

Rekonstrukciós eljárások

Orvosi képdiagnosztika

2023 ősz

Előadások témája

- Röntgen tomográfia fizikai és matematikai alapjai – 2D Radon transzformáció, szűrt visszavetítés:
 - Fan – beam / Cone – beam felvételi elrendezések esete
- Általánosított (3D) röntgen tomográfia alapjai – ART rekonstrukciós eljárások
- Pozitron emissziós tomográfia alapjai – ML-EM statisztikai rekonstrukciós eljárás
- Modell alapú / CS rekonstrukciós eljárások
- Tomoszintézis felvételi elrendezés – MITS rekonstrukció
- Rekonstrukciós eljárások minősítése

Röntgen tomográfia alapjai

- Általánosított Beer-Lambert törvény:


$$\mathbf{I}_{(x_0, y_0)} = \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} I_0(E) \cdot \exp \left\{ - \int_{P(x_0, y_0)} \mu(E, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \right\} dE :$$

- $I_0(E)$: röntgensövet elhagyó E energiájú fotonok intenzitása (üres térfogat esetén a detektor által érzékelt fotonok száma)
- $P(x, y)$: pontszerű sugárforrást a detektor (x, y) koordinátájú pontjával összekötő szakasza a *3d térnek*
- $\mu(E, \mathbf{x})$: a vizsgált térfogat \mathbf{x} koordinátájú pontjának lineáris csillapítási együtthatója E energián
- Egyszerűsített Beer-Lambert törvény: $I_0(E) \cdot \exp \left\{ - \int_{P(x_0, y_0)} \mu(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right\}$
(monokróm spektrum esete)

Röntgen tomográfia alapjai

- Monokróm spektrumú sugárzás esete:
 - Általánosan alkalmazott feltételezés
 - Rekonstrukció célja a lin. csillapítási együtthatók meghatározása az alábbi összefüggés invertálásával:

$$-\ln\left(\mathbf{I}_{(x,y)}/I_0\right) = \int_{P(x_0,y_0)} \mu(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

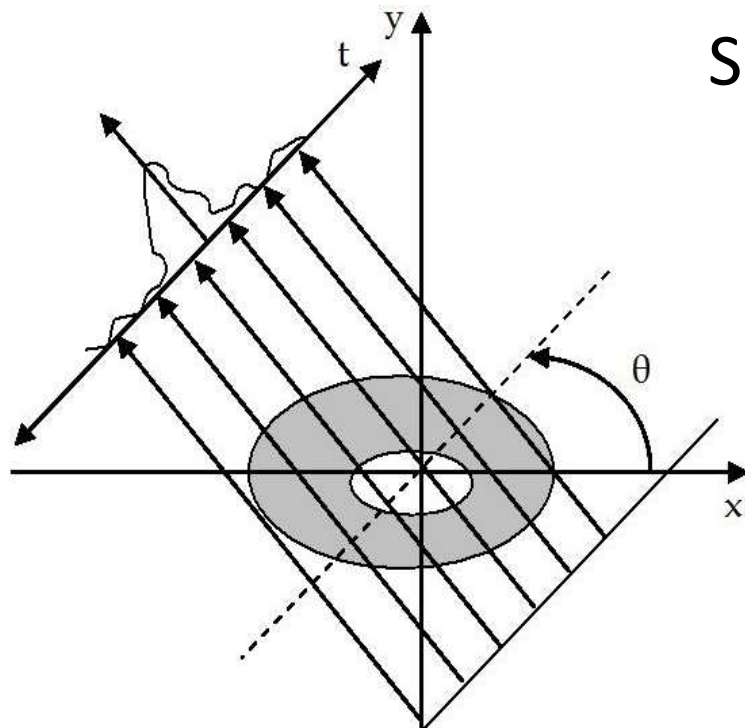
- Valódi röntgensugarak ezzel szemben:
 - Polikromatikusak  sugárkeményedés problémája
 - Szóródnak: nem igaz, hogy csak a vetítősugar mentén elhelyezkedő képletek számítanak.
 - Projekciók egyéb zajjal is terheltek : kis intenzitásnál rossz SNR

Röntgen alapú képalkotás

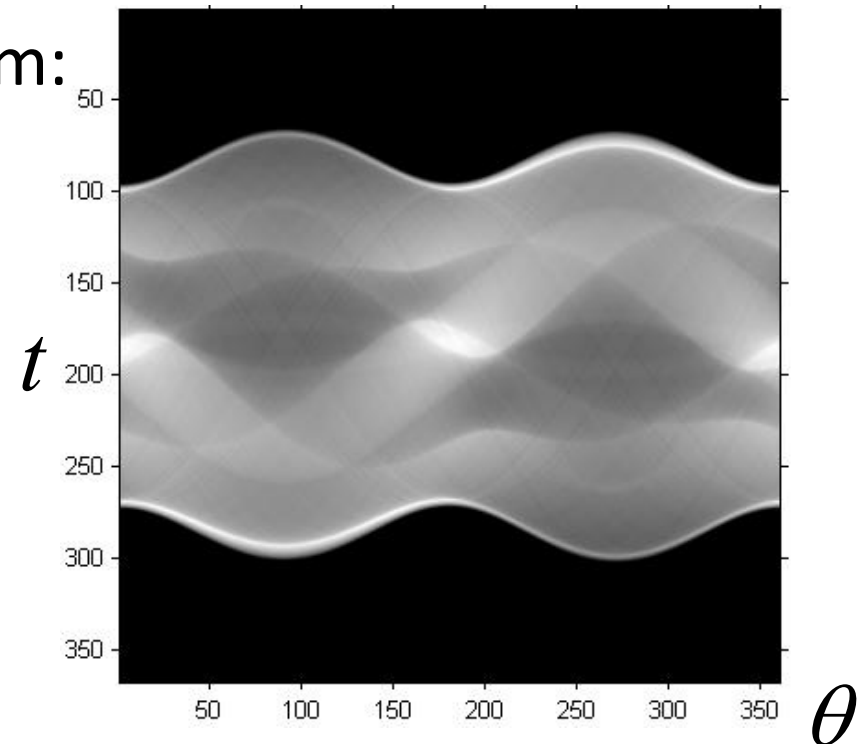
- Konvencionális P-A röntgen:
 - Nincs rekonstrukció
- Számítógépes tomográfia (CT):
 - Párhuzamos vetítősugarakon alapuló eljárások (kevés ilyen eszköz került forgalomba), cserébe egyszerű elmélet
 - Legyező (Fan-beam) helikális CT – leggyakoribb típus
 - Cone-beam CT, ennek speciális változata a Tomoszintézis
- Orvosi képdiagnosztika alapvető eszköze:
 - Mivel a röntgen sugárzás ionizál, illetve maga a vizsgálat itthon mércével drága, ezért csak indokolt esetben végzik

2D Radon transzformáció:

- Radon transzformáció (2D szelet 1D projekciók):
 - Input: 2D Descartes - koordinátarendszerbeli kép
 - Output: sinogram – 2D polár-koordinátarendszerbeli kép



Sinogram:



Radon transzformáció – Fourier vetítősík tétel

- Radon transzformáció (2D szelet 1D projekciók):

- Vetítősugarak merőlegesek az x tengellyel θ szöget bezáró egyenesre: $t = x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta)$

- Vetítősugarak mentén integráljuk a szelet elemeit:

$$P_{\theta}(t) = \iint_{x,y} f(x, y) \cdot \delta(x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta) - t) dx dy$$

- Legyen $S_{\theta}(\rho) = FT_{\rho} \{P_{\theta}(t)\} = \int P_{\theta}(t) \cdot \exp(-2\pi j \cdot t \rho) dt$

- Fourier vetítősík tétel származtatása:

$$S_{\theta}(\rho) = \iiint_{x,y,t} f(x, y) \cdot \delta(x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta) - t) \cdot \exp(-2\pi j \cdot \rho t) dt dy dx$$

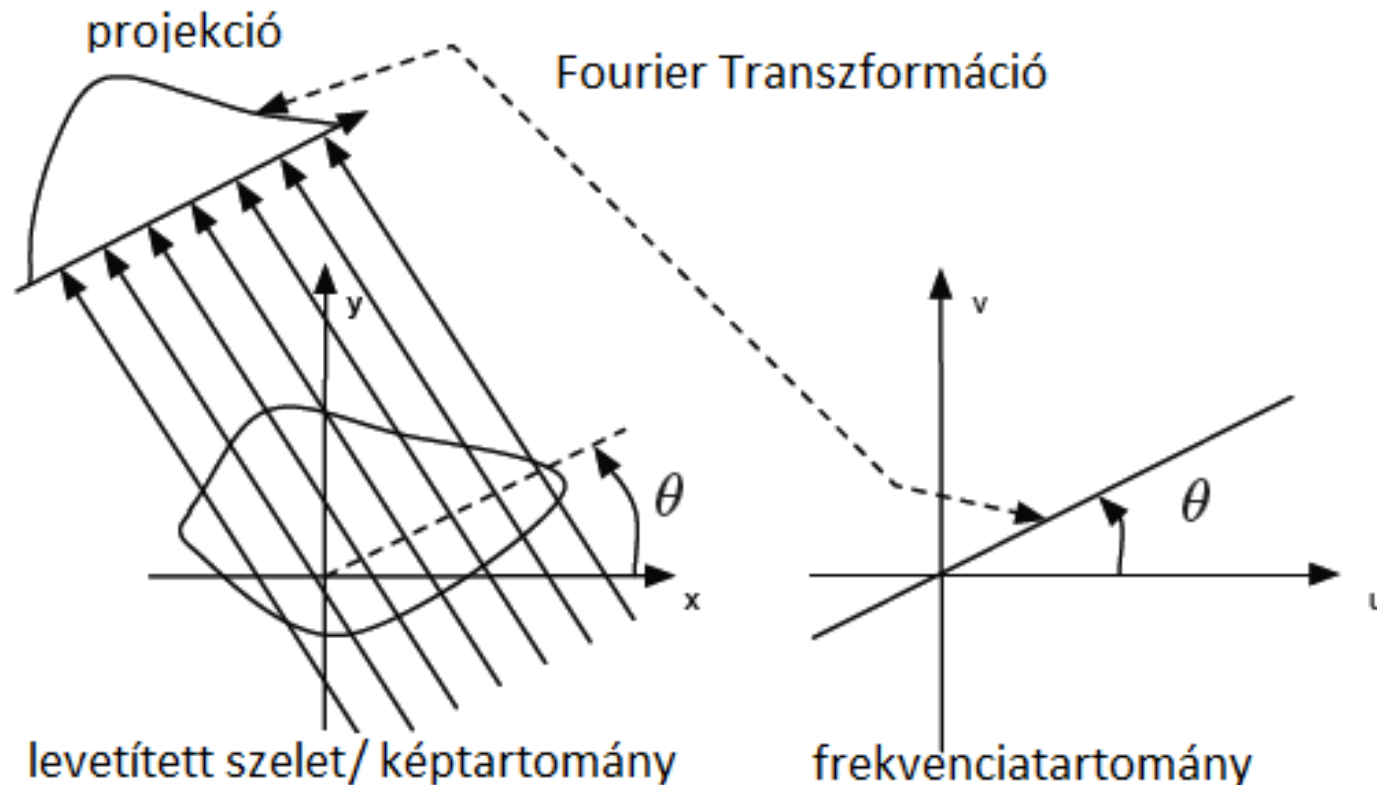
$$S_{\theta}(\rho) = \iint_{x,y} f(x, y) \cdot \exp(-2\pi j \cdot \rho \cdot (x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta))) dy dx$$

Fourier vetítősík tétel

– Lényegében f spektrumának egy szakaszát kaptuk meg:

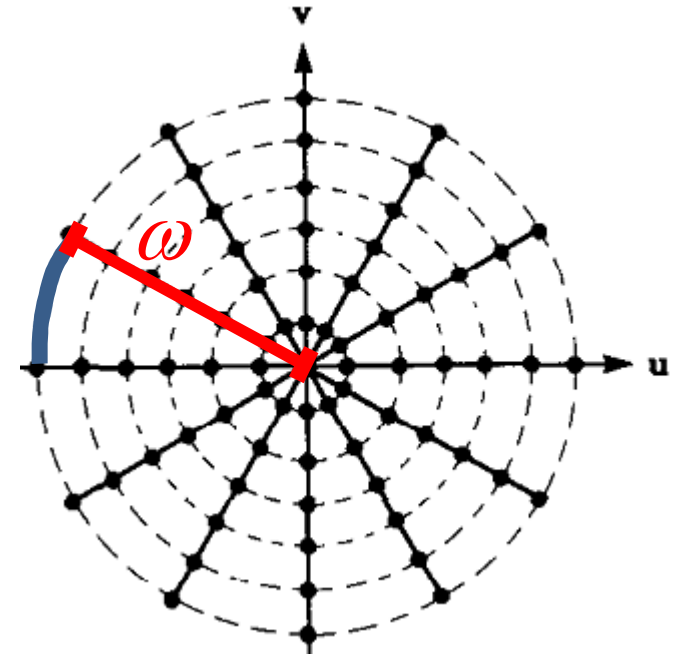
$$S_{\theta}(\rho) = F(\rho \cdot \cos(\theta), \rho \cdot \sin(\theta))$$

- Vizuális interpretáció:



Rekonstrukció – FBP alapötlete

- Rekonstrukció célja: Radon Transzf. invertálása
- Fourier vetítősík tétel értelmében a vizsgált szelet spektrumainak bizonyos részeit ismerjük:
 - Az ismert részeket „illesszük” egy üres spektrumba
 - Polár koordinátás frekvencia sugarának függvényében a spektrum mintavételi helyeinek eltérő a távolsága:
$$K(\omega) = |\omega| \cdot \Delta\theta$$
 - Korrekció: spektrumba illesztés előtt $|\omega|$ -val súlyozzunk frekvenciatérben (ez az ún. rámpaszűrés).



Szűrt visszavetítés (FBP) származtatása

- FT inverze: $f(x, y) = \iint_{u,v} F(u, v) \cdot \exp(j2\pi(ux + vy)) dvdu$
- Fourier vetítősík miatt a spektrumot polárkoordináta-rendszerben ismerjük: $u = \omega \cdot \cos(\theta)$; $v = \omega \cdot \sin(\theta)$

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega, \theta) \cdot \exp(j2\pi \cdot \omega(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))) \cdot J d\omega d\theta$$

$$- J = \begin{vmatrix} \partial u / \partial \omega & \partial u / \partial \theta \\ \partial v / \partial \omega & \partial v / \partial \theta \end{vmatrix} = \dots = \omega, \quad du dv = J d\omega d\theta$$

– Továbbiakban $k := x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$

- $f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega, \theta) \cdot \exp(j2\pi \cdot \omega k) \cdot \omega d\omega d\theta$

Szűrt visszavetítés (FBP) származtatása

- Vágjuk szét a külső integrált:

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega, \theta) \cdot e^{j2\pi \cdot \omega k} \omega d\omega d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega, \theta) \cdot e^{j2\pi \cdot \omega k} \omega d\omega d\theta$$

- $f(\cdot, \theta)$ a sinogram egy oszlopa, melynek definíciójából (Radon transzf.) következik, hogy $F(\omega, \theta) = F(-\omega, \theta + \pi)$, hiszen:

$$F(\omega, \theta + \pi) = \int_{t=-\infty}^{\infty} P_{\theta+\pi}(t) \cdot \exp(-j2\pi\omega t) dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} P_{\theta}(-t) \cdot \exp(-j2\pi\omega t) dt$$

$$F(\omega, \theta + \pi) = \int_{l=-\infty}^{-\infty} P_{\theta}(l) \cdot \exp(-j2\pi(-\omega)l) \frac{\partial t}{\partial l} dl = F(-\omega, \theta) \quad l = -t$$

- Felhasználtuk, hogy $k = x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$, illetve $\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$ és $\sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$

Szűrt visszavetítés (FBP) származtatása

- Vágjuk szét a külső integrált:

$$P_{\theta}(l) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(l, \theta) \cdot e^{j2\pi \cdot \omega k} \omega d\omega d\theta + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega, \theta) \cdot e^{j2\pi \cdot \omega k} \omega d\omega d\theta$$

- $f(\cdot, \theta)$ a sinogram egy oszlopából $S_{\theta}(\omega) \triangleq F(\omega, \theta)$ (Radon transzf.) következik, hogy $F(\omega, \theta) = F(-\omega, \theta + \pi)$, hiszen:

$$F(\omega, \theta + \pi) = \int_{t=-\infty}^{\infty} P_{\theta+\pi}(t) \cdot \exp(-j2\pi\omega t) dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} P_{\theta}(-t) \cdot \exp(-j2\pi\omega t) dt$$

$$F(\omega, \theta + \pi) = \int_{l=-\infty}^{\infty} P_{\theta}(l) \cdot \exp(-j2\pi(-\omega)l) \frac{\partial t}{\partial l} dl = F(-\omega, \theta) \quad l = -t$$

- Felhasználtuk, hogy $k = x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$, illetve $\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$ és $\sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$

Szűrt visszavetítés (FBP) származtatása

- Alakítsuk át egyszerű behelyettesítésekkel a második integrált:

$$\int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega, \theta) \cdot e^{j2\pi \cdot \omega k} \omega d\omega d\theta \Big|_{\theta=-\Theta} = \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} F(-\omega, \Theta) \cdot e^{-j2\pi \cdot \omega k} \omega d\omega d\Theta$$

$$k = \cos(\theta)x + \sin(\theta)y$$

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\infty} F(-\omega, \Theta) \cdot e^{-j2\pi \cdot \omega k} \omega d\omega d\Theta \Big|_{\omega=-\Omega} = \int_0^{\pi} \int_0^{-\infty} F(\Omega, \Theta) \cdot e^{j2\pi \cdot \Omega k} (-\Omega) \cdot (-1) d\Omega d\Theta$$

$$\int_0^{\pi} \int_0^{-\infty} F(\Omega, \Theta) \cdot e^{j2\pi \cdot \Omega k} (-\Omega) \cdot (-1) d\Omega d\Theta = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^0 F(\Omega, \Theta) \cdot e^{j2\pi \cdot \Omega k} (-\Omega) d\Omega d\Theta$$

Szűrt visszavetítés (FBP) származtatása

- Lássuk mit sikerült kifőznünk:

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega, \theta) \cdot e^{j2\pi \cdot \omega k} \omega d\omega d\theta + \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^0 F(\omega, \theta) \cdot e^{j2\pi \cdot \omega k} (-\omega) d\omega d\theta$$

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega, \theta) \cdot |\omega| \cdot \exp(j2\pi k \omega) d\omega d\theta = \int_0^{\pi} Q_{\theta}(k) d\theta:$$

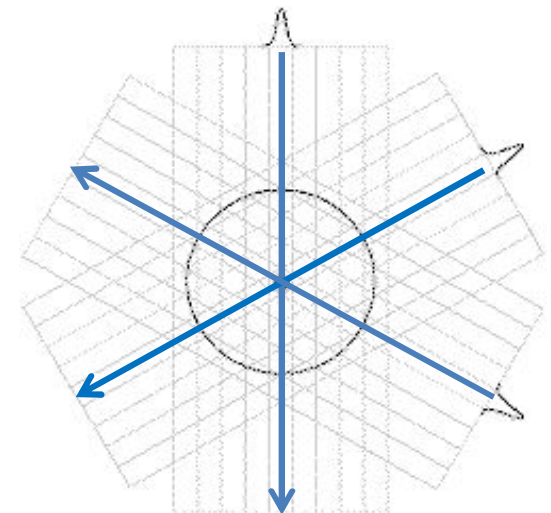
$$- Q_{\theta}(k) = \int_{\omega=-\infty}^{\infty} S_{\theta}(\omega) \cdot |\omega| \cdot \exp(j2\pi k \omega) d\omega \text{ ekvivalens a projekciók}$$

