x}^{(i)}, \underline{z}^{(i)} \mid \underline{\theta} \right) \right) \right\} = \\
& \operatorname{argmax}_{\theta} \left\{ \sum_i \log \left(\sum_{z^{(i)}} Q^{(i)} \left(\underline{z}^{(i)} \right) \cdot \frac{p \left(\underline{x}^{(i)}, \underline{z}^{(i)} \mid \underline{\theta} \right)}{Q^{(i)} \left(\underline{z}^{(i)} \right)} \right) \right\} = \tag{8.26} \\
& \operatorname{argmax}_{\theta} \left\{ \sum_i \log \left(\sum_{z^{(i)} \sim Q^{(i)}} \frac{p \left(\underline{x}^{(i)}, \underline{z}^{(i)} \mid \underline{\theta} \right)}{Q^{(i)} \left(\underline{z}^{(i)} \right)} \right) \right\} \geq \\
& \operatorname{argmax}_{\theta} \left\{ \sum_i \mathbb{E}_{z^{(i)} \sim Q^{(i)}} \log \left(\frac{p \left(\underline{x}^{(i)}, \underline{z}^{(i)} \mid \underline{\theta} \right)}{Q^{(i)} \left(\underline{z}^{(i)} \right)} \right) \right\}
\end{aligned}$$

Ekkor a $Q^{(i)}$ sűrűségfüggvényt úgy kell meghatározni, hogy az alsó becslés egyenlőség legyen. Az egyenlőtlenség pontosan akkor éles, ha

$$Q^{(i)} \left(\underline{z}^{(i)} \right) = c \cdot p \left(\underline{x}^{(i)}, \underline{z}^{(i)} \mid \underline{\theta} \right) = \frac{p \left(\underline{x}^{(i)}, \underline{z}^{(i)} \mid \underline{\theta} \right)}{\sum_{z^{(i)}} p \left(\underline{x}^{(i)}, \underline{z}^{(i)} \mid \underline{\theta} \right)} = p \left(\underline{z}^{(i)} \mid \underline{x}^{(i)}, \underline{\theta} \right) \tag{8.27}$$

ahol

$$\sum_{z^{(i)}} p \left(\underline{x}^{(i)}, \underline{z}^{(i)} \mid \underline{\theta} \right) = p \left(\underline{x}^{(i)} \mid \underline{\theta} \right) = \frac{1}{c} \tag{8.28}$$

$$\tag{8.29}$$

Tehát a $Q^{(i)}$ sűrűségfüggvény a $z^{(i)}$ valószínűségi változók posteriorja. Az EM algoritmus során a likelihood alsó becslését kell maximalizálni iteratívan. Az iteratív eljárás során az alábbi két lépést kell elvégezni

- Expectation lépés:

$$Q_i^{(t)} \left(\underline{z}^{(i)} \right) = p \left(\underline{z}^{(i)} \mid \underline{x}^{(i)}, \underline{\theta} \right) \tag{8.30}$$

- Maximization lépés:

$$\theta^{(t+1)} = \operatorname{argmax}_{\theta} \left\{ \sum_i \sum_{z^{(i)}} Q_i^{(t)} \left(\underline{z}^{(i)} \right) \log \frac{p \left(\underline{x}^{(i)}, \underline{z}^{(i)} \mid \underline{\theta} \right)}{Q_i^{(t)} \left(\underline{z}^{(i)} \right)} \right\} \tag{8.31}$$

Az iteráció tehát két lépésből áll. Az expectation lépés során az előző iterációból származó θ érték alapján kiszámoljuk a $Q_i^{(t)}(z^{(i)})$ értékét, majd ezt felhasználva a maximization lépés során megkeressük azt a θ értéket, amire a maximalizálandó kifejezés a legnagyobb értéket veszi fel. Belátható, hogy ez egy konvergens eljárás, ami θ szerint egy nulla gradiensű pontba konvergál. Viszont a gyakorlatban a legtöbb probléma nem konvex probléma, és ilyen esetben a nulla gradiensű ponthoz való konvergálás annyit jelent, hogy leáll az algoritmus, de ez nem feltétlenül lesz az optimális érték.

Az EM algoritmus értelmezhető úgy is, hogy egy block coordinate ascent eljárásunk van az alábbi költségfüggvénnyel.

$$J(Q, \theta) = \sum_{\theta} \sum_{z^{(i)}} Q_i^{(i)}(z^{(i)}) \log \frac{p(x^{(i)}, z^{(i)} | \theta)}{Q_i^{(i)}(z^{(i)})} \quad (8.32)$$

Ebben az esetben szintén két lépéssel megy iteratívan a szélsőérték-keresés. Az első lépésben az orákulum változó sűrűségfüggvényét becsüljük úgy, hogy fixáljuk a többi paramétert, a második lépésben pedig a megkapott sűrűségfüggvényt felhasználva keressük a kifejezés θ szerinti maximumát.

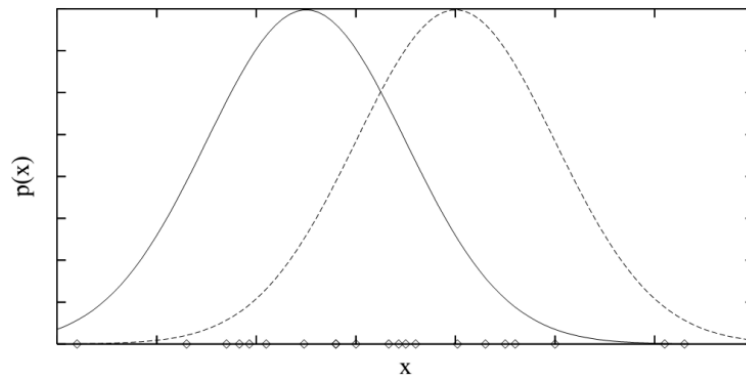
- Expectation lépés:

$$Q^{(t+1)} = \operatorname{argmax}_Q \{ J(Q, \theta^{(t)}) \} \quad (8.33)$$

- Maximization lépés:

$$\theta^{(t)} = \operatorname{argmax}_{\theta} \{ J(Q^{(t+1)}, \theta) \} \quad (8.34)$$

Az alábbi feladat egy mintapélda az EM algoritmusra. A feladat a Gauss eloszlások paramétereinek becslése, jelen esetben θ_1 és θ_2 becslése.



8.23. ábra. EM algoritmus mintapélda

Az x_i értékek a megfigyelések, a z_{ij} értékek pedig azt adják meg, hogy mekkora annak a valószínűsége, hogy az i -edik megfigyelést a j -edik Gauss generálta. Ha ezek a z_{ij} értékek megfigyelhetőek lennének, akkor meghatározhatóak lennének a y_i értékek, amik azt fejezik ki, hogy melyik Gauss-ból lett mintavételezve x_i .

$$y_i = \langle x_i, z_{i1}, z_{i2} \rangle \quad (8.35)$$

Az optimalizációs probléma az alábbi alakban írható fel.

$$\operatorname{argmax}_{\theta_1, \theta_2} \left\{ \prod_i p_1(\underline{x}^{(i)} | \theta_1)^{z_1^{(i)}} \cdot p_2(\underline{x}^{(i)} | \theta_2)^{z_2^{(i)}} \right\} \quad (8.36)$$

ahol

$$p_j(\underline{x}^{(i)} | \theta_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\underline{x}^{(i)} - \theta_j)^2\right) \quad (8.37)$$

Vezessük be az orákulum változót, ehhez vegyük a kifejezés logaritmáltját. Ekkor a produktumokból szummák lesznek, a kitevőkből pedig szorzótényezők.

$$\operatorname{argmax}_{\theta_1, \theta_2} \left\{ \sum_i \sum_{j=1}^2 z_j^{(i)} \log(p(\underline{x}^{(i)} | \theta_j)) \right\} \quad (8.38)$$

ahol

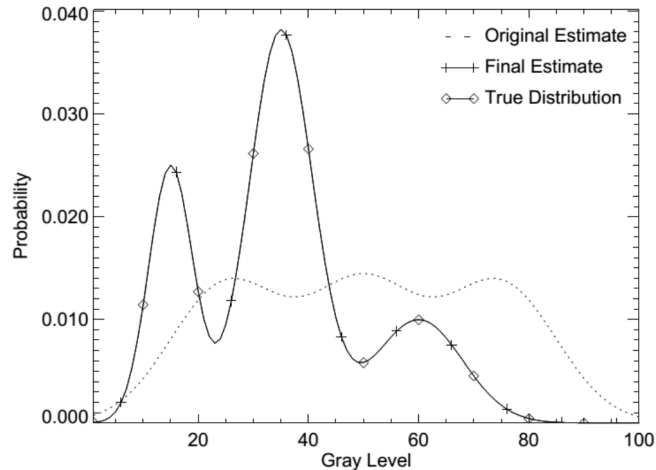
$$z_j^{(1)} = \begin{cases} 1 & | \underline{x}^{(i)} \sim p_j \\ 0 & | \text{egyébként} \end{cases} \quad (8.39)$$

Ennek a kifejezésnek keressük a szélsőértékét, ami z_j ismeretében könnyű feladat lenne. Viszont ez nem ismert, ezért az expectation lépés során becsülni kell ennek értékét úgy, hogy $z_1^{(1)}$ és $z_2^{(1)}$ összege egy legyen.

$$\begin{aligned} z_1^{(i)} &\sim p(\underline{x}^{(i)} | \theta_1) \\ z_2^{(i)} &\sim p(\underline{x}^{(i)} | \theta_2) \end{aligned} \quad (8.40)$$

Tehát ebben a lépésben az orákulum változó eloszlását becsüljük, majd a maximization lépés során a 8.38 kifejezést maximalizáljuk. Az iteratív eljárás végén az orákulum változók értéke fogja megadni, hogy az adott megfigyelés melyik eloszlás mintavétele volt.

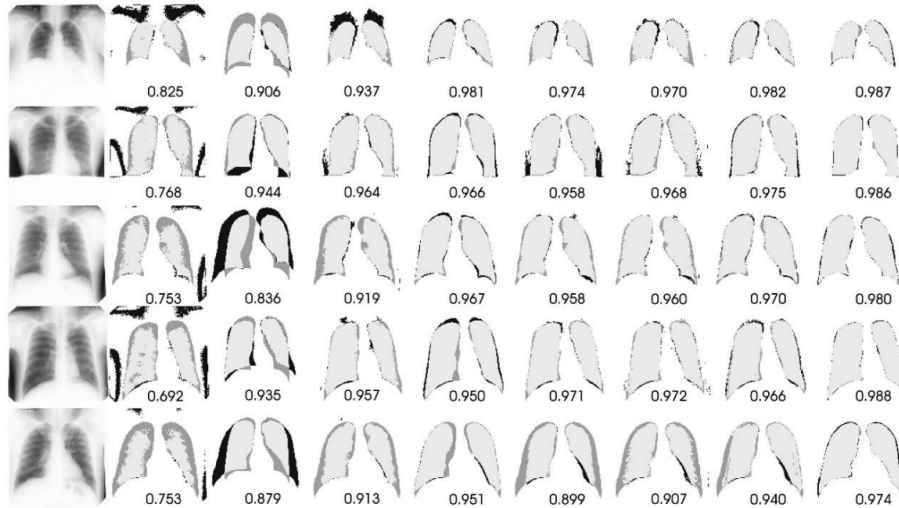
Az alábbi ábrán egy futási eredmény látható három Gauss keverék mintavételre. A szaggatott vonal az inicializáláskor felvett értékeket mutatja, míg a folytonos görbéről a becslés végén megkapott paraméterértékek olvashatóak le. A rombusz jelöli az elvárt jó eredményt, az adott kimenetet pedig a + jel adja meg. Jól látható ebben az esetben, hogy a két eloszlásfüggvény illeszkedik egymásra.



8.24. ábra. Illusztratív példa EM alapú Gauss paraméterbecslésre

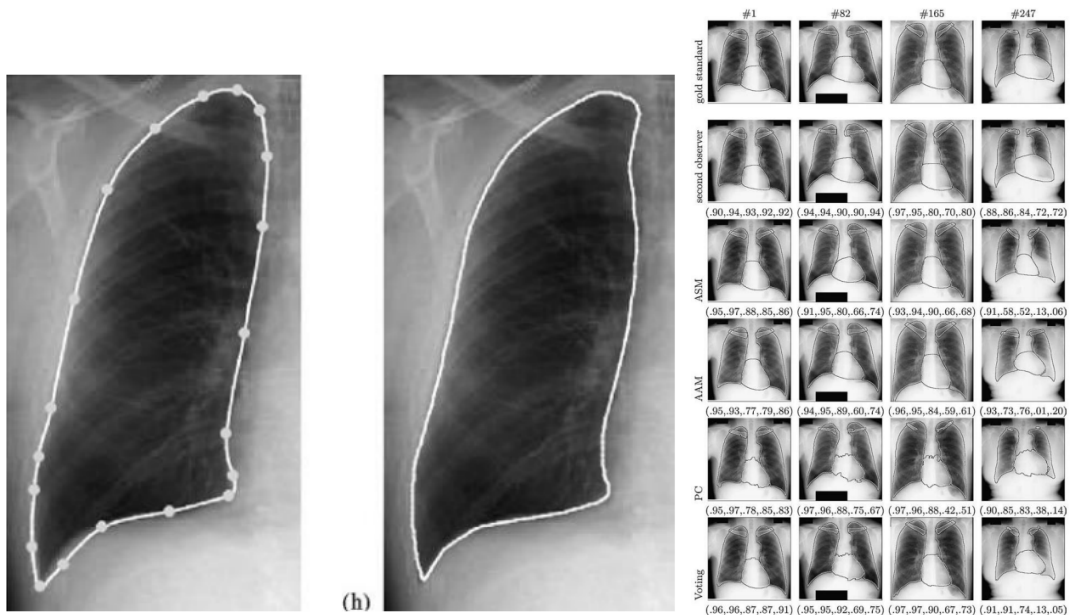
8.4. Képszegmentálási eredmények

Az alábbi képen tüdőfelvételek szegmentálása látható hét különböző eljárással. A képen a true negatív eredményeket a fehér részek jelölik, a true pozitív eredményeket a világos szürke részek, míg a false pozitív eredmények helye sötét szürke, a false negatív eredményeké pedig fekete.

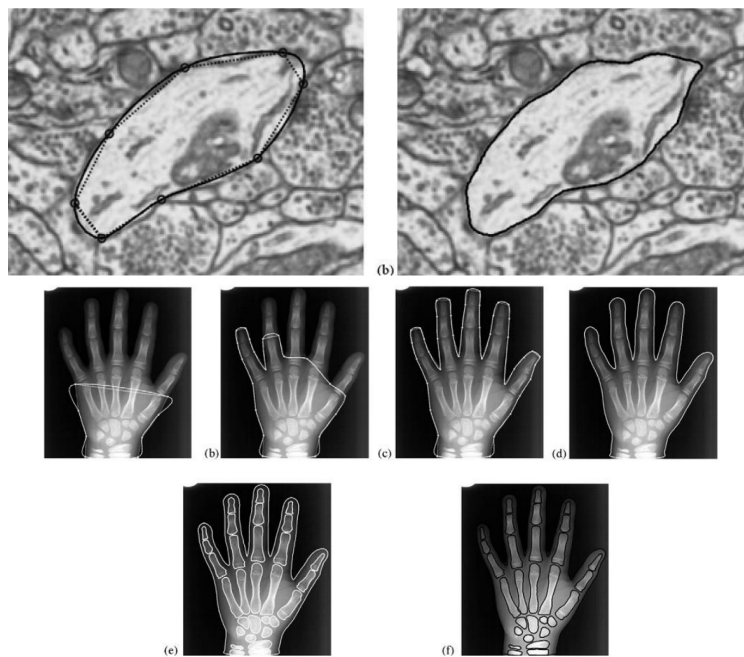


8.25. ábra. Tüdőszegmentálás különböző eljárásokkal

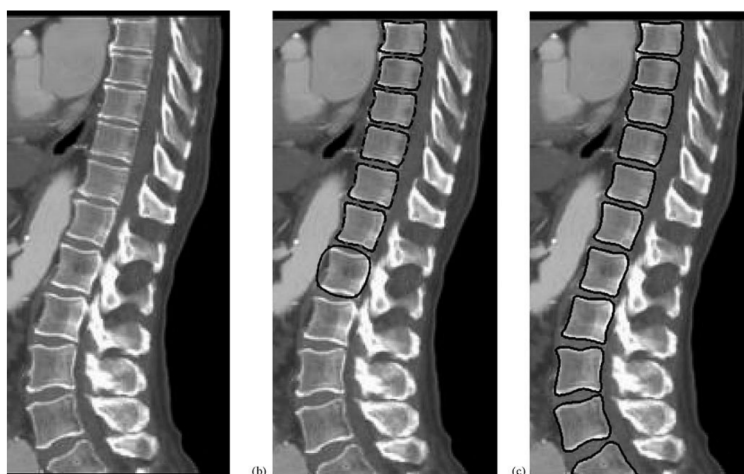
Az alábbi képeken további szegmentálási eljárások eredményei láthatóak.



