Jelfeldolgozás bevezető

Témalaboratórium

Tartalom

- Jelfeldolgozás alapjai
  - Lineáris rendszerelmélet
  - Fourier transzformációk és kapcsolataik
  - Spektrális képek értelmezése
- Képfeldolgozás alapjai
  - Néhány nevezetesebb szűrés

Lineáris időinvariáns (LTI) rendszerek

- Linearitás:

$$S\left\{a\cdot f+b\cdot g\right\}=a\cdot S\left\{f\right\}+b\cdot S\left\{g\right\}$$

$$a,b\in\mathbb{R}\quad f,g\in\mathbb{R}^N$$

- Időinvariancia (shift invariancia):

$$S\left\{f\left(x+x_0\right)\right\}\left(y+x_0\right)=S\left\{f\right\}\left(y\right)$$

- Dirac impulzus:
  - $\delta\left(x\right)=\lim\limits_{a\to 0}\left(\exp\left(-x^2/2a^2\right)/a\sqrt{2\pi}\right)$
  - $\int_{0-0}^{0+0}\delta\left(x\right)=1$, illetve $\delta\left(x\right)=0\quad\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$

LTI rendszerek válasza (konvolúciós integrál)

- Lineáris rendszer válasza f gerjesztésre:
  - $S\{f\}(x) \approx \hat{y}(x) := \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(j \cdot \Delta x) \cdot S\{\delta(j \cdot \Delta x)\}(x) \cdot \Delta x$
  - Mikor helyes a közelítés ($\Delta x \to 0$ esetén) :
    - f (a gerjesztés) egy folytonos jel
    - Az impulzusválasz folytonos függvénye z -nek
      $h(\mathrm{z}, x) \triangleq S\{\delta(z)\}(x)$
- Mi változik ha $S\{\cdot\}$ eltolás invariáns:
  - Mivel $h(y, x) = h(x - y)$, ezért
    $$S\{f\}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \hat{y}(x) = \int_{x'=-\infty}^{\infty} f(x') \cdot h(x - x') \cdot dx'$$

LTI rendszerek válasza (konvolúciós integrál)

- Lineáris rendszer válasza f gerjesztésre:
  - $S\{f\}(x) \approx \hat{y}(x) := \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(j \cdot \Delta x) \cdot S\{\delta(j \cdot \Delta x)\}(x) \cdot \Delta x$
  - Mikor helyes a közelítés ($\Delta x \to 0$ esetén) :
    - f (a gerjesztés) egy folytonos jel
    - Az impulzusválasz folytonos függvénye z -nek $h(\mathrm{z}, x) \triangleq S\{\delta(z)\}(x)$
- Mi változik ha $S\{\cdot\}$ eltolás invariáns:
  - Mivel $h(y,x) = h(x-y)$, ezért

    $$S\{f\}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \hat{y}(x) = \int_{x'=-\infty}^{\infty} f(x') \cdot h(x-x') \cdot dx'$$

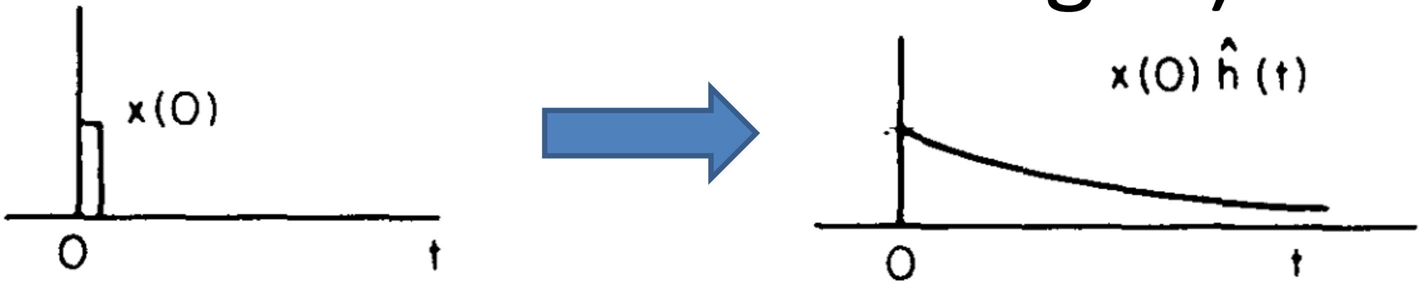
LTI rendszerek válasza (konvolúciós integrál)

- Lineáris rendszer válasza f gerjesztésre:
  - $S\{f\}(x) \approx \hat{y}(x) := \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(j \cdot \Delta x) \cdot S\{\delta(j \cdot \Delta x)\}(x) \cdot \Delta x$
  - Mikor helyes a közelítés ($\Delta x \to 0$ esetén) :
    - f (a gerjesztés) egy folytonos jel
    - Az impulzusválasz folytonos függvénye z-nek $h(z, x) \triangleq S\{\delta(z)\}(x)$
- Mi változik ha $S\{\cdot\}$ elto
  - Mivel $h(y, x) = h(x-y)$, ezért

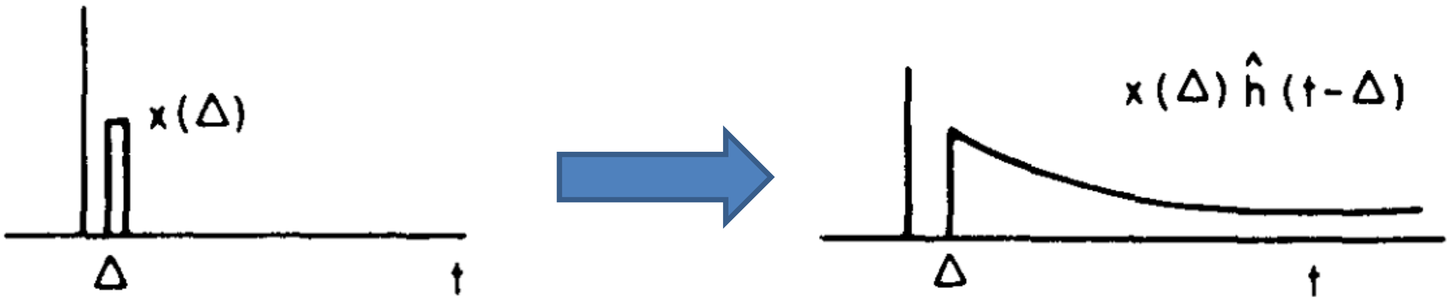
$$S\{f\}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \hat{y}(x) = \int_{x'=-\infty}^{\infty} f(x') \cdot h(x-x') \cdot dx'$$

Tehát $S\{f\}(x) = (f * h)(x)$

LTI rendszerek válasza (konvolúciós integrál)