(sinogram oszlopai) rámpa szűrővel

történő szűrésével

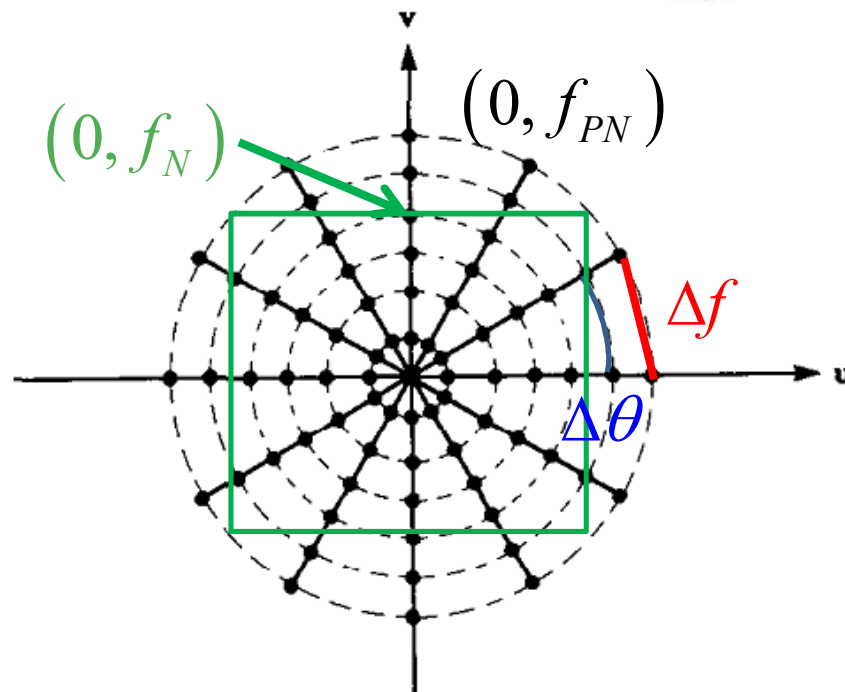
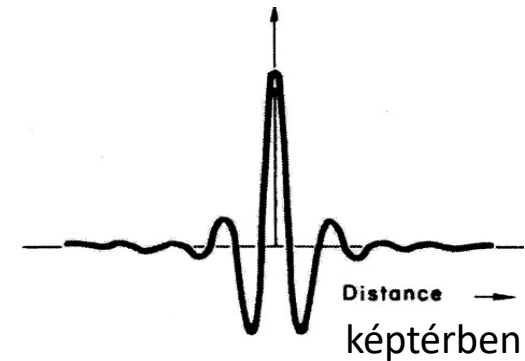
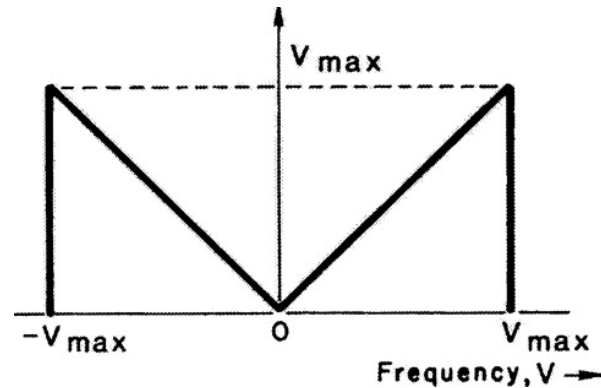
$$- f(x, y) = \int_0^{\pi} Q_{\theta}(x \cos(\theta) + y \sin(\theta)) d\theta:$$

az ú.n. visszavetítés



Szűrt visszavetítés értékelése

- Rámpaszűrő:




„Ideális” rekonstrukció:

- 180°-ból rögzített projekciók
 - $f_{PN} = 1/2\Delta t$ $\Delta\theta = \pi/M$
 - $\Delta f_{rad} = 2f_{PN}/N = 1/(\Delta t \cdot N)$
 - $\Delta f_{az} = f_{PN} \cdot \Delta\theta \approx \Delta f_{rad}$
- $$M/N \approx \pi/2$$

Szűrt visszavetítés implementációja

- Rámpaszűrés frekvenciatérben történik:
 - ~ 20 -as szűrő esetén már a frekvenciatartománybeli szűrés a gyorsabb (ennek főleg régebben volt jelentősége).
- Visszavetítés kép / időtartományban:
 - Frekvenciatartományban interpolálnunk kellene a spektrum ismert egyeneseiből a DFT által mintavett frekvenciák értékét (mely messze nem triviális).
- Szűrések, projekciók visszavetítése egyenként (sugaranként) jól párhuzamosítható

Szűrt visszavetítés zajérzékenysége

- Detektorok DQE-je a frekvencia függvényében monoton csökken  zajos magas frekvencia.
- Ráadásul magas frekvencián „távolabb vannak” a spektrum ismert értékei (ezért kell a rámpa szűrés is).
- Legegyszerűbb megoldás az alul-áteresztés:
 - Az alul-áteresztés és a visszavetítés sorrendje tetszőleges
 - Erőforrásigény miatt érdemes a rámpa szűrőt megszüntetni:

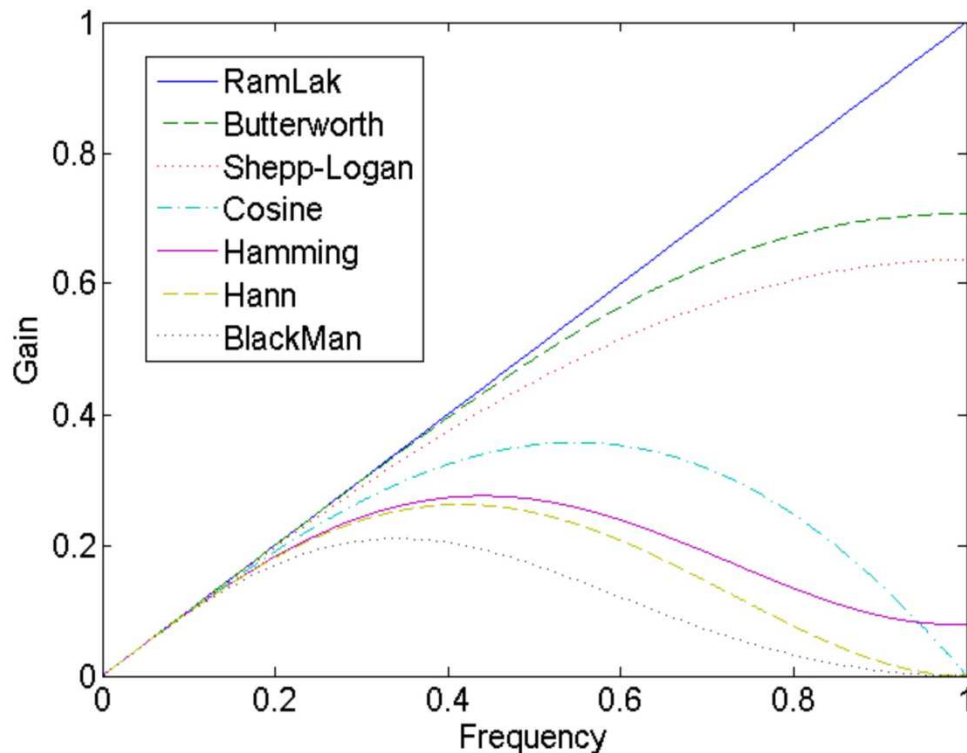
$$\left(P_{\theta} * h_{Ramp} \right) * h_{Lowpass} = P_{\theta} * \left(h_{Ramp} * h_{Lowpass} \right)$$

Klasszikus inverz problémák mely algoritmusaira hasonlít az eljárás?

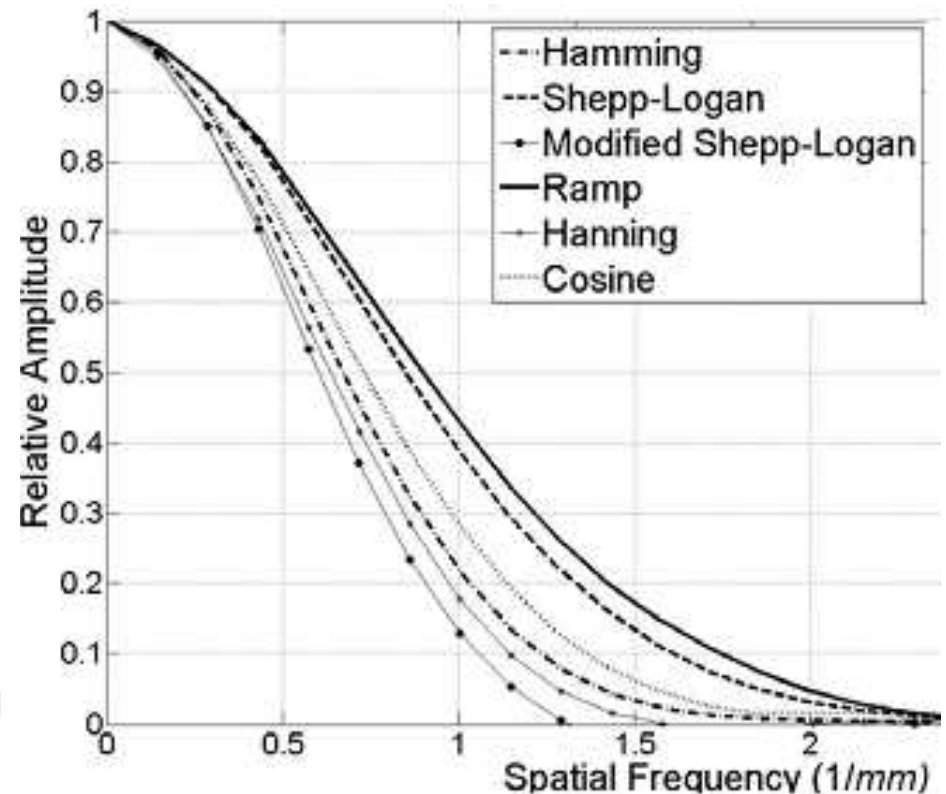
Szűrt visszavetítés zajérzékenysége

- Rámpa szűrő módosítottjaival szűrünk:

Szűrők átviteli függvényének abszolút értéke:



Egy CAT MTF-je a szűrők függvényében (példa):

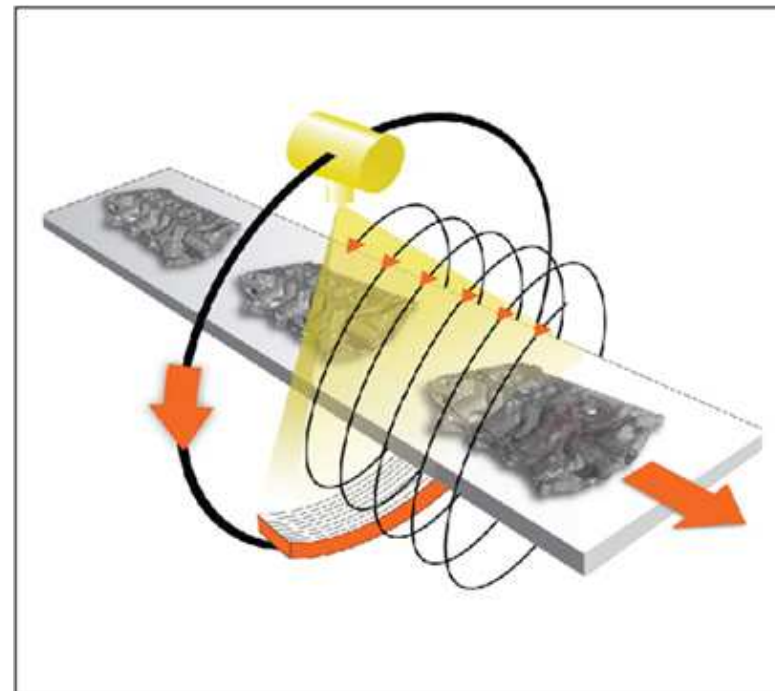
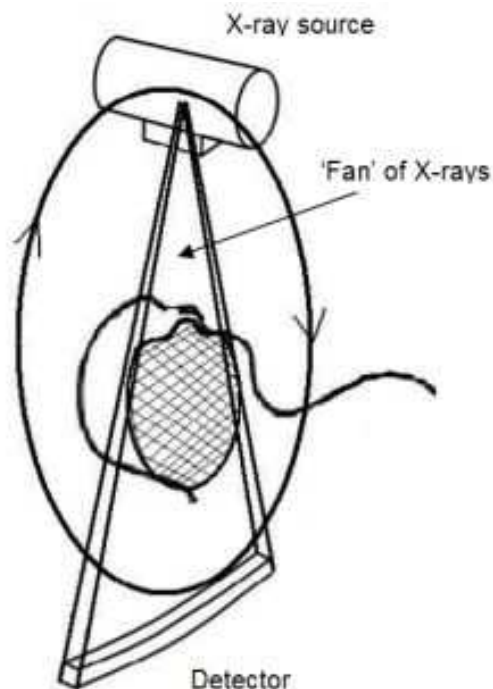


Szűrt visszavetítés működése (*)

- Demo videó az FBP rekonstrukciójáról:
<https://www.youtube.com/watch?v=ddZeLNh9aac>
 - A szinogramban oszlop-folytonosan helyezkednek az 1D projekciók.
- A videón jól követhető a limitált szögtartomány által okozott artifakt:
 - Magas frekvenciás komponensek (pl. fantom széle) kis szögtartományból is jól rekonstruálódik.
 - Alacsony frekvenciás komponensek viszont erősen szétmosódtak (jellegzetesen „V” alakban) .
 - Vetítősugarakkal párhuzamos élek rekonstruálhatóak jól.

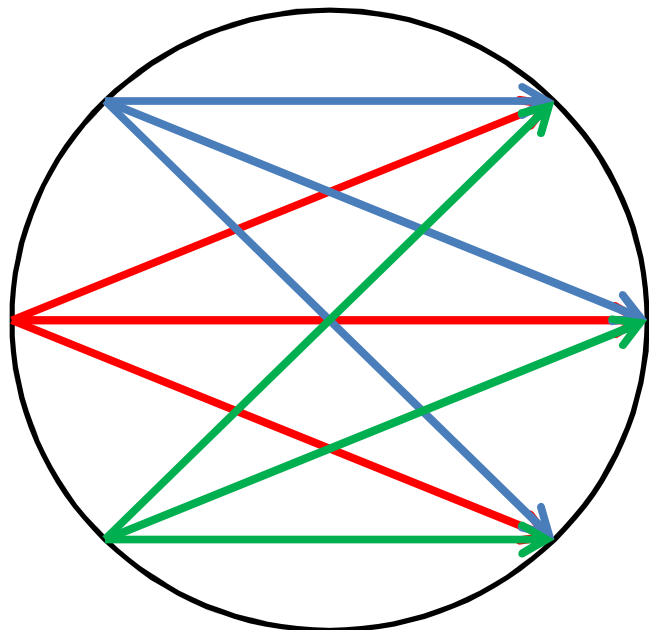
FBP Fan-beam geometria esetén

- Eddig párhuzamosak voltak a vetítősugarak:
 - Gyakorlatban egy ilyen CT nem igazán realizálható
- Fan-beam vetítősugaras helikális CT (ú.n. CAT):

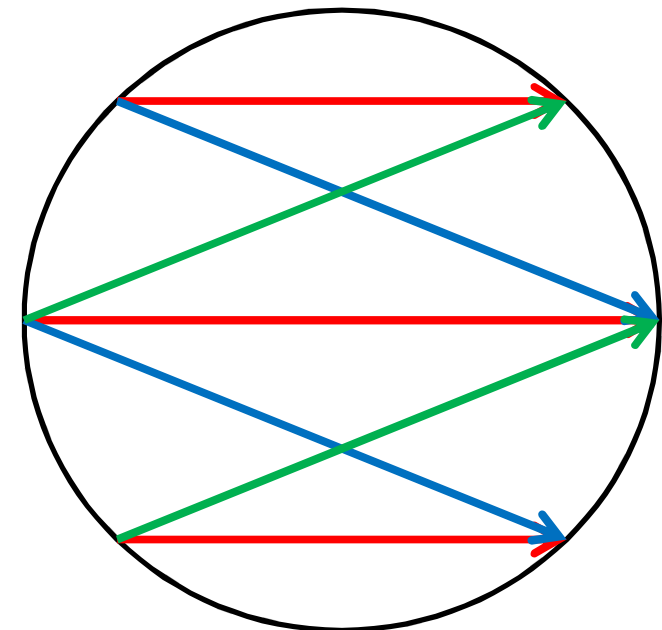


FBP Fan-beam geometria esetén

- Alapötlet: a mért intenzitások átcsoportosítása párhuzamos vetítősugár alapú geometria szerint:
 - Lényegében új, párhuzamos vetítősugár szerinti virtuális projekciókat állítunk elő a fan-beam projekciókból.



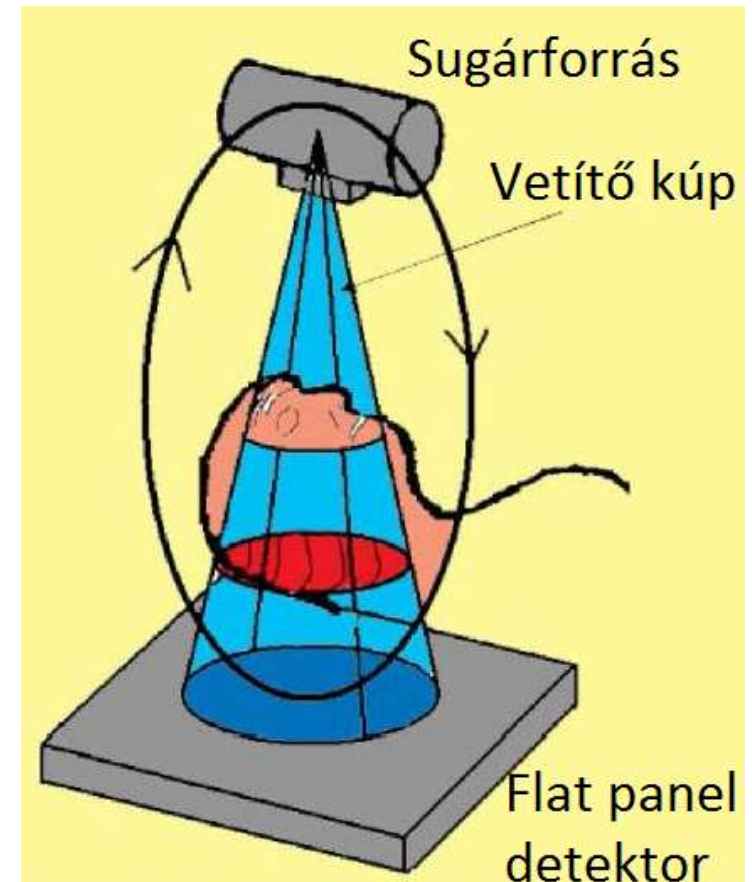
Fan-beam projekciók



Virtuális párhuzamos projekciók

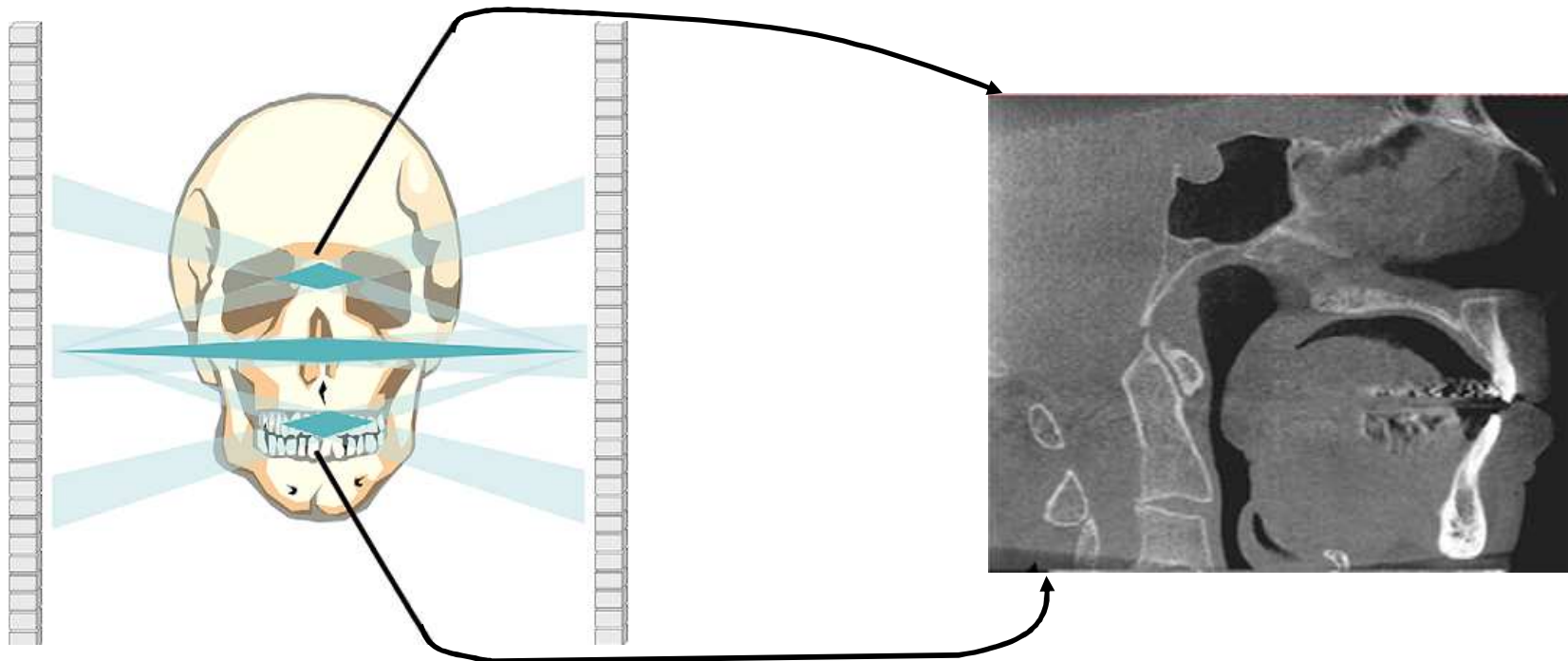
FBP Cone-beam geometria esetén

- CBCT rendszerek - Cone-Beam geometria:
 - Flat-panel detektort használ, a sugarak kúpszerűen (innen az elnevezés) vetülnek a detektorra:



Cone-beam geometria szerinti vetületek FBP rekonstrukciója - FDK

- Feldkamp, Davis, Kress CBCT-s algoritmus:
 - Klasszikus szűrt visszavetítéssel rekonstruál
 - Közelítően helyes algoritmus – ideális esetben sem tökéletes
- Ideális rekonstrukció esetén is Cone-beam artifakt



Projekciók keletkezésének általános 3D modellje

- Általános modellje a (röntgen) képalkotásnak:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\gamma=0}^{\infty} h(x, y; \alpha, \beta, \gamma) \cdot f(\alpha, \beta, \gamma) d\gamma d\alpha d\beta + \eta(x, y)$$

- Mérésekkel rendelkezünk: $g(x, y)$
- Teoretikusan ismerjük a rendszer PSF-jét: Beer- Lambert törvény szerint, ami nem modellezi a nem a primer sugártrajektória mentén haladó fotonokat.
- Rekonstrukció célja $f(\alpha, \beta, \gamma)$ meghatározása
- Érdeemes megjegyezni, hogy a Beer-Lambert törvélynél ez egy általánosabb modell, de monokróm sugarakat feltételez, gyakorlatban nem tudunk vele dolgozni túl nagy komplexitás.

Projekciók keletkezésének általános 3D modellje

- Megfigyelési modell diszkretizáltja $\mathbf{g} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{f} + \boldsymbol{\eta}$:
 - \mathbf{g} tartalmazza az összes vetítősugár fotodiódákon mért intenzitások negatív logaritmáltját (tehát minden projekció minden pixeléhez tartozó intenzitását tartalmazó vektor).
 - \mathbf{H} a vetítő mátrix, $\mathbf{H}_{(i,j)}$: i-edik pixelbe csapódó fotonok a j-edik voxeltől mennyire csillapodnak (ez anyag független).
 - $\boldsymbol{\eta}$ az additív zaj – nem modellezett hatások determinálják
- Lényegében ez is inverz probléma:
 - Ugyanúgy jelentős a zajérzékenység, mint 2D esetben
 - Ellentétben nagyságrendekkel több változó (akár 1E7)

Projekciók keletkezésének általános 3D modellje

Ezzel a definícióval ritkán élünk – túl számításigényes.

- Gyakorlatban sokszor $\mathbf{H}_{(i,j)}$ az i -edik pixelbe csapódó fotonok által a j -edik voxelben megtett útnak a hossza (csak primer sugárzás) / kúpnek a térfogata. Ezzel a megkötéssel \mathbf{H} egy ritka, ún. sávmátrixá válik.
 - \mathbf{H} a vetítő mátrix, $\mathbf{H}_{(i,j)}$: i -edik pixelbe csapódó fotonok a j -edik voxelben lévő anyagtól mennyire csillapodnak.
 - $\boldsymbol{\eta}$ az additív zaj – nem modellezett hatások determinálják
- Lényegében ez is inverz probléma:
 - Ugyanúgy jelentős a zajérzékenység, mint 2D esetben
 - Ellentétben nagyságrendekkel több változó (akár $1E7$)

Algebrai rekonstrukciós technika (Gordon ART)

- Kaczmarz iterációval $\mathbf{g} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}$ megoldása:
 - Rekonstrukciónál a $\mathbf{f} = \mathbf{H}^\dagger \cdot \mathbf{g}$ megoldás lenne az „ideális”, de:
 - Túl nagy \mathbf{H} mérete a ma elérhető számítási teljesítményhez
 - Ráadásul \mathbf{H} nagyon ritka, melyet általános algebrai módszerek nem képesek hatékonyan kihasználni
 - Eljárás alapötlete: $\mathbf{g} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}$ lényegében N db (vetítősugarak száma), M dimenziós hipersík egyenlete
 - Ha létezik egzakt inverz, akkor a hipersíkok az M dimenziós tér ugyanazon pontjában metszik egymást.
 - Ha túlhatározott, akkor nincs metszéspont, ha alulhatározott akkor az M dimenziós teret egy résztartományra szűkítik.

Algebrai rekonstrukciós technika (Gordon ART)

– Az eljárás $k+1$. iterációban merőlegesen vetíti az aktuális \mathbf{f} -et $\mathbf{g}_{(i)} = \mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{f}$ hipersíkra ($i \equiv k \pmod{N}$):

- \mathbf{f} a $\mathbf{H}_{(i,:)}$ -re merőlegesen azon síkon helyezkedik el, mely távolsága az origótól $\mathbf{g}_{(i)} / \|\mathbf{H}_{(i,:)}\|_2$

- Tehát $\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} - \alpha \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}^T$, a merőleges vetítés után $\mathbf{g}_{(i)} = \mathbf{H}_{(i,:)} \cdot (\mathbf{f}^{(k)} - \alpha \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}^T)$ teljesül, amiből kifejezve:

$$\alpha = \left(\mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{g}_{(i)} \right) / \left(\mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}^T \right), \text{ behelyettesítve:}$$

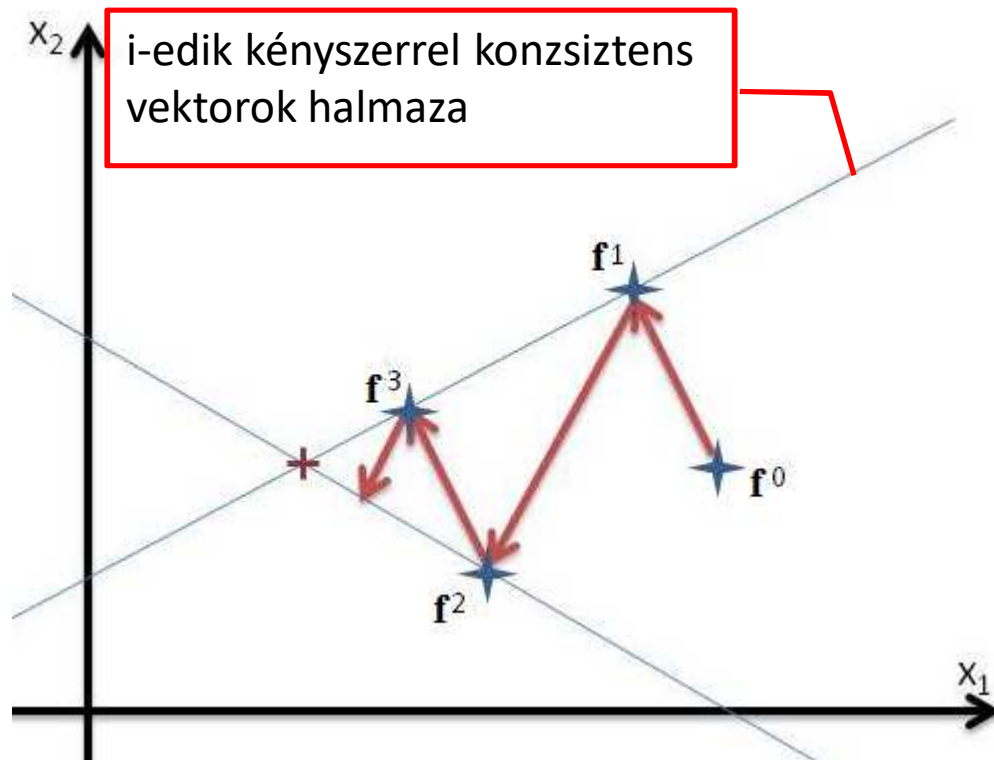
$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} - \left(\mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{g}_{(i)} \right) \cdot \frac{\mathbf{H}_{(i,:)}^T}{\mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}^T}$$

Algebrai rekonstrukciós technika (Gordon ART)

- $\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \left(\mathbf{g}_{(i)} - \mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)} \right) \frac{\mathbf{H}_{(i,:)}^T}{\mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}^T}$ interpretációja:
 - $\mathbf{g} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}^{(k)}$ a rögzített projekciók és az aktuális ($\mathbf{f}^{(k)}$) rekonstrukció modell szerinti vetületének a különbsége (vetületi hiba)
 - $\mathbf{H}_{(i,:)}^T / \left(\mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}^T \right)$: a vetületi hibát vetíti vissza
- Eljárás tulajdonságai:
 - Sok, könnyen számolható iteráció, melyek nem párhuzamosíthatóak
 - Konvergál, ha megfigyeléseink konzisztensek, ellentétben limit hurokba szorul, mely belsejében helyezkedik el az $\mathbf{f}^* = \mathbf{H}^\dagger \cdot \mathbf{g}$.
 - Hátránya, hogy nincs prior, ezért túlilleszkedésre hajlamos (lényegében egy ML becslés Gauss eloszlású likelihood-dal, ha konzisztens)
 - Szükség van egy $\mathbf{f}^{(0)}$ -ra: gyakran FBP / BP eredménye

Kaczmarz iteráció példa

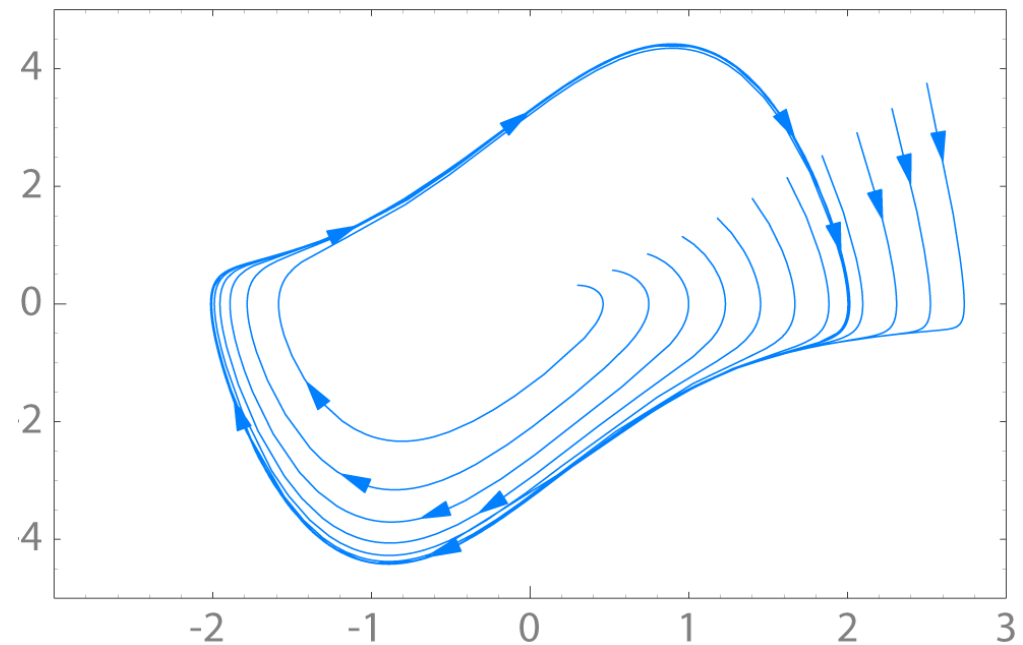
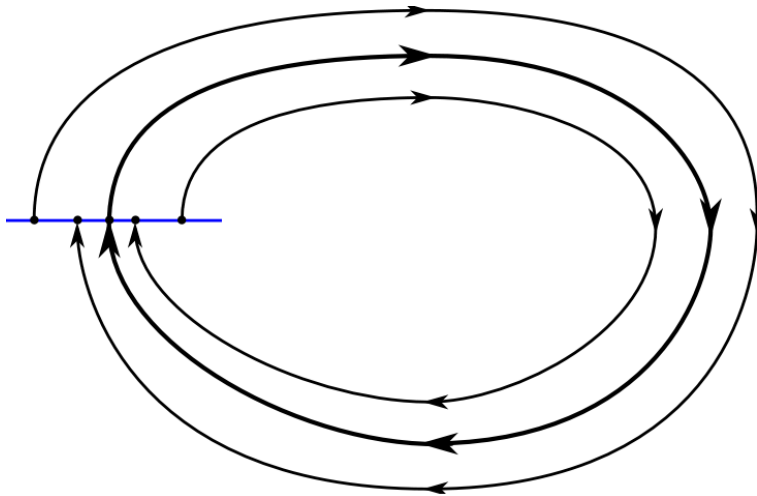
- $N=2, M=2$ esete:



- Ha a két merőleges hipersík egymásra merőleges, akkor két iteráció alatt megvan a metszéspont
- Ha a hipersíkok párhuzamosak, akkor az iteráció nem áll le (limit hurokba kerül)
- Minél nagyobb a két egyenes által bezárt szög, annál gyorsabb a konvergencia.

Limit hurok viselkedés

- Gordon ART inkonzisztens projekciók esetén limit hurokba lép:



Stabil limit hurkok viselkedés: a rendszer állapotváltozója hurok trajektóriába ragad

Algebrai rekonstrukciós technika (Simultaneous ART)

- Egyidejű ART (SART):

- Hibaképzés nem vetítősugaranként, hanem projekciónként:

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \lambda \cdot \underset{\{i\}}{\text{diag}} \left\{ \frac{1}{\sum_{j \in S^{(k)}} \mathbf{H}_{(j,i)}} \right\} \mathbf{H}_{(S^{(k)},:)}^T \cdot \underset{\{j \in S^{(k)}\}}{\text{diag}} \left\{ \frac{1}{\sum_i \mathbf{H}_{(j,i)}} \right\} \left(\mathbf{g}_{(j \in S^{(k)})} - \mathbf{H}_{(S^{(k)},:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)} \right)$$

- $S^{(k)}$: k-adik projekció pixeleit előállító vetítősugarak halmaza

- Konvergál egy súlyozott LS becslőhöz:

- Ha több optimum van, akkor az $\mathbf{f}^{(0)}$ -hoz L2 szerinti legközelebbihez

- Jól párhuzamosítható:

- Azonos projekcióhoz tartozó vetítősugarak menti levetítés és visszavetítés egymástól független

- Zajra túlilleszkedés tulajdonsága változatlanul megmaradt

- Ez az eljárás is ekvivalens egy ML becsléssel

Algebrai rekonstrukciós technika

(Simultaneous Iterative Reconstructive Technique)

- Cimmino iteráción alapuló eljárás:
 - Összes projekció, összes pixele szerint egyszerre képez hibát:

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \lambda \cdot \sum_j \left(\mathbf{g}_{(j)} - \mathbf{H}_{(j,:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)} \right) \frac{\mathbf{H}_{(j,:)}^T}{\mathbf{H}_{(j,:)} \cdot \mathbf{H}_{(j,:)}^T}$$

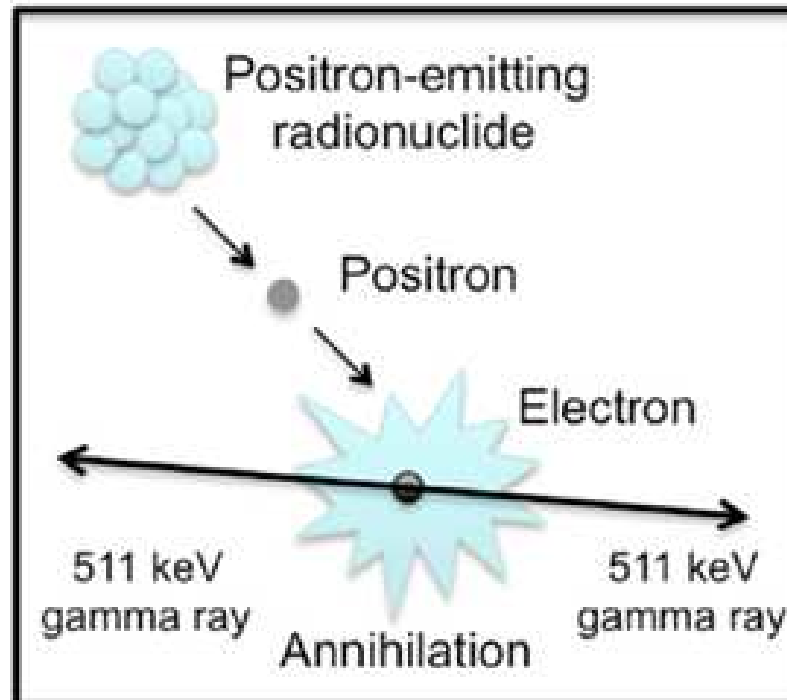
- Hasonló konvergencia tulajdonságok, mint az SART-nél:
 - De más megoldáshoz konvergál – súlyozott Landweber iteráció
- Jól párhuzamosítható, de:
 - Egyszerre csak egy projekció le / visszavetítése nem módosítja többször u.a. voxel (egyébként versenyhelyzet).
 - Gyakorlatban több számolás szükséges a konvergenciához, mint a másik két ART-nél
- Érdeemes még észrevenni, hogy a vetítés magterében nem módosítja az eljárás a beclést

Algebrai rekonstrukciós technika (Multiplikatív ART)

- Eddig Additív ART-eket néztünk:
 - Kezdeti iterációk során lassabban haladnak
 - Pozitivitási kényszerrel nem lehet kikényszeríteni
- Multiplikatív ART-k:
 - Hibát multiplikatív módon származtatják
 - pl.:
$$\mathbf{f}_{(i)}^{(k)} = \mathbf{f}_{(i)}^{(k-1)} \cdot \mu \cdot \left(1 - \frac{\mathbf{g}_{(j)}}{\mathbf{H}_{(j,:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)}} \right)^{H_{(j,i)}}$$
 - A hibát $1 - \mathbf{g}_{(j)} / \mathbf{H}_{(j,:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)}$ értéke méri
 - Kezdeti iterációk hatékonyabbak, de gyakran divergál, vagy a végén túlságosan lelassul.