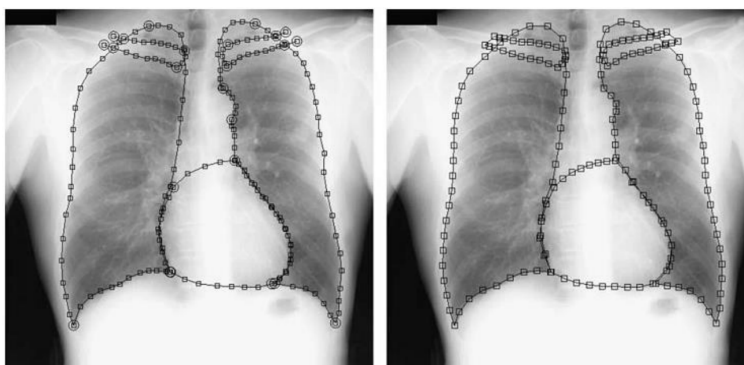
8.26. ábra. Tüdőszegmentálás Snake eljárással



8.27. ábra. Orvosi képek szegmentálása



8.28. ábra. Csigolyák szegmentálása



8.29. ábra. Tüdő- és szívszegmentálás deformálható modellel

9. fejezet

Deformálható modellek

A deformálható modellek olyan görbék vagy felületek, melyek különböző hatások eredményeképp alakulnak ki. Sokféle deformálható (elasztikus) modell létezik és a komplex alakzatok lebonthatóak az őket felépítő elemi alakzatokra. A deformálható modellek egyik fontos tulajdonsága, hogy immunisak a képet terhelő zajokra, illetve a határokon meglévő esetleges kontúrhiányokra. Tipikusan a numerikus optimalizáció apparátusára támaszkodnak és két fő csoport különül el egymástól: a parametrikus és a geometrikus defonórmálható modellek, melyek közül az első lesz részletesebben ismertetve.

A parametrikus modellek jellemzően felhasználhatóak szegmentációra, melynek során a feladathoz kapcsolódó görbék (objektum körvonalait leíró görbék) parametrikus felírásához szükséges paraméter értékek megtalálása a cél. A parametrikus megközelítésnek is megvannak az előnyei és a hátrányai. Előnyei közé tartozik, hogy egyszerűbben számolhatóak. Legnagyobb hátránya a topológiai kényszerek teljesülése, amely megnehezíti a felület/görbe az összeolvasztását és szétvágását. Az eljárás során a definiált költség/-energia függvények minimalizálása a cél. Pl. Fourier sor alakmodell, ASM/AAM, ACM, melyekről részletesebben a következő fejezetekben lesz szó.

Geometriai modellek level set (szint halmazok) módszert alkalmaznak. Ezek számításánál olyan függvény felületet definiálnak, melynek adott értékű pontjait összekötő görbe írja le a szegmentálandó objektum kontúrját. Paraméteres formában csak a deformáció után jelennek meg. A parametrikus megközelítéssel ellentétben képesek kezelni a topológikus változásokat.

9.1. Fourier sor alakmodell

A parametrikus megközelítés egyik módja a Fourier sor alakmodell, amely lényege a szegmentálandó kontúr Fourier sorfejtése. A megközelítés kézenfekvő olyan esetekben, amikor a szegmentálandó objektum teljes terjedelmében látszik a képen. Ilyenkor tudjuk, hogy egy zárt konturról van szó és a pontjainak x, y koordinátái felírhatóak periodikus, szinuszos függvények összegeként.

$$x = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\Theta + \phi_n) \quad y = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\Theta + \psi_n),$$

ahol ϕ_n a kezdeti fázis és a_n az adott szinuszos görbe súlya. Mind az x , mind az y koordinátának van egy várható értéke x_0 és y_0 párral jelölve. Az alakot az a, b, ψ_n és ϕ_n paraméterekkel írjuk le. Változtatva a paraméterek értékét, valamint a szumma tagjainak számát, különböző alakzatok generálhatóak.

Ily módon szinte tetszőleges alak leírható, anélkül, hogy bármi a priori információnk volna az alakról és minimalizálási feladatok is megfogalmazhatóak (hasonlóan, mint a Snake esetén).

A Fourier sor reprezentációval sima felületeket szépen lehet írni, viszont vannak esetek amikor nem alkalmazható megfelelően. A nagyobb felületi görbületváltozások esetén (törésnél, sarkoknál) a Fourier sor alakmodell véges sok taggal nem képes jól lekövetni ezeket a változásokat és lekerekítve modellezi. Hasonlóan, mint amikor négyyszögjel Fourier sorfejtée következményeként megjelenhet a Gibbs artifakt.

9.2. ASM/AAM

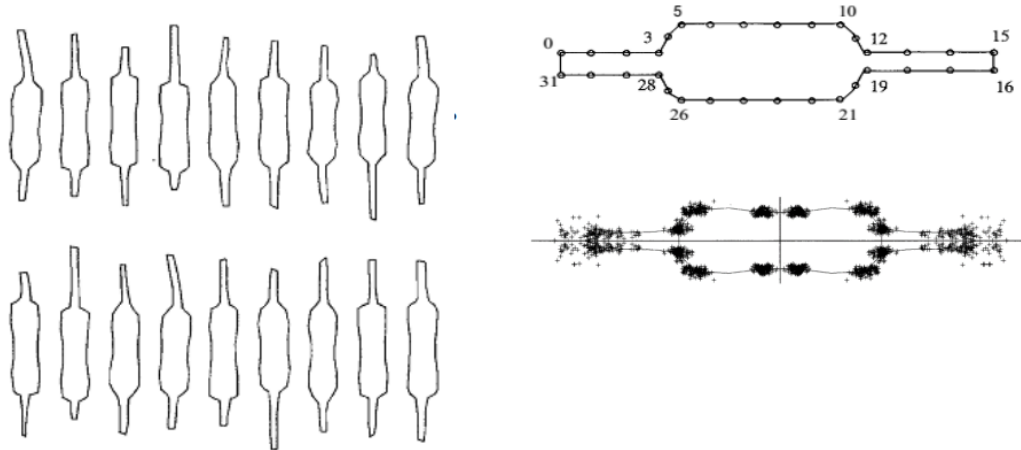
Active Shape Models objektumok alakjának statisztikus modellei, melyeket iteratíván igazítunk egy példány képi megjelenéséhez. Az eljárás hasonlít a gépi tanulós megközelítésekre. ASM szegmentáció konstruálásához egy mintakészlet biztosítása szükséges. Az ASM alapú szegmentálás két fő lépésből áll:

1. Modell kialakításának fázisa
2. Konkrét képen az objektum szegmentálása

Az eljárás első fázisa az előkészítési fázis, ahol a mintakészlet képein szegmentálva kell az objektumokat az eljáráshoz biztosítani és ezen szegmentációk eloszlását fogja feltérképezni. A szegmentáción felüli elvárás még az objektum kontúrjának jellegzetes pontjainak definiálása. Ezek a landmark pontok.

A szegmentálási fázisban ezen eloszlás paramétereit az adott képhez illeszti, majd ez alapján találja meg a feladatban keresett objektum kontúrját. Ismert egy kezdeti becslése a kontúrnak és az ehhez tartozó alakparaméterek, majd iteratív módon a modellpontokat normális irányban módosítja.

Snake esetén a kontúrt egy folytonos görbével lehet leírni, viszont ASM-nél az egyes szegmentált kontúrokat annak bizonyos pontjaival adjuk meg, ezek a landmark vagy referencia pontok. A szegmentálni kívánt alakot minden képen ezzel a pontkészlettel jellemezzük, melyet géppel vagy kézzel határozzunk meg. Fontos, hogy ezek különböző képeken páronként megfeleltethetőek legyenek egymással. Célszerű jelentéssel bíró, robusztusan és könnyen lokalizálható pontokat keresni. Érdekes szétválasztani két megközelítést. Az egyik megközelítésben orvosi szemmel jellegzetes pontokat keresünk, mint például tüdőcsúcs teteje, ami anatómiai értelemben egy kitüntetett pont. A másik megközelítésben az algoritmus által könnyen detektálható pontokat (pl. sarokpontokat) választunk landmark pontoknak. Arra is érdemes ügyelni, hogy a zaj érzékenyséjük kicsi legyen. A pontok össze vannak kötve, tehát a sorrendjük is fontos. A modell építése úgy történik, hogy veszik a referencia pontok átlagát és meghatározzák az attól való tipikus eltérésük irányát és mértékét.



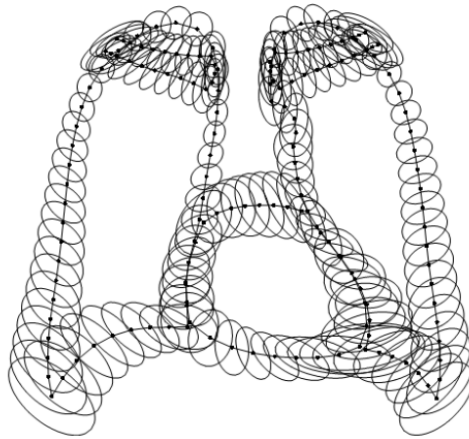
9.1. ábra. Landmark pontok meghatározása ellenálláson.

Nyomatott áramkörökről készült fényképeken akartak szegmentálni bizonyos típusú elemeket, mint például kondenzátor, ellenállás stb.. Az ábrán az ellenállás szegmentálási részfeladatnak látható egy bemeneti modell halmaza, ami különböző képeken körberajzolt ellenállások körvonala látható. Landmark pontoknak a képfeldolgozás területén ismert feature pontokat választották meg, melyek gépileg jól lokalizálható pontok. Az ábrán a (0, 3, 5...) számokkal jelzett pontok nagy görbületű pontok vagy sarokpontok, melyek lokalizációja robusztusan lehetséges. Köztük is vannak landmark pontok, melyek az előbbi pontok interpolációinak eredményei.

A definiált referenciapontok különböző mintákhoz való illesztésével meghatározható, hogy milyen eloszlást írhatnak le. Az objektumok képi megjelenése általában változó a pozíciójukat, orientációjukat és méretüket tekintve.

Értelmes modell építéséhez ezt korrigálni kell, mivel az objektum kontúrjáról akarunk statisztikát nem annak helyéről, orientációjáról vagy méretéről. Általánosan erre szolgál a ponthalmazok regisztrációja, melynek célja minden referenciapontnak a saját átlagától való négyzetes eltéréseinek a minimalizálása. Ehhez szükséges a prokrusztész analízis, amely pozíció, orientáció és méret uniformizálást végez. A bemenetül kapott landmark pontokból álló vektor elemeit transzformálja úgy, hogy eltolja őket közös súlypont köré, egy orientációba forgatja őket és még a skálájukat is képes kompenzálni.

Mellkas röntgen felvételeken tűzték ki feladatnak azt, hogy a tüdő körvonalát, a szív körvonalát és a kulcscsontok körvonalát meghatározzák. A cél orvosi döntéstámogató rendszer fejlesztése, ami a daganatokat, különböző változásokat kiemeli. Amennyiben tüdőhöz kapcsolódó elváltozásról van szó, azt a tüdő projekcióján belül kell keresni. Hasonlóan a szívnél és más eseteknél is. Szóval az első lépés a különböző szervek szegmentációja. A feladat nehézsége abból ered, hogy egy térbeli struktúrát kell leképezni a síkba. Az adathalmazon, amivel konstruálták az ASM modellt, láthatóak a landmark pontok fekete ponttal jelölve a prokrusztész analízises, merev testes regisztráció után. Ezen landmark pontok a körülöttük lévő ellipszisből kerülnek ki valamekkora konfidenciával, majd az összes landmark pontból képződik egy vektor. Az így kapott vektorok eloszlásának meghatározása a cél. Az a fontos, hogy ezek egymáshoz képest hogyan mozdulnak el és milyen változatosságot mutatnak. Ezzel felmérhető a szegmentáló kontúrok változatossága.



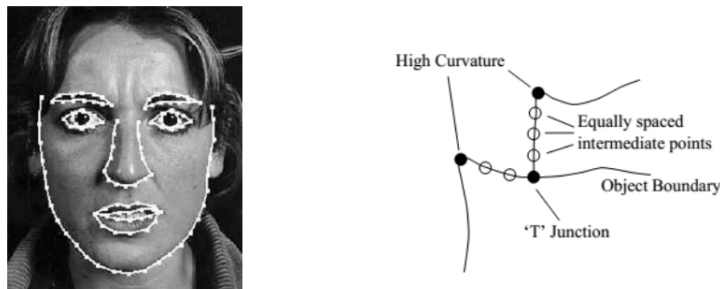
9.2. ábra. Prokrusztész analízist követően az egyes pontok elmozlását mutató PCA.

További példák is mutathatóak, például arcszegmentálsnál is egy népszerű eszköz volt sokáig, amíg ezt hatékonyabb eljárások felváltották.



9.3. ábra. Arc landmark pontjai.

Arc probléma esetén is alapvetően a robosztusan vagy algoritmikusan könnyen lokalizálható pontok jelentik a jó landmark pontokat. Ilyenek az alkalmazásfüggetlen jellegzetes pontok, mint például a sarokpontok, T-elágazású pontok, nagyobb görbületű pontok a kontúr mentén. Lehetnek kézzel jelölt a képen jelentéssel bíró, alkalmazásspecifikus pontok is. Arc geometriájának vizsgálása esetén például a szemek belső csücskei közötti szakasz felezőpontja az orron egy jó referenciapontot képezhet.



9.4. ábra. Jellegzetes referenciapontok.

A modell építéshez venni kell az így meghatározott landmark pontoknak egy leíró vektorát $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$, amely n darab esetén $2n$ koordinátát fog tartalmazni.

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)^T \quad (9.1)$$

Ezen leíró vektorok egy $2n$ változós Gauss-eloszlásból származnak és ennek az eloszlásnak kell adott főkomponens menti varianciáját meghatározni.

Minden képhez pontosan meghatározzuk a landmarkokat (kontúr ugyanazon pontjait). Az alakok ugyanabban a koordinátarendszerben kell megjelenjenek: irány, pozíció, méret egységesítés úgy, hogy az átlagostól valónégyzetes eltérés minimumot adjon (Prokrusztész analízis).

$$D = \sum |\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}|^2 \quad (9.2)$$

Van s darab kép, egy $2n$ dimenziós térben reprezentálva, tehát s darab $2n$ dimenziós adat (vektor) alkot egy pontfelhőt, melynek pontjai hasonló pozícióban lesznek a regisztráció miatt. A megengedhető alaktartományon belül hasonló, új alakokat is lehet generálni. A sokdimenziós térben a pontok a képek különbözőségei miatt egy közel ellipszoidon belül helyezkednek el. Az ellipszoid középpontját és tengelyeit határozzuk meg. Alkalmazzuk a pontfelhőre a PCA-t.

$$\mathbf{x} \approx \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{P}\mathbf{b} \quad (9.3)$$

egy közelítő reprezentáció az "eredeti" térben. $P = (p_1|p_2|\dots|p_t)$ a transzforációs mátrix t darab sajátvektorból.

$$\mathbf{b} = \mathbf{P}^T(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \quad (9.4)$$

a közelítő reprezentáció a transzformált (sajátvektorok által kifeszített) térben, ahol b a konkrét alakzatot leíró paramétervektor.

PCA lépései:

1. Átlagképzés: $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \mathbf{x}_i$
2. Kovariancia mátrix felírása: $\mathbf{S} = \frac{1}{s-1} \sum_{i=1}^s (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T$
3. Határozzuk meg S sajátvektorait (p_i) és sajátértékeit ($\lambda_i, i = 1, \dots, 2n$)
4. Rendezzük csökkenő nagyság szerinti sorba: $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$
5. Számítsuk ki a jel átlagos négyzetes értékét: $V_T = \sum_i \lambda_i$
6. Vegyük az első t legnagyobb sajátértéket, ahol adja meg, hogy a teljes variancia hány százalékát akarjuk megtartani (tipikus érték 80-98%): $\sum_{i=1}^t \lambda_i \geq f_v V_T$

PCA célja a szegmentálandó alakzattípus tömör, paraméteres leírása, amely minősít egy konkrét szegmentációt is konfidencia jelleggel. A szegmentálás célja, hogy a képet a modellhez igazítsa numerikus optimalizálással:

$$\min \cdot \|\mathbf{x}(\mathbf{b}) - \mathbf{x}'\|_2^2, \quad (9.5)$$

ahol $x(b)$ a modell igazított pontjai és x' a szegmentálandó objektum kontúrja.

Tetszőleges eljárás alkalmazható, csak a kontúr (x') pontos helye nem ismert. Ezért helyette $G_I\{x(b)\}$ minősít, hogy mennyire "jó" kontúr az I képen az $x(b)$ pontthalmaz.

Ennek meghatározása feladatfüggő, például:

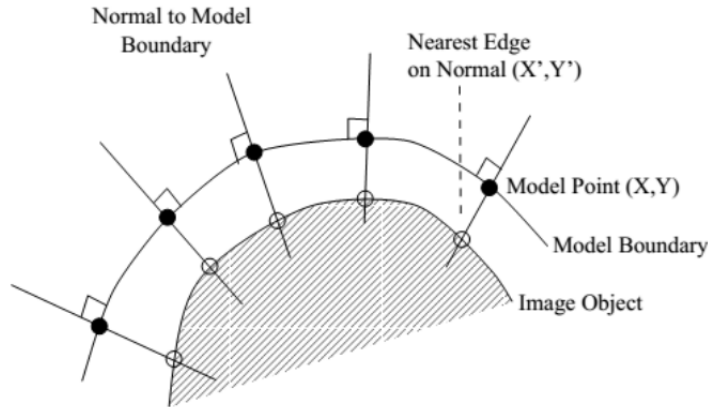
$$G_I\{\mathbf{x}(\mathbf{b})\} = \sum_i |\nabla I(\mathbf{x}(\mathbf{b})_i)| \quad (9.6)$$

és $|\mathbf{b}_{(i)}| \leq 3\sqrt{\lambda_i}$ egyenlőtlenség kényszeríti ki a statisztikához illeszkedés adott mértékét, azaz konfidenciáját.