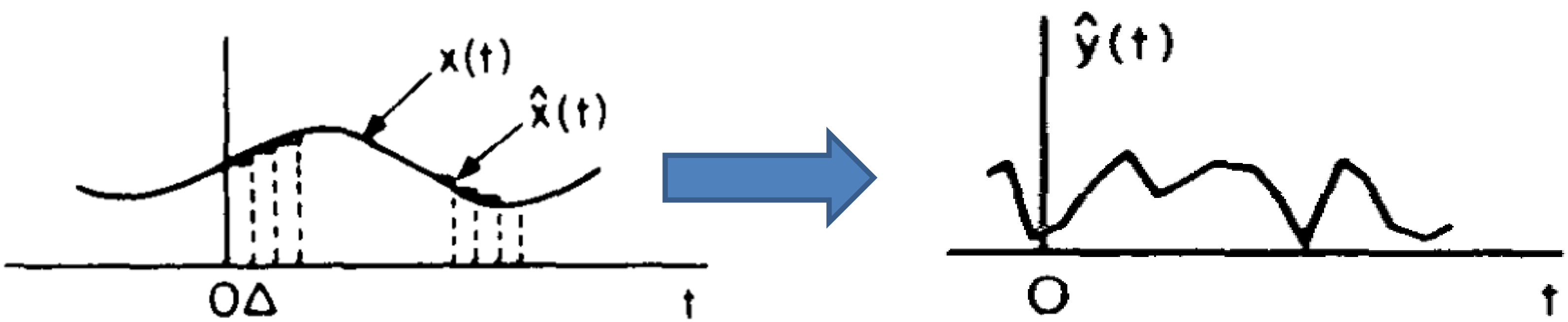


+

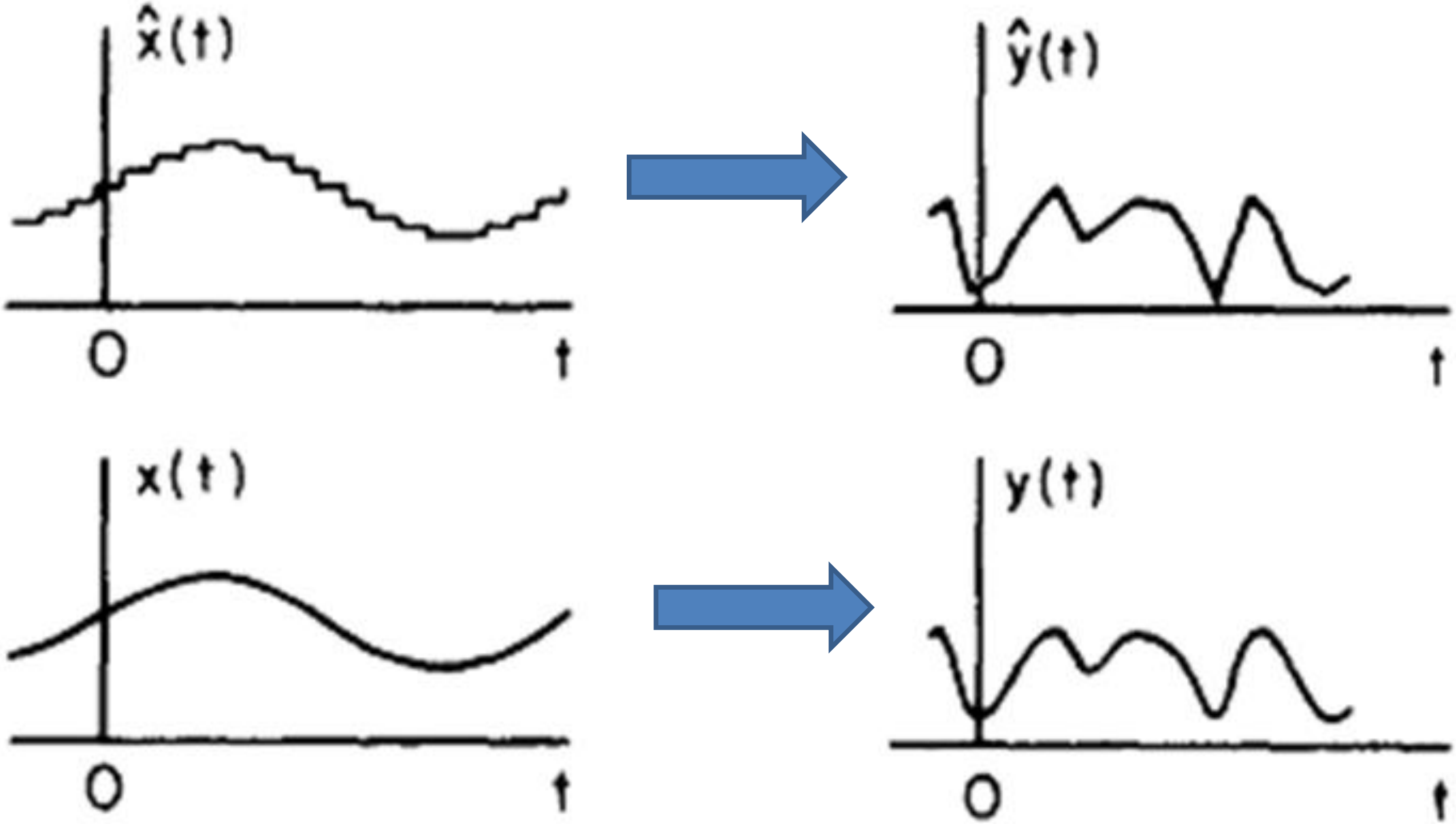


+ ...

∑:



LTI rendszerek válasza (konvolúciós integrál)



Rendszerelmélet – miért?

1. Rekonstruálunk:
   - A kép egy rendszernek egy kimenete
   - Bemenete egy 3d térrészlet, benne minket érdeklő objektumokkal (állapotváltozók)
   - Cél a rendszer állapotának a visszaállítása (az objektumok tulajdonságainak rekonstrukciója)
2. Kondícionálunk:
   - Bemenete a megfigyelési rendszernek egy számunkra kívánatos (pl. torzításmentes) kép, melyet a képalkotás során használt eszköz, mint rendszer torzít
   - Cél a kívánatos kép előállítása (pl. szűréssel, becsléssel)

Képalkotó rendszerek leírása lineáris rendszerekkel

1. 3D térből 2D mérés:

$$g(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}h(x,y;\alpha,\beta,\gamma)\cdot f(\alpha,\beta,\gamma)\,d\gamma\, d\alpha\, d\beta+\eta(x,y)$$

   - $f(\alpha,\beta,\gamma)$: rendszer bemenete, a 3D tér egy pontja
   - $\eta(x,y)$: additív megfigyelési zaj („kevés” a modell)
   - $h(x,y;\alpha,\beta,\gamma)$: lineáris rendszerünk súlyfüggvénye

2. 2D képből torzított 2D kép:

$$g(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(x,y;\alpha,\beta)\cdot f(\alpha,\beta)\,d\alpha\, d\beta+\eta(x,y)$$

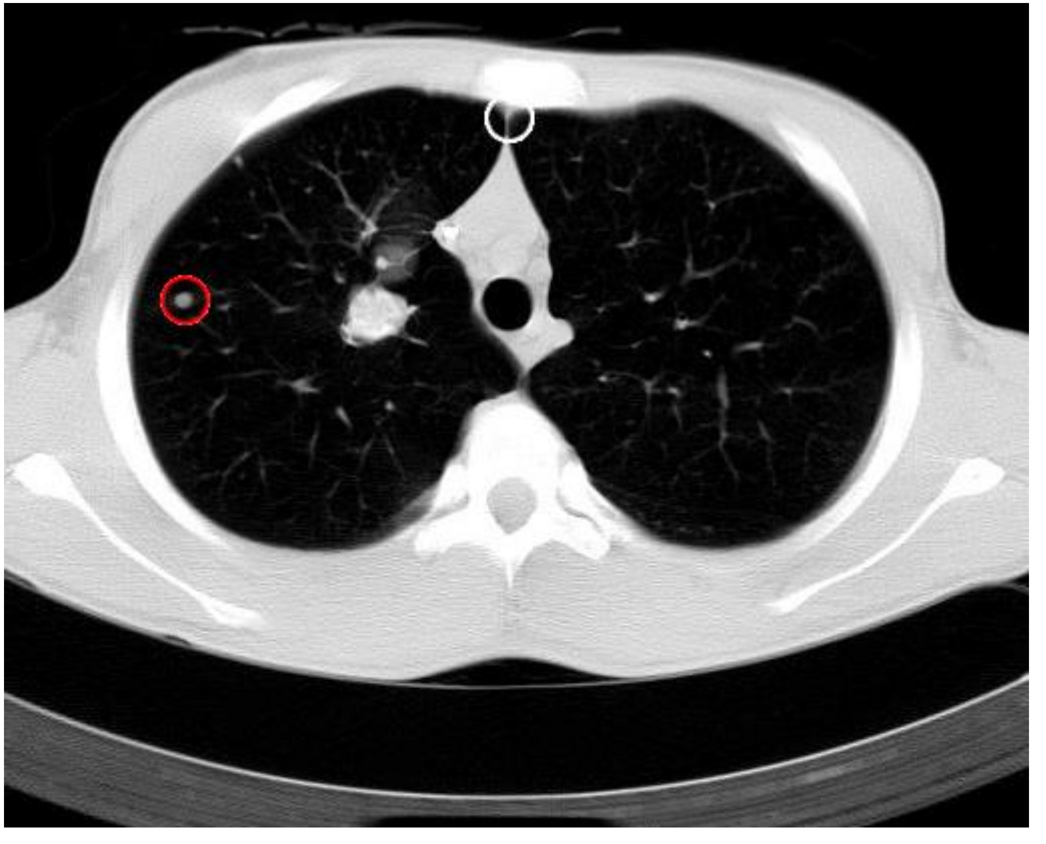
   - ha $h(x,y;\alpha,\beta)\equiv h(x-\alpha,y-\beta)$ akkor LTI / LSI rendszer, jelentősen egyszerűsödik sokminden

3D információ előállítása kép(ek)ből példák

- Felismerési feladatok:
  - Pl. gyalogosok felismerése

3D információ előállítása kép(ek)ből példák

- Felismerési feladatok:
  - Pl. kerekárnyékok felismerése



3D információ előállítása kép(ek)ből példák

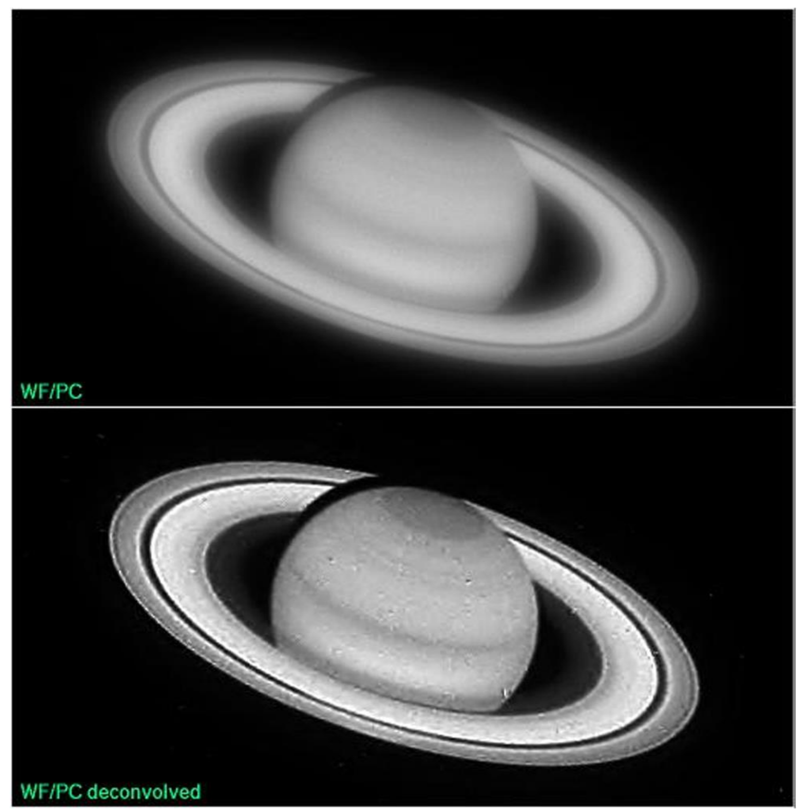
- Rekonstrukciós feladatok:
  - Pl. Röntgenes rekonstrukciók
  - https://youtu.be/5Vyc1TzmNI8
  - https://youtu.be/ddZeLNh9aac