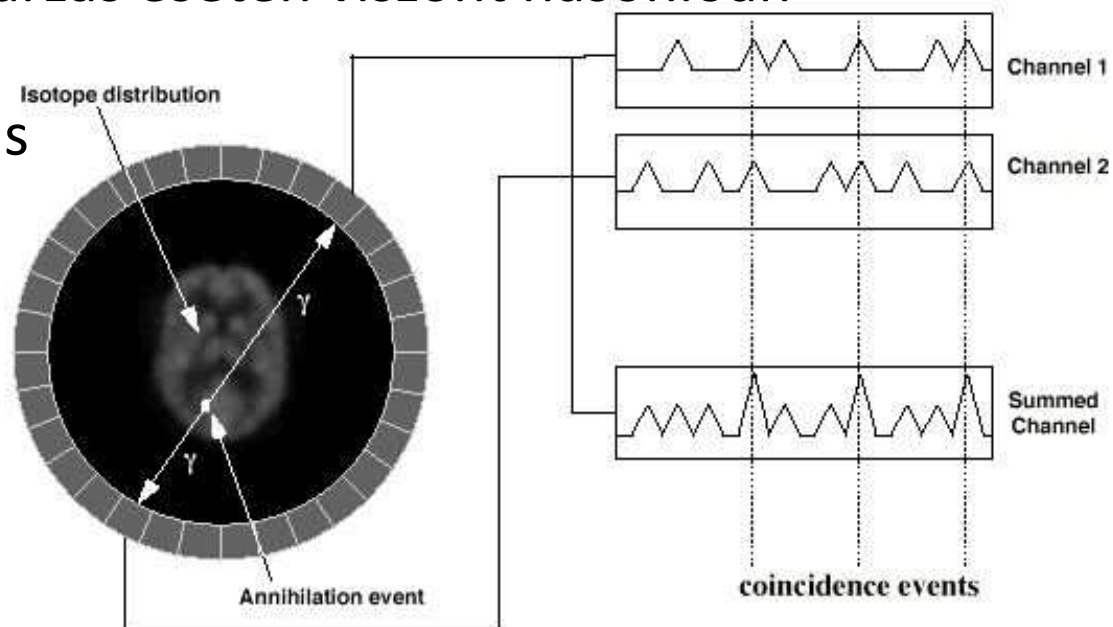
Pozitron emissziós tomográfia alapelve

- Szervezetbe pozitron kibocsátására képes radioaktív izotópot tartalmazó anyagot visznek cukoroldatban.
- Sejtek tápanyagfelvétele miatt nagyobb energiaigényű (pl. gyulladt / daganatos) sejtek helyén több pozitron emisszió.
- Pozitron elektronnal ütközik:
 - Két db, egymással ellentétes irányú γ foton emittálódik.
 - Detektor ezeknek a beütését méri.



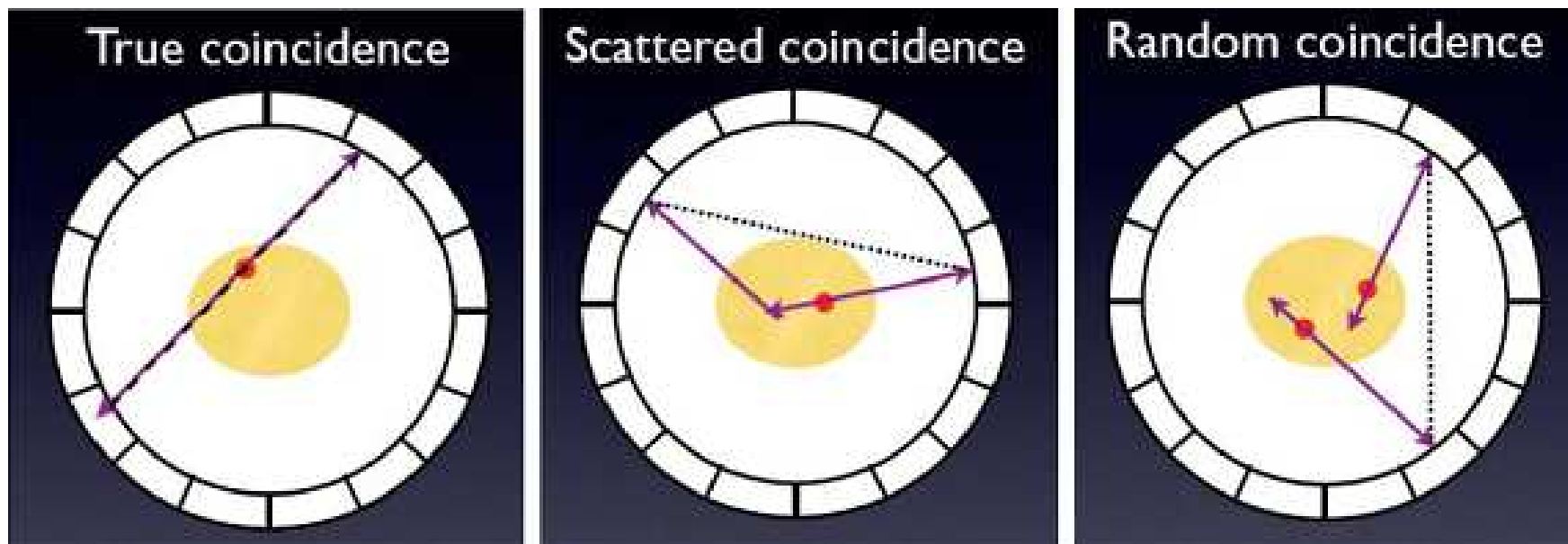
Pozitron emissziós tomográfia rekonstrukciója

- Line of Response : ugyanazon bomló izotóp által kibocsátott γ fotonok beütési helyét összekötő szakasz
 - Érdeemes szem előtt tartani, hogy előre nem határozható meg, hogy egy-egy foton milyen irányba fog haladni
 - Elegendően sok kisugárzás esetén viszont hasonlóan viselkedik, mint akármilyen sugárforrás (Poisson folyamat).



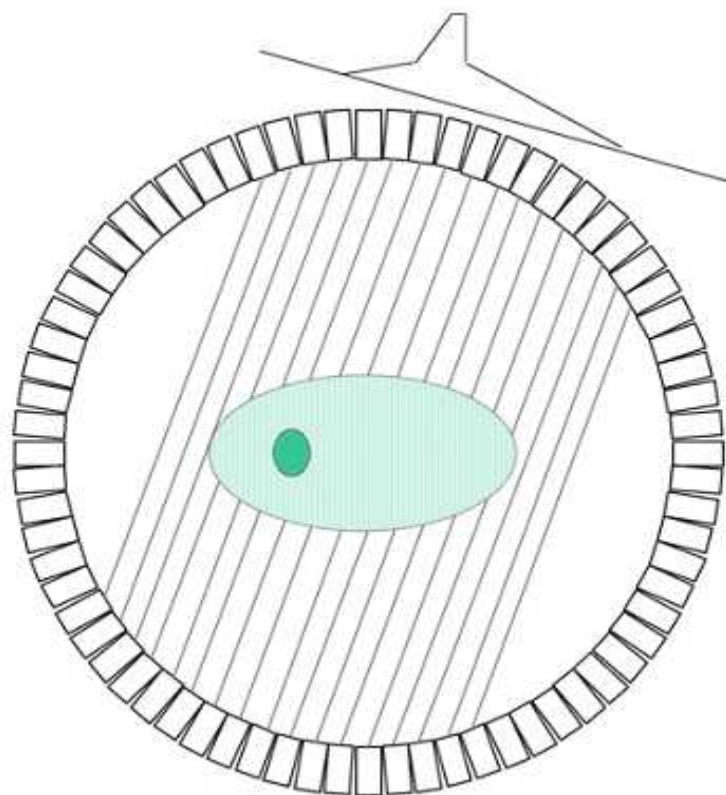
Pozitron emissziós tomográfia projekciók zajának értelmezése

- Sokszor téves LOR-t mérünk:
 - Szóródás (rugalmas ütközés) miatt a térfogaton belül megváltoztatja irányát a γ foton.
 - Két, hozzávetőlegesen egy időben történő bomlás is fals látszólagos LOR-t eredményez.



Pozitron emissziós tomográfia rekonstrukciója

- Rekonstrukció során a LOR-ok interpretálhatóak vetítősugaraknak is (intenzitás meg az adott LOR menti gyakorisága a γ beütéseknek).
- Elegendően sok beütés szükséges az eloszlás becsléséhez:
 - Egy scan akár több perc
 - Nagyságrenddel rosszabb SNR, mint CT esetén



ML-EM rekonstrukció

(Emissziós tomográfiai értelmezés) (*)

- EM eljárások alapelve:
 - Vannak megfigyelt adataink (méréseink), esetünkben a PET LOR-ok mentén érzékelt gamma beütési szám (y_j)
 - Vannak becsülni kívánt változók (x_m), jelenleg ez a vizsgált szövetbeli annihiláció száma
 - Létezik olyan változó, melyet ha ismernénk leegyszerűsödne az egész feladat: a PET esetén $s_{i,m}$: azon fotonok száma, melyek m . voxelben keletkeztek i . LOR mentén haladnak.
- Megoldás iteratív, iterációnként két lépés:
 - Expectation lépés: $p(m|i)$ frissítése
 - Maximization lépés: x_m ML becslése

ML-EM rekonstrukció (Emissziós tomográfiai értelmezés) (*)

- $$p(y_j) = \frac{E\{y_j\}^{y_j} \cdot \exp(-E\{y_j\})}{y_j!}$$
- $$y_j = \sum_m s_{j,m}$$
- $$p(s|x) = \prod \prod \frac{E\{s_{j,m}\}^{s_{j,m}} \cdot \exp(-E\{s_{j,m}\})}{s_{j,m}!}$$
- $$\ln(p(s|x)) = \sum_i \sum_m s_{i,m} \cdot \ln(A_{i,m} \cdot x_m) - A_{i,m} \cdot x_m - \dots$$

– Cél $\arg \max_x \left\{ \ln(p(s|x)) \right\}$ becslése, hiba: s nem ismert

ML-EM rekonstrukció (Emissziós tomográfia) (*)

- Expectation: $s_{j,m} = A_{j,m} \cdot x_m \cdot y_j / \sum_{m'} A_{j,m'} \cdot x_{m'}$
 - $\ln(p(s|x)) = \sum_i \sum_m s_{i,m} \cdot \ln(A_{i,m} \cdot x_m) - A_{i,m} \cdot x_m - \dots$
 - $\frac{\partial \ln(p(s|x))}{\partial x_j} = \sum_i \sum_m s_{i,m} \cdot \left(1 / (A_{i,m} \cdot x_m)\right) \cdot A_{i,m} \cdot \delta_{j=m} - A_{i,m} \cdot \delta_{j=m}$
 - $\frac{\partial \ln(p(s|x))}{\partial x_j} = \sum_i s_{i,j} / x_j - A_{i,j} = 0$
- $$x_j' = x_j \sum_i \frac{y_i}{\sum_{m'} A_{i,m'} \cdot x_{m'}} \cdot \frac{A_{i,j}}{\sum_{i'} A_{i',j}}$$

ML-EM rekonstrukció (Emissziós tomográfiai értelmezés) (*)

- Módosító összefüggés interpretációja:

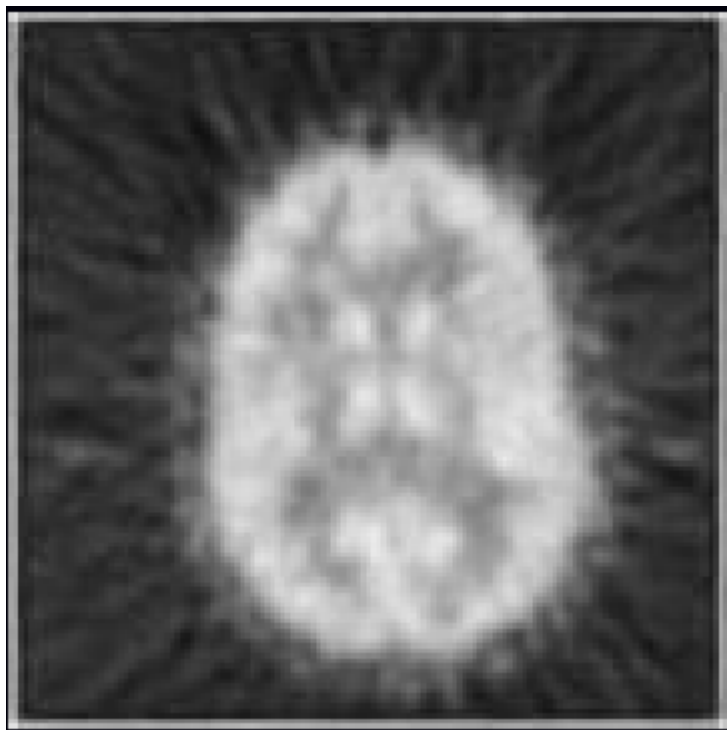
$$x_j' = x_j \sum_i \frac{y_i}{\sum_{m'} A_{i,m'} \cdot x_{m'}} \cdot \frac{A_{i,j}}{\sum_{i'} A_{i',j}}$$

– $\frac{y_i}{\sum_{m'} A_{i,m'} \cdot x_{m'}}$: i. LOR menti beütésszám szerinti multiplikatív hiba

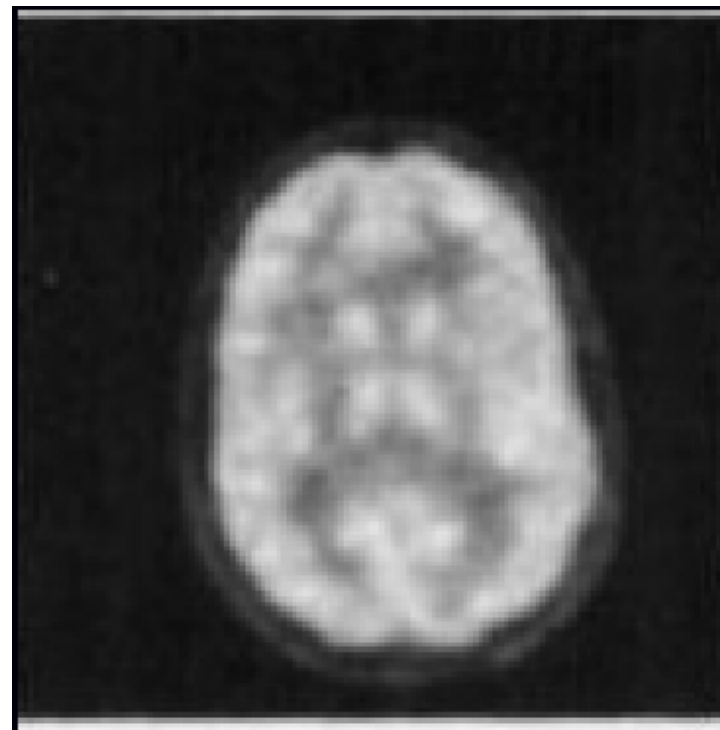
– $\sum_i \frac{y_i}{\sum_{m'} A_{i,m'} \cdot x_{m'}} \cdot \frac{A_{i,j}}{\sum_{i'} A_{i',j}}$: aktuális becslés multip. hibájának visszavetítése a j. voxelbe

ML-EM és FBP összehasonlítása (Emissziós tomográfia – PET) (*)

- Kis beütésszám miatt alacsony effektív felbontás
- Ráadásul jelentős nem Gauss-i zaj



FBP rekonstrukció



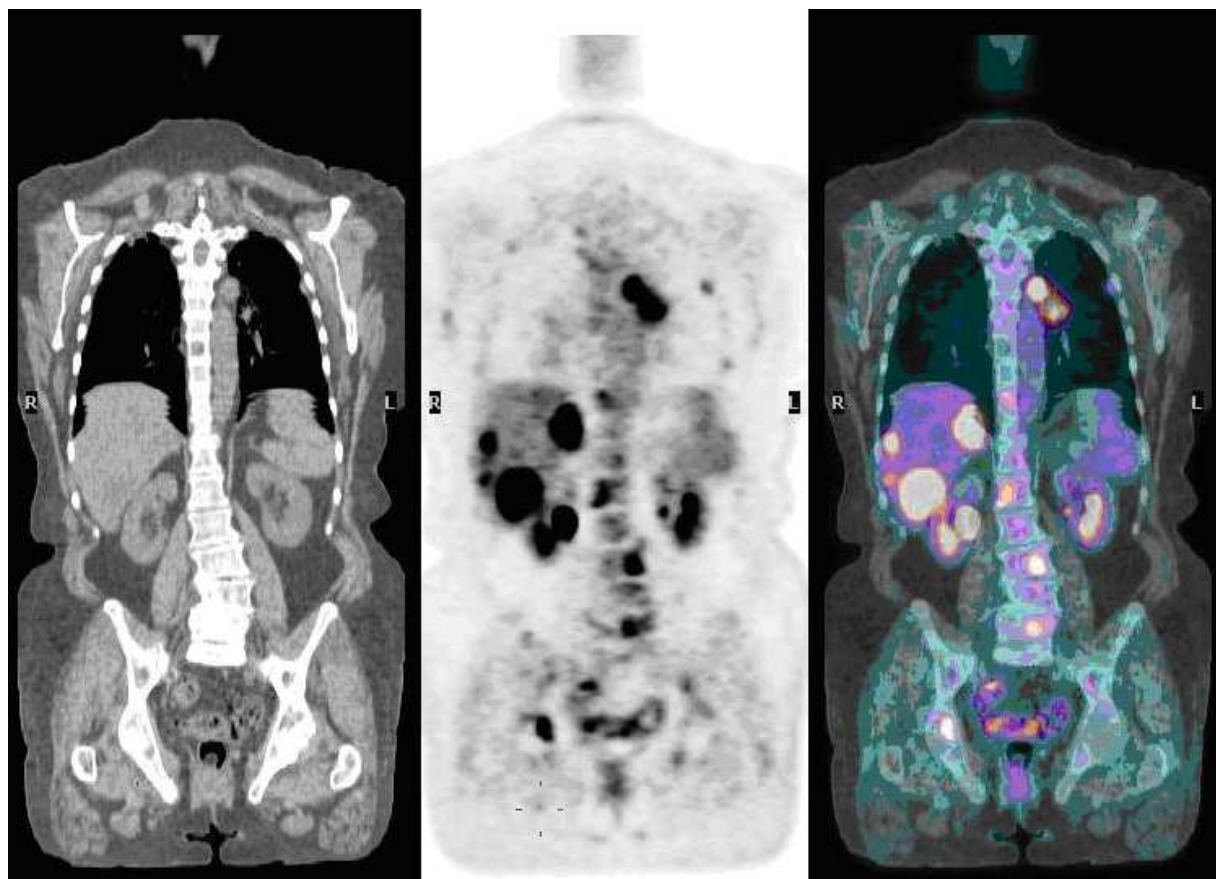
ML-EM rekonstrukció

PET/CT modalitás

- PET funkcionális képet állít elő:
 - Lokalizálhatóak a nagy energiaigényű szövetek
 - Cserébe erősen zajos, rossz minőségű rekonstrukciók
 - Megfelelő zajmodell nélkül lehetetlen értelmezhető rekonstrukciót előállítani vele
- CT rekonstrukciók - morfológiai információ:
 - Kisméretű (korai stádiumú, ezért jó hatásfokkal kezelhető) tumorok nehezen különböztethetőek meg más képletektől.
 - Cserébe kevésbé zajos, felbontását tekintve részletgazdagabb felvételek

PET/CT modalitás

- Rekonstrukció lényegében a PET, illetve a CT rekonstrukciók regisztrálását jelenti



Balról jobbra: CT, PET,
regisztrátum

Compressive Sensing (*)