Az alap eljárás egy iterációja:

1. A képen minden $x(b)_i$ -hez keressük meg legközelebbi él pontjait (lokális maximum az élképen a görbe normálisa mentén): x'_i
2. Frissítjük b -t úgy, hogy x' -hez legjobban illeszkedjünk: b'
3. Szóródás korlát alkalmazása: $\mathbf{b}''_i = \text{sign}(\mathbf{b}'_i) \min\{|\mathbf{b}'_i|, 3\sqrt{\lambda_i}\}$

Ha szükséges a regisztráció is (nem csak az alak, hanem annak mérete, lokációja, orientációja is változhat), akkor a Prokrusztész analízis paramétereit is a modell paramétereként kezeljük (szóródás korlátok átírásával / törlésével).



9.5. ábra. Modell illesztés.

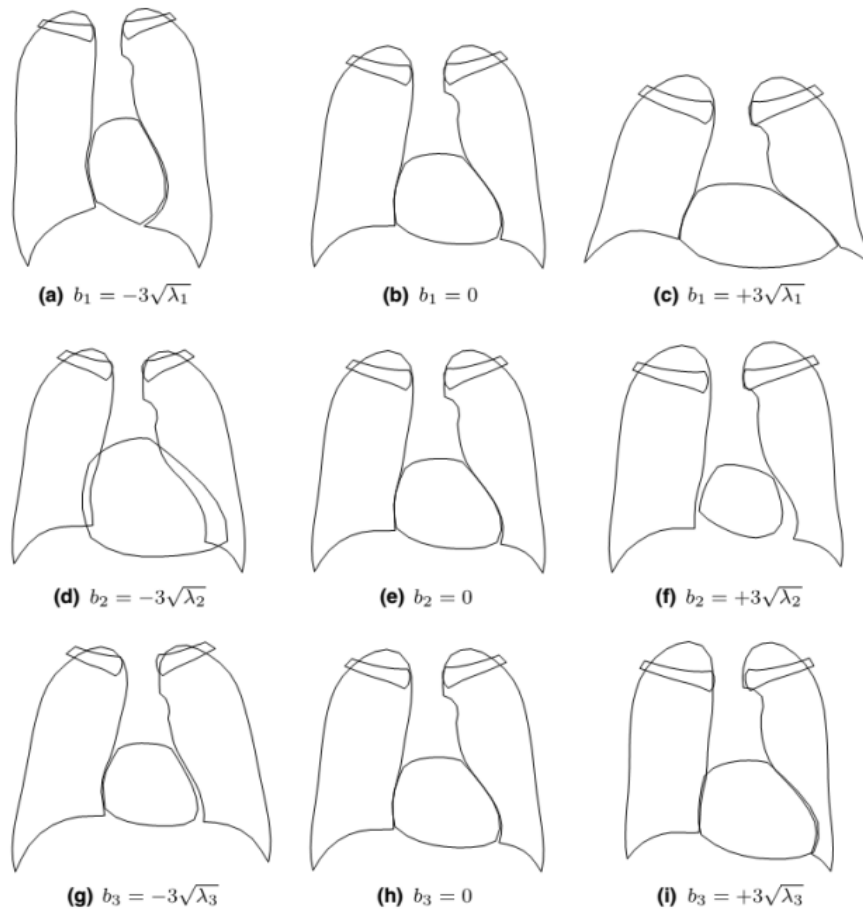
Az alábbi ábra egy mellkas röntgen szegmentálási feladathoz kapcsolódik. Az eredményül kapott szegmentáló görbék sorai a három legnagyobb szórású irányhoz tartozó főkomponenseket szemléltetik, melyek oszlopaiban három különböző konfidencia intervallumon belüli szórás értékekhez tartozó mintáik láthatóak képekre visszavetítve.

Felső sor bal oldalán a legnagyobb szóráshoz tartozó főkomponensmenti eloszláson belüli egyik szélsőértéke látható. Ez a konfidencia szint azt határozza meg, hogy a variancia gyökének a -3 -szorosánál nem lehet nagyobb az eltérés adott irányban nézve. Középső oszlopában a középérték és a jobboldali oszlopban a másik szélsőérték helyezkedik el.

Megfigyelhető, hogy a mellkasröntgenhez feladathoz kapcsolódó adatbázis alapján konstruált modell esetén a legnagyobb eltérést az emberek testalkata okozta. Magasabb, nyúlánkabb, vékonyabb alkat hosszúkásabb, keskenyebb tüdőkörvonalat eredményezett. Az átlag látható középen, illetve a zömökebb, alacsonyabb testalkathoz tartozó tüdőfelek jellegüket tekintve a jobb felső ábra körvonalaihoz hasonlóak.

Az elfogadott értékek az eloszlás szélsőértékei által meghatározott tartományból kerülnek ki és nem érvényesek az eloszláson kívül elhelyezkedő szegmentáló kontúrok.

A középső sorban a második legnagyobb elváltozást produkáló szívmegegyesítés látható. Az alsó sor ábrái a baloldali lebenyek szív miatti összeesését mutatják.



9.6. ábra. Szegmentáló görbék.

9.3. ACM Snake

9.4. Lokális optimum probléma

9.4.1. Probléma kezelése multiscale szűréssel

9.5. GVF regularizáció

9.6. Esettanulmány

10. fejezet

Regisztrációs eljárások

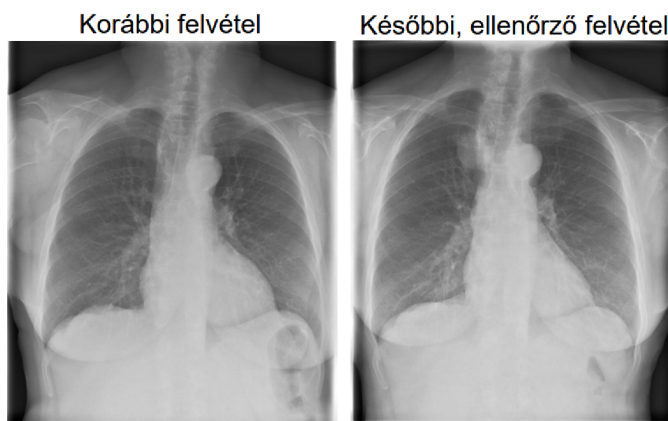
10.1. Képregisztráció célja

A képregisztráció célja két kép egymáshoz igazítása, tehát egy páciensről több időpontban vagy egy időpontban több különböző modalitással készült felvételek összeillesztése.

Ennek egyik motivációja lehet például a betegség időbeli követéséhez egy különbségkép készítése, ami megmutatja, hogy hol következett be markáns változás. A gyakorlatban jobban megvalósítható cél lehet az eltérő képalkotó modalitások (PET-CT, Röntgen-MRI, UH-MRI, ...) segítségével készített felvételek fúziója. Szintén alkalmazzák a képregisztrációt műtétek közben is, ekkor a menet közbeni felvételt vetik össze az előzetes felvétellel. Emellett kép alapú egyéb beavatkozásokra, például besugárzás beállítására, illetve mozgás hatásának kompenzációjára is alkalmazható a képregisztráció.

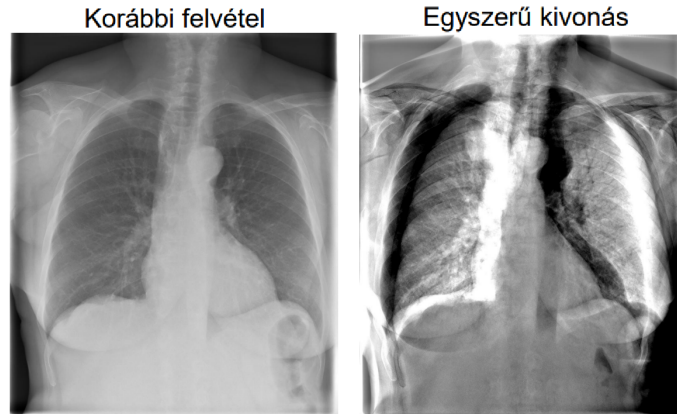
A regisztrációs eljárások elemeit általában a transzformáció, az interpoláció, a hasonlósági metrika és az optimalizálási algoritmus adja.

Az alábbi képen két, különböző időpontban készült PA mellkasröntgen látható.



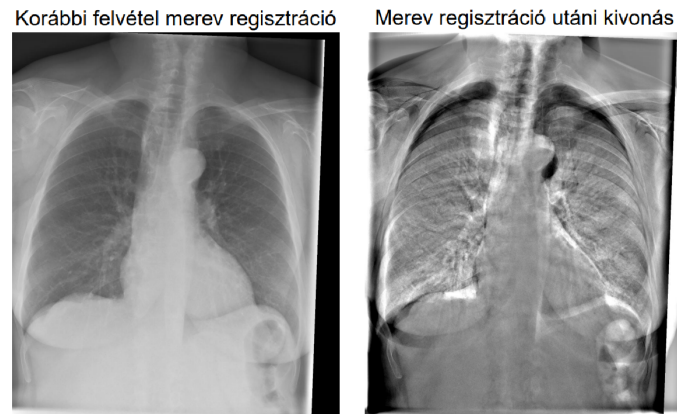
10.1. ábra. Időbeli követés példa (1)

A két kép közötti különbség jól látható szabad szemmel, viszont egy egyszerű kivonással készített különbségkép nem az elvárt eredményt adja. Igaz, a daganatos elváltozás nagy intenzitással kirajzolódik, de még nagyobb intenzitással megjelennek a régiók körvonalai és a bordaív, mivel a két kép készítésekor nem tökéletesen ugyanabban a pozícióban volt a páciens.



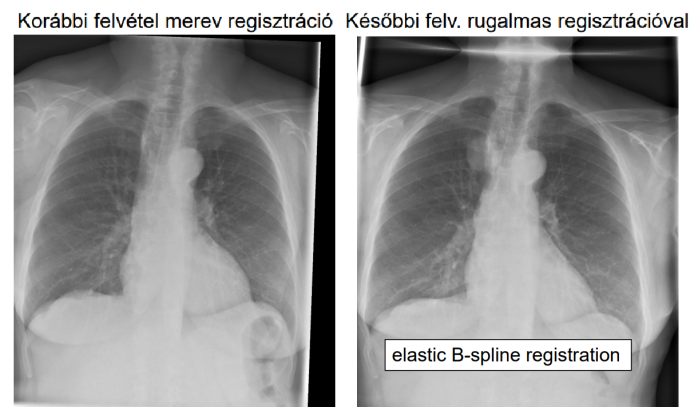
10.2. ábra. Időbeli követés példa (2)

Merev testes regisztrációt alkalmazva, tehát elforgatással, eltolással, illetve izotrópikus skálázással kompenzálva az eltéréseket, már jobb eredményt ad a kivonás. De továbbra is maradnak feleslegesen kiemelt, tényleges különbséget nem tartalmazó területek.



10.3. ábra. Időbeli követés példa (3)

Ezzel szemben a rugalmas regisztráció nem csak a merev testes transzformációkat tudja figyelembe venni, hanem képes egy görbült megfeleltetést adni a képek képpontjaira. Ennek segítségével sokkal jobb eredmény érhető el. Az alábbi ábrán látható, hogy ebben az esetben már határozottan kirajzolódik a daganat elhelyezkedése.



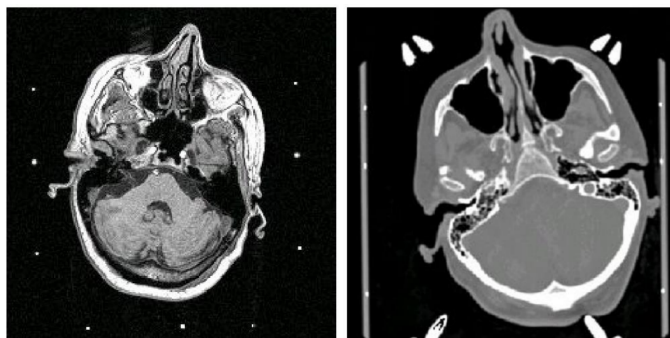
10.4. ábra. Időbeli követés példa (4)



10.5. ábra. Időbeli követés példa (5)

A felvételek regisztrációját tovább nehezíti az, hogy az emberi szervek a vizsgálat alatt mozgást végeznek. A tüdő például visszatartott levegő ellenére is elmozdul a szívverés hatására. Emellett további nehezítő tényező az, hogy a különböző időpillanatokban elkészített felvételek között a páciens változhat, például megváltozhat a súlya vagy a tartása. Ezen problémák miatt a klasszikus merevtestes regisztrációkat szinte sosem lehet jól alkalmazni.

A képregisztráció egy másik alkalmazási területét, a fúziót mutatja be az alábbi ábra. Ezen egy koponyáról látható egy MRI-CT és egy PET-CT felvétel. A CT felvételek főleg a csontokat emelik ki. Az MRI felvételeken nagy víztartalommal rendelkező lágy részek láthatóak jól, ezek sokkal nagyobb kontúrokkal jelennek meg. A PET képalkotás során pedig az anyagcsere aktivitások (tumor, gyulladás) rajzolódnak ki. Ha különböző modalitásokkal készült felvételeket regisztrálunk egymáshoz, akkor jóval több információt lehet megtudni a vizsgálatokból.



10.6. ábra. Fúzió példa

Összefoglalva tehát egy regisztráció során két kép készül: I_1 és I_2 . Ha nem azonos modalitással készült a két kép, akkor szükség van egy $g()$ egydimenziós transzformációra, ami az egyik modalitás intenzitását képzeli le a másik modalitás intenzitás tartományába. A kétdimenziós regisztrációs transzformációt pedig az $f()$ leképezés jelöli, ami az egyik kép képpontjait felelteti meg a másik kép megfelelő képpontjainak.

$$I_2(x, y) = g(I_1(f(x, y))) \quad (10.1)$$

Feltételezve, hogy a megfeleltetés ismert, keressük azt az $f()$ és $g()$ függvényt, amelyet alkalmazva a két kép a lehető legjobban illeszkedik valamilyen kritérium értelmében.

10.2. Regisztráció csoportosítása

A képregisztrációs módszerek különböző tulajdonságok alapján csoportosíthatóak.

- A két kép dimenziója alapján
 - 2D-2D, 2D-3D, 3D-3D
- A regisztráció bázisa alapján
 - A regisztráció futhat jellemzőpontok, objektumok, vagy intenzitások alapján meghatározott bázisok felett.
- Torzítást modellező geometriai transzformáció alapján
 - Az eljárások kompenzálhatnak globális vagy lokális geometriai transzformációkat, például hasonlósági, affin, perspektív, szakaszosan lineáris vagy RBF alapú transzformációt
- Az interaktivitás mértéke alapján
 - Az interaktivitás mértéke alapján is megkülönböztethetőek az eljárások, léteznek teljesen automatikus algoritmusok, illetve emberi közreműködést igénylő módszerek is.
- Modalitás alapján
 - Az is fontos szempont, hogy a regisztrációt azonos modalitások között hajtjuk-e végre, vagy szükség van fúzióra a különböző modalitások egyesítéséhez.

10.3. Síkbeli geometriai transzformációk

A regisztrációs eljárások során alapvetően négyféle transzformáció alkalmazható.

- Hasonlósági transzformáció
- Affin transzformáció
- Projektív transzformáció
- Görbült transzformáció

10.3.0.1. Hasonlósági transzformáció

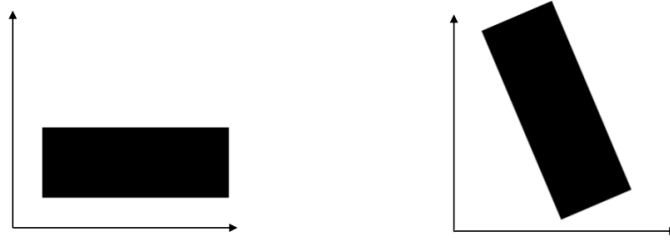
A hasonlósági, más néven merev testes transzformációk eltolást, elforgatást és izotróp skálázást modelleznek. Ezek akár már 2 megfeleltetett pontpár alapján számíthatóak. A transzformáció leírásához szükség van a kiinduló és a transzformált pontra (p_1 és p_2), egy izotrópikus skálázási tényezőre (s), egy eltolás vektorra (t) és egy elforgatás mátrixra (R).

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad s \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (10.2)$$

A forgatás mátrix determinánsa mindig 1, tehát egy unitér mátrixot keresünk, amire igaz, hogy $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$. Ezeket felhasználva a hasonlósági transzformációk az alábbi képlettel írhatóak le.

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{t} + s\mathbf{R}\mathbf{p}_1 \quad (10.3)$$

A transzformációt végrehajtva a p_1 pontok a p_2 pontokba kerülnek át.



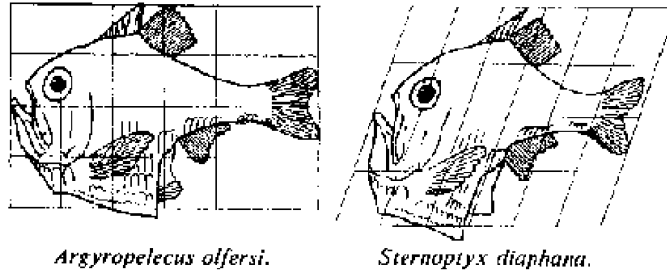
10.7. ábra. Hasonlósági transzformáció

10.3.0.2. Affin transzformáció

Az affin transzformáció a nyírást is képes modellezni. Mivel ez a koordináták felett lineáris, ezért minimum 3 pontpár kell a számításához. A nyírást egy mátrix írja le, aminek elemeire (a_{ij}) nincs semmi megkötés azon kívül, hogy a mátrix nem lehet szinguláris, tehát invertálhatónak kell lennie.

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad (10.4)$$

A nyírás egy párhuzamostartó művelet, ahol a síkok/egyenesek szintén síkok/egyenesek maradnak.