3D információ előállítása kép(ek)ből példák

- Rekonstrukciós feladatok:
  - Pl. kameraképek alapján 3d objektum rekonstrukció
  - https://youtu.be/D0KGdOdvKYI

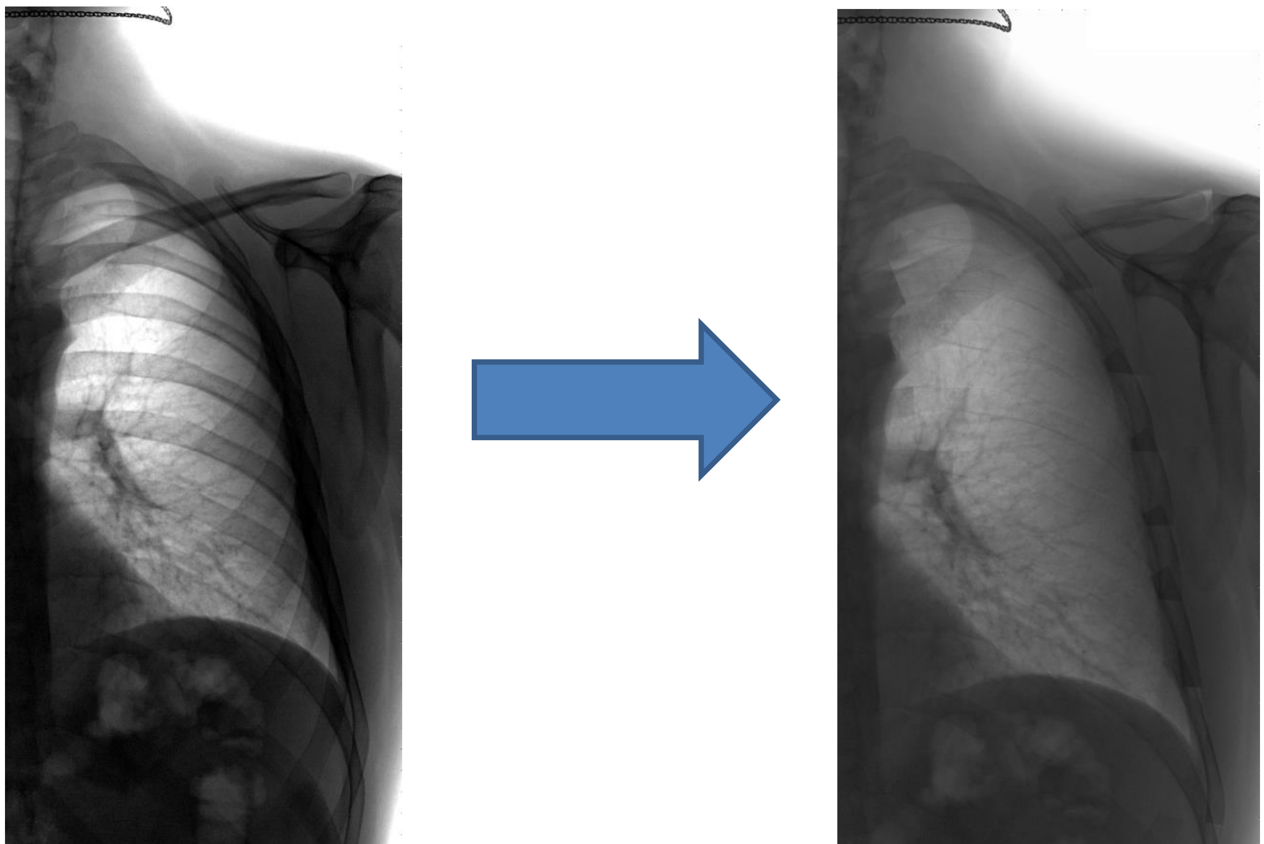
2D kép kondícionálása

- Dekonvolúciós feladatok:
  - Ismerjük h-t, cél f-et megbecsülni



2D kép kondícionálása

- Szűrésekkel minket érdeklő részek kiemelése
  - Pl. szummációs röntgen projekcióról bordaárnyék „leradírozása”



Hogyan lesz digitális képünk?

1. Detektor felületét fotonok érik:
   - Folytonos intenzitásfüggvény
   - Analízisére <u>Folytonos</u> Fourier Transzformácó
2. Érzékelőelemek töltéssé alakítják a fotonokat:
   - Véges frekvenciácal végtelen db mintát veszünk
     - Analízise <u>Diszkrét Idejű</u> Fourier Transzformációval (DTFT)
   - Véges számú mintát veszünk
     - Analízise <u>Diszkrét</u> Fourier Transzformációval (DFT)
3. Van még erősítés, meg kvantálás is:
   - Ezek hatása általában marginális – csak ritkán vizsgáljuk

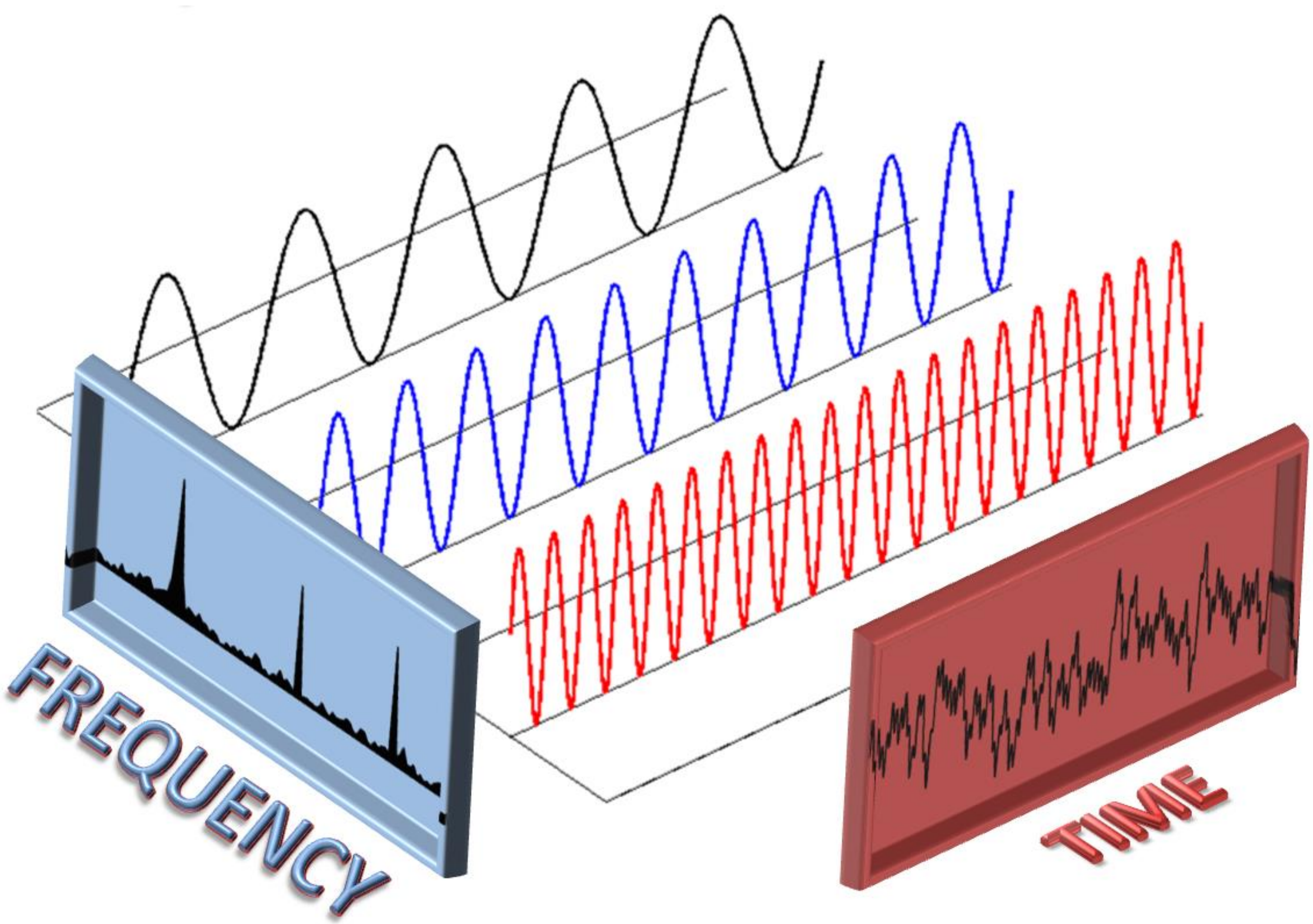
Folytonos Fourier transzformáció

- (Unitér) lineáris transzformáció folytonos függvények tere felett
- $F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \mathrm{e}^{(-j \cdot 2\pi \cdot \xi \cdot x)} \cdot dx$; $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \cdot \mathrm{e}^{(j \cdot 2\pi \cdot \xi \cdot x)} \, d\xi$
  - Különféle paraméterezése létezik itt fizikai frekvencia
  - A spektrum lényegében az eredeti jel koordinátázása a komplex exponenciálisok bázisa felett
    - komplex exponenciális: $\mathrm{e}^{(j \cdot 2\pi \cdot \xi \cdot x)}$
    - $\mathrm{e}^{(j \cdot 2\pi \cdot \xi \cdot x)} = \cos(2\pi \cdot \xi \cdot x) + j \cdot \sin(2\pi \cdot \xi \cdot x)$
    - LTI / LSI rendszerek sajátfüggvényei a komplex exponenciálisok (konvolúció – elemenkénti szorzás duális)