- Nyquist mintavételnek megfelelő interpoláció:
 - Régebben láttuk a kernelét
 - De ez csak egy interpolációs lehetőség
- Compressive Sensing alapú megközelítés:
 - Nem szükséges Nyquist tétel szerint mintavételezni
 - Két általános megvalósítása létezik:
 - Megszorítjuk a rekonstruálni kívánt jel bázisát (erre lesz példa a Matrix Inverziós Tomoszintézis)
 - Keresünk egy olyan operátort / ábrázolást ami felett ritka a rekonstruálni kívánt jel (pl. TV minimalizáció)

Compressed Sensing (*)

- Hány minta szükséges egy jel rekonstrukciójához?
 - Shannon Nyquist tétel – $f_s > 2 \cdot bw$
 - Túl általános – nem veszi figyelembe, hogy a tipikus jelek egy alacsonyabb dimenziós sokasággal (manifolddal) leírhatóak.
 - Ha ismert lenne egy jó prior, akkor kevesebb is elég lenne
 - Pl. $P\{f\} = \delta\{f - f^*\}$ (na jó, ehhez már mérni sem kell 😊)
- Keressünk olyan ábrázolást, ahol ritka a jelünk:
 - $\mathbf{f} = \sum \psi_i x_i$, ahol $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ egy ortonormált bázis, e felett ritka az ábrázolás, azaz $|x_i| \approx 0$ sok i -re
 - $y_k = \mathbf{f}^T \cdot \boldsymbol{\phi}_k$ - mérések

Compressed Sensing (*)

- m db Φ szerinti mérésből visszaállítható \mathbf{f} , ha:

$$m \geq C \cdot \mu^2(\Phi, \Psi) \cdot S \cdot \log(n)$$

– $\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{n} \max_{k,j} \{|\phi_k^T \psi_j|\}$: a ritka ábrázoláshoz tartozó bázis, illetve az érzékelési bázis koherenciája (max. korreláció)

– m : input mérések száma

– n : visszaállítandó jel (\mathbf{f}) dimenziója

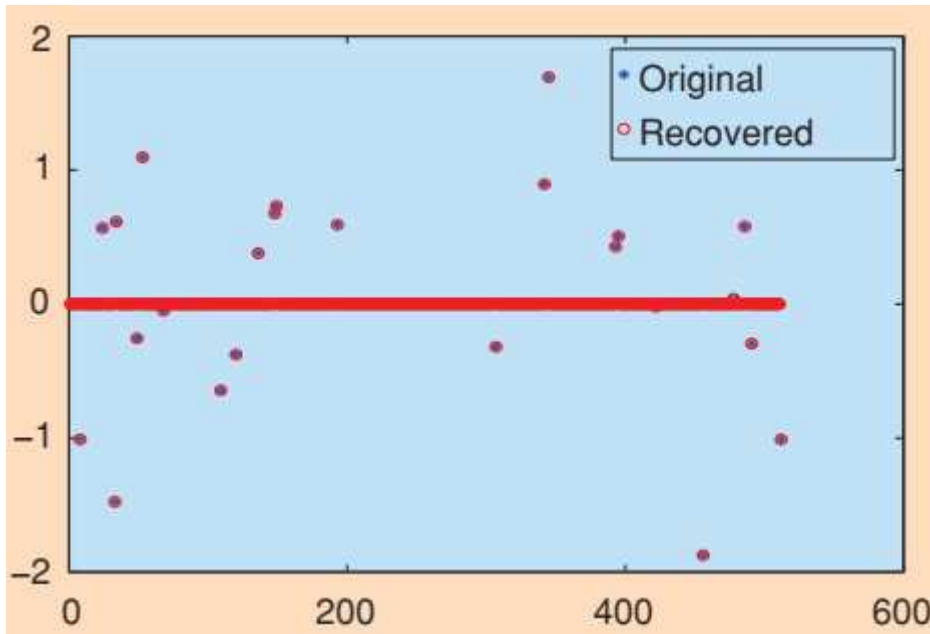
– S : nem 0 $\psi_j^T \cdot \mathbf{f}$ -ek száma (mért jel *ritkasága*)

– C : pozitív konstans

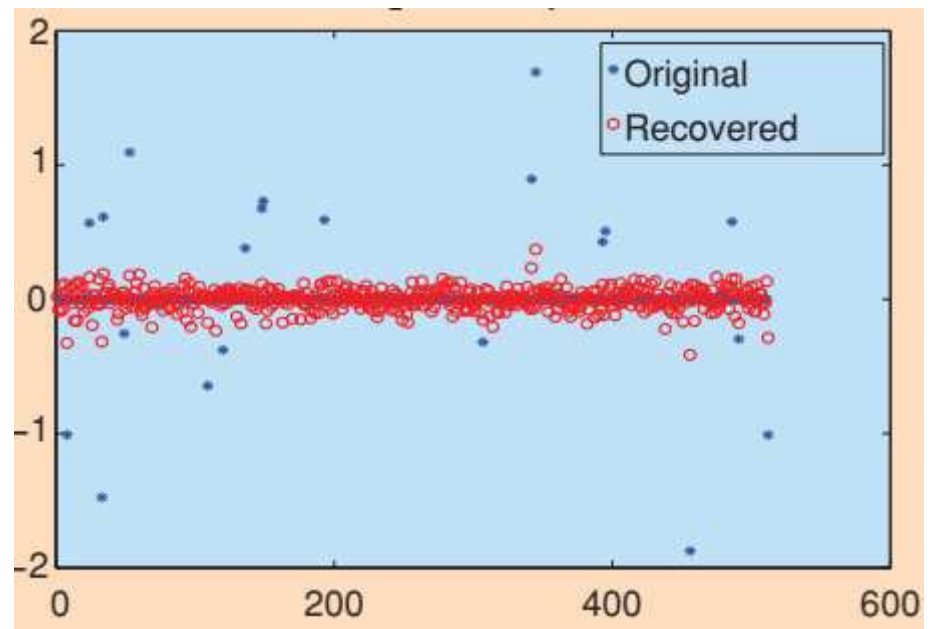
- Visszaállítás:
$$\begin{array}{ll} \min. & \|\mathbf{x}\|_1 \\ \text{s.t.} & \mathbf{y} = \Phi^T \cdot \Psi \cdot \mathbf{x} \end{array}$$

Példa – 1d jelek leírása (*)

- Célfüggvénynek fontos szerepe van a történetben:
 - L2 normával pl. szinte alkalmazhatatlan



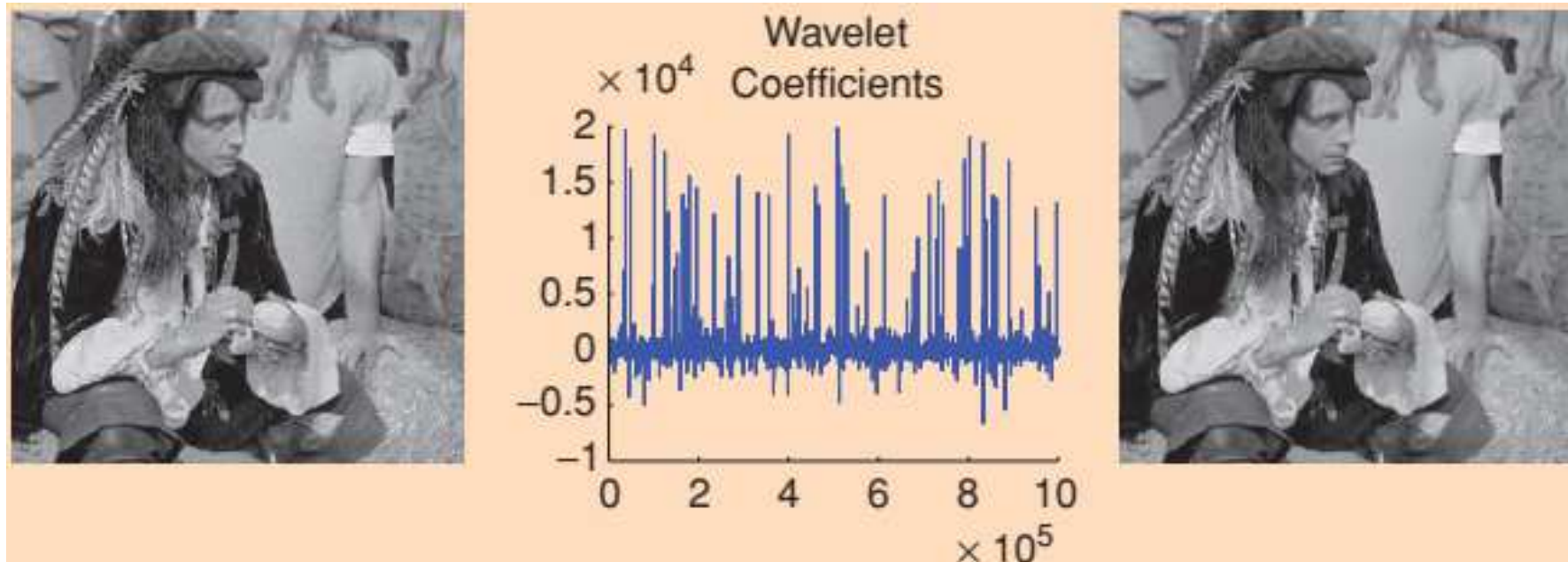
$$\begin{aligned} \min. \quad & \|\mathbf{x}\|_1 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{y} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \min. \quad & \|\mathbf{x}\|_2 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{y} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x} \end{aligned}$$

Példa – képek tömörítése (*)

- JPEG 2000-es Wavelet alapú koordinátázás:
 - Együtthetők 2,5%-át megtartva szinte minimális rekonstrukciós hiba



Compressed Sensing (*)

- Keressünk az érzékelési bázistól eltérő (inhomogén), ritka bázist:
 - Képek általában homogén konstans intenzitású területek sokaságaira bonthatóak (kivéve a textúra, stb. részeket)
 - Wavelet trafók is ilyen bázisnak tekinthetők
 - Kevésbé ritkák, mint a TV bázis

- TV-L1 / L0 dekonvolúció:

$$\begin{aligned} \min. \quad & \|\mathbf{x}\|_2 = \sum \|\mathbf{x}_i\|_2 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{y} = \mathbf{\Phi}^T \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min. \quad & \|\mathbf{x}\|_0 = \sum 1 - \delta(\|\mathbf{x}_i\|) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{y} = \mathbf{\Phi}^T \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{x} \end{aligned}$$

- \mathbf{x} : rekonstruált kép gradiens vektormezője
- \mathbf{I} : gradiens vektormezőből az eredeti kép integráló mátrixa

Teljes variancia minimalizáció (*)

- Rekonstrukció, mint optimalizálási feladat:

$$\mathbf{f}^* = \arg \min_{\mathbf{f}} \left\{ \|\mathbf{g} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}\|_2^2 + \lambda \cdot \|\mathbf{D} \cdot \mathbf{f}\|_1 \right\}$$

- \mathbf{D} diszkrét differencia / wavelet transzformációk mátrixia
- Lényegi változás, hogy a regularizáció L2 norma szerinti

- Alternating Direction Methode: $\mathbf{z} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{f}$ változóval

$$\Phi(\mathbf{f}, \mathbf{z}) \triangleq \|\mathbf{g} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}\|_2^2 + \lambda \cdot \|\mathbf{z}\|_1 + \beta \cdot \|\mathbf{z} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{f}\|_2^2$$

- Alternálva minimalizáljuk \mathbf{f} -et és \mathbf{z} -t iterációnként:

$$\mathbf{f}^{(n+1)} = \arg \min_{\mathbf{f}} \left\{ \Phi(\mathbf{f}, \mathbf{z}^{(n)}) \right\} = \arg \min_{\mathbf{f}} \left\{ \|\mathbf{g} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}\|_2^2 + \beta \cdot \|\mathbf{z}^{(n)} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{f}\|_2^2 \right\}$$

$$\mathbf{z}^{(n+1)} = \arg \min_{\mathbf{z}} \left\{ \Phi(\mathbf{f}^{(n+1)}, \mathbf{z}) \right\} = \arg \min_{\mathbf{z}} \left\{ \lambda \cdot \|\mathbf{z}\|_1 + \beta \cdot \|\mathbf{z} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{f}^{(n+1)}\|_2^2 \right\}$$

Teljes variancia minimalizáció (*)

– Az iterációk első lépése kicsit átalakítva:

$$\min_{\mathbf{f}} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{g}^T & \sqrt{\beta} \cdot \mathbf{z}^{(n)T} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T & \sqrt{\beta} \cdot \mathbf{D}^T \end{bmatrix} \cdot \mathbf{f} \right\|_2^2$$

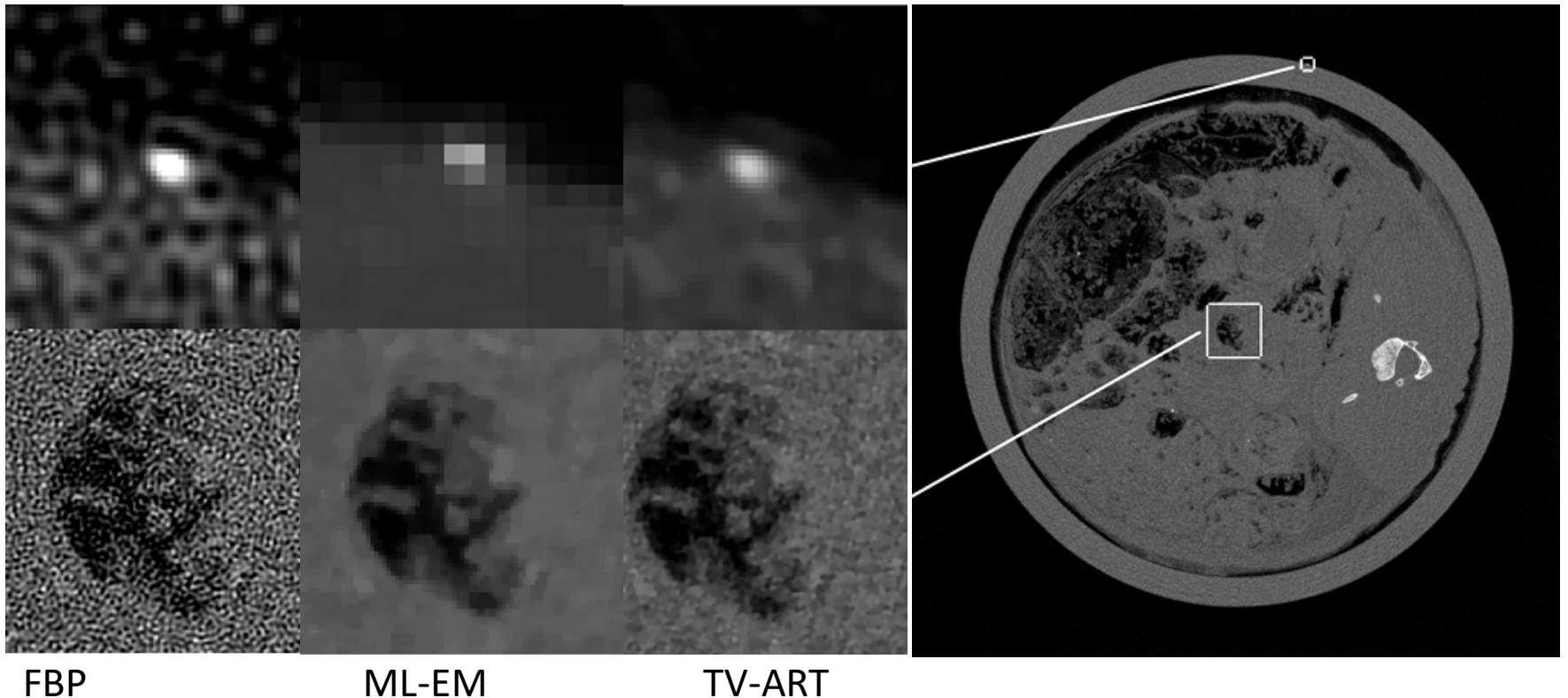
- Formálisan visszajutottunk az alapproblémához, csak most már biztosan túl-határozott (additív ART probléma)
- Minimalizálása erőforrásigény miatt sokszor SART-vel

– Iterációk második lépésének optimuma egy lépésben, analitikusan meghatározható: $\arg \min_{\mathbf{z}} \left\{ \lambda \cdot \|\mathbf{z}\|_1 + \beta \cdot \|\mathbf{z} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{f}^{(n+1)}\|_2^2 \right\}$

- Az úgynevezett lágy küszöb operátor használatával
- A minimalizálás voxelenként történik

Teljes variancia minimalizáció (*)

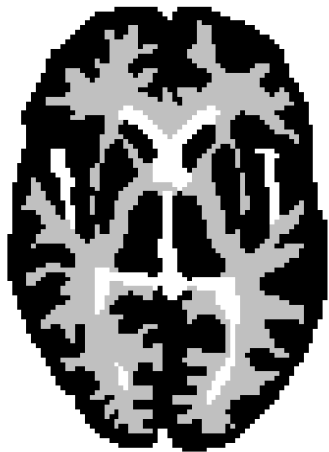
- Jobb SNR az ML-EM és az FBP-hez képest:
 - FBP-nél kevésbé zajos, de hasonló kontrasztú kép
 - ML-EM-nél jelentősen jobb kontraszt



Huber büntetőfüggvény (*)

- Huber büntetőfüggvénnyel regularizálunk:

$$\Phi_{\text{Prior}}(\mathbf{f}) = \alpha \cdot L_{\text{Huber}}\{\mathbf{D} \cdot \mathbf{f}\} \quad L_{\text{Huber}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \|\mathbf{x}\|_2^2/2 & \|\mathbf{x}\|_2 \leq \varepsilon \\ \varepsilon \cdot \|\mathbf{x}\|_2 - \varepsilon^2/2 & \|\mathbf{x}\|_2 > \varepsilon \end{cases}$$



Pet fantom



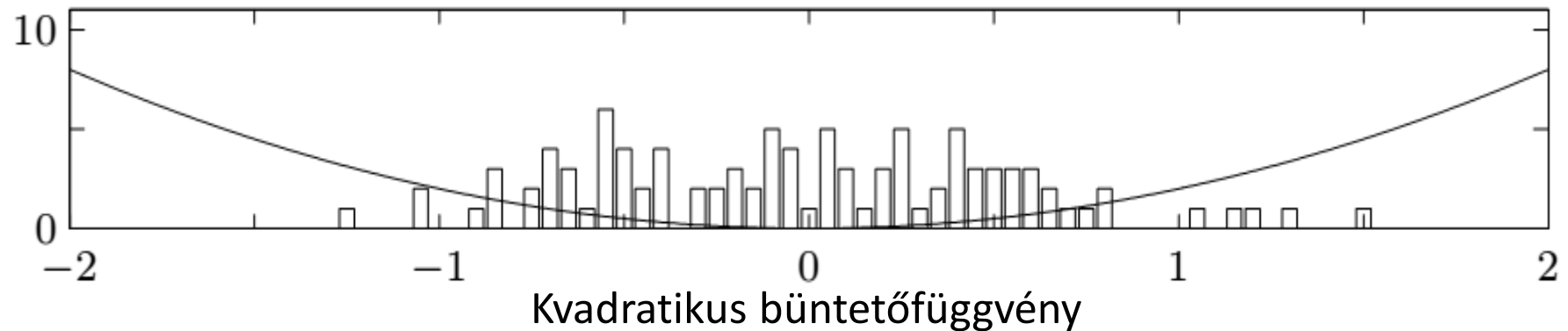
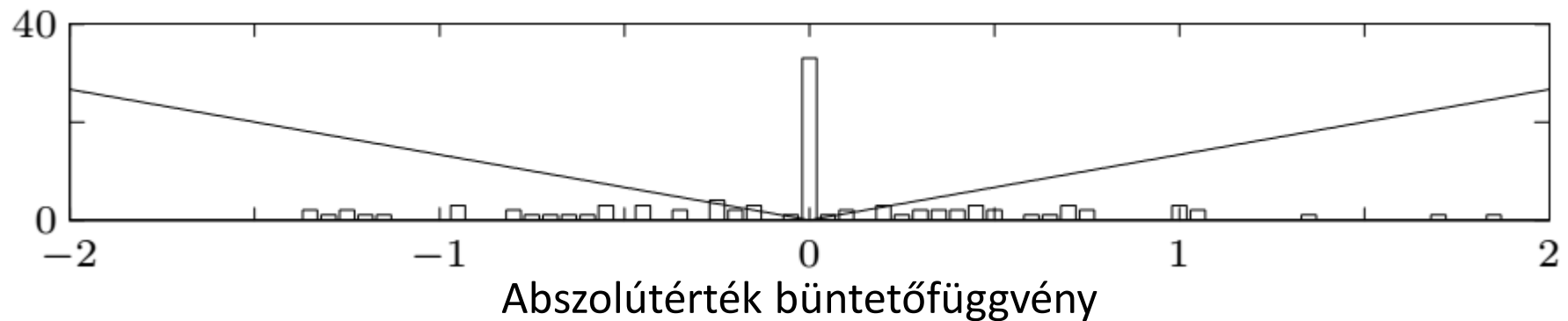
MAP L2 prior