10.8. ábra. Affin transzformáció

10.3.0.3. Projektív transzformáció

A projektív transzformáció segítségével már a perspektív torzulás is modellezhető. Ez a homogén koordináták felett lesz lineáris, ezért már minimum 4 pontpárra lesz szükség a számításához. A transzformáció elvégzéséhez homogén koordinátákat használunk, $(x_1, y_1, 1)$ lesz az eredeti koordinátapont, $(x_2, y_2, 1)$ pedig a transzformált koordinátapont. A transzformációhoz szükséges a_{ij} együtthatók a kép és a síkok egyenleteiből számíthatók.

$$x_2 = \frac{a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}}{a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}} \quad y_2 = \frac{a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}}{a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}} \quad (10.5)$$

$$\mathbf{p}_2 = \frac{\mathbf{R}\mathbf{p}_1 + \mathbf{t}}{\mathbf{v}^T \mathbf{p}_1 + \alpha} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_{31} \\ a_{32} \end{bmatrix} \quad \alpha = a_{33} \quad (10.6)$$

10.3.0.4. Görbült transzformáció

A görbült, más néven nemlineáris transzformációkkal elasztikus modelleket lehet leírni, tehát a képpontok között görbült megfeleltetést lehet készíteni. Alapvetően két típusa van: a bázisfüggvényes lokális transzformáció, illetve a globális polinomiális transzformáció.

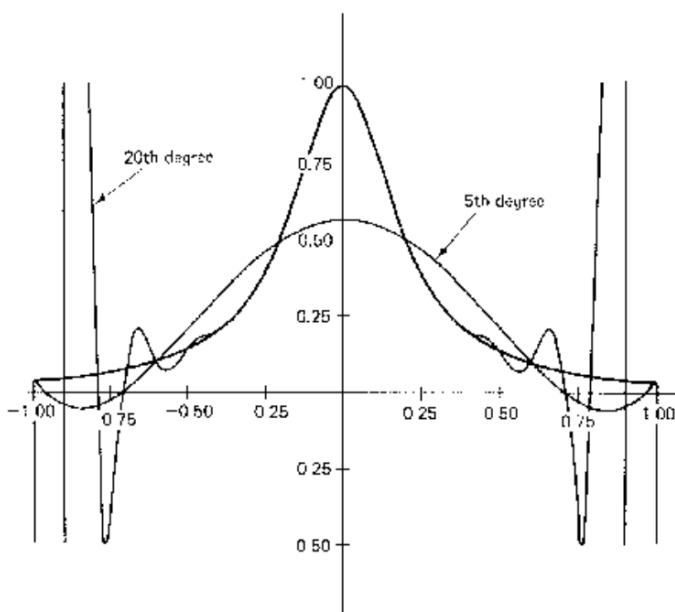
A globális transzformáció esetén egy polinomot definiálunk, ami az egyik képünk koordinátáit a másik kép koordinátáiba viszi át. Ez a polinom a kép egész területére érvényes lesz, ezért nevezzük ezt a módszert globális transzformációnak. A polinom fokszáma azt határozza meg, hogy hány paramétere van. Ezeket a paramétereket kell majd a regisztráció során megbecsülnünk.

$$T = P^{(x)}(x) + P^{(y)}(y) \quad (10.7)$$

A regisztráció során lehetőség van többváltozós polinomok használatára is.

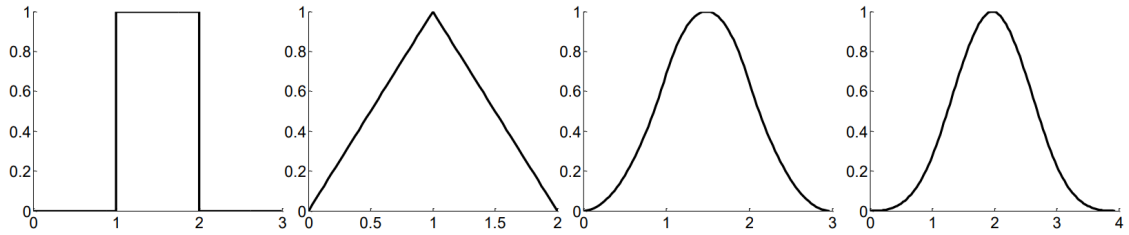
$$\mathbf{p}_1 = \left[\sum_{i,j} \mathbf{c}_{i,j}^{(1)} x_1^i y_1^j \sum_{i,j} \mathbf{c}_{i,j}^{(2)} x_1^i y_1^j \right] \quad (10.8)$$

A módszer problémája, hogy a kis fokszámú polinomok nem képesek megfelelő mértékben lekövetni az ideális megfeleltetés görbét. Viszont ahogy a polinomok fokszámát növeljük, tehát ahogy egyre nagyobb szabadságfokkal rendelkeznek, egyre több monotonitás váltás jelenik meg a görbékben. Ennek az a következménye, hogy tipikusan a kép széleinél a polinomok elkezdnek nagymértékben oszcillálni, és túlilleszkednek az eredeti jelre.



10.9. ábra. Nemlineáris, globális transzformáció

Ezért a globális polinomok nem szoktak jól működni, így ezek helyett inkább lokális transzformációkat érdemes használni szakaszonkénti polinomokkal. Ennek során a képet különböző tartományokra bontjuk, és ezen tartományokon belül külön-külön meghatározzuk a polinomiális leképezéseket. A tartományok szélén viszont ezeket a leképezéseket el kell simítani. A simításhoz pedig köbös / spline-al történő interpolációkat lehet alkalmazni. Ha kevés különböző szakasz van, akkor ez a leképezés gyorsan számolható, és egész jó eredményt ad.



10.10. ábra. Nemlineáris, lokális transzformáció szakaszonkénti polinomokkal

A gyakorlatban a lokális transzformációkat leggyakrabban radikális bázisfüggvényekkel szokták használni. Ennek során megengedünk egy középponteltolást (a_0), van benne egy lineáris tag (A_1), a görbült tagot pedig a $g(\cdot, \cdot)$ véges tartójú, radiális bázisfüggvények írják le, melyek középpontját x_i adja meg. Ezen bázisfüggvények tartója szabályozza, hogy mennyire globálisak, illetve lokálisak.

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{x} + \sum_{i=1}^N \mathbf{c}_i \cdot g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \quad (10.9)$$

Az N és x_i -k megválasztása egyáltalán nem triviális feladat, általában heurisztikus módszerekkel, például OLS-sel szokták meghatározni őket. Ezek nem globálisan optimális megoldást adnak, de a gyakorlatot tekintve egyész jól meg tudják határozni a paramétereket.

A bázisfüggvények meghatározásához leggyakrabban a Thin-plate spline-t szokták alkalmazni. Ezek a középpontjukban kis értékkel rendelkeznek, a szélei felé bírnak nagyobb értékkel, utána pedig gyorsan lecsengenek.

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_2^2 \ln(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_2) \quad (10.10)$$

10.4. Regisztrációs módszerek

TODO: 19. diától folytatni

11. fejezet

Rekonstrukciós eljárások

Háromdimenziós térfogatból valamilyen képalkotó modalitással projekciók, mérések fog-
nak készülni. Ez leginkább a röntgenes modalitás lesz, majd kitérünk pozitív emissziós
tomográfiára. Cél, az az, hogy ezekből a mérésekből visszaszámoljuk azt, hogy milyen
térfogatot is mértünk. A projekciókat sinogramnak hívtuk. A sinogramm lényegében 2
dimenziós kép lesz, egy 2 dimenziós kép körül. A random transzformáció, tehát ezekkel
a párhuzamos vetítő sugarakkal vett vetületet, avagy elvégezzük az integrálást, különbö-
ző elfogratások mellett, különböző theták mellett, és így az sinogramunknak megkapjuk
különböző oszlopait. Ez az, amit egy axiális CT, mint méréseket elvégez, és ezekből a
mérésekből történik a 2 dimenziós szeletnek a rekonstrukciója, ami körül körbefordult a
sugárforrás a detektoron. A Fourier vetítési tételt származtattuk, ebből megkaptuk, hogy
ha fogjuk ennek a képnek a radon transzformációját, akkor θ szöghöz tartozó projekció
egy olyan 1 dimenziós profil lesz melynek a spektrum az eredeti képünk vízszintes fre-
kvencia tengelyével θ szöget bezáró egydimenziós profillal megegyezik. Ez az eljárás lesz
az, amit a szűrt visszavetítés nevezetű eljárásnál ki fogunk használni. Ez egy matemati-
kai olyan rekonstrukciós eljárás lesz, mely megfelelő peremfeltételek mellett képes vizsgált
axiális szeletet hiba nélkül visszaállítani. Az alapötlet annyi lesz, hogy fogjuk ezeket a
sinogram oszlopokat, amiket ugye úgy is ismerünk a méréseinkből, egy megfelelő szűrést
alkalmazunk (jakobi mátrix determinánsából fog kiesni). A kapott, rámpa szűrt sinogram
oszlopokat fogjuk visszavetíteni, és a szűrt visszavetítés eljárás elvezetésének második része
erre utal.

Alapvetően a származtatást az inverz 2d transzformációból fogjuk indítani:

$$f(x, y) = \int_{u,v} F(u, v) \cdot \exp(2\pi j(ux + vy)) dudv \quad (11.1)$$

Térjünk át a sinogram alapspektrumára, ehhez a polárkoordinátás spektrumtranszfor-
mációt végzünk, így ennek megfelelő felírásra kell áttérni. Ehhez vezessünk be következő
változókat:

$$u := \rho \cdot \cos(\theta) \quad (11.2)$$

$$v := \rho \cdot \sin(\theta) \quad (11.3)$$

Ezzel elértük, hogy a vízszintes és függőleges komponens felírtuk a megfelelő polárko-
ordinátás alakban. Majd az új integrál:

$$\int_{\rho=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} F(\rho, \theta) \exp(2\pi j\rho(\cos(\theta)x + \sin(\theta)y)) \cdot |\mathbf{J}| d\theta d\rho \quad (11.4)$$

Az áttéréshez szükség van a jakobi mátrix determinánsára:

$$|\mathbf{J}| = \left| \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{bmatrix} \right| = \rho(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = \rho \quad (11.5)$$

A sinogram oszlopainak a spektrumát megszűrve, elforgatva összegezzük. Ekkor észrevettük, hogy minél távolabb vagyunk a DC komponenstől, annál ritkább az elforgatás után mintavételezése a 2 dimenziós képünk spektrumának, így azt is láthatjuk, hogy ez éppen a sugárral arányosan fog ritkulni. Ha ezeket a profilokat megnézzük, hiszen itt DC komponenseink 0 távolságban vannak, első pontnál a DC komponenstől vett távolság arányában vannak ezek a pontok, és minél távolabb vagyunk az DC komponenst, annál nagyobb távolságon lesznek ezek a pontok. Ezzel szemben mi elforgatjuk és összegezzük őket. Tehát így az egésznek egy igen erős aluláteresztő jellegű szűrés a hatása lesz, és ennek a kompenzálása az, hogy éppen ezen mintavételi pontok (spektrumon mintavételünk ezekben a pontokban) távolsával történő szorzással kompenzál. Láttuk, hogy ez a jakobi mátrixnak a determinánsából esett ki. A szűrt visszavetítésből a szűrés lépés többé kevésbé megvan, nézzük meg a visszavetítést.

Az integrálás lineáritása miatt elvégezhetjük a következő átalakítást 11.4 egyenleten:

$$\int_{\rho=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \cdots + \int_{\rho=0}^{\infty} \int_{\theta=\pi}^{2\pi} F(\rho, \theta) \cdot |\mathbf{J}| \cdot \exp(2\pi j \rho (\cos(\theta)x + \sin(\theta)y)) d\theta d\rho \quad (11.6)$$

Vezessünk be új változót: $\theta' = \theta - \pi$

A változó bevezetésével:

$$\int_{\rho=0}^{\infty} \int_{\theta'=0}^{\infty} F(\rho, \theta' + \pi) \cdot \rho \cdot \exp(2\pi j \rho (\cos(\theta' + \pi)x + \sin(\theta' + \pi)y)) \frac{d\theta}{d\theta'} d\theta' d\rho \quad (11.7)$$

Észrevehetjük, hogy $\frac{d\theta}{d\theta'} = 1$, és $\cos(\theta' + \pi) = -\cos(\theta')$ és $\sin(\theta' + \pi) = -\sin(\theta')$.

Vezessük be a projekciót:

$$P_{\theta'+\pi}(t) = P_{\theta'}(-t) \longrightarrow \int P_{\theta'}(-t) \exp(-2\pi j \rho t) dt = F(-\rho, \theta') \quad (11.8)$$

Nézzük meg mindkettő egydimenziós spektrumát:

$$\int P_{\theta'+\pi}(t) \cdot \exp(-2\pi j t \rho) dt = F(\rho, \theta' + \pi) = F(-\rho, \theta') \quad (11.9)$$

$F(\rho, \theta' + \pi) = F(-\rho, \theta')$ ez annak a következménye, hogy a sinogramunknak a $\theta' + \pi$ -hoz tartozó oszlopának volt az 1D Dourier transzformáltja, akkor ez éppen a tükörképe lesz a sinogramunk θ' oszlopához tartozó az 1D Fourier transzformáltjának, ami pedig annak a következménye, hogy ezek az egyenesek egymással párhuzamosak, a különbség csak az, hogy a futó változó melyik irányba változik.

A következőkben behelyettesíthetünk:

$$\int_{\rho=0}^{\infty} \int_{\theta'=0}^{\pi} F(-\rho, \theta') \rho \cdot \exp(2\pi j (-1) \rho \cdot (\cos(\theta')x + \sin(\theta')y)) d\theta' d\rho \quad (11.10)$$

Ekkor legyen $\rho' := -\rho$, és végezzük el a következő átalakításokat:

$$\int_{\rho'=0}^{-\infty} \int_{\theta'=0}^{\pi} F(\rho', \theta') (-\rho') \cdot \exp(2\pi j \rho' \cdot (\cos(\theta')x + \sin(\theta')y)) (-1) d\theta' d\rho' \quad (11.11)$$

$$\int_{\rho'=-\infty}^0 \int_{\theta'=0}^{\pi} F(\rho', \theta')(-\rho') \cdot \exp(2\pi j \rho' \cdot (\cos(\theta')x + \sin(\theta')y)) d\theta' d\rho' \quad (11.12)$$

A korábbi egyenlet alapján:

$$\int_{\rho=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} \dots = \int_{\rho=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \dots + \int_{\rho=0}^{\infty} \int_{\theta=\pi}^{2\pi} F(\rho, \theta) \cdot \rho \cdot \exp(2\pi j \rho (\cos(\theta)x + \sin(\theta)y)) d\theta d\rho \quad (11.13)$$

$$\int_{\rho=-\infty}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} F(\rho, \theta) \cdot |\rho| \cdot \exp(2\pi j \rho (\cos(\theta)x + \sin(\theta)y)) d\theta d\rho \quad (11.14)$$

$$t := \cos(\theta)x + \sin(\theta)y \quad (11.15)$$

Megcseréljük az integrálás sorrendjét. A kapott eredmény az 1D sinogram oszlopok fourier transzformáltjainak rámpaszűrővel történő szűrésnek az 1D inverz fourier transzformáltja. A sinogram oszlopaink rámpaszűrővel megszürt objektumot S' -al jelöljük:

$$f(x, y) = \int_{\theta=0}^{\pi} S'_{\theta}(\cos(\theta)x + \sin(\theta)y) d\theta \quad (11.16)$$

Összefoglalva, ha szűrt visszavetítést szeretnénk elvégezni, akkor a sinogramjaink oszlopain 1D fourier transzformálást hajtunk végre (ezzel megkapjuk az $F(\rho', \theta) - kat$), ezt rámpaszűrővel szűrjük. A rámpaszűrő spektruma a DC komponensben 0 az értéke, és a Nyquist frekvenciáig egyenletes meredekséggel megy. A szűrés elvégzése után egy inverz Fourier transzformációt kell számítani. A sinogram oszlopoknál a radon transzformációt felírtuk P-vel jelölve, ez jelenti, hogy milyen messze vagyunk az origótól (t futóváltozóval), avagy milyen messze vagyunk az origón átmenő vetítő sugárnak erre a projekcióra vett vetületétől, azaz annak metszéspontjától. Eszerint a t futó változó az inverz transzformálásnál visszahelyettesítjük. Úgy lehet értelmezni ezeket a transzformáltakat, hogy a megfelelő sinogram oszlopnak transzformáltját visszavetítjük a térfogatra. Tehát az összes olyan voxelnél, ami fölött egy vetítősugara átfutott ennek a berendezésnek az adott vetítősugár által az egyéb projekció metszetintenzitásán, ezeket a voxelértékekhez hozzáadadjuk, és ezt az integrált elvégezzük, ezzel meglesz a visszavetítés lépés. Ez ekvivalens azzal, mintha frekvenciaterben a megfelelő egydimenziós projekciót a szűrés után elforgatnánk, és az elforgatott értéket összegeznénk frekvencia tartományban.