Folytonos Fourier transzformáció

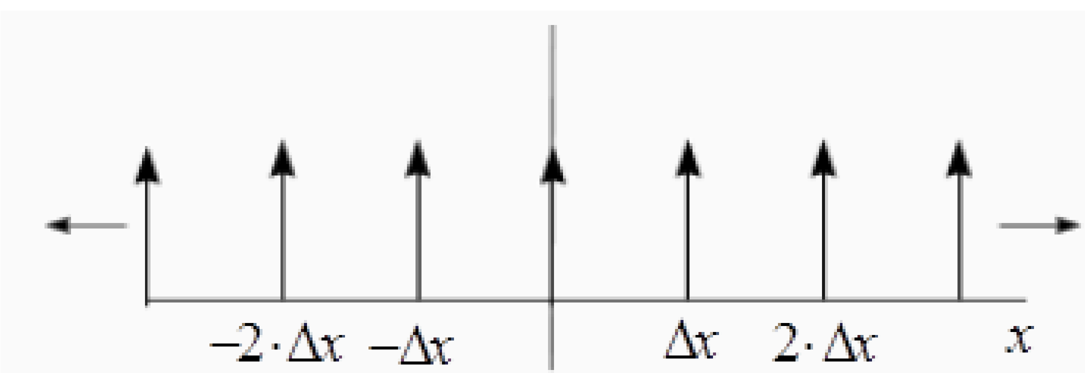
- LTI rendszerek átviteli függvénye:
  - $H = FT\{h\}$, $H(\xi) = |H(\xi)| \cdot \exp\left(j \cdot \varphi\left(H(\xi)\right)\right)$
  - $|H(\xi)|$ - rendszer átvitele ξ frekvencián:
    - ξ ~ a jel változásának a sebessége
    - Minden fizikai rendszer sávkorlátozott
      $|H(\xi)| \ll 1$ ha $\xi > sávszélesség(H)$
    - Interpretáció $1/|H(\xi)|$: rendszer tehetetlensége
  - $\varphi\left(H(\xi)\right)$ - rendszer fázistolása ξ frekvencián:
    - Rendszer „késleltetése – eltolása ”ξ frekvencián
      $FT\{f(x - x_0)\} = F(\xi) \cdot \exp(j \cdot 2\pi \cdot x_0 \cdot \xi)$

Folytonos Fourier transzformáció

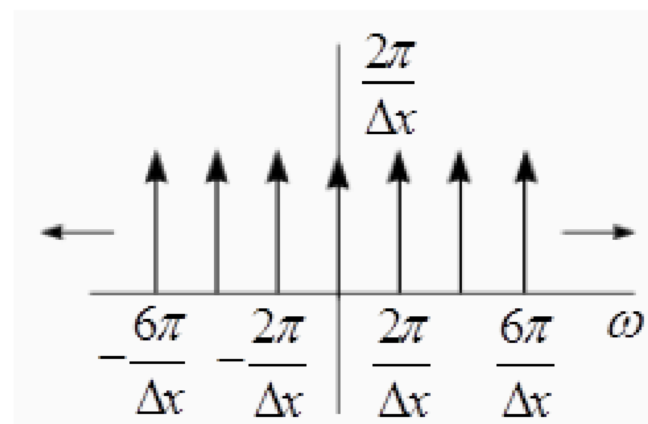


Mintavételezés hatása

- Mintavételezzük a jelünket:
  - Matematikai mintavétel: folytonos jel hadamard szorzata Dirac fésűvel
  - Időtartománybeli szorzás ⇔ spektrumok konvolúciója



Impulzusfésű az időtartományban



frekvenciatartományban

Mintavételezés hatása

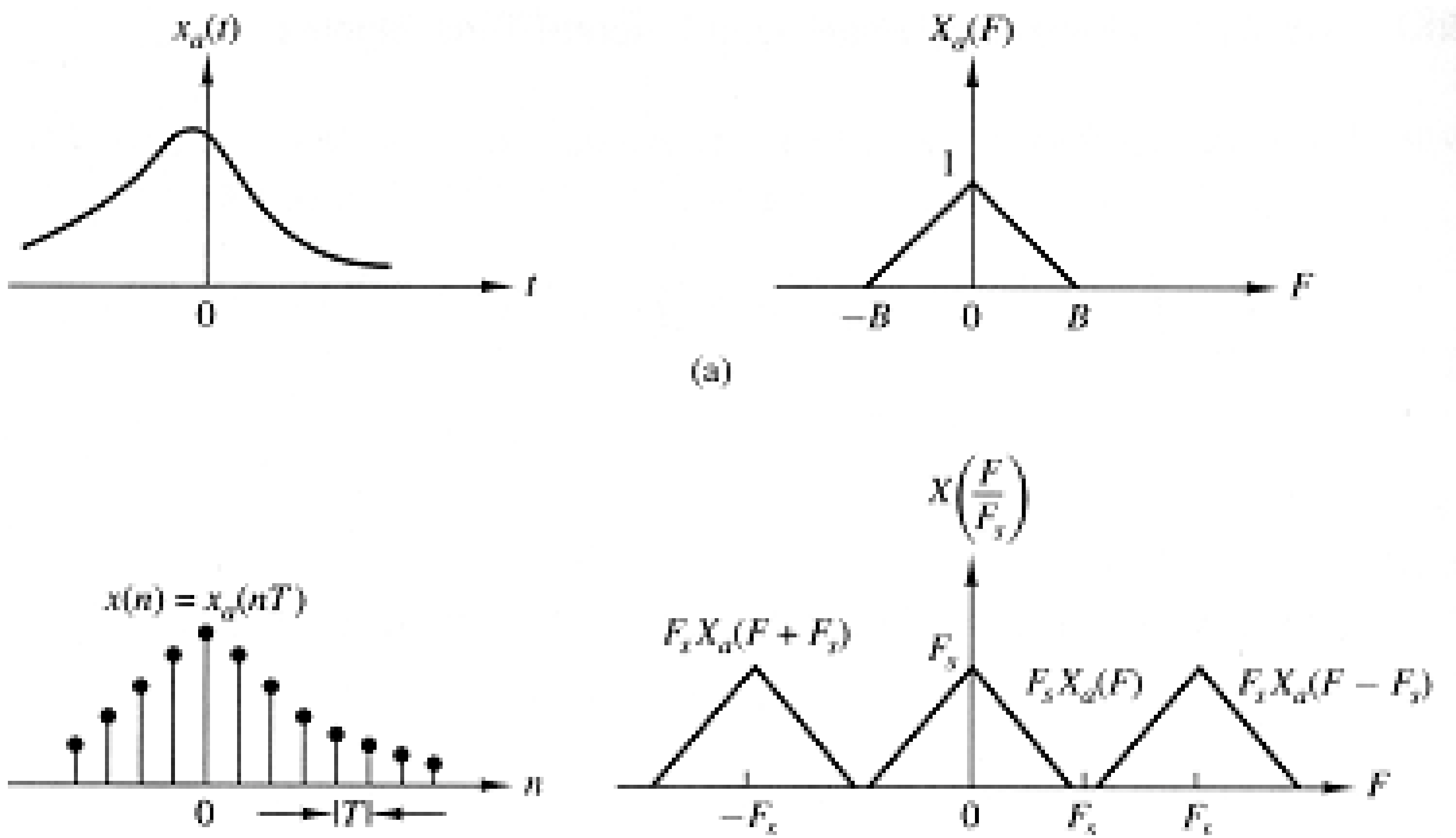
- Mintavételezés hatása Fourier térben:

$$X_s(\omega) = \frac{2\pi}{\Delta x} X(\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{\Delta x}\right) = \frac{2\pi}{\Delta x} \sum_k X\left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{\Delta x}\right)$$

  - $1/\Delta x$: mintavételi frekvencia
  - $X(\omega)$: folytonos jel spektruma mintavételezés előtt
  - $X_S(\omega)$: mintavételezett jel spektruma
- Mikor teljesül, hogy $X_S(\omega) \equiv X(\omega)$?
  - Ha telesül a Nyquist mintavételi törvény kritériuma
  - Ha nem teljesül, akkor alul-mintavételezünk, aminek aliasing a következménye