MAP Huber prior

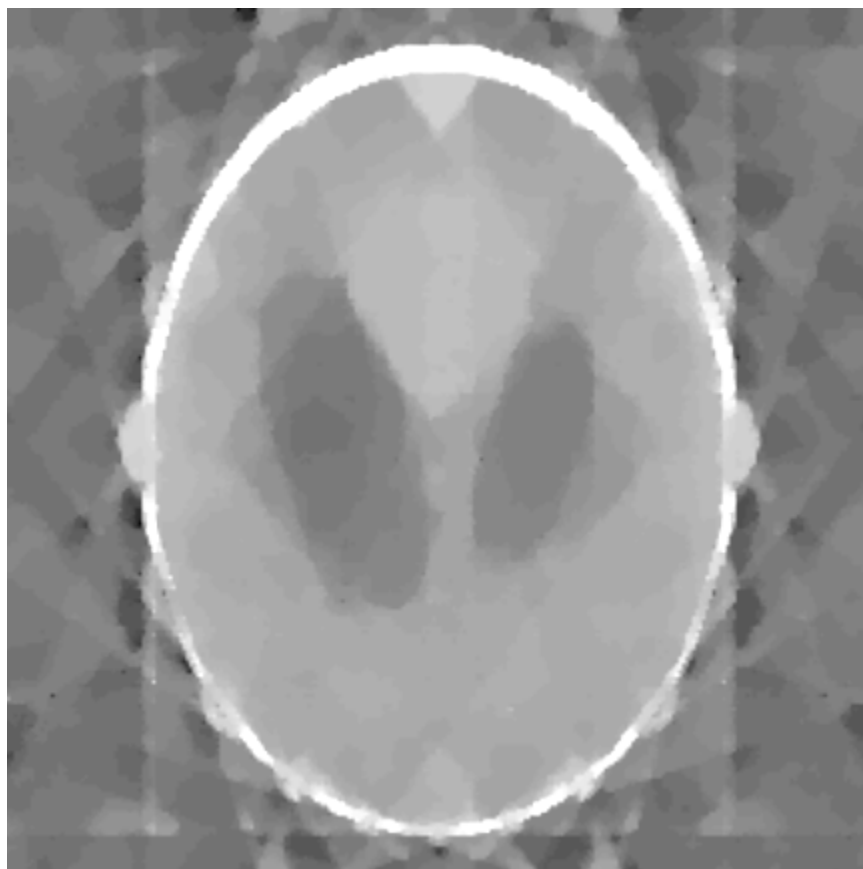
Kvadratus és abszolútérték hiba/büntetőfüggvény (*)

- Két hibafüggvény jelentősen eltérő eloszlást kényszerít ki:



Élet a konvex optimalizáción túl (*)

- CT-s szimuláció, 10 projekcióból ($\Delta\theta=18^\circ$):



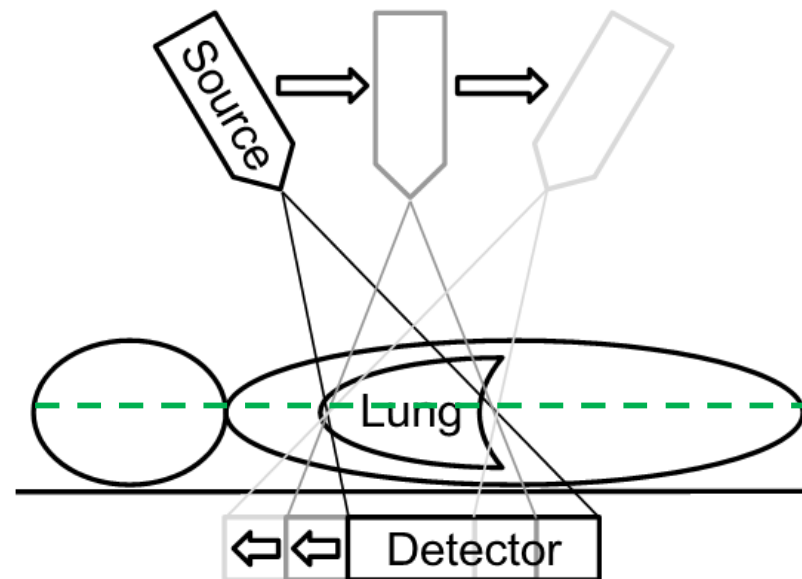
Konvex: L2-TV



Valóban ritkasági priorral

Lineáris tomoszintézis (*)

- Speciális CBCT változatnak tekinthető:
 - Detektor és a sugárforrás egymással és a flat-panel detektor oszlopaival párhuzamosan mozog.
 - Projekciók limitált szögtartományból ($\pm 10^\circ$ - 40°)
- Irányfüggő felbontás / képminőség:
 - Detektorral párhuzamos szeletek felbontása megegyezik a detektor felbontásával
 - Detektorra merőleges irányban nagyon rossz felbontás : limitált szögtartomány ára ...



Shift And Add

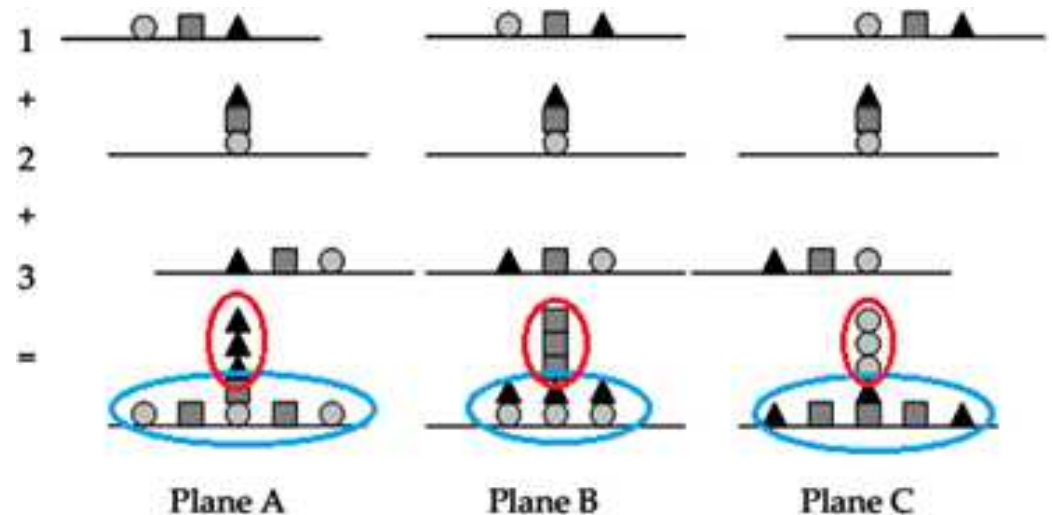
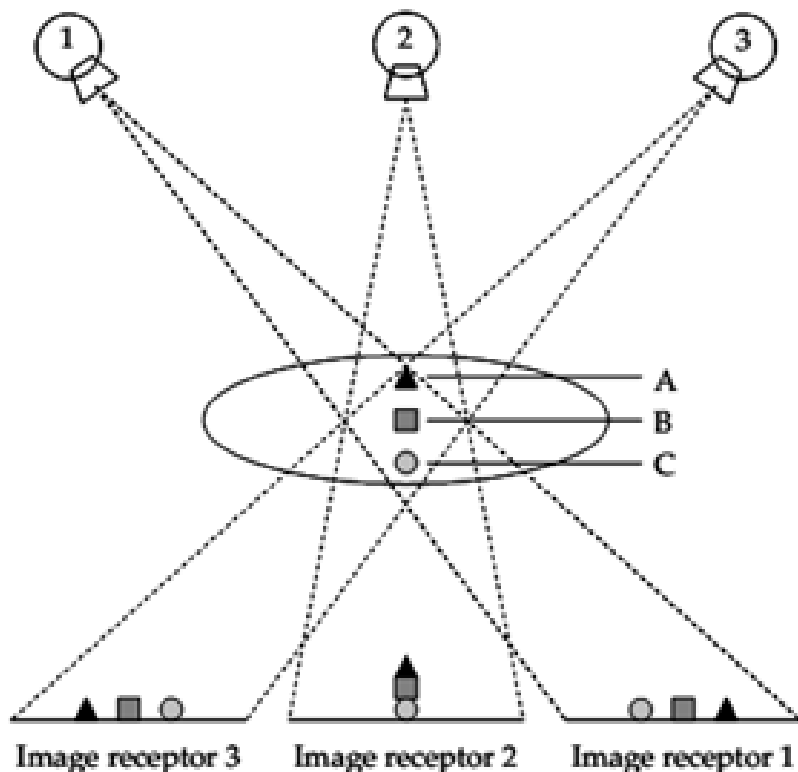
(Lineáris tomoszintézis esetén) (*)

- A térfogat 0 vastagságú szeleteinek vetületei a felvételi geometria és a szelet magasságának függvényében eltolódnak.
- SAA rekonstrukciója egy adott szeletnek:
 1. Projekciók eltolása úgy, hogy a rekonstruálni kívánt sík vetülete minden projekción azonos legyen
 2. Eltolt projekciók összegzése
- Mind az összegzés, mind az eltolás LTI művelet:
 - Soros kaszkádjuk, tehát a rekonstrukció egy MIMO LTI rendszer (bemenetek a projekciók, kimenetek a szeletek)
 - Létezik PSF/MTF-je, mellyel analitikusan minősíthető

Shift And Add

(Lineáris tomoszintézis esetén) (*)

- SAA szeleteken fókuszbba kerülnek a rekonstruálni kívánt sík képleteinek vetületei
 - De jelentős átmosódás marad a térfogat többi síkjáról



Piros ellipszis: szeleten belüli képlet vetülete
Kék ellipszis: szeleten kívüli képletek bemosódása

Mátrix Inverziós Tomosztézis (*)

- Alapötletet ugyanaz a megfigyelés adja, mint ami az SAA algoritmusét:

$$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(1)} = \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \mathbf{t}_{(1,1)} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(1,2)} + \dots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(1,n)}$$

$$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(2)} = \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \mathbf{t}_{(2,1)} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(2,2)} + \dots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(2,n)}$$

⋮

$$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(m)} = \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \mathbf{t}_{(m,1)} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(m,2)} + \dots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(m,n)}$$

$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(j)}$ j-edik projekció i-edik oszlopának intenzitásaiból képzett vektor

Mátrix Inverziós Tomosztézis (*)

- Alapötletet ugyanaz a megfigyelés adja, mint ami az SAA algoritmusét:

$$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(1)} = \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \mathbf{t}_{(1,1)} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(1,2)} + \dots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(1,n)}$$

$$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(2)} = \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \mathbf{t}_{(2,1)} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(2,2)} + \dots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(2,n)}$$

⋮

$$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(m)} = \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \mathbf{t}_{(m,1)} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(m,2)} + \dots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(m,n)}$$

$\mathbf{f}_{(:,i)}^{(j)}$ j-edik modellezett és rekonstruálni kívánt 0 vastagságú szelet projekciójának i-edik oszlopának intenzitásaiból képzett vektor

Mátrix Inverziós Tomosztézis (*)

- Alapötletet ugyanaz a megfigyelés adja, mint ami az SAA algoritmusét:

$$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(1)} = \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \mathbf{t}_{(1,1)} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(1,2)} + \dots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(1,n)}$$

$$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(2)} = \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \mathbf{t}_{(2,1)} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(2,2)} + \dots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(2,n)}$$

⋮

$$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(m)} = \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \mathbf{t}_{(m,1)} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(m,2)} + \dots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(m,n)}$$

$\mathbf{t}_{(j,i)}$ i-edik rekonstruálandó szelet vetületének j-edik projekcióbéli impulzusválaszát leíró vektor, mivel csak eltolást modellez, ezért egy dirac-delta diszkrétizáltja.

Mátrix Inverziós Tomosztézis (*)

- Jelentősen egyszerűsödik a feladat, ha a vektor egyenletrendszer frekvenciatérben vizsgáljuk:

$$\mathbf{g}_{(j)}(\omega) = \mathbf{T}(\omega) \cdot \mathbf{f}_{(j)}(\omega) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}_{(j)}(\omega) = \mathbf{T}(\omega)^\dagger \cdot \mathbf{g}_{(j)}(\omega)$$

$$- \mathbf{g}_{(j)}(\omega) = \left[FT_\omega \left\{ \mathbf{g}_{(:,j)}^{(1)} \right\} \quad FT_\omega \left\{ \mathbf{g}_{(:,j)}^{(2)} \right\} \quad \dots \quad FT_\omega \left\{ \mathbf{g}_{(:,j)}^{(m)} \right\} \right]^T$$

$$- \mathbf{f}_{(j)}(\omega) = \left[FT_\omega \left\{ \mathbf{f}_{(:,j)}^{(1)} \right\} \quad FT_\omega \left\{ \mathbf{f}_{(:,j)}^{(2)} \right\} \quad \dots \quad FT_\omega \left\{ \mathbf{f}_{(:,j)}^{(n)} \right\} \right]^T$$

$$- \mathbf{T}(\omega) = \left\{ FT_{(\omega)} \left\{ \mathbf{t}_{(j,i)} \right\} \right\}$$

- Összegezve a MITS alapötlete, hogy lineáris tomo esetén a frekvenciatérbeli felírás jelentősen kompaktabb az inverz probléma képtérbeli felírásánál.

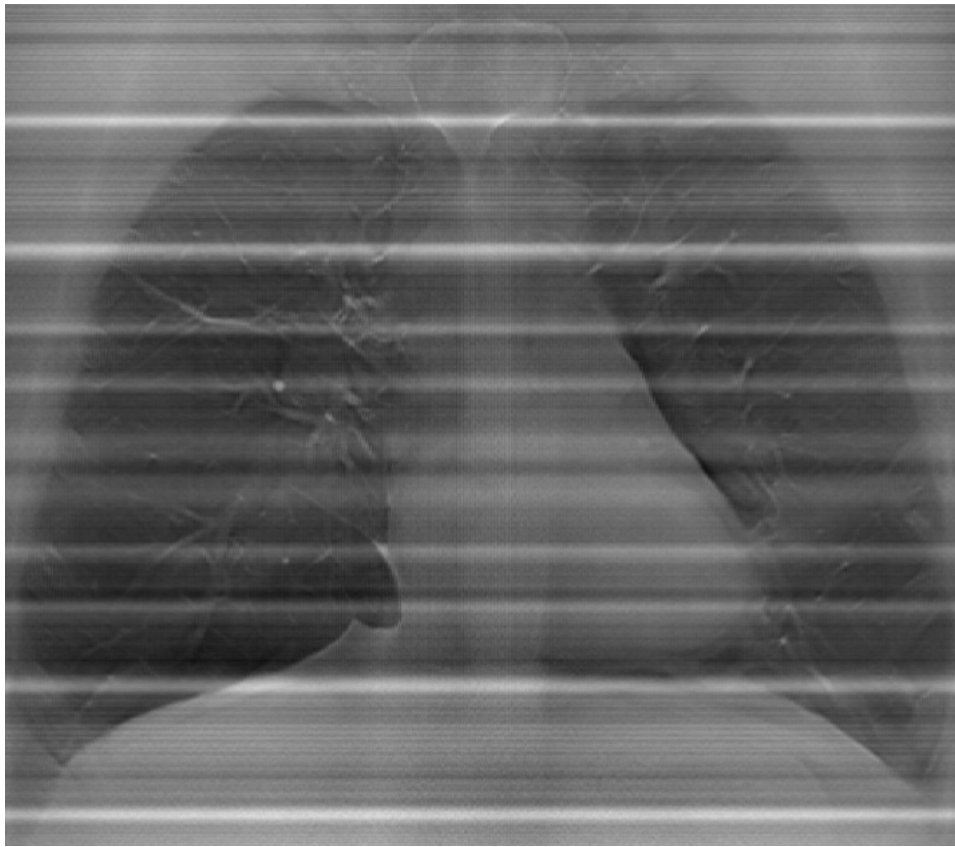
Mátrix Inverziós Tomoszintézis gyakorlati megvalósítása (*)

- Diszkretizálás és a DFT okozta problémák:
 - Mintavételezés: $t_{(i,j)}$ mintavételezése az egész rendszer viselkedését jelentősen befolyásolja:
 - Energiája nem változhat(na) a mintavételezés hatására, de ez elkerülhetetlen...
 - Hogyan mintavételezzünk?
Legjobb, ha u.ú., ahogyan a detektor is teszi
 - DFT által okozott spektrumszivárgás is jelentős probléma:
 - Klasszikus megoldás, az ablakozás natívan nem adekvát.

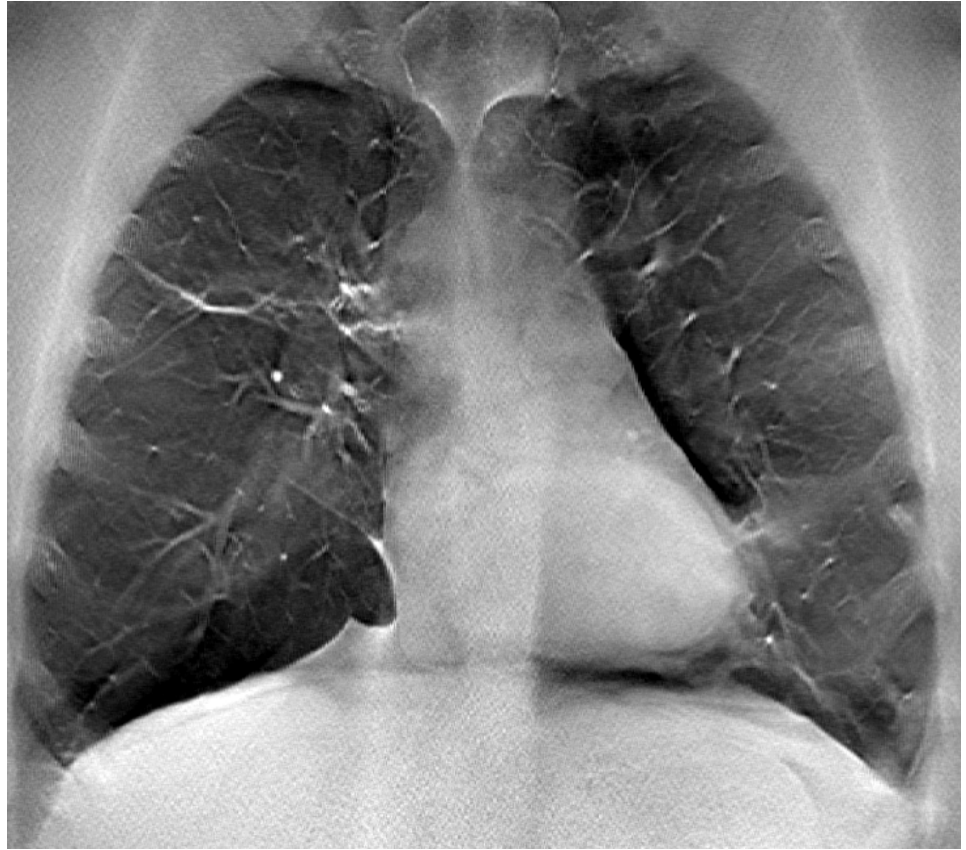
Mátrix Inverziós Tomoszintézis spektrumszivárgás (*)

- Felvételi elrendezés miatt oszloponként történik az inverz szűrés, elegendő a függőleges cirkularitás:
 - A projekciók extrapolációja nem úszható meg, ellenkező esetben a „csavarodás artefekt történik”.
 - Extrapoláció szükséges mértéke $t_{(j,i)}$ tartóinak a maximuma, ezzel elérhető, hogy csak extrapolált terület csavarodhat be.
- Probléma projekciók extrapolálásával kezelhető:
 - Extrapoláció olyan képterülettel terjeszti ki a projekciókat, mely a „legsimább” átmenetet és cirkuláris projekciót generál.