Mit érdemes tudni erről az eljárásról? Alapvetően invertáltuk a radon transzformációt. És ez az invertálás bizonyos ideális esetekben (valóságban sosem teljesülnek), tényleg egy bijektív leképezésnek az invertálást jelenti. Tehát visszakapjuk, hiba nélkül azt a térfogatot, vagy azokat a szeleteket, amiket vizsgálunk. Mi kell ahhoz, hogy erre tényleg esélyünk legyen? Azt fogjuk megvizsgálni, hogy egyrészt a jel amit vizsgálunk sávkorlátos. Ha ez nem teljesül, akkor máris bármilyik mintavételezésről beszélünk, az aliasing spektrumátlapolódás torzítani fogja. Tehát innentől kezdve nem is invertálható a probléma. De tegyük fel, hogy ténylegesen sávkorlátos jelről beszélünk. Általában technikailag ezt azért teljesíteni szokták ezek a rendszerek. Leginkább itt a PS-eknek az elmosása miatt. Ha megvan a sávkorlátunk, akkor tudjuk a jelnek megfelelően fog adódni egy mintavételi frekvencia. Tehát tegyük fel, hogy tényleg volt egy T sávkorlát, ennek a kétszerese a mintavételi frekvenciánk. Amennyiben ez teljesül, a Nyquist frekvencia a sávkorláthoz tart. Ha nem történt alulmintavételezés, és tegyük fel, hogy ilyen frekvenciával N darab mintavételünk volt, akkor azt mondhatjuk, hogy a spektrumunk különböző profiljainak mintavételezett binjeinek távolsága FS-nek. Ez lesz a profilunknál a radiális mintavételi

távolság frekvenciatartományban. A kérdés az az, hogy a singoram oszlopait megfelelően mintavételeztük. Ez csak annyit mondott, hogy ott milyen mintavételi frekvenciát kell oszloponként betartani. De kérdés az, hogy hány oszlopra van szükség. Az meg tudjuk válaszolni, hogyha tényleg ez a sáv korlát. Akkor arra kellene csak ügyelnünk, hogy amikor elforgatjuk a különböző spektrumprofilokat, akkor is az egymástól legnagyobb távolságra lévő bineknek a távolsága megegyezzen ezzel az értékkel. Ha ezzel egegyezik, akkor lesz esélyünk rekonstruálni a képet. Ahhoz, hogy ehhez megtudjuk mondani a megfelelő távolságot, ahhoz körívet kellene becsülnünk.

Legyen N mintavétel, és legyen M projekció. Ekkor $f_s/N = \Delta f_{rad}$ és $\Delta\theta = \pi/M$, továbbá:

$$\Delta\theta f_s/2 = (\pi/M) \cdot f_s/2 \leq \Delta f_{rad}$$

$$(\pi/M) \cdot f_s/2 \leq f_s/N$$

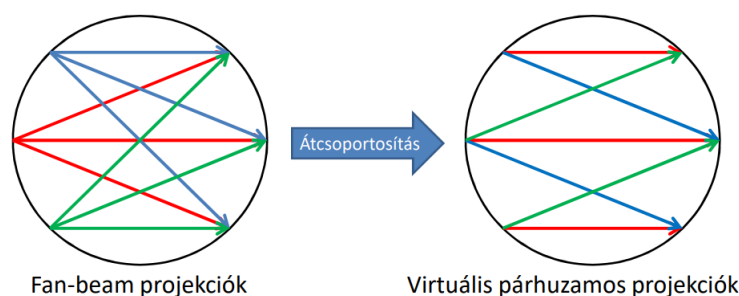
$$\pi/2 \leq M/N \approx M \geq N$$

Ha ezt a feltételt betartjuk, és ez alapján nullától π -ig forgatva a berendezésünket M db projekciót teljesítünk, akkor rekonstruálható lesz a jelünk hiba nélkül. Gyakorlatban már az N -nél nagyobb vagy egyenlő sinogram oszloppal jól szokott működni. A sugárterhelés optimalizálása végett, másrészt a páciens adott időintervallum alatt mozgása miatt kihívás nagy sinogram oszlopokat elérni.

Hogyan érdemes implementálni az eljárást? Az első felületes értelmezés, úgy nézett ki, hogy fogjuk a singoram oszlopainkat, frekvencia tartományba transzformáljuk, rámpaszűrővel megszorozzuk, elforgatjuk, összegezzük. Ezt követően a visszavetítés művelet és frekvenciatartományba ment. Belátható, hogy a szűrés műveletet érdemes frekvenciatartományban elvégezni, mivel a rámpa szűrő túl nagy tartóval rendelkezik. Ha ilyen szűrésünk van, akkor a tipikus és jobban is járunk vele, hogy a frekvenciatartományba transzformálunk, ott megsűrjünk a rámpával a jelünket és visszatranszformáljuk tértartományba figyelembe véve, hogy ez folytonos esetben lenne ekvivalens, de mi diszkrét jeleket nézünk. Diszkrét jeleknél a spektrumszivárgás fellép. A spektrumszivárgásnak megjelent a torzító hatása. Ha a jel jól van beállítva (páciens tüdeje teljes mértékben látható, és a nézet szélén levegő intenzitású elemek vannak), akkor tekinthetünk a jelre periodikus jelként, így a torzítás kisebb mértékű. Technikailag tényleg frekvenciatartományban szoktuk elvégezni, viszont a visszatekintést, azt már tértartományban. Először elvégezzük a ρ szerinti inverz Fourier transzformálást, és utána integrálunk θ szerint. Ennek a magyarázata, hogy frekvencia tartományban el kellett forgatni és összegezni a dolgokat. Így nem lesz klasszikus DFT ábrázolás. Ehhez interpolálnunk kellene frekvencia tartományban, de ez torzítást hozna be a tértartományban. Ennek okáért nem elforgatjuk, descartes koordináta frekvencia felírással számolunk, és ott összegezzük ezeket az elforgatott spektrumoszlopokat és vissza descartes koordinátás inverz Fourier transzformálni, hanem annyit kell csinálni, hogy vagy polár koordináták frekvenciatartományban dolgozunk, s akkor a polár koordináta inverz Fourier transzformálás az tényleg azt a műveletet fogják jelenti, amit szeretnénk elvégezni, vagy ha descartes koordinátákban gondolkodunk, akkor a szűrés megy csak frekvenciatartományban, és a visszavetítés már szigorúan a tértartományban. Másik kérdés, ami felmerül, hogy egy klasszikus CT-t nézve időigényes ezeket a műveleteket 1 szálú környezetben elvégezni. Felmerül a kérdés, hogy egy több szálú feladat végrehajtása alkalmas eszközt, például GPU-t vagy egyéb párhuzamosított hardvereket hogyan lehet kihasználni ebben a feladatban. Be kell látni, hogy a sinogram oszlopainak a szűrését egyszerre elvégezhetjük, azok egymástól független dolgokat jelentenek. A visszavetítést kell csak ebben az esetben egyszerűsíteni, vagy hogyha a polárkoordinátás transzformációra gondolunk, akkor annak az inverz transzformációját kell csak GPU-n elvégezni, az már könnyebben többszálúsítható.

Az egész eddigi történetben még nem foglalkoztunk a zajjal. Amíg a radon transzformációnk is úgy működik, hogy mindig ugyanazt a képet látja, és mindig zaj nélkül végzi el az 1D vetítéseket, addig egy tökéletes eljárás, mert tényleg invertálni tudjuk a radon transzformációt. Mihelyt képbe kerül a zaj, s mielőtt az jön, hogy az összes voxelre igaz az, hogy különböző vetítősugarak mentén a zaj miatt látszólag más denzitása, onnantól kezdve nem tudjuk megmondani, hogy ez az eljárás mit csinál. Viszont, ha megvizsgáljuk, hogy milyen szűrést alkalmazunk, akkor látjuk, hogy ezek elég erősen felül áteresztő szűrők. Ebből már következtethetünk arra, hogy a nagyfrekvencián zajra érzékenyek leszünk. Ehhez hozzátevéődik, hogy klasszikus röntgendetektoroknál a detektálási kvantumhatékonyság szintén frekvenciák függvényében monoton csökkenő szokott lenni, ekkor érezzük azt, hogy a nagy frekvenciával komponenseivel valamit kezdenünk kell, már csak azért is, mert valószínűleg a detektorunk által mért szinogram oszlopok a nagyfrekvenciás komponensei már csak zajt adnak, mivel képalkotásnál a detektálási kvantumhatékonyság lenyelte az ottani információt. Ennek lett az a következménye, hogy általában nem a rámpaszűrővel szűrünk, hanem annak bizonyos aluláteresztett változataival. Ehhez legtöbbször szinusz ablakot alkalmaznak, de ez az úgynevezett Heming ablak is bevett szűrő ablak. Ezek mind mind úgy állnak elő, hogy az eredeti rámpaszűrőnk egy másik aluláteresztő szűrővel elemenként megszorozzuk, így a magas frekvenciás részt, amire ideális esetben szükséges lenne a hiba méretkonstrukcióhoz, valódi esetben már úgyis csak zaj van a szinogram oszlopain azt szépen el tudjuk nyomni. Azt, hogy melyik szűrőt érdemes alkalmazni, az annak függvénye, hogy milyen mérési elrendezésünk az milyen zajérzékenységgel megy, stb.

Ha ezek a szűrések nekünk megvannak, akkor már nem ρ abszolút értékével fogunk szűrni. Ha megnézzük, hogy ez milyen MTF-et eredményez, akkor azt lehet látni, míg rámpaszűrés MTF idealisztikus esetben addig igaz, hogy különböző kernelekkel aluláteresztünk előtte, ez azt eredményezi, hogy hamarabb lecsapjuk az átvitelt, tehát az MTF-ünk az elmozdult az origó felé, viszont ez a hiba nekünk kevésbé fáj, mint amennyire örülünk annak a haszonnak, hogy és redukáljuk a zajt a méréseinkből. Ha a gyakorlatot nézzük, akkor nem szoktak rámpaszűrést alkalmazni natívan semmilyen kint lévő CT-ben sem, viszont idealisztikus szűrőt nem lehet alkalmazni.

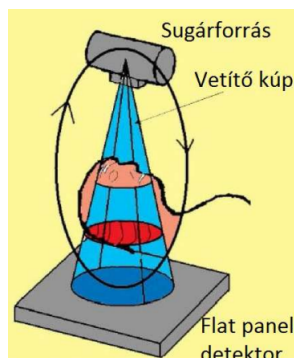


11.1. ábra. Átcsoportosítás

A CT-knek különböző generációit lehet megkülönböztetni. Mi általában az első generációs helikális CT-vel fogunk foglalkozni. Ebben az esetben a páciensünk fekszik az asztalon, az asztalt mozgatjuk, és az asztal körül egy körpályán forog a sugárforrás. A páciens koordináta rendszerét tekintve helikális trejektóriát jár be a sugárforrás. Az, hogy milyen gyorsan mozgatjuk az asztalt, az befolyásolja, hogy hány darab projekciót tudunk egy ilyen ferde axiális szeletről készíteni, hiszen a sugárforrás a detektorral egy fizikai gyűrűn szokott elhelyezkedni, és ezt a gyűrűt szokták használni megfelelő szögsebességgel a páciens körül a felvétel készítése alatt. Ha megnézzük ennek a geometriáját, akkor feltűnhet, hogy nem párhuzamosak a vetítősugarak. Szűrt visszavetítést a radontranszformáció

inverzeként mondtuk ki a párhuzamos vetítősugaras esetet invertálva, viszont egymáshoz képet divergáló úgynevezett Fan-beam nincs legyező elrendezésű vetítősugaraink vannak. Ahogy az ábrán is látható, az első projekcióhoz a kék sugarak tartoznak, a másodikhoz a pirosak, a harmadikhoz a zöldek. Kérdés, hogy mit lehet ezekkel tenni?

Lényegében a formális eljárás is ugyanazt csinálja, mint ami a 11.1 ábrán mutatva van, csoportosítsuk át a fekete sugarakat, mégpedig úgy, hogy egy egy csoportba válasszuk ki az egymással párhuzamos sugarakat. Ha így átmintavételeztük a sinogramunkat, akkor kapunk egy párhuzamos vetítősugaras sinogramot, és abból vissza tudjuk rekonstruálni az eredeti jelet. Más modalitás az eddigiek a helikális és a klasszikus CT-vel szemben az úgynevezett kúpsugaras CT.



11.2. ábra. Kúpsugaras CT

A kúpsugaras CT úgy néz ki, mint ahogy a 11.2 ábra sejteti. Van egy sugárforrás vele szemben viszont nem egy ilyen úgynevezett ívdetektor van, mint ami helikális CT-ben megfigyelhető. Ennek sokkal szélesebb kiterjedése van, mint amekkora ennek a dolognak a magassága. Nagyjából egy egydimenziós ívként képzelhető el a detektor, pár sort tartalmaz csak. Ezzel szemben itt egy flat panel detektor, van négyzet alakú, általában ilyen fél méterszer fél méteres fizikai kiterjedéssel. Ezek olyan detektorok is lehetnek, amit a klasszikus röntgenvizsgálatoknál alkalmaznak. Kérdés, hogy ebben az esetben mi változik? Nagymértékben eltérő geometriával fogunk találkozni, s egy dolog nagyon változni fog, ez pedig a szóródásnak a hatása. Ugyanis amíg egy vékony detektorunk van, addig az a modell többé kevésbé valid, hogy igaz, hogy szóródás, ugye? Ha visszagondolunk, a legelején Beer-Lambert törvényből indultunk ki, és a Beer-Lamberte törvény a szóródó fotonok csillapodásos részét nyomja el, ezt invertáljuk.

A szóródásról eddig még nem volt szó, míg a kompton szóródásnak nagyobb jelentőséggel bír, viszont ez jelen van, és minél keményebb röntgen sugarakat alkalmazunk, annál jelentősebb lesz ennek a mértéke. Amíg helikális CT-nk van és nem túl vastag ez a detektor tehát kevés sorból áll, addig igaz a feltételezés, és ez tényleg igaz, hogy a szórt fotonok el fogják kerülni detektort. Mihelyt flat panel detektorunk van a feltételezés nem állja meg a helyét. Majd látjuk a későbbiekben, hogy a szóródásnak még milyen további két deklaráció hatása van. Viszont ez még kezelhető probléma. A másik probléma pedig az lesz, ami az úgynevezett FDK artifakt, az az ha megvizsgáljuk a térfogatot, és azt mondjuk, hogy ez a középső sík az, ami tartalmazza a detektorunknak a középpontját, meg vele szemben a sugárforrásunkat. Akkor igaz lesz az, hogy amikor forgatjuk ezt a kúpot a vizsgált térfogat körül, akkor a vizsgált térfogat voxelei eltérő mennyiségű vizsgált sugár által lesznek mérve a projekcióban, hiszen azok a voxelek amik a sematikus koponyán az orr magasságában helyezkednek el, s ebben a sugárforrás, mint pontszerű, feltételezett forrás a detektor középpontjával összekötő síkban helyezkednek el, azok az összes projekcióban legalább egy vizsgálósugárral érintve vannak. Azok a voxelek, amik



11.3. ábra. Cone-beam artifakt

ennél távolabb vannak pl. a homloknál vagy az állnál, azok már a projekcióknak csak egy részhalmazán lesznek vizsgálva, ezáltal sokkal rosszabb jellemző méréseink lesznek.

A másik probléma meg ezzel az első rekonstrukciós eljáráshoz, az ún. FDK eljáráshoz kapcsolódik. Az eljárás kidolgozóival ezzel a problémával olyan szinten nem foglalkoztak, hogy az analitikus megoldásuk nem is veszi ezt figyelembe, és azzal a feltételezéssel él, minden voxelen ugyanannyi sugár halad át, s ennek lesz a következménye az, hogy ha megnézzük a rekonstrukcióját ennek a koponya elrendezésnek (11.3 ábrán), akkor láthatjátok, hogy az intenzitások elkezdnek csökkenni a sarkok fele haladva. Most ez még kompenzálható, ezt nem feltétlen kell intenzitáscsökkenésnek venni, de rekonstruált szeleteken a képminőségi romlás az elkerülhetetlen ezzel a modalitással. Ezért ezt a modalitást csak olyan testrészek vizsgálatához szokták alkalmazni, ahol egy viszonylag kis térfogatot kell körülfordulnia, hogy ez a probléma ne jelenjen meg. Leginkább fogászati alkalmazást jelentős, esetleg még műtét közbeni sebészeti navigációs célra lehet alkalmazni.

A következőkben egy másik nagy rekonstrukciós családot járunk körbe. Ezek már az algebrai rekonstrukciós technikák lesznek. Ahhoz, hogy ezt megértsük, egy picit vissza kell mennünk a kiindulási pontra, és el kell kezdenünk azzal foglalkoznunk, hogy milyen modell szerint kaptuk meg a projekciókat, milyen modell adta a méréseinket. A projekciónál egy (x, y) koordinátájú intenzitás megfelelő előfeldolgozás után röntgen esetén a logaritmálási előfeldolgozást fogja jelenteni. Ez nagyjából úgy áll fel, hogy van a vizsgált térfogatunknak a radidentitása, lineáris csillapítási együtthatója, amit ki szeretnénk számolni rekonstrukciónkból, az megszorozódik egy súlyfüggvény jellegű dologgal, ami meg fogja azt adni, hogy alfa, béta, gamma pozíciójában lévő voxel röntgen csillapítása milyen mértékben befolyásolja az (x, y) projekciós pontban látható intenzitást. És ehhez adódik hozzá még valamekkora zaj, de ez a felírás a tárgy elejéről ismerős lehet, mielőtt az inverz probléma előkerült volna, és az inverz problémánál is ugyanazt csináltuk, mint amit a rekonstrukciónál, mérésekből szeretnénk visszaszámolni a mért objektumunkat. A cél ennek az F voxelhalmaznak meghatározása lesz, és a G -t az mérni tudjuk, a H -t azt többé kevésbé ismerjük. A többé kevésbé ismerésnek a háttérben kompton szóródás kaszkád hatás miatt emittálódott fotonok, stb. húzódik meg. Jelen esetben egyszerűsíteni fogunk egy lineáris egyenletrendszerre.