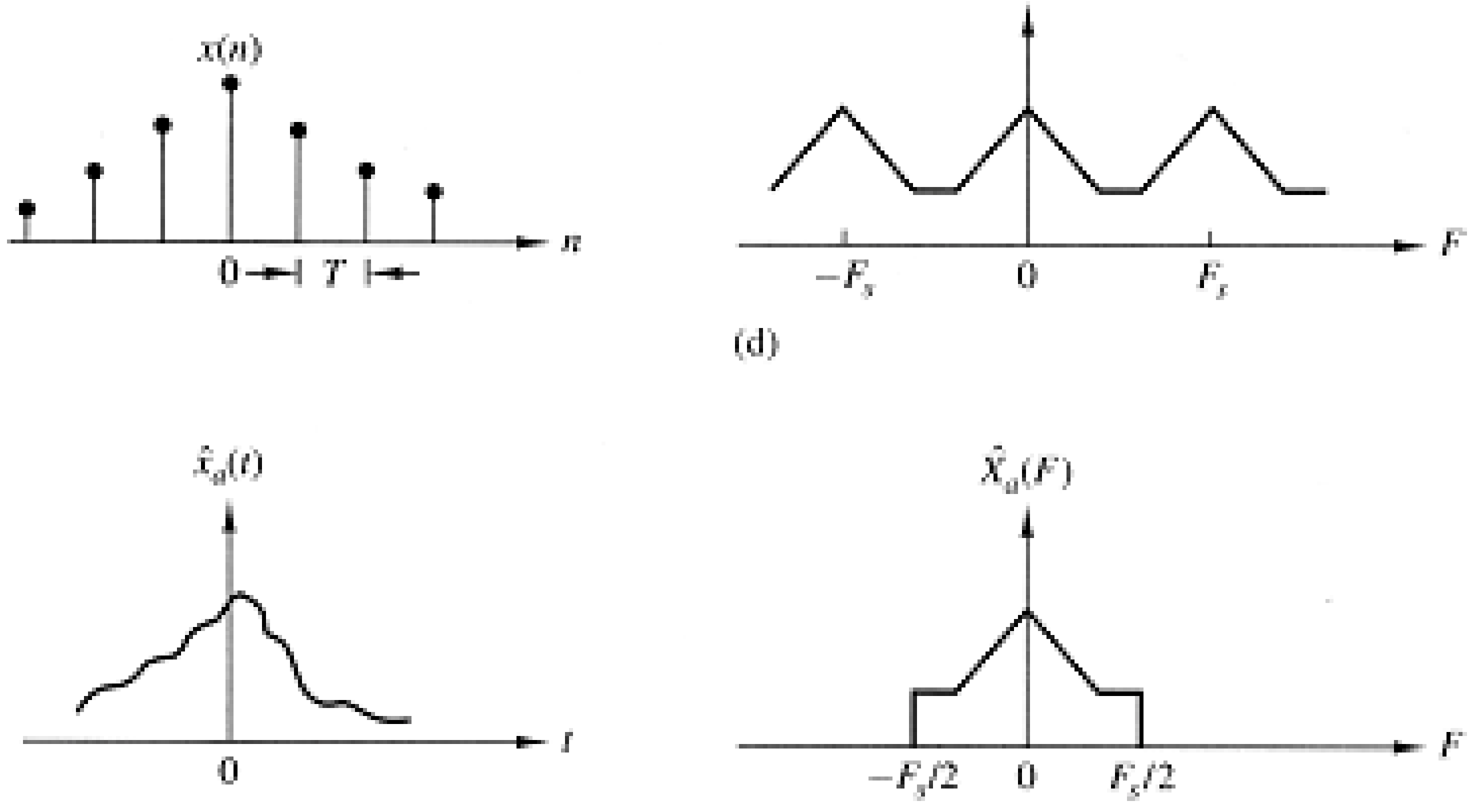
Mintavételezés hatása

- Ha helyesen mintavételezünk: $1/T > 2 \cdot sávszélesség(x)$



Mintavételezés hatása

- Ha alul-mintavételezünk: $1/T \leq 2 \cdot sávszélesség(x)$



Alul-mintavételezés hatása

- Moire / aliasing

Mintavételezett jel spektruma - DTFT

- Nézzük meg a mintavételezett jel spektrumát

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\exp\{-j\cdot\omega\cdot n\} = F_{\xi=2\pi\omega}\left\{x(t) * \sum_{n}\delta(t-n\cdot\Delta t)\right\}$$

$$x[n] = 1/2\pi\cdot\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)\exp\{j\cdot\omega\cdot n\}\,d\omega$$

  – Tehát egyszerűen a mintavett jel spektruma

- Tulajdonságai:
  – $n \in Z$, de $\omega \in R$
  – $X(\omega) \equiv X(\omega + 2\pi\cdot k)$

Véges, mintavett jel analízise - DFT

- Detektorok mérete, gépek memóriája is véges:
  - Véges hosszú mintavételezett jeleink vannak
  - Spektrumokat is csak véges hosszon tudjuk tárolni
- Diszkrét Fourier Transzformáció:
  - $X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\{-j \cdot n \cdot (k \cdot 2\pi / N)\}$
  - mintavételezzük az alábbi jel DTFT spektrumát: $x'[n] = x[n] \cdot h[n]$, ahol $h[n] = 1[n] - 1[n-N]$ az ú.n. megfigyelési ablakfüggvény
    - $1[n-y]$ az y pozíciójú egységugrás

Véges, mintavett jel analízise - DFT

- Spektrumszivárgás:
  – $x[n]$DFT-je $x'[n]$DTFT-jét mintavételezi:

$$X_{(k)} = X'_{(k)} = DTFT_{(k\cdot\Delta\omega)}(x') = 1/2\pi\cdot\left(X_{\infty} * H\right)\left(k\cdot\Delta\omega\right)$$

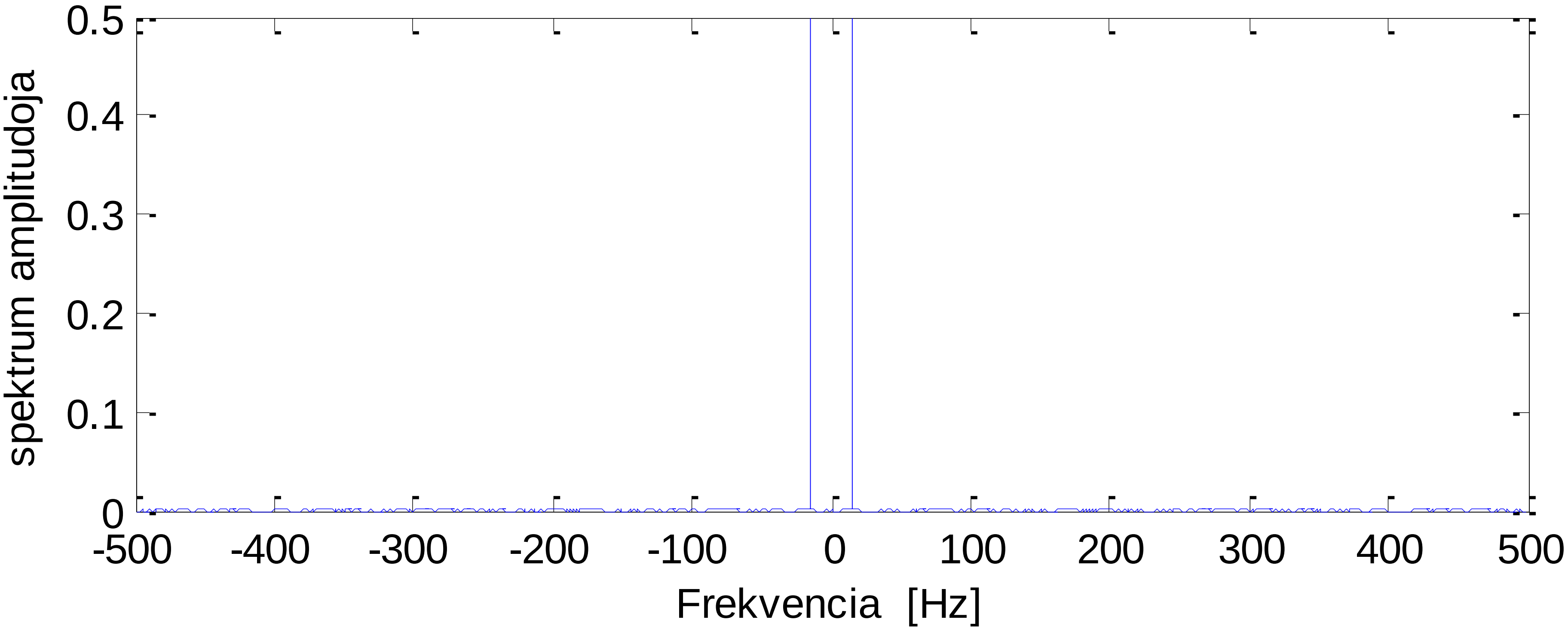
  – Tehát a megfigyelési ablak függvény spektrumával konvolválódik a végtelen hosszú jel DTFT spektruma
    - Ami ha betartottuk a mintavételi törvényt, akkor a folytonos jelünk spektrumának ÁTLAPOLÓDÁS NÉLKÜLI ismétlése
    - Persze a cél a folytonos spektrum mintavételezése lenne

Véges, mintavett jel analízise - DFT

- Spektrumszivárgás másik interpretációja:
  - DFT: $X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\{-j \cdot n \cdot (k \cdot 2\pi / N)\}$
  - DFS: $c_k = \frac{1}{N \cdot \Delta_x} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\left\{-j \cdot n \cdot \frac{k \cdot 2\pi}{N}\right\}$
  - Tehát úgy is felfoghatjuk, hogy a DFT a látott jel végtelen egymás utáni ismétlésével kapott periodikus jel Diszkrét Fourier Sorfejtése
    - És már azt is tudjuk, hogy ez a spektrumot hogy torzítja (ablakfüggvény spektrumával konvolúció)