Mátrix Inverziós Tomoszintézis spektrumszivárgás (*)



Extrapoláció nélkül



Extrapoláció alkalmazásával

Mátrix Inverziós Tomoszintézis

Dekonvolúció numerikus problémái (*)

- $\mathbf{T}(\omega)^\dagger$ zajérzékenysége jelentős problémaforrás

– Kondíciós szám $cond(\mathbf{T}(\omega)) = \sigma_{\max} / \sigma_{\min}$ származtatása:

$$cond(\mathbf{T}) = \max_{\mathbf{e}, \mathbf{b}} \left\{ \frac{\|\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{e}\|_2 / \|\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{e}\|_2 / \|\mathbf{b}\|_2} = \frac{\|\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{e}\|_2 / \|\mathbf{e}\|_2}{\|\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{b}\|_2 / \|\mathbf{b}\|_2} \right\}$$

- Legyen $\mathbf{T} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^*$ SVD felbontás, ekkor $\mathbf{T}^\dagger = \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Sigma}^\dagger \cdot \mathbf{U}^*$

- Mivel \mathbf{U} és \mathbf{V} oszlopvektorai ortonormált bázisok, ezért

$$\max_{\mathbf{e}} \left\{ \|\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{e}\|_2 / \|\mathbf{e}\|_2 \right\} = 1/\sigma_{\min} \quad \text{és} \quad \min_{\mathbf{b}} \left\{ \|\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{b}\|_2 / \|\mathbf{b}\|_2 \right\} = 1/\sigma_{\max}$$

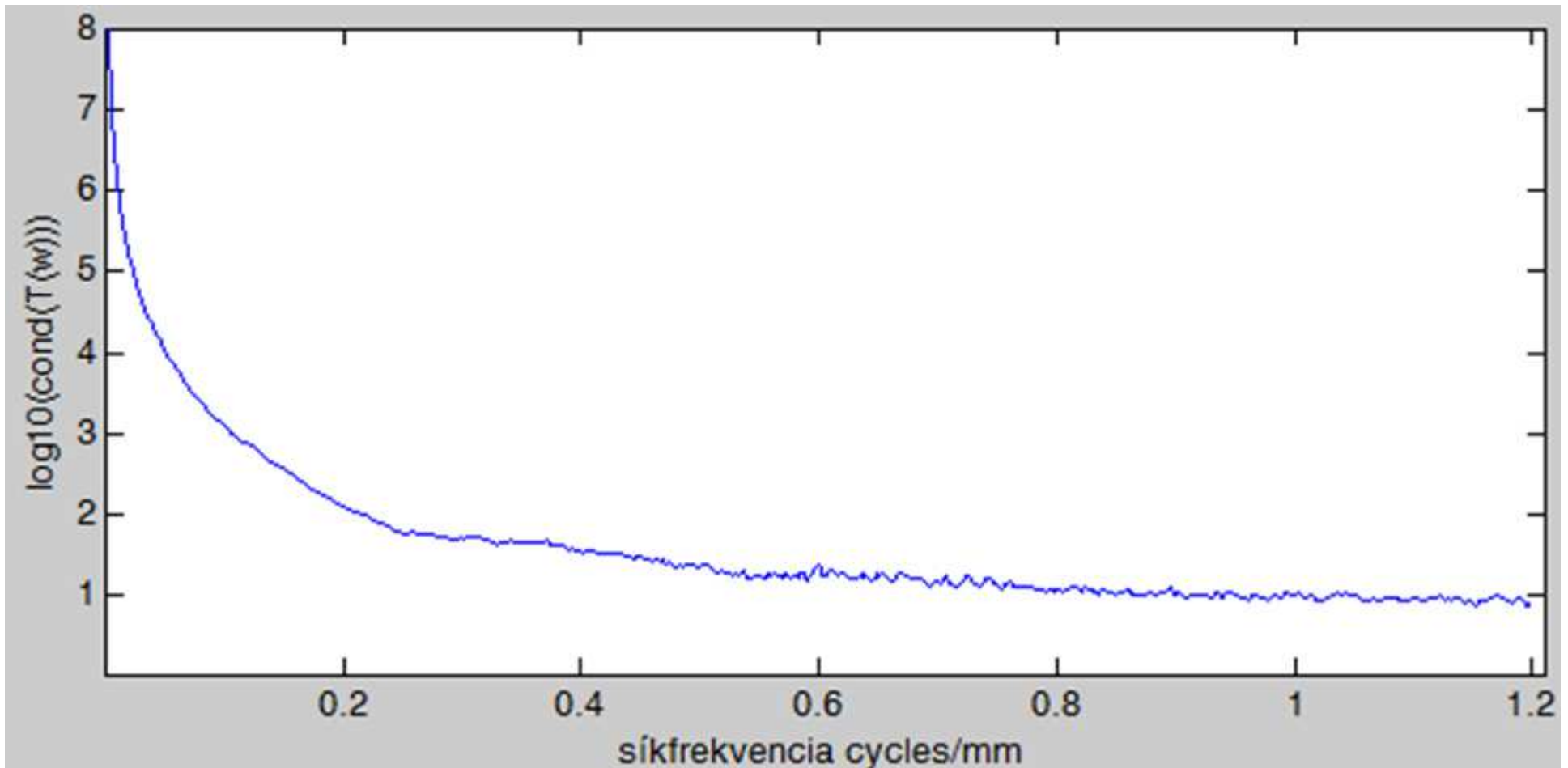
- Zajcsökkentő regularizáció célja $cond(\mathbf{T})$ minimalizálása

Mátrix Inverziós Tomoszintézis

Dekonvolúció zajérzékenysége (*)

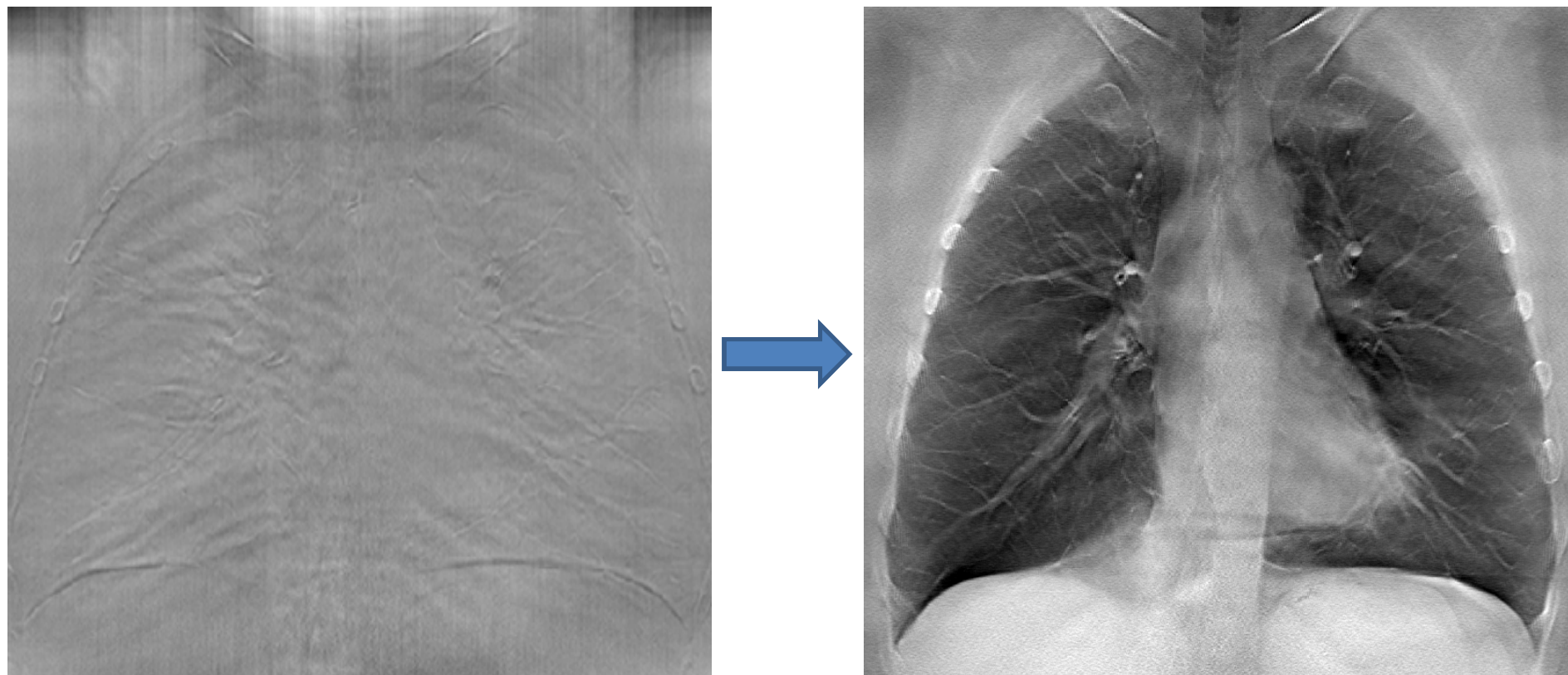
- $\mathbf{T}(\omega)^\dagger$ előállítása csonkolt SVD-vel:
 - $\mathbf{T}^\dagger = \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Sigma}^\dagger \cdot \mathbf{U}^*$, ahol $\mathbf{\Sigma}^\dagger_{(i,i)} = \begin{cases} 1/\sigma_i & | \sigma_i > \varepsilon \\ 0 & | \sigma_i \leq \varepsilon \end{cases}$
 - Kísértetiesen hasonlít a csonkolt dekonvolúcióra:
 - Joggal, a különbség annyi, hogy ott a DFT mátrixával diagonalizálunk, míg SVD esetén a bal, illetve jobb oldali sajátvektor mtrx.-okkal „diagonalizálunk”
- $\mathbf{T}(\omega)$ regularizált Moore- Penrose pseudo inverze a Wiener dekonvolúció általánosítottja

Mátrix Inverziós Tomoszintézis Kondíciós száma lineáris tomoszintézis esetén (*)



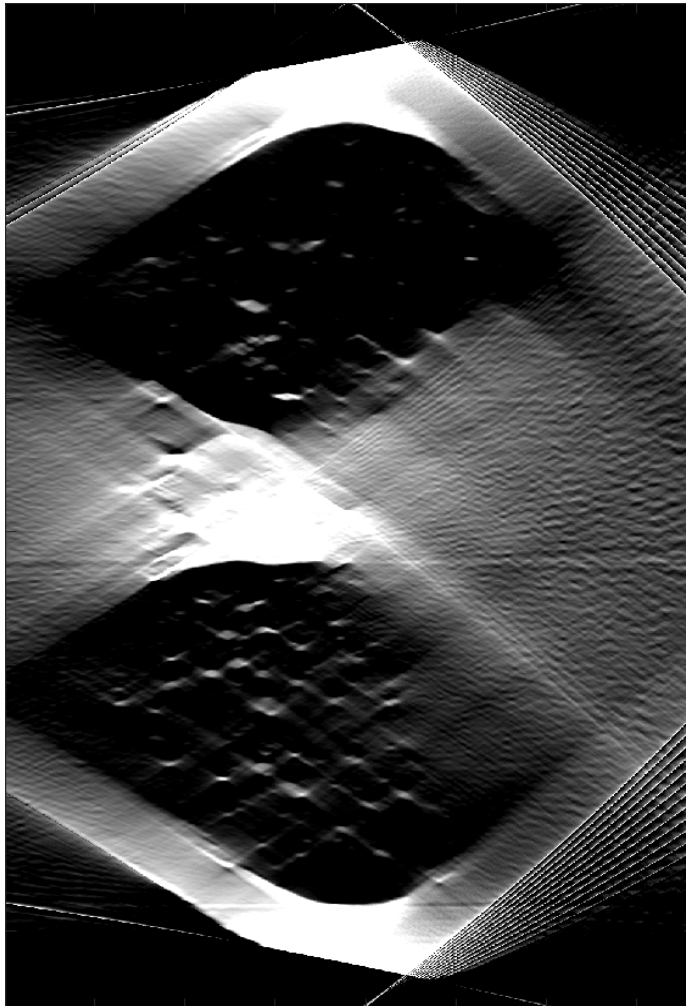
Korlátolt szögtartomány miatt alacsony frekvencia esetén a projekciókon kisebb a változás, aminek következménye a nagyobb zajérzékenység.

Mátrix inverziós tomoszintézis Csonkolt SVD hatása (*)

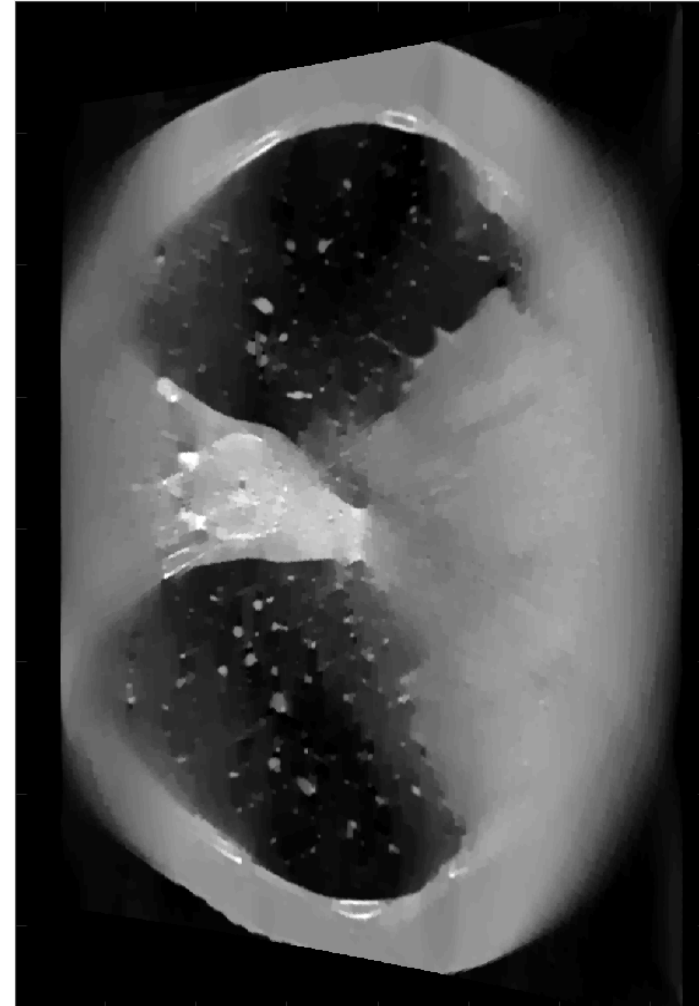


Jól látható, hogy a magasfrekvenciás tartomány zaja dominál a direkt dekonvolúciónál, míg a Csonkolt SVD jelentősen javít a helyzeten.

Limitált szögtartomány ($\pm 40^\circ$, 50 projekció) - MAP becslés (*)



Analitikus - MITS



Ritkasági regularizáció

Rekonstrukciókkal szembeni elvárások

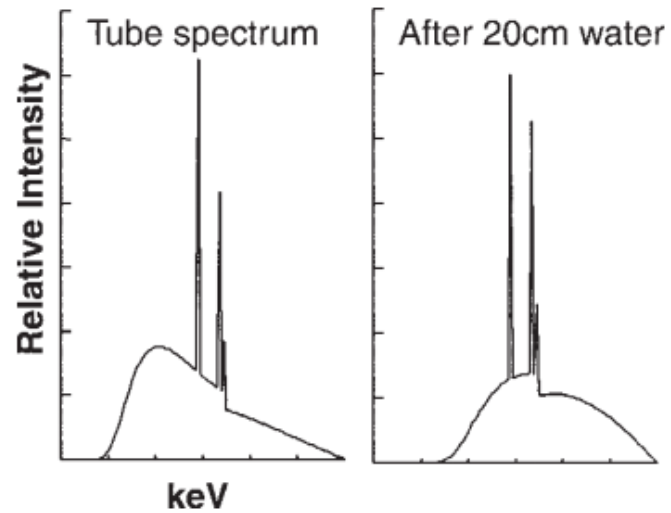
- Kvalitatív képet kapjunk:
 - Adott voxel / pixel intenzitása csak az ott jelenlévő szövet felépítésétől (CT, MRI) / viselkedésétől (PET, SPE(C)T) függjön.
 - Valójában ez sosem teljesül, de ez lenne a cél
- Hounsfield Unit
 - Röntgenes eset abszolút szűrkeségi skálája:

$$HU = \frac{\mu - \mu_{\text{víz}}}{\mu_{\text{víz}} - \mu_{\text{levegő}}} \cdot 1000$$

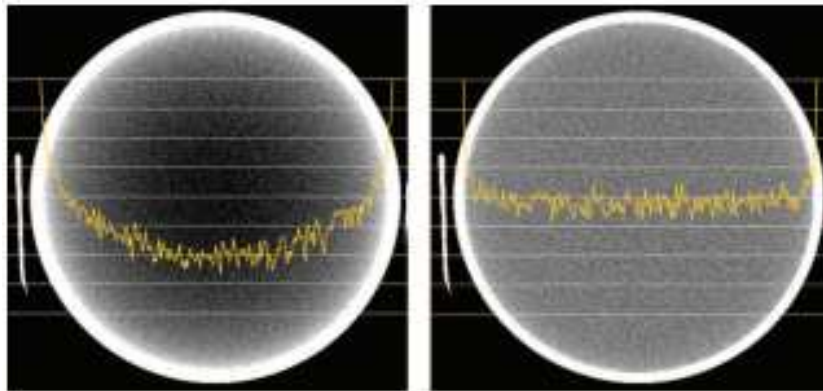
Különböző anyagok lin. csill. Együtthatói HU-ban

Anyag neve	[HU]
Levegő	-1000
Tüdő szövet	-600
Zsír	-100 – -50
Víz	0
Agy-gerincvelői folyadék	15
Vese	30
Vér	+30 – +45
Izom	+10 – +40
Szürke állomány	+37 – +45
Fehér állomány	+20 – +30
Máj	+40 – +60
Lágyrész	+100 – +300
Csont	+700 – +3000