Az f lesz az általunk vizsgált térfogatnak egy egydimenziós kilapított változata. Ez az, amit vissza szeretnénk számonlí. A H lesz ez egy úgynevezett vetítő mátrix. A g pedig a projektjekció megfelelő feldolgozása után. Ennek a vetítő mátrixnak az i -edik sorában j -edik oszlopában lévő elem megfogja azt mondani, hogy a g i -edik értéke az

lineáris értelemben véve milyen erősítésű lesz f j -edik komponensében. Ha a Beer-Lambert törvényére gondolunk, és az f a csillapítási együtthatóknak a vektora lesz. Akkor a $H_{i,j}$ megmondja, hogy az i -edik vetítősugár az milyen hosszú utat tesz meg a j -edik ofszthez. Ez alapján fogjuk tudni felírni ennek a mátrixnak az értékét. Pár dologra ad érdemes szót ejteni. Az egyik az az, hogy az, hogy egy zajérzékeny dologgal fogunk megint foglalkozni, a másik pedig, ami még érdekesebb, az a becsült változóknak a száma.

A $f \in \mathbf{R}^N$, és a $g \in \mathbf{R}^N$. Ami itt teljesülni szokott, hogy nagyságrendekkel kevesebb projekciónk van, mint ahány voxelünk, tehát nem elég, hogy ilyen 10^7 -es elemszáma van az f vektornak, ráadásul még alulhatározott is lesz, de jóval kevesebbel is. Ezt az egyenletrendszerrel kell invertálni. Ekkor a mátrix pszeudoinverzét, és azzal szorozva megkapjuk a legkisebb megoldást ($H^+ \cdot g = f^*$), ezzel legkisebb hibájú és energiájú négyzetes becslést kapjuk. Azt még látnunk kell, hogy ebben az esetben vagy végtelen megoldásunk van, vagy egy sem. A gyakorlatban, sajnos a szóba jöhető nagy mátrixoknál ezt a pszeudoinverzét meghatározni igen fájdalmas lenne. Egy iteratív megoldásra van szükségünk. Szerencsére a H mátrix egy ritka mátrix. Ennek oka, hogy ha azt állítjuk az, hogy az i -edik sorai, a j -edik oszlopa azt mondja meg, hogy az i -edik vetítősugár a j -edik voxelhez milyen hosszú utat tesz meg, akkor akárhogy is nézzük nem túl sok olyan voxel lesz, ami egy egy vetítősugár mentén nézve érintve lesz, már az összvoxelszámhoz képest. Innentől kezdve ha egy ritka mátrix inverzét szeretnénk meghatározni, nagyon nagy eséllyel hibás eredményhez jutunk, mivel az inverze ráadásul nem is lesz ritka. Lesznek ezzel szemben használható eljárások is, mint például a konjugált gradiens módszer, továbbá a Kaczmarz iteráció. Ha a H -nk ritka és ritka mátrixszal kell egy vektort megszorozni, az egyáltalán nem számít. A nem nulla elemeken elvégezzük a szorzást, az összes többi úgysem módosítaná az eredményt. Ezzel el is jutunk a Kaczmarz iterációhoz.

Az egészen az ötlete az hogy a teret hipersíkok mentén felbontjuk, majd egy kezdeti becslést kijelünk, azt egy hipersíkra rávetítjük merőlegesen, majd azt tovább vetítjük, és iteratíván addig vetítgetjük míg a hipersíkok metszetéig el nem jutunk. A metszetnek léteznie kell amennyiben az egyenletrendszer konzisztens, inkonzisztens esetpegn pedig megállás nélkül fog lépkedni az algoritmus. Ekkor egy stabil trajektóriájú limit hurokba szorul az eljárás, bárholnan is indítjuk, ennek a huroknak a belsejében található a megoldás. Ha egy iteratív megoldásunk van azon alterek mentén fog javítani, amiben nagy az erősítés, viszont sok iteráció mentén túlilleszkedhet, és a zajhoz kezd el dominálni. Ennek céljaként a zajérzékenységet is figyelembe szeretnénk venni, azt tudjuk tenni, hogy hamarabb leállítjuk az iterációt, hogy a zajt ne vegyük figyelembe.

Az iteratív eljárás formálisan nézve az eljárás során a $k+1$ -edik iterációban vetítünk merőlegesen az aktuális f -et a $g_{(i)} = H_{(i,:)} \cdot f$ hipersíkra. Az f a $H_{(i,:)}$ -re merőleges azon síkon helyezkedik el, mely távolsága az origótól $g_{(i)}/\|H_{(i,:)}\|_2$. Tehát $f^{(k+1)} = f^{(k)} - \alpha \cdot H_{(i,:)}^T$ merőleges vetítés után $g_{(i)} = H_{(i,:)} \cdot (f^{(k)} - \alpha \cdot H_{(i,:)}^T)$ teljesül, amiből kifejezve megkapjuk $\alpha = (H_{(i,:)} \cdot f^{(k)} - g_{(i)}) \cdot \frac{H_{(i,:)}^T}{H_{(i,:)} \cdot H_{(i,:)}^T}$. Végül így az $f^{(k+1)} = f^{(k)} + (g_{(i)} - H_{(i,:)} \cdot f^{(k)}) \frac{H_{(i,:)}^T}{H_{(i,:)} \cdot H_{(i,:)}^T}$ interpretációja $g - H \cdot f^{(k)}$ rögzített projekciók és az aktuális ($f^{(k)}$) rekonstrukció modell szerint vetületének a különbsége (vetületi hiba) $H_{(i,:)}^T / (H_{(i,:)} \cdot H_{(i,:)}^T)$ a vetületi hibát veti vissza.

Az eljárás tulajdonságaihoz tartozik, hogy akkor számolható gyorsan, ha a mátrix sorai nem párhuzamosak, hanem merőlegesek. Továbbá könnyen lehet párhuzamosítani az algoritmus futtatását.

A Gordon ART mellett megemlítendő, a talán a legnépszerűbb SART (Simultaneous ART) rekonstrukciós eljárás

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \lambda \cdot \text{diag}_i \left\{ \frac{1}{\sum_{j \in S^{(k)}} \mathbf{H}_{j,i}} \right\} \cdot \mathbf{H}_{(S^{(k)},:)}^T \cdot \text{diag}_{j \in S^{(k)}} \left\{ \frac{1}{\sum_i \mathbf{H}_{j,i}} \right\} \left(\mathbf{g}_{j \in S^{(k)}} - \mathbf{H}_{(S^{(k)},:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)} \right)$$

Ahol $S^{(k)}$: k . projekció pixeleit előállító vetítősugarak halmaza. Ami a fő különbség a Gordon ART-hez képest, hogy nem vetítősugaranként és nem projekciónként egyenként történik a térfogatbecslés módosítása, hanem projekciók kötegeire, ahol projekció alatt a vetítősugár menti érték értendő. Egy tipikus választás itt a kötegelésre (batch-re), hogy ha egy adott szögből tekintett összes projekciót vizsgáljuk, vagy ha más elrendezésünk van, akkor egy adott elfordulásnál látott, a detektoron érzékelt képet vizsgáljuk.

Akkor fog jól működni ez az eljárás, akkor hatékony a kötegelés, ha egy kötegen belüli információval a teljes térfogatot tudjuk módosítani. Tehát ha vannak olyan voxelek, amik az így kiválasztott vetületi képeknek vagy méréseknek csak egy kis részében láthatóak, az nem szerencsés.

Ha megnézzük a konvergencia tulajdonságait, akkor ez is egy súlyozott LS becslőhöz fog konvergálni. És itt már az inicializált vektorhoz, tehát az $f^{(0)}$ kiinduló becslésünkhöz legközelebbi energia értelmében a legközelebbi megoldáshoz az konvergál, valamint jól párhuzamosítható ez is elmondható.

Ugyanennek az eljárás családnak egy másik népszerű, szintén kötegelt végrehajtásra alkalmazott megközelítése az úgynevezett Cimmino iteráció alapú, Simultaneous Iterative Reconstructive Technique névre keresztelt eljárás.

Összes projekció, összes pixele szerint egyszerre képez hibát:

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \lambda \cdot \sum_j \left(\mathbf{g}_{(j)} - \mathbf{H}_{(j,:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)} \right) \cdot \frac{\mathbf{H}_{(j,:)}^T}{\mathbf{H}_{(j,:)} \cdot \mathbf{H}_{(j,:)}}$$

Itt annyi módosult, hogy tényleg szummázzuk különböző vetítősugarak fölött ezt a különbségképzést és a visszavetítést. Ezt úgy szokás alkalmazni, hogy az összes vetítő sugarat nézzük, tehát az összes projekciót felhasználjuk benne, valamint úgy is alkalmazhatjuk, hogy batchelve kisebb részhalmazát nézzük ezeknek a vetítősugaraknak. Ha az összeset egyszerre használjuk, akkor szokták inkább ezt a megközelítést alkalmazni. Ezért, ha az összes vetítősugár nézzük és tényleg j az összes lehetséges index fölött végigfut, akkor azt tudjuk róla mondani, hogy jól párhuzamosítható, hiszen a különböző vetítősugarak mentén a levetítés - tehát a \mathbf{H} mátrixszal történő szorzás - párhuzamosan számolható, különbségképzés szintén párhuzamosan számolható, és az egyes hibáknak a különböző voxelekhez történő hozzájárulása is párhuzamosítható (igaz, hogy az összegzés már sorosan kell, hogy történjen). Azt tapasztalták, hogy így kevesebb iteráció szükséges konvergenciához, ha kevésbé zajos az eredmény, akkor jobb eredményt is tud adni, mint egy sima AFT-s vagy SART-s rekonstrukció, viszont összességében mégis nagyobb számítási igényű ez az eljárás. A multiplikatív hibás eljárást viszont már a pozitron emissziós tomográfiának az alkalmazásával vezetjük be.

A röntgen tomográfia az egy transzmissziós tomográfiai berendezés, amelyhez tartozik egy külső sugárforrás, az átvilágítja a páciens és ahogy a páciensen belül halad történnek bizonyos elnyelődések, gyengülések ezzel a sugárral és az így detektált intenzitással számoljuk vissza a páciensnek a jellemzőit.

A pozitron emissziós tomográfia az viszont más elven működik.

Itt egy olyan radioaktív oldatot fecskendeznek be a páciensnek az ereibe, ami molekuláisan kötve van tápanyaggal, ez valamilyen glükóz, egyszerű szénhidrát. Az elv az, hogy a páciensen belül történik a radioaktív bomlás, a páciensen belül keletkeznek a fotonok,

amelyek gamma foton-párok lesznek. Azt próbáljuk megbecsülni, hogy hol, milyen gyakran keletkezett egy ilyen gamma foton-pár páciensen belül.

Ez egy funkcionális képképző eljárás, hiszen azt mutatja meg, hogy hol vannak olyan szövetek a vizsgált szervezeten belül, melyek energiafelvétele jelentős (nem pedig azt fogjuk látni, hogy hol milyen típusú szövet van).

Ennek következtében, amikor például egy daganatos vagy gyulladáshoz vezető megbetegedést kell detektálni, akkor ezzel a modalitással könnyebb nagyjából lokalizálni, hogy az hol van. Azonban sajnos látni fogjuk, hogy a felvételek minősége rendkívül rossz.

Amikor keletkeznek ezek a gamma fotonok, itt az annihilációs folyamatra kell fókuszálni. Van a radioaktív anyagunk, ami bomlik a megfelelő sejten belül, ami magához vonzotta a tápanyag miatt és ezen bomlás során elektron-pozitron pár keletkezik. Ez a pozitron ütközik egy másik elektronnal, amely ütközés teljesen rugalmatlanul fog végbemenni, az elektronok energiát vesztenek az ütközés folyamán. Ezen energiavesztés 2, egymással ellentétes irányba emittálódott, egyenként 511 kiloelektronvoltageos gammafoton párként realizálódik. Tudjuk tehát, hogy ezek ellentétes irányba haladnak a térben, azt viszont nem, hogy mégis mi a pontos irányvektora ennek a vektornak, és ez jelentősen nehezíti a rekonstrukciót.

Kérdéses, hogy a rekonstrukciós eljárások milyen fizikai környezetbe illeszkednek. Tipikusan egy ilyen eszközt úgy lehet elképzelni, hogy egy pácienset befektetnek egy úgynevezett detektorgyűrűbe.

A detektorgyűrű nem forog, statikus szerkezetnek tekinthető. Ami érdekes benne, hogy a röntgendetektornál alapvetően időben integráló detektorokat alkalmazunk ebben az esetben viszont úgynevezett beütésszámláló detektorokat használunk. Ez azt jelenti, hogy egy-egy ilyen érzékelőelem kimenete nem egy szám lesz egy adott integrálási idő végén, hanem egy időfüggvény, a cél pedig, hogy az úgynevezett Line Of Response-okat tudjuk azonosítani. Egy ilyen annihiláció Line Of Response -on, az azon detektorpárt tartalmazó egyenes lesz, mely mentén beütött az adott annihilációs folyamat során keletkezett 2 darab gamma foton. Mi ezeket próbáljuk meg a natív méréseinkből azonosítani. Ezt úgy fogjuk tudni megtenni, hogy adott időegységeket vizsgálva egy adott időegységen belül megnézzük, hogy mely detektorpárnál milyen érzékelőelem párnál volt beütés. Ezért fontos, hogy ez egy beütés számláló detektorral menjen, ne egyidőben integráló detektorral.

Amit érdemes tudni, az az, hogy itt is egy ritka jelenségről beszélünk, amiből pedig következtethetünk arra, hogy Poisson jellegű zaj lesz az, ami jelentős mértékben terheli a méréseinket, ami még ki fog egészülni foton szórási zajból eredő zajjal. Azt is szem előtt érdemes tartani, hogy valamilyen radioaktív anyagot juttatunk be a páciensbe, amivel érdemes spórolni. Ez a legfőbb magyarázata annak, hogy miért lesz olyan rossz minőségű egy-egy ilyen rekonstrukciónak az eredménye.

Az első eset az, hogy abból a voxelből, amin belül az annihiláció keletkezett, abból egymással ellentétes irányban kiinduló gamma foton párok a becsapódásig folyamatosan a kiindulási irányban megfelelően haladnak, és ezen 2 érzékelő elemet összekötő egyenes által realizált Line Of Response mentén történt az annihiláció. Szerencsétlen eset az, amikor szórási zaj következik be. Ekkor arra érdemes figyelni, hogy gamma fotonokról beszélünk, melyeknek nagyobb energiája van, mint a röntgen fotonoknak (a röntgen fotonok pár 10 kiloelektronvoltageos tartományban vannak, a gammafotonok már 100 kiloelektronvoltageos tartományban). Korábbi témakörben vizsgáltuk, hogy a víz hogyan csillapítja a különböző fotonokat: ebben a tartományban már nem is a fotoelektromos kölcsönhatás az, ami igazán jelentős, hanem a Compton-szórási, amelynek hatására nagy energiájú foton jön ki az interakcióból, amit még ugyanúgy érzékelhet és tipikusan érzékel is a detektorunk. A legkellemetlenebb, hogy ez a nagy energiájú foton pedig nem abba az irányba halad tovább, mint amilyen irányba haladt a szórási bekövetkezéséig, hanem

tipikusan valamilyen hatás keresztmetszet szerint, de irányt fog váltani. Ennek pedig az a következménye, hogy ha klasszikus érzékelőelemekkel dolgozunk, nem fogjuk tudni detektálni, hogy szóródás történt, mert nincs olyan finom felbontású érzékelőelemünk, ami ezt a nagyobb úthossz miatti becsapódás-időkülönbséget detektálni tudná. Emiatt fals Line Of Response-t látunk, azt fogjuk hinni, hogy ezen érzékelőelem párt tartalmazó egyenes mentén történt az annihiláció. Egy másik kellemetlen dolog, aminek a hatása méréselkelhető annak függvényében, milyen az idő felbontása a detektorunknak: ha több annihiláció történik egy ilyen időszakon belül, és itt több érzékelőelempárunk van. Ebben az esetben több párosítási lehetőségünk van a Line Of Response-okra. Nehéz azt megmondani, hogy itt a 4 beütéshelyből melyik az a 2 Line Of Response, ami mentén a valódi annihiláció történik.

Ha a jel zaj viszonyát nézzük a méréseknek, akkor a röntgenes esetek szélsőségeitől eltekintve sokkal rosszabb jel zaj viszonyunk van, sokkal inkább dominálja a Poisson zaj és a szóródásokból eredő zaj ezeket a méréseket, mint a röntgenes esetben.

Tehát ha mindenféle szóródástól eltekintünk, és csak ideális Line Of Response-okat feltételezünk, akkor viszont az igaz, hogy ha megfelelően hosszú integrálási ideig gyűjtenénk az adatokat, akkor szintén Poisson zaj szerint visszajutnánk a párhuzamos vetítősugaras transzformáció esetéig, hiszen ha megfelelő ideig gyűjtenénk a különböző érzékelő párokat összekötő szakaszmenti beütéseket, akkor azt lehetne mondani, hogy egy olyan jellegű mérésünk van, mintha transzmissziós tomográfiáról beszélünk. Tehát mintha kint lenne egy sugárforrásunk, ami párhuzamos sugarakkal átvilágítaná a térfogatot, és annak megfelelően alakulna e vizsgálat során egy ilyen párhuzamos sugár menti érzékelő beütésszám, hogy a térfogat az mennyi cukrot vonzott az ezen sugármentén elhelyezkedő voxelek esetén magába. Logikailag az emissziós tomográfiát a transzmissziós tomográfiára visszavezettük, ez persze a valóságban nem teljesen így működik. Az azonban igaz, hogy még kifinomult, ehhez a modalitáshoz adaptált eljárások esetén is valamilyen szinten azért ez van a háttérben. Ennek az a következménye, hogy egy PET vizsgálat nem rövid idejű szokott lenni, több tíz perces vizsgálati idővel kell számolni, valamint figyelembe kell venni azt, hogy amíg él a szervezet amit nézünk, akkor bemozdulásból eredő problémák is terhelni fogják a képeket.