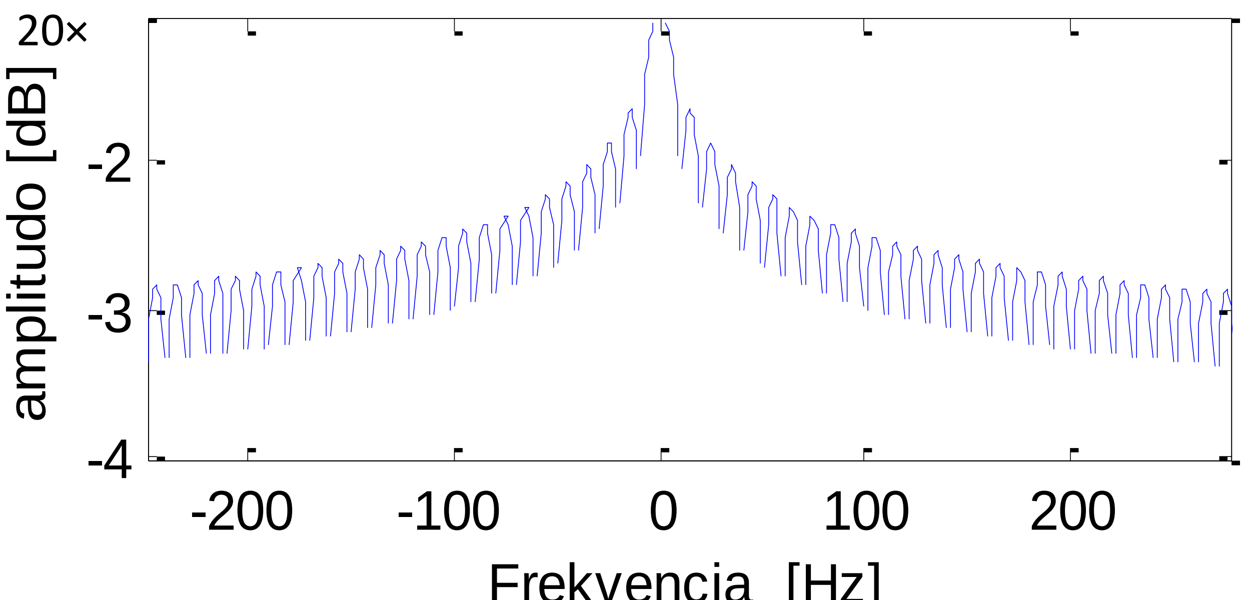
Spektrumszivárgás példa

- Adott folytonos monokróm jel: $x(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
  - Sávszélessége 15 Hz, tehát 30 Hz felett mintavételezzük



Spektrumszivárgás példa

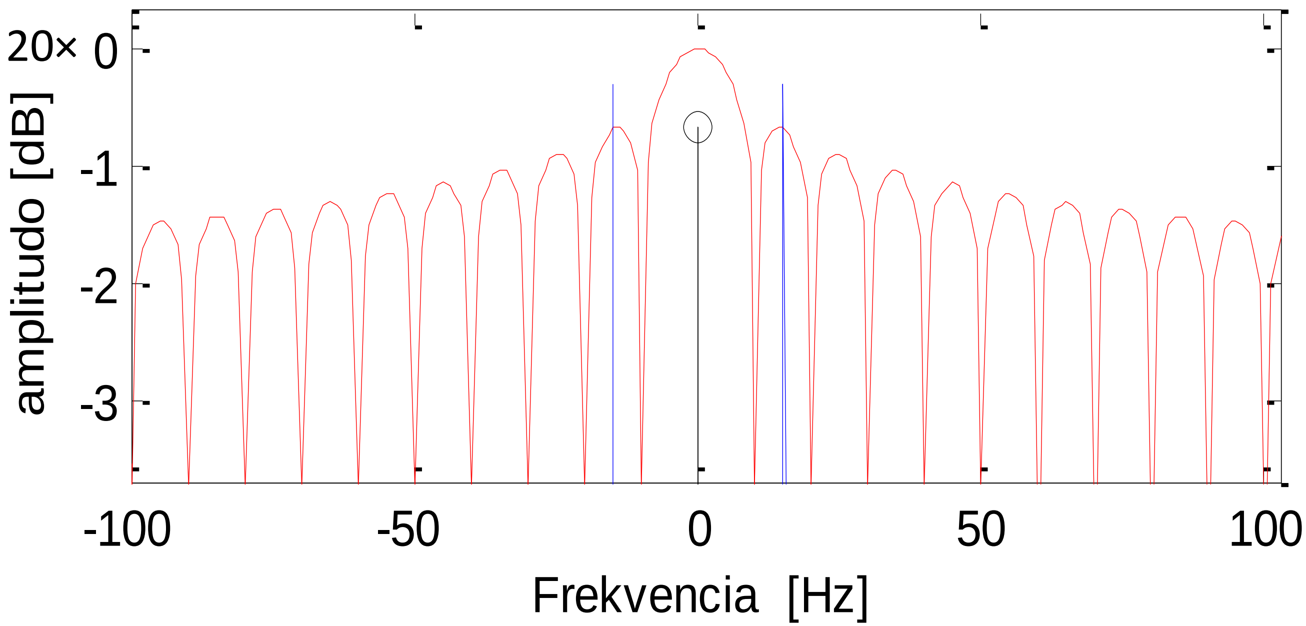
- Adott folytonos jel: $x(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
  - Mintavételezzük (x_{100}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 100$
  - Megfigyelési ekvivalens: $\left(x_{\infty} \cdot \mathrm{rect}_{100}\right)[\cdot]$
  - Implicit megfigyelési ablak DTFT spektruma:



Spektrumszivárgás példa

- Adott folytonos jel: $x(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
  - Mintavételezzük (X_{100}): $f_s = 1\text{kHz}, \quad N = 100$
  - Megfigyelt jel DFT spektruma: $X_{100} \propto X_{\infty} * H_{rect}$

$$Y_{100}(\omega) = \int Y_{\infty}(\tau) \cdot 1/2\pi \, H_{rect}(\omega - \tau) \, d\tau$$



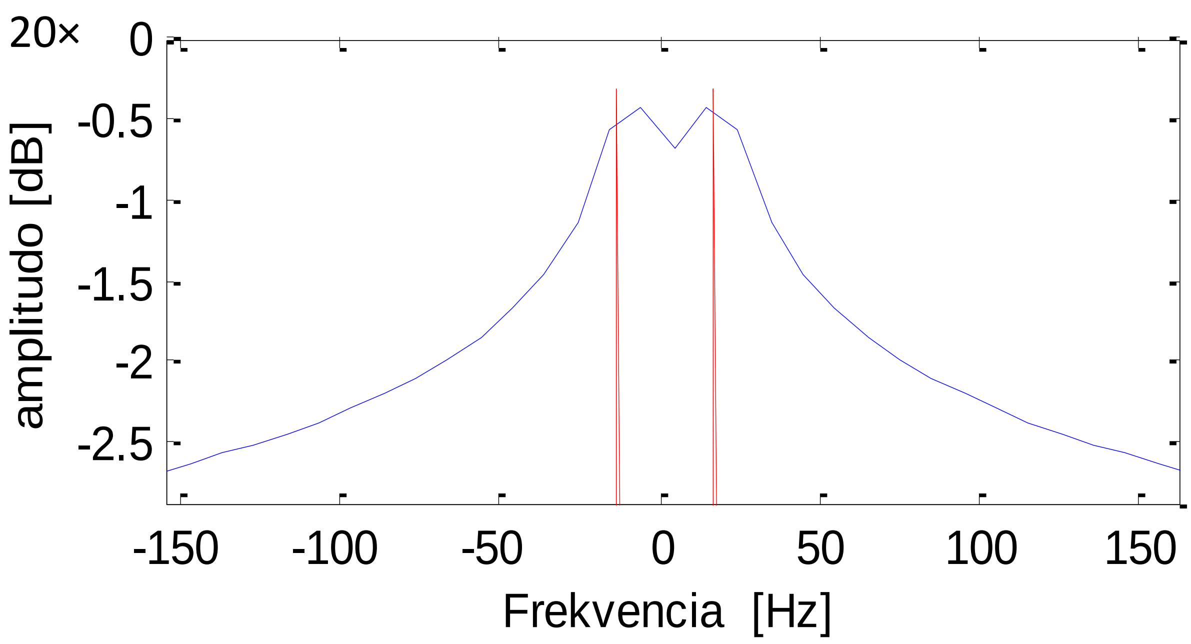
Piros: ablak normált spektruma

Kék: folytonos jel spektruma

Fekete: N=100 mintavétellel előálló jel spektrumának DC komponense

Spektrumszivárgás példa

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
  - Mintavételezzük (y_{100}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 100$
  - Megfigyelési ekvivalens spektruma: $Y_{100} \propto Y_\infty * H_{rect}$