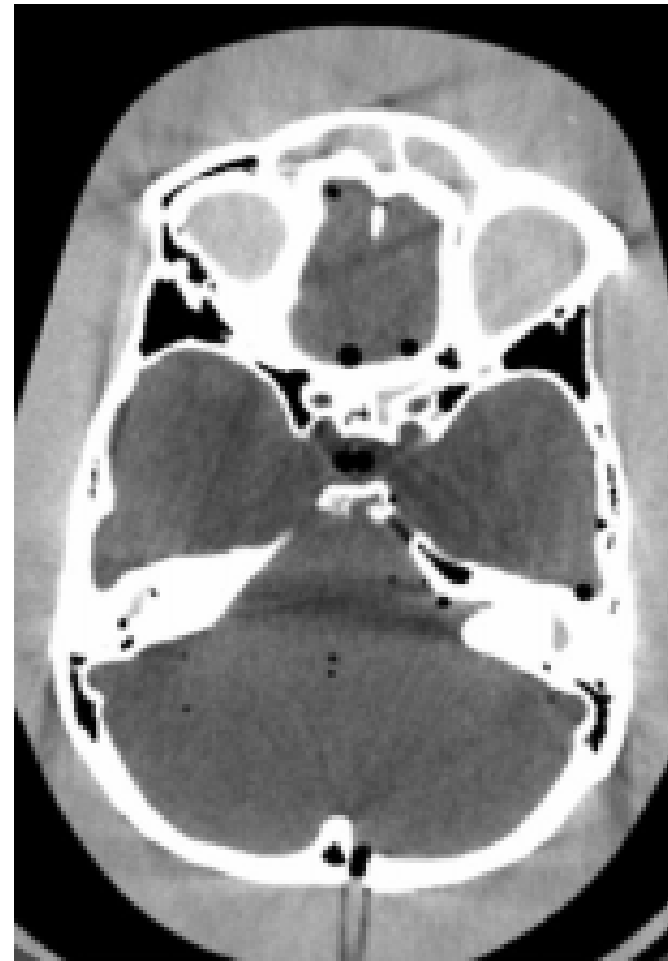
Sugárkeményedés artifakt



Röntgensugár intenzitás spektruma



Csésze artifakt



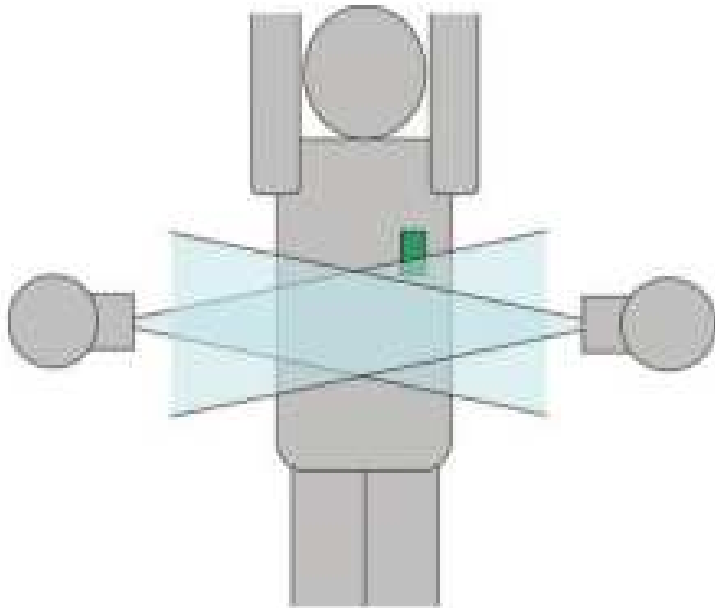
Sugárkeményedés miatti „streaking”

Sugárkeményedés artifakt

- Kompenzációs módszerek:
 - Keményítő szűrő alkalmazása a sugárforráson
 - Tipikusan nagy csillapítású homogén fémekkel (ólom, réz, wolfram, stb.)
 - Kalibrálással
 - Pl. hengeres vízfantommal – valódi páciens sosem hengeres uniform víz...
 - Szoftveresen
 - Pl. csontok sugárkeményítésének modellezése levetítésnél (ez is csak közelítő módszer)

Részleges térfogat artifakt

- Széles kollimálású nyalábnál csak a szelet projekciók egy részére vetül az objektum

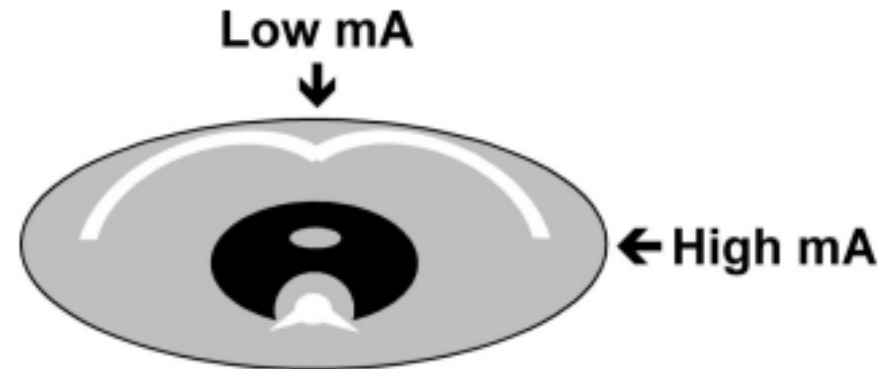


Foton éhezés artifakt

- Vizsgált térfogaton belüli anyagok teljesen elnyelik a röntgen fotonokat (tipikusan fémek, sűrű csontok).



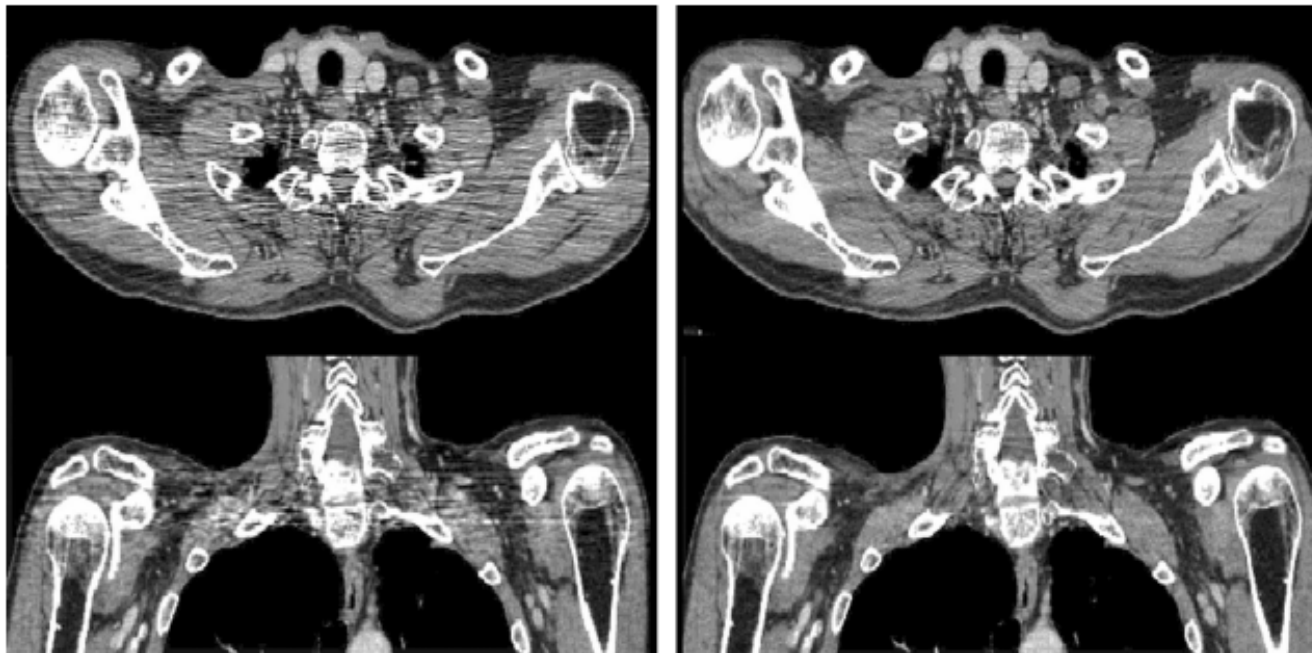
Streaking a rekonstruált szeleteken a kulcscsont miatt



Kompenzálás: problémásabb sugaraknál nagyobb csőáram (nagyobb dózis)

Foton éhezés artifakt

- Szoftveres korrekciók:
 - Adaptív filtráció: alacsony röntgen intenzitású szinogram részek elmosása a logaritmálás és a negálás előtt
 - Lehet multidimenziósan is csinálni



Normál rekonstrukció

Adaptív szűrés

Fém artifakt

- Probléma: fémek teljesen elnyelhetik a sugarat / keményen csillapíthatják / részleges térfogat /...
- Kompenzálása szoftveresen:
 - Pl. projekciókon a fémek szegmentálása, majd az intenzitásaik kiinterpolálása szomszédos intenzitásokból
 - MAP becslés erős regularizációval

Fém artifakt



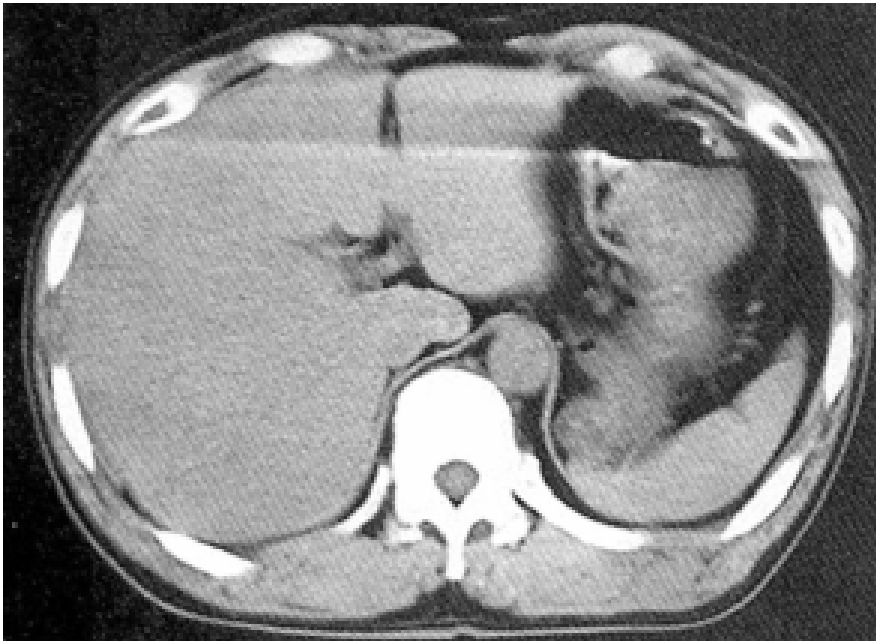
Gerinc implantátum és az ART



ART a szinogram kompenzációja után

Páciens bemozdulása

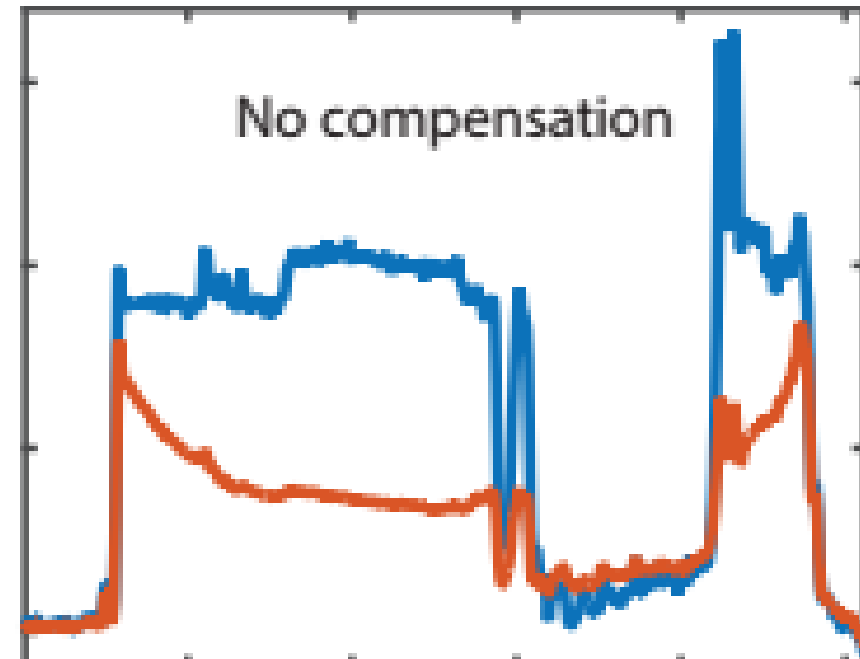
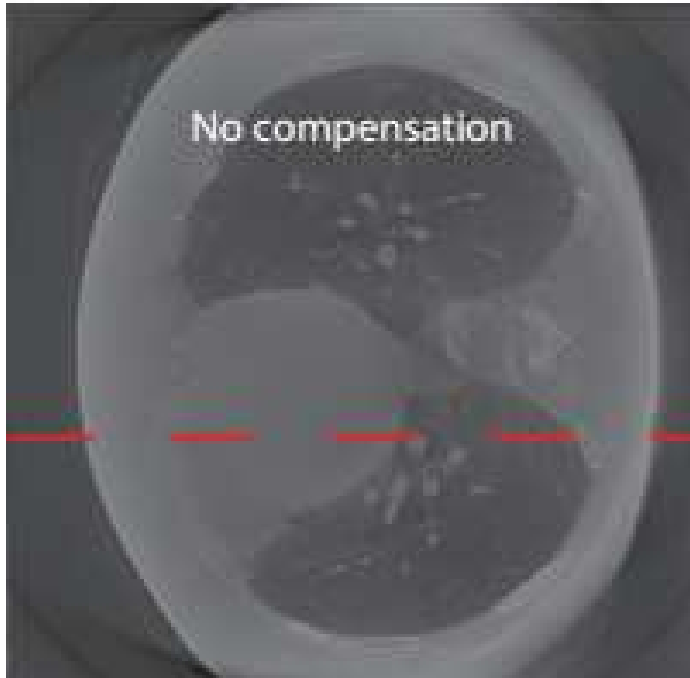
- Szív, mellkas mozgása elkerülhetetlen
 - Létezik EKG kapuzott CT, illetve speciális anyaggal lelassítható maradandó károsodás nélkül a szív
 - Az utóbbi minimalizálható levegő visszatartással



A vízszintes streaking a páciens bemozdulásának a következménye

Compton szóródás

- Flat panel detektornál, több soros detektornál
 - A szóródó fotonok detektorba csapódva kisebb relatív csillapodások érzékelését eredményezik
 - HW (moduláció alapú)/ SW (modell alapú) kompenzáció

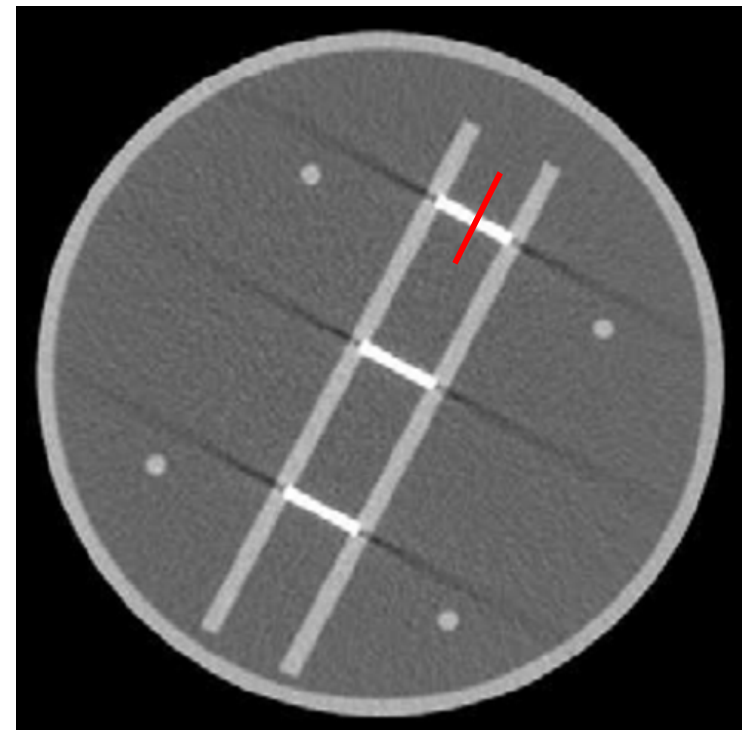
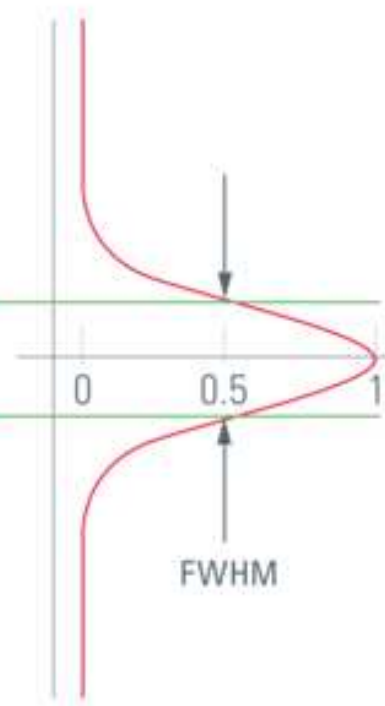
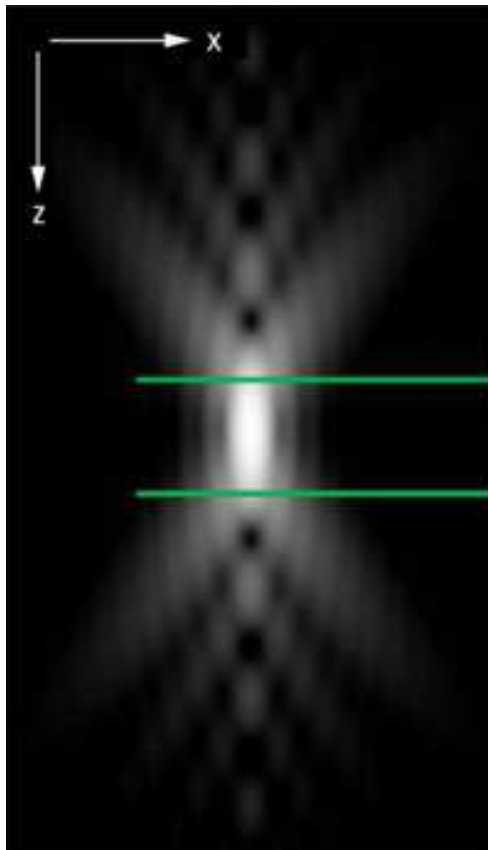
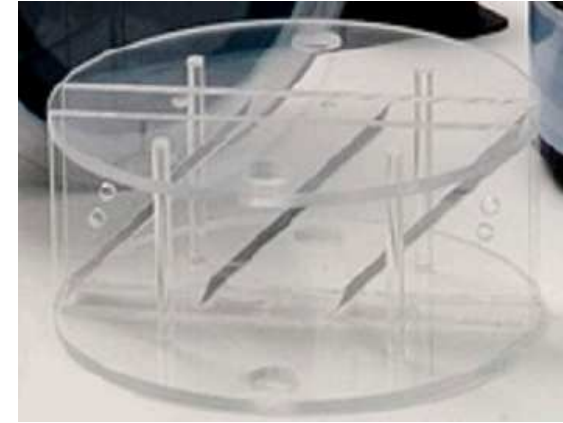


3D Röntgen tomográfia rekonstrukciós eljárásainak minősítése (*)

- Rekonstrukció metrikái:
 - Szeleten belüli effektív felbontása (emlékeztetőül $b_w \{ \mathbf{h} \}$)
 - Irányfüggő átviteli függvény közelíthető az él pár fantom / él fantom rekonstrukciójából.
 - Szeletek effektív vastagsága:
 - Mind CT, mind Tomo esetén a rekonstruált szeletekre merőleges irány menti kiterjedése a szeleteknek.
 - Felhasználási területfüggő optimális értéke.
 - Minél kisebb, annál több szelet kell, hogy minden képlet láthatóvá váljon (legalább egy szeleten).
 - Mérése tipikusan ferde fémllemezzel / fémhuzallal.

CT Szeletvastagság (*)

Slice Sensitivity Profile mérése a lemezek rekonstrukciójára merőlegesen: szeletvastagság FWHM elvvel becsülhető



3D Röntgen tomográfia rekonstrukció Modulációs Átviteli Függvénye (*)

- Ferde huzal fantommal (elvben) mérhető:
 - Ha az eljárás az X-Y síkokat rekonstruálja, akkor a huzal ne legyen párhuzamos a Z tengellyel.

Lineáris tomo MITS
rekonstrukció MTF-e