Amit még érdemes tudni a CT-hez képest hogy ez egy nagyságrendekkel drágább képalkotó folyamat, nagyjából egy CT-nek egy mellkas CT esetben kontrasztanyaggal együtt 50 ezer forintos költsége van, erre körülbelül inkább 150 ezer forintos a költség.

A következő rekonstrukciós eljárásról már volt szó korábban: ez a Richardson Lucy eljárás, amely pont ugyanúgy működik, mint ahogy a következőkben bemutatott eljárás. Ahhoz, hogy ezt a becslési problémát fel tudjunk írni, ahhoz különböző változókat érdemes bevezetni. Az egyik ilyen változó

$$y_j : j.LOR$$

A j. line of response menti beütésszám. Lesz egy másik változónk:

$$x_n : n.voxel$$

Az n. voxelbeli annihilációs szám, ez az, amit becsülni szeretnénk. Ezen kívül szükség van egy feltételes valószínűségre, ami megadja, hogy egy n. voxelbeli annihiláció milyen valószínűséggel fog egy j. Line Of Response mentén detektálódni. Ez lesz az A_j

$$A_{j||n} : P\{j.LOR|n.voxel\}$$

Ezzel különböző valószínűségeket lehet rendelni különböző becsapódáspárokhoz. Ha a maximum likelihood becslésről beszélünk, akkor a következőt keressük:

$$\underset{x}{argmax}\{P\{y|x\}\}$$

ami így önmagában nehezen felírható. Amivel nagyságrendekkel könnyebb lenne a becslési probléma, ha tudnánk egy úgynevezett látens változónknak az értékét. Ez pedig $S_{j,n}$:

$$S_{j,n}$$

$S_{j,n}$ megmutatja, hogy hány olyan annihiláció volt, ami a j. LOR (Line Of Response) mentén ütött be és az n. voxelben keletkezett. Ha meglennének ezeknek a számok, akkor ez egy egyszerű probléma lenne, hiszen ebben az esetben

$$\underset{x}{argmax}\{P\{s|x\}\}$$

viszonylag könnyen megoldható, azonban nem ezt látjuk alapesetben. Láthatjuk is, hogy a $S_{j,m}$ egy Poisson eloszlású zajjal terhelt lesz, de az $S_{j,m}$ -nek a várható értékét fel tudjuk írni úgy, hogy

$$A_{j|m} \cdot X_m$$

Az S valószínűségét fel lehet úgy írni, hogy vesszük a produktumot különböző j-k és különböző m-ek szerint, amelyben számításba vesszük a Poisson eloszlást

$$\prod_j \prod_m \frac{\mathbb{E}\{S_{j,m}\}^{S_{j,m}} \cdot \exp(-\mathbb{E}\{S_{j,m}\})}{S_{j,m}!}$$

Ennek kellene keresni x szerint a szélsőértékét, ha ismernénk az $S_{j,m}$ -et, amit viszont nem ismerünk. A becslésnél a várható érték szerinti becslés megvan, azonban ez a felírás nem veszi figyelembe az y-okat, tehát a mért értékeket, a mért beütésszámokat.

$$\mathbb{E}\{S|y, x\}$$

Az expectation lépés a feltételes valószínűségét akarja az S-nek meghatározni, mégpedig Y és X feltételével. A fenti összefüggés csak X feltételében határozta meg, nem vette figyelembe az Y-j-nek az értékét. De ha elfogadjuk Y becslését, és azt mondjuk, hogy az A modellünk helyes, akkor igaz a következő:

$$\sum_{m'} \frac{A_{j,m} \cdot x_m}{A_{j,m'} \cdot x_{m'}} \cdot y_j$$

Annyi történik, hogy megnézzük, hogy ha az adott modellünk és becslésünk helyes akkor mennyi kontribúciója lenne a j. LOR mentén az Xm-nek, ezt leosztjuk azzal, hogy milyen feltételt használva mennyi kontribúciója lenne a többi m' voxelnek ezen LOR menti beütésszámon, így egy arányát megkapjuk, hogy adott voxel mennyi LOR menti beütésért felel a modellünk szerint, és ezt megszorozzuk azzal, hogy mennyi adott LOR menti beütést láttunk. Így már Sj,m-nek megkapjuk a feltételes várható értékét.

Tehát ez az expectation lépés, ebbe próbálunk meg behelyettesíteni.

Ez a likelihood függvény, ennek fogjuk X szerint a maximumát keresni, viszont ezzel megint nehezen bánunk el ebben a formájában, ezért logaritmáljuk:

$$\log(P\{S|X\}) = \sum_{j,m} S_{j,m} \cdot \log(\mathbb{E}\{S_{j,m}\}) - \mathbb{E}\{S_{j,m}\} - \log(S_{j,m}!)$$

Ahol $\mathbb{E}\{S_{j,m}\} = A_{j,m} \cdot X_m$. Ekkor vegyük ennek az Xi szerinti parciális deriváltját:

$$\frac{d\log(P\{S|X\})}{dX_i} = 0$$

$$\sum_{j,m} S_{j,m} \frac{1}{A_{j,m} \cdot X_m} \cdot A_{j,m} \cdot d_{i=m} - A_{j,m} \cdot d_{i=m} = 0$$

Ez egy konkáv függvény, amelynek ott lesz a maximuma, ahol az Xi szerinti parciális deriváltja van. Megmarad az Sj,m értéke, a logaritmusban már szerepel Xi ezért először jön a külső függvény deriváltja a láncszabály szerint az 1/Aj,m * Xm, ezután a belső függvény deriváltja, a láncolás szerint az Aj,m. Figyelembe kell venni, hogy Xi szerint végeztük a parciális deriválást, itt viszont Xm szerepel, így meg kell szoroznunk Delta i=m-mel. A második tag tartalmaz Xm-et, így az is ugyan így fog kinézni, a harmadik tagban pedig Xm már nem szerepel, mint optimalizációs változó.

Ezt kell majd nullával egyenlővé tenni, de látjuk, hogy minden tagban m = i lesz, így az m szerinti összegelést el lehet hagyni.

$$\sum_j S_{j,i} \frac{1}{A_{j,i} \cdot X_i} \cdot A_{j,i} - A_{j,i} = 0$$

Ekkor

$$X_i = \frac{\sum_j S_{j,i}}{\sum_j A_{j,i}}$$

A korábbi egyenletbe behelyettesítve:

$$\frac{A_{j,m} \cdot X_m}{\sum_{m'} A_{j,m'} \cdot X_{m'}} \cdot y_j = S_{j,m}$$

Behelyettesítés után jobban látszódik, mi is történik, az aktuális annihilációs számbecslés szerint annak a szimulációja, hogy milyen beütést kellene látnunk a j. LOR mentén.

$$\sum_j \frac{y_j}{\sum_{m'} A_{j,m'} \cdot X_{m'}} \cdot \frac{A_{j,i}}{\sum_j A_{j,i}} \cdot X_i^{(n)}$$

Ezzel elosztjuk a valódi beütésszámot, ami lényegében egy multiplikatív hibaképzés, ezt a multiplikatív hibát fogjuk ezzel a lépéssel visszateríteni a térfogatra (visszaterítés alatt azt értjük, hogy megnézzük, hogy az i. voxelnek mekkora hozzájárulása volt a multiplikatív hibához, amit a j. LOR mentén láttunk) és ezzel az aránnyal módosítjuk az adott i. voxelbeli annihiláció becslésünket. Így egy iteratív eljárást kapunk, amely Poisson zajt fog feltételezni erre a j. LOR mentén érzékelt beütéspár n. voxelbeli annihilációpárra.

Ez az az eljárás, amely pozitronemissziós tomográfia esetén jól tud működni Poisson zajt feltételezve az Aj,m definíciója miatt.

Ha megnézzük a rekonstrukciót, akkor ugyan nem lehet azt mondani, hogy nagyon éles, effektív felbontású kép az eredmény, de alapvetően sokkal jobb jel-zaj viszonyú képet látunk, mint amit korábban kaptunk.

A CT-s rekonstrukciók kalibrált intenzitást, az úgynevezett Hounsfield Unit-ot kellene, hogy kiadják. A Hounsfield Unit-ja egy voxelnek úgy számolható, hogy a radiodenzitásból kivonjuk a víznek a radiodenzitását, tehát a lineáris csillapítási együtthatóját, ezt elosztjuk a víz és a levegő csillapítási együtthatójának a különbségével, ezt pedig megszorozzuk ezerrel:

$$HU = \frac{\mu - \mu_{\text{víz}}}{\mu_{\text{víz}} - \mu_{\text{levegő}}} \cdot 1000$$

Innen látható, hogy a legkisebb denzitás Hounsfield Unit-ban -1000 lehet, ez a vákuumé, felső határ pedig nincsen: ha van egy olyan voxel, aminek a lineáris csillapítási együtthatója végtelen, mert olyan anyagot tartalmaz, hogy minden fotont elnyel, az végtelen Hounsfield Unit-os lesz. A szakorvosokra jellemző, hogy ezt az értéket vizsgáló eljárás-független anyagleíróként értékelik: azt mondják, hogy ha egy adott voxelen belül pl. a denzitás -700 Hounsfield Unit, akkor az arra utal, hogy az a voxel nem csillapítja a röntgensugarakat, és ezért valószínűleg mondjuk egy tüdőlebenszövethez tartozó, léghólyagos, főleg levegővel telt voxelről beszélünk. Ez a megközelítés, hogy mi kvantitatív elvárásokat fűzünk egy CT rekonstrukcióhoz jól hangzik, azonban a valóságban a Beer-Lambert törvényből indultunk ki, amely sok fizikai kölcsönhatást nem tud modellezni, amelyek azonban jelen lesznek és terhelni fogják a képeinket és a képminőséget.

Anyag neve	[HU]
Levegő	-1000
Tüdő szövet	-600
Zsír	-100 – -50
Víz	0
Agy-gerincvelői folyadék	15
Vese	30
Vér	+30 – +45
Izom	+10 – +40
Szürke állomány	+37 – +45
Fehér állomány	+20 – +30
Máj	+40 – +60
Lágyrész	+100 – +300
Csont	+700 – +3000

11.4. ábra. Különböző anyagoknak a Hounsfield Unit-jai

Tipikusan nagy értékkel a nagy kalciumtartalmú csontok rendelkeznek az élő szervezetekben, esetleg különböző fémek, implantátumok.

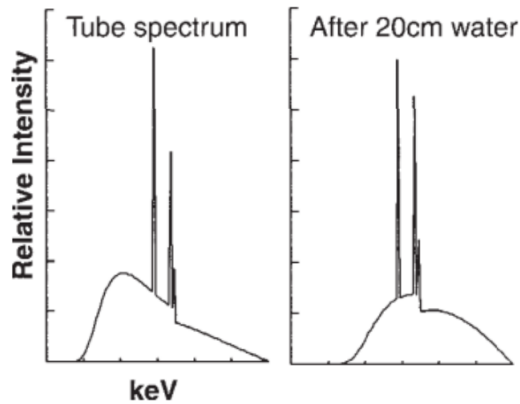
11.0.1. Tipikus problémák

Más aspektusból vizsgálva megjelennek egyéb zajtípusok, amik erősen lerontják a CT konstrukció minőségét. Az egyik ilyen zajhatás a sugárkeményedés.

A Beer-Lambert törvénnyel kapcsolatban már felmerült, hogy monokromatikus sugárra írtuk fel, azt feltételezve, hogy a sugárforrásból kilépő összes fotonnak ugyanaz az energiája. Tehát az energia spektrumát nézve azt látnánk, hogy a karakterisztikus tüskén kívül minden más energián nulla lenne a fotonok száma, ami kilép a sugárforrásból. Sőt a monokromatikus Beer-Lambert törvény szerinti modell azt mondja, hogy ahogy ezek a fotonok haladnak a térfogaton belül, ott is vagy elnyelődnek, vagy tartják az energiájukat. Ezen kívül egy klasszikus fizikai foton anyag kölcsönhatásnál igaz ez, a Rayleigh szórás is hasonlóan viselkedik, az összes többi nem. Így hát sem a röntgennél, sem a gamma fotonoknál nem jellemző, úgyhogy itt alapvetően számolnunk kell az ettől való eltéréssel. Az ettől való eltérés még azt mondja, hogy polikromatikus sugarunk van, ami kilép a sugárforrásból, és különböző energia szintű fotonok más mértékben csillapodnak vagy

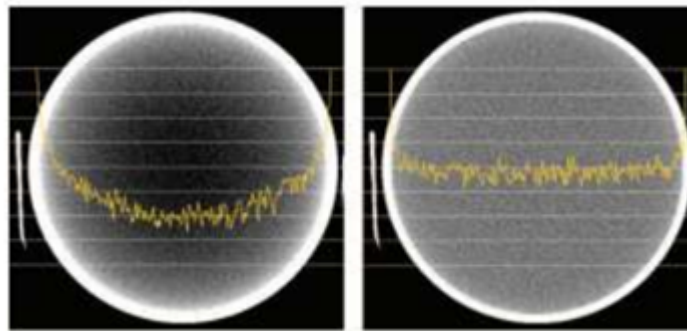
haladnak át az anyagon.

A kis energiájú fotonok, amikor találkoznak az első sűrű szövetrel, például csontszövetrel, tipikusan elnyelődnek, és azon már nem haladnak túl. Egy homogén anyag esetén viszont



11.5. ábra. CT-be helyezett vizespalack rekonstrukciója

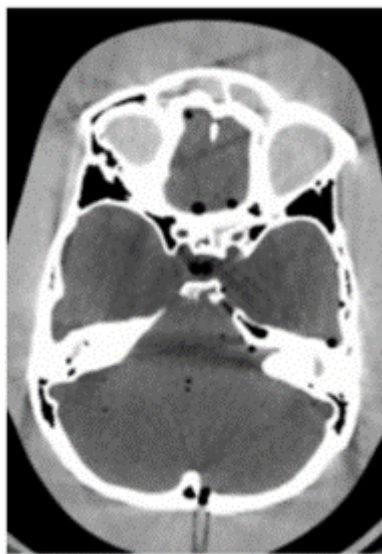
- amint a felső ábrán látható - is jellemző az, hogy a szélén relatívan sokat elnyel a kis energiájú röntgensugarakból. Ekkor, ha 20 cm vízen át küldjük ezt a spektrumot, akkor már a jobb oldalon látható spektrumot kapjuk. Ami hiányzik, az a kisebb röntgenenergiájú, nagyobb foton intenzitású tartomány, és ezt a CT úgy tekinti, mintha ez a térfogat szélén csillapodott volna, és természetesen minél beljebb kerülünk a térfogatba, annál kisebb lesz ugyanannak az anyagnak a csillapítási együtthatója. Ezért, ha egy vízszintes profil mentén néznénk az itt rekonstruált értékeket, akkor ezt az úgynevezett csésze artifaktot látnánk, ami az alábbi képen sárgával jelölve látható: A térfogat szélén



11.6. ábra

nagy csillapítás látható, a közepén pedig annál jóval kisebb, így ez egy homogén anyag volt. Ha ezt kompenzáljuk, akkor konstans csillapítás érhető el (jobb oldali ábra). Ha egy összetettebb térfogatot vizsgálunk, a rekonstrukcióját nézve azt láthatjuk, hogy ez az úgynevezett streaking artifakt jellemző: vannak többnyire homogén területek, ezeken belül pedig sötétebb sávok jelennek meg. Tipikusan egyébként azon sugarak mentén jelennek meg ezek a sötét sávok, amelyek sok ilyen nagy csillapítási együtthatójú anyagon keresztül haladtak át. Miközben ezen áthaladtak, az energiáik nagy része, a fotonáramok nagy része a sugaraknak elnyelődött, hiszen a kis energiájú fotonok már nem jutottak át a csontszöveteken, ezért a csontszövetek által közbezárt térfogat már csak kevésbé tudta gyengíteni a fotonintenzitást.

A legegyszerűbb megoldásként CT esetében a különböző vastagságú fémlemezek, fém



11.7. ábra. Sugárkeményedés miatti streaking

szűrők használata, ezek a fémlemezek már elnyelik a kis energiájú fotonok nagy részét. Ez azért előnyös, mert ezek a fotonok egyébként sem haladnának át a térfogaton, feleslegesen ionizálnánk a térfogatot velük. Azonban hátrányos, hiszen ezeket a fotonokat a sugárforrás előállította, és már el is nyeltük őket egyből, ezért ezekkel feleslegesen fűtöttük a tárcsát.

Egy másik megoldás, hogy olyan rekonstrukciós eljárást írunk, ami a levetítés lépésnél figyelembe veszi ezt a sugár keményedést. Tehát például, amikor az ART-t alkalmazzuk, akkor a mátrixszal történő szorzásnál különböző energiájú röntgen fotonokat feltételezünk, és azt mondjuk, hogy ahol csontszövet van, az jobban csillapítja a sugarakat, mintha valamilyen kötőszövetünk lenne (pl. szürkeállomány). Ez viszont már nem egy optimális megoldás.

Szintén probléma szokott lenni, hogy mivel tipikusan helikális pályán halad a sugárforrás és a detektor a páciens körül, ekkor azt lehet tapasztalni, hogy az asztal nem áll meg, amin a páciens fekszik, ám folyamatosan, elejétől végéig mozog, amíg a felvétel készül. Ennek az lesz a következménye, hogy megjelenik a helikális trajektória, az egymással szembeni félkörök által bezárt térfogat, amelyből a rekonstrukciós készül. Viszont ezt a rekonstrukciós eljárások vagy figyelembe veszik, vagy nem, tipikusan annyira nem szokták figyelembe venni.