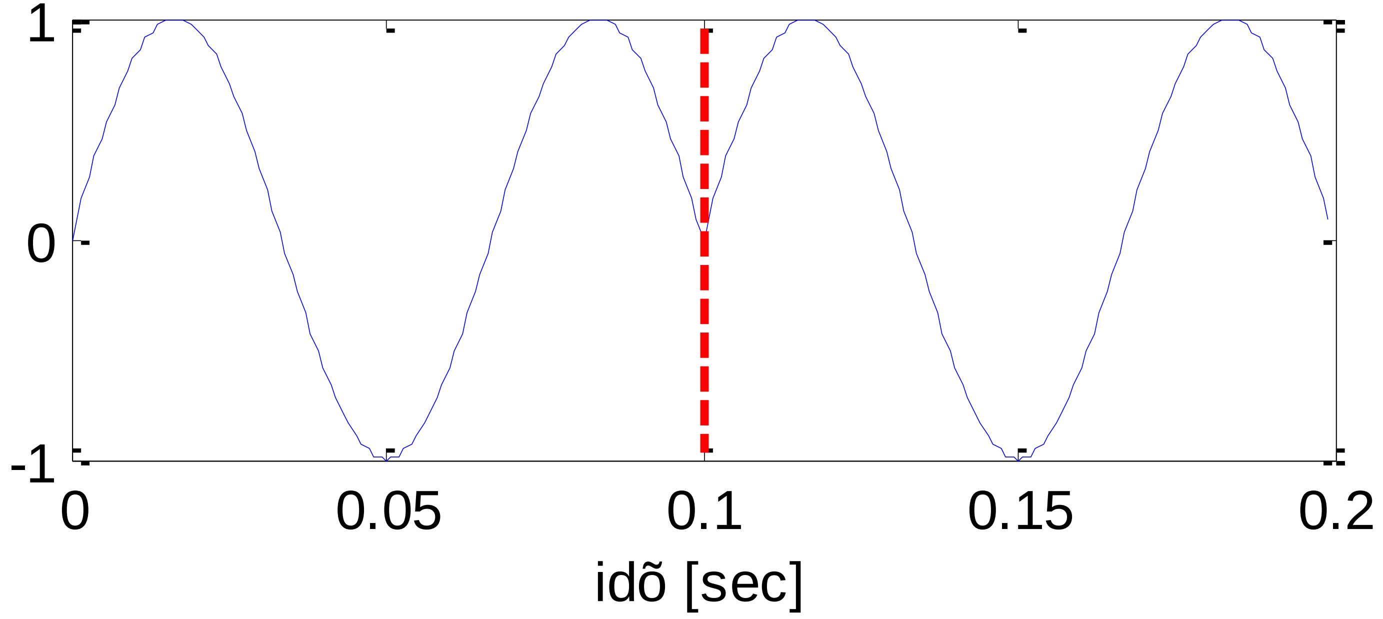


Piros: folytonos jel spektruma

Kék: N=100 mintavétellel előálló jel spektruma

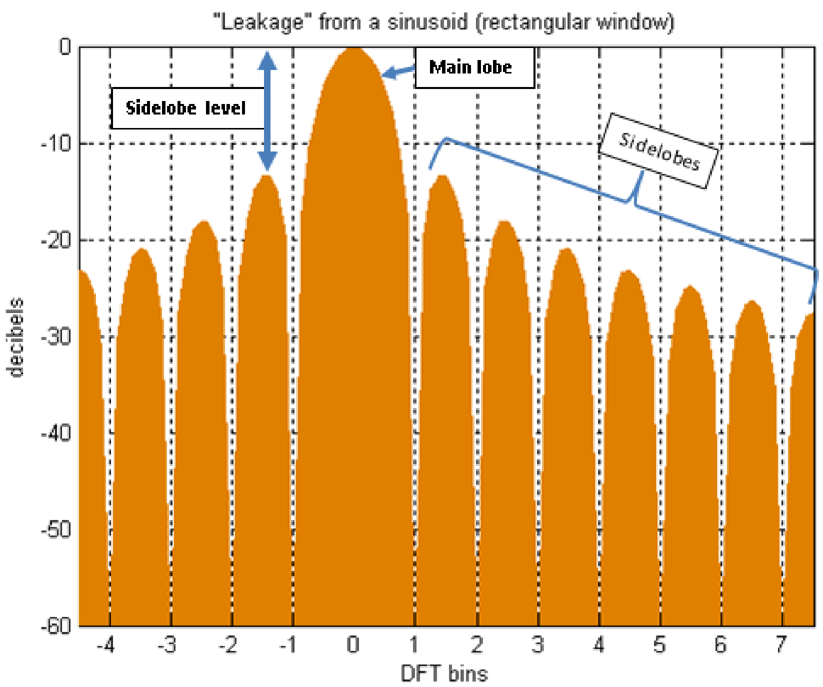
Spektrumszivárgás példa

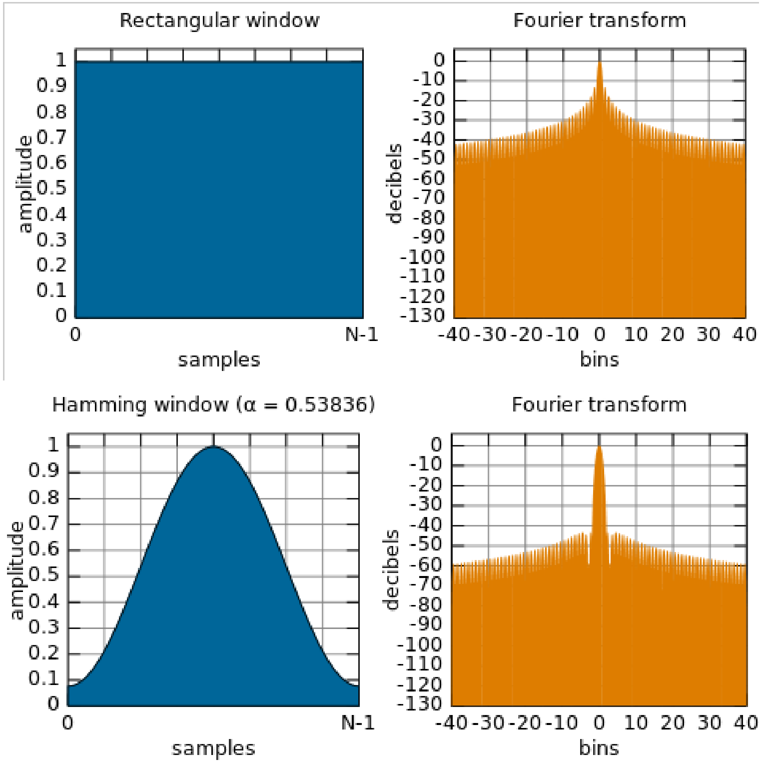
- Adott folytonos jel: $x(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
  - Mintavételezzük (x_{100}): $f_s = 1\mathrm{kHz}$, $N = 100$
  - DFT által „látott” jel: $x_{100}[n] = \left(x_\infty \cdot \mathrm{h}_{Rect}\right)\left[\mathrm{mod}_{100}(n)\right]$



Spektrumszivárgás kompenzálása

- Definiáljunk mi az ablakfüggvényt:
  - Nem lehet hosszabb, mint ahány mintát meg tudunk nézni, de legalább a mintavételek végi „töréspontokat” el tudjuk nyomni





2D DFT

Többi transzformáció esetén is hasonló a többdimenziós eset

- Analízis irány:

$$F_{u,v}=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}f[m,n]\exp\left\{-2\pi j\cdot\left(u\cdot m/M+v\cdot n/N\right)\right\}=$$

$$=\sum_{m=0}^{M-1}\left(\sum_{n=0}^{N-1}f[m,n]\cdot\exp\left\{-2\pi j\cdot\left(v\cdot n/N\right)\right\}\right)\exp\left\{-2\pi j\cdot\left(u\cdot m/M\right)\right\}$$

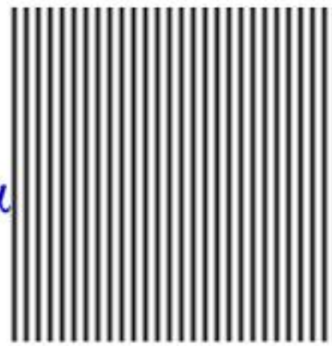
- Tulajdonságok:
  - Periodikus: [M,N] szerint
  - Valós jel esetén: $F_{u,v}=\overline{F_{-u,-v}}=\overline{F_{M-u,\mathrm{N}-v}}$
    - Ha M, N páros: $F_{M/2+u,N/2+v}=\overline{F_{M/2-u,N/2-v}}$

2D DFT

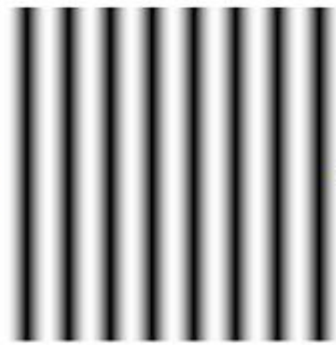
- Szintézis irány

$$f\left[m,n\right]=\frac{1}{M\cdot N}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F\left[\mathrm{u},\mathrm{v}\right]\exp\left\{2\pi j\cdot\left(u\cdot m/M+v\cdot n/N\right)\right\}$$