Ennek az lesz a következménye, hogy ha van egy olyan objektum, ami ezen körbefordulás során csak a projekciók egy részén látszik, amely projekciókat viszont egy axiális szelet projekcióiként kezeljük, a korábbi probléma jön elő ismét: az objektum körvonalai egy bizonyos irányból jól rekonstruálódnak, jól látszódnak, rá merőleges irányból viszont tipikusan elmosódtak.

Egy másik probléma szokott lenni a részleges térfogat artifakttal kapcsolatban, egy vékonyabb struktúra esetén, ami viszont informatív lenne számunkra, pl. mellkas CT esetén a hörgőfa széle. A hörgőfát egy levegős üregként lehet elképzelni, amelynek széle egy porcosabb szövetrel van határolva, erre a porcos szövetre pedig jellemző 1 mm-es, 2,5 mm-es szelettávolságú CT-kenél, hogy nem rekonstruálódik a CT-ben, 2 vizsgált szelet középvonala közt elveszik. Ekkor ha ránézünk egy ilyen szelet képére, akkor az a szeletkép, ami metszette a hörgőfának egy részét, -ahol látszódik a hörgőfa és párhuzamos egy axiális szelettel - akkor sok esetben rekonstruálódik és az a benyomásunk lehet a CT alapján, hogy a hörgőfa egyszer csak véget ért, de sok szelettel később pedig valamilyen

teljesen más lokációban folytatódik. Ezt a hibát az orvos megfelelő anatómiai ismereteivel lehet korrigálni, így ilyen felvételek esetén a mérés és a rekonstrukció sokszor csak az orvos már meglévő elképzeléseinek a megerősítésére elegendő.

A Beer-Lambert törvény szerint exponenciális csillapítási hatás figyelhető meg, nem lineáris, ekkor logaritmálásra van szükség, és ezen logaritmálás után születik a mátrixos lineáris egyenletrendszer, amit például az ART invertál. Viszont a logaritmálás a zajt is erősíti. A logaritmus függvénynek a kisebb értékeknél sokkal nagyobb a meredeksége, mint nagyobb értékek esetén. Viszont zaj, mondjuk Compton szóródás miatti vagy Poisson zaj esetén annak mértéke, hogy a kisebb fotonintenzitású, tehát kevés primer fotont érzékelő sugarak mennyire terhelődnek zajjal, nem fog függeni a primer fotonok számától.

Feltételezhetnénk, hogy fehér zajunk van, amely valamilyen szóródás következményeként jött létre, azonban a valóságban természetesen nem fehér zajunk lesz, valamint a logaritmálás is ront az eredményen. Ennek az lesz a következménye, hogy a projekciókat nézve azon érzékelt fotonáramok, amik kis intenzitás mentén érzékelődnek - olyan vetítő sugarak mentén, ahol a fotonok nagy része elnyelődött, - nagyon rossz lesz a jel-zaj viszony, ami rossz képminőséget eredményez. A kulcscsontokon keresztülmenő röntgensugarak



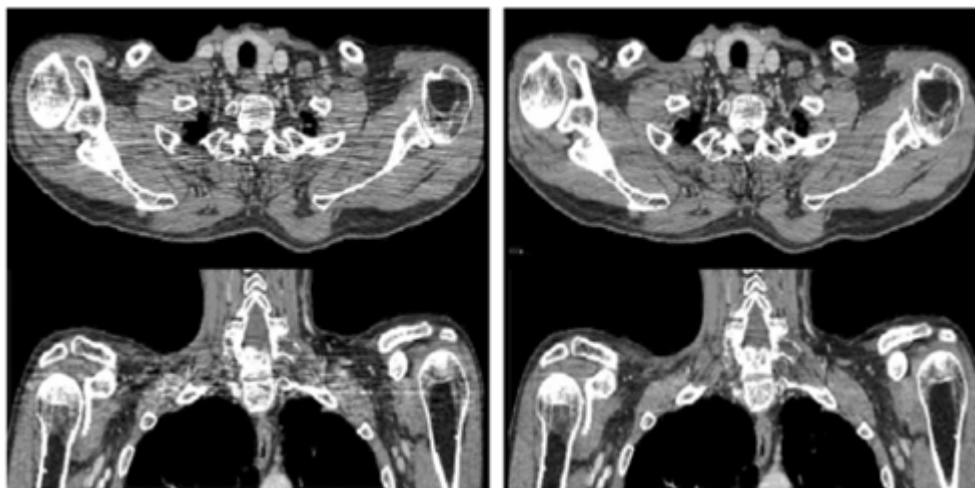
11.8. ábra. Streaking a rekonstruált szeleteken a kulcscsont miatt

hatására úgynevezett streaking jelenik meg. Rosszabb jel-zaj viszonyú az eredmény, mint a többi szövetnél, aminél a kulcscsonton belül már jóval kisebb utat kellett megtennie a sugaraknak. Ezt a problémát tipikusan úgy lehet orvosolni, hogy különböző csőáramot (csőáram: azt befolyásolja, hogy hány röntgenfoton indul el adott pillanatban a térfogat felé) alkalmaznak annak függvényében, hogy éppen hol tart a vizsgálat a térfogaton belül. Egy CT-t a gyakorlatban vizsgálva az mindig egy PA-hoz (PA: Postero-Anterior, hátulról előre tartó sugáriránnyal készült kép) hasonló képet szokott az elején készíteni. Ezen PA kép készítésénél egy erre készült eszköz segítségével mérik, hogy adott sugár mentén mekkora fotonintenzitás éri el a detektort és az eszköz ez alapján kalibrálja azt, hogy miközben forgunk a térfogat körül, hova mekkora csőáramot érdemes használni. Egy olyan területen, aminél rosszabb lesz az átvitel, mert pl. csontosabb a terület, nagyobb csőáramot érdemes választani, hogy több foton induljon el, rá merőleges irányban azonban kevesebb foton is elegendő.

A Beer-Lambert törvény lényegére gondolva a detektált intenzitás esetében, már a sugárforrásból kilépő intenzitás multiplikatívan jelenik meg, logaritmálás után egy additív tag lesz. Tehát ha tudjuk, hogy adott projekció mentén mennyi foton lépett ki a sugárforrásból, annak logaritmusát könnyen levonhatjuk, ekkor ettől függetlenül tettük a méréseinket, ennek a hatása pedig az lesz, hogy elkerüljük azt a tartományt, ahol

rosszabb a jel-zaj viszony az előfeldolgozási lépés után.

A váll környéki régió a legjobb példa, ahol a lapockacsont, a vállnak a csontja, a kulcscsont helyezkedik el, sőt még a gerincoszlop is sokszor zavaró tényező. Ennek a hatása a fenti axiális szöveten látható igazán jól, ha ez nincs kompenzálva, akkor egy ilyen jellegű képet kapunk, viszont amint sikerül kompenzálni - vagy algoritmikusan, vagy a vezérlésből - akkor pedig egy jobb oldali ábrán látható képminőséget kapunk, ekkor sokkal kevésbé jelennek meg ezek a zajok. Tehát, amit még lehet tenni az egy adaptív szűrés



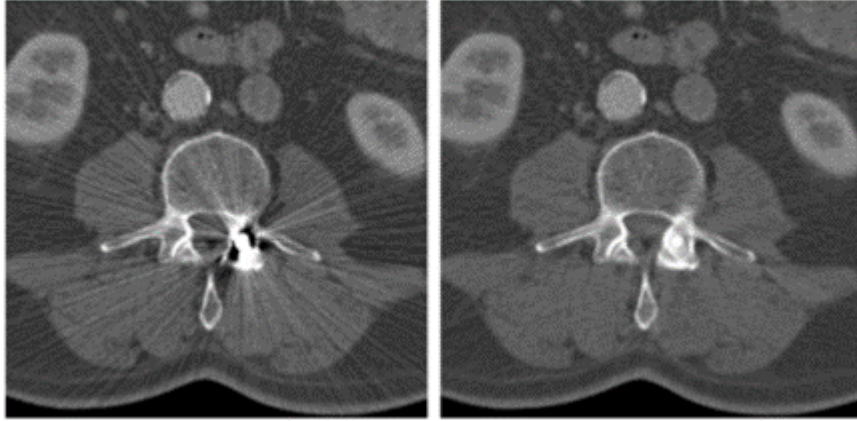
11.9. ábra

megközelítés, amely esetében a tipikus eljárás, hogy a szinogramon belül megnézik, hogy hol volt kevés foton, ami elérte a detektort, és azokon a területeken a szinogram többi értékével megpróbálják kipótolni és felülírni az ott látható értéket. Tehát mintha a szinogramból kijelölésre kerülnének az olyan részek, amelyek a vizsgálat szempontjából nem lényegesek és inkább a szomszédos projekciós értékekből interpolálunk, ez a módszer pedig megfelelően szokott működni. Ez is módosítható úgy, hogy nem csak egy adott osztóponton belül történik a szűrés, hanem a körbefordulás közben a különböző axiális szeletek körül, ahol különböző szinogramokat kapunk, is megpróbálunk interpolálni.

11.0.2. Fém artifakt

A röntgensugarak fémen áthaladva tipikusan elnyelődnek, emellett a fotoelektromos kölcsönhatása a fémeknek jelentősebb, valamint szóródásra is hajlamosabbak a fémen áthaladni kényszerülő röntgensugarak. Az elnyelődésnek és a szóródásnak a következménye lesz, hogy primer sugarak mentén kevés foton tud áthaladni a fémen, tehát a fotonéhezés is megjelenik, mint zavaró tényező.

Ennek a hatását vizsgálva egy gerincimplantátumnál láthatjuk, hogy ART-t használva a szinogramokon, egy ilyen kép az eredmény: Ennek a hatását vizsgálva a képen látható gerincimplantátumon láthatjuk, hogy ART esetén a fémbjektumból kiindulva radiálisan streaking artifaktok jelennek meg. Az intenzitáshullámváz oka ismét a nagyobb mértékű zajérzékenységnek és a rossz jel-zaj viszonyoknak a következménye. Ezen kívül az is jellemző, hogy a rekonstrukciónál „túllövések” vannak, ami pedig a sugárkeményedéssel magyarázható, hiszen az a foton, ami át akar haladni a fémen, nagymértékben csillapodik, főleg az alsó energiatartományban. Ezért ilyen rekonstrukciók esetében, még a kalibráció után is sokszor egy nagy sugárcsillapítási együtthatójú anyag mellett irreálisan kicsi csillapítási együtthatók figyelhetők meg (tipikusan – 1000 Hounsfield Unit alatti értékek, tehát olyan értékűek, amelyek már nem is lehetségesek definíció szerint). Mivel már a szinogramban

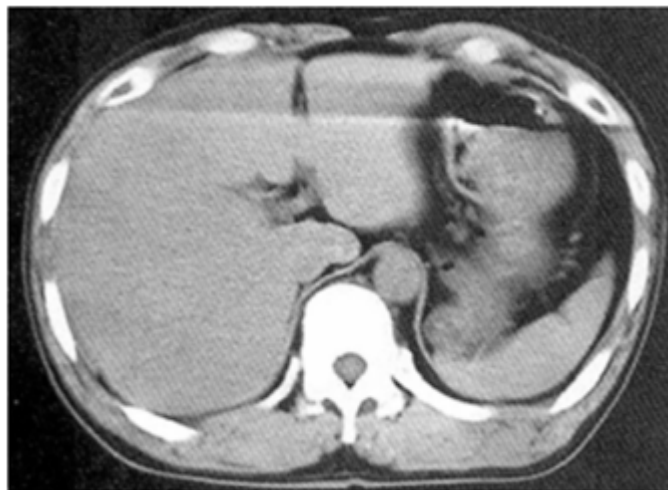


11.10. ábra. Gerinc implantátum és az ART (baloldalt) ART a szinogram kompenzációja után (jobbaldalt)

látszódnia szokott, hogy hol vannak fémek - hiszen azon projekciók, amelyek áthaladtak a sok fémmel teli voxelen, ott általában nagyon kicsi fotonáram jut el a detektorig - ezeket az elemeket a szinogramból szegmentálni lehet és az értékük a szinogram szomszédos tartományába kerül interpolálásra. Ekkor tehát a szinogram tartományban történik egy szűrés, ez a szűrt szinogram ezután felhasználásra kerül az eljárás során, az eljárás pedig képes rekonstruálni egy eredményt, ahol még mindig látható a fém artifakt következménye, de már nagyságrendekkel kisebb mértékben.

11.0.3. Páciens bemozdulása

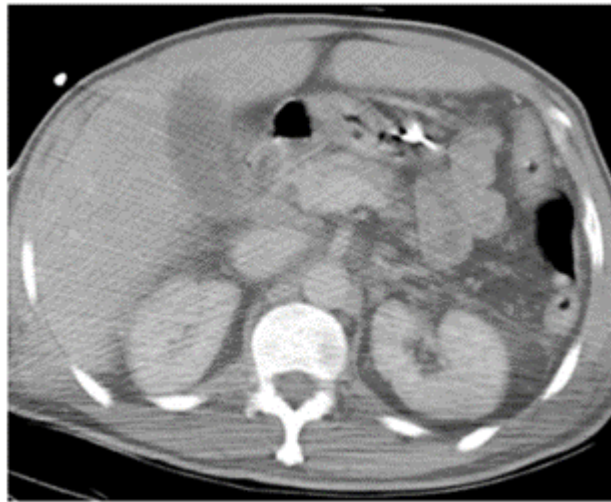
Előfordulhat olyan eset is, amikor önkéntelenül mozog a páciens. Ez azt eredményezi, hogy egymással inkonzisztens projekciók születnek, ezeknek az inkonzisztens projekcióknak pedig olyan következménye lesz, hogy ha a rekonstrukciót nézzük, akkor markáns artifaktok figyelhetők meg, amelyek tipikusan éleket szoktak realizálni. Talán annyira nem jelentős



11.11. ábra

ennek a hatása a képminőségre, azonban előfordulhatnak szélsőséges esetek. Ennek elkerülése végett szükséges a páciens megfelelő rögzítése úgy, hogy a bemozdulás valószínűsége, valamint annak mértéke minimális legyen. Szívvizsgálatnál pedig egy olyan

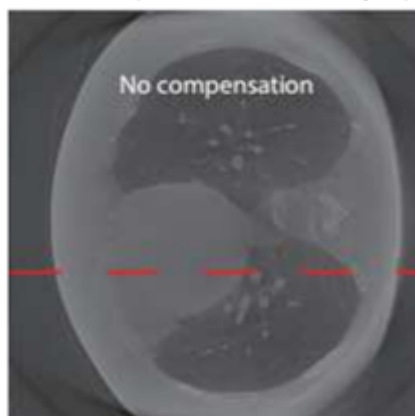
anyag vérben való alkalmazása a megszokott, amely lelassítja a szívverést. Tipikus probléma tud lenni, ha rosszul állítotja be a röntgenasszisztens a felvételt, és vannak olyan térfogatelemek, amelyek nincsenek benne az úgynevezett Field Of View-ban. A Field Of View az a tartománya a térfogatnak, amit rekonstruálni szeretnénk a CT-vel. Ha a modellünk azt feltételezi, hogy ezen kívül csak levegő van, viszont ott mégis volt olyan anyag, ami csillapította a röntgenkontúrokat, akkor annak a hatását szétteríti a rekonstrukció a teljes térfogaton. Ennek következményeként ebben az esetben is streaking artifakt jelenik meg. A megoldás, hogy ilyenkor szükséges a teljes térfogat rekonstrukciója.



11.12. ábra

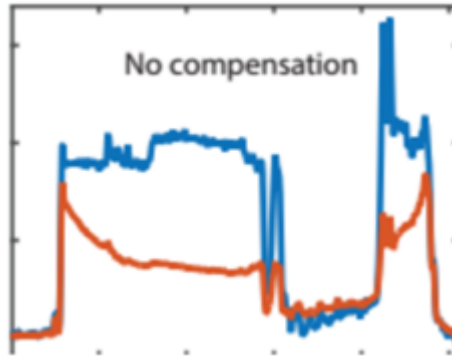
11.0.4. Compton szóródás

Ahhoz, hogy meghatározható legyen, hogy szükséges-e kompenzálni a Compton szóródást, először érdemes a hatását vizsgálni, amely az alábbi képen látható. A képen azt érdemes



11.13. ábra

észrevenni, hogy a csillapítási együtthatók viszonylag nagyobb tartományból kerülnek ki a térfogat szélén és a térfogat közepén pedig ez összezsugorodik, miközben a szaggatott piros vonallal jelölt profil a szíven, tüdőn, kötőszöveti részen belül többnyire konstans értéket kellene, hogy felvegyen. Ennek egy ideális szóródás nélküli rekonstrukciója látható kékkel: Az figyelhető meg, hogy itt a kontrasztok összeesnek a térfolt közepén. A szóródás a



11.14. ábra

vizsgált térfogatban minél hosszabb utat megtevő sugarakat terheli leginkább, a szóródás látszólagos plusz fotonokat jelent adott sugarak mentén, amiknek nem kellene ott lenniük. Ezt megfelelő modulációval lehet kompenzálni. Egyszerű axiális CT esetén nem meghatározó a probléma, mivel vékony a detektor és ebbe a vékony detektorba - amely csak pár sort tud feldolgozni a páciensből, pár axiális szelet körül forog – kis valószínűséggel csapódnak be a szórt fotonok. Ezzel szemben egy nagyobb kiterjedésű detektor esetén sokkal több szórt foton tud becsapódni. A kompenzáció kulcsa, hogy a nagyfrekvenciás modulációt a szóródás elnyeli, a primer fotonokat viszont lehet modulálni nagyfrekvenciás vivőjellel, így a szóródás, azokat visszafelé. Mondja más frekvenciás vivőjellel. Így a szóródás és a vivőjel egymástól elkülöníthető.