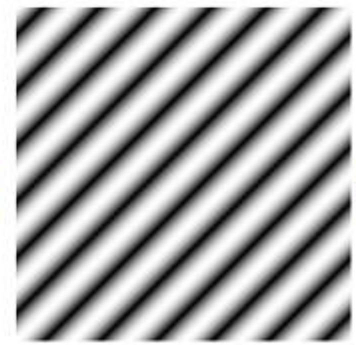
$=\alpha$



$+\beta$

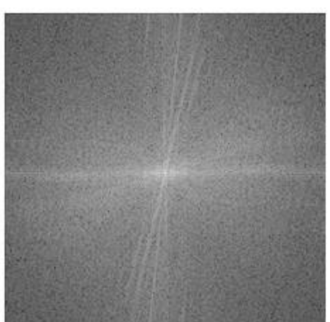


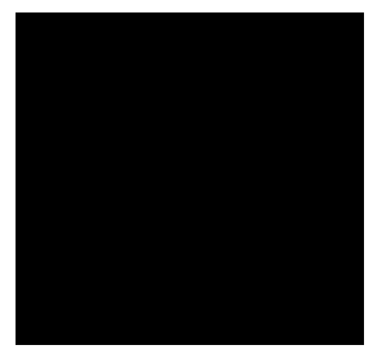
$+\gamma$



$+\ \ldots$

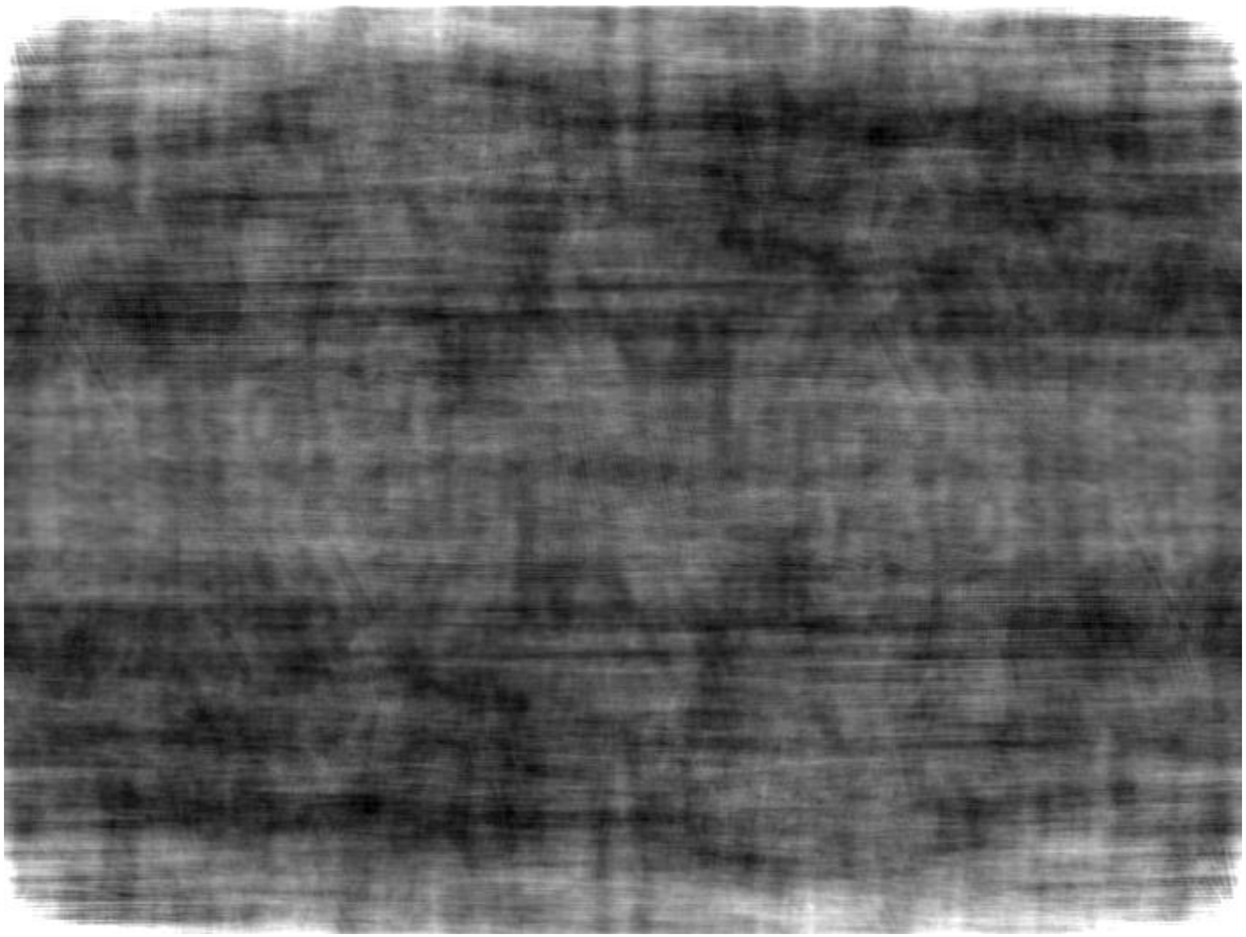
Spektrum amplitudója:





2D DFT példa – rekonstrukció spektrum amplitúdóból és fázisból

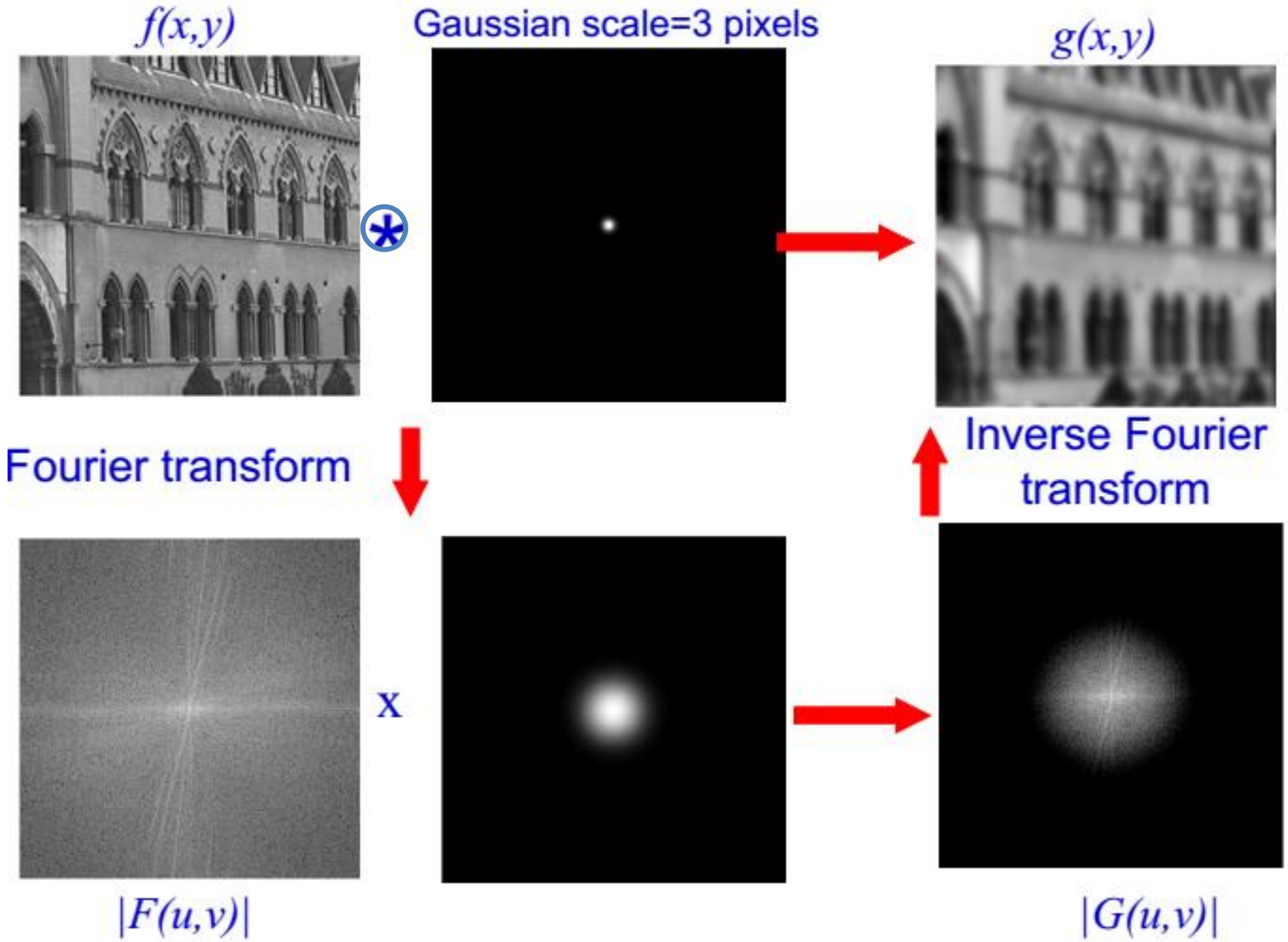
2D DFT példa – spektrum amplitúdójából rekonstruált kép



2D DFT példa – spektrum fázisából rekonstruált kép

2D LTI rendszer válasza

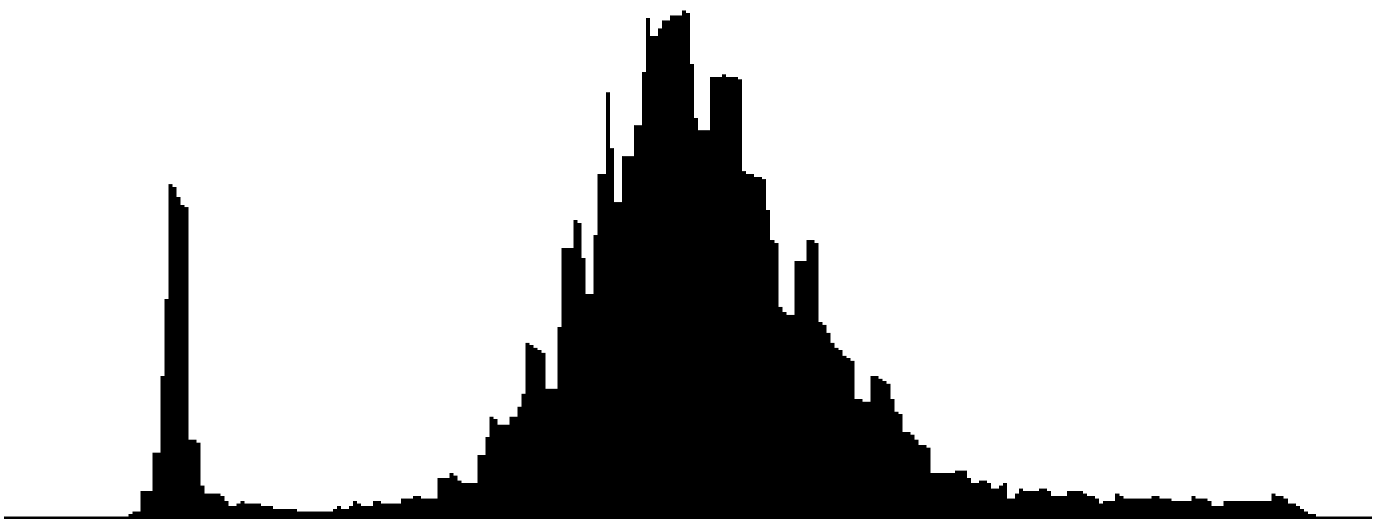
- Lineáris szűrések frekvenciatérben:



$\circledast$:cirkuláris konvolúció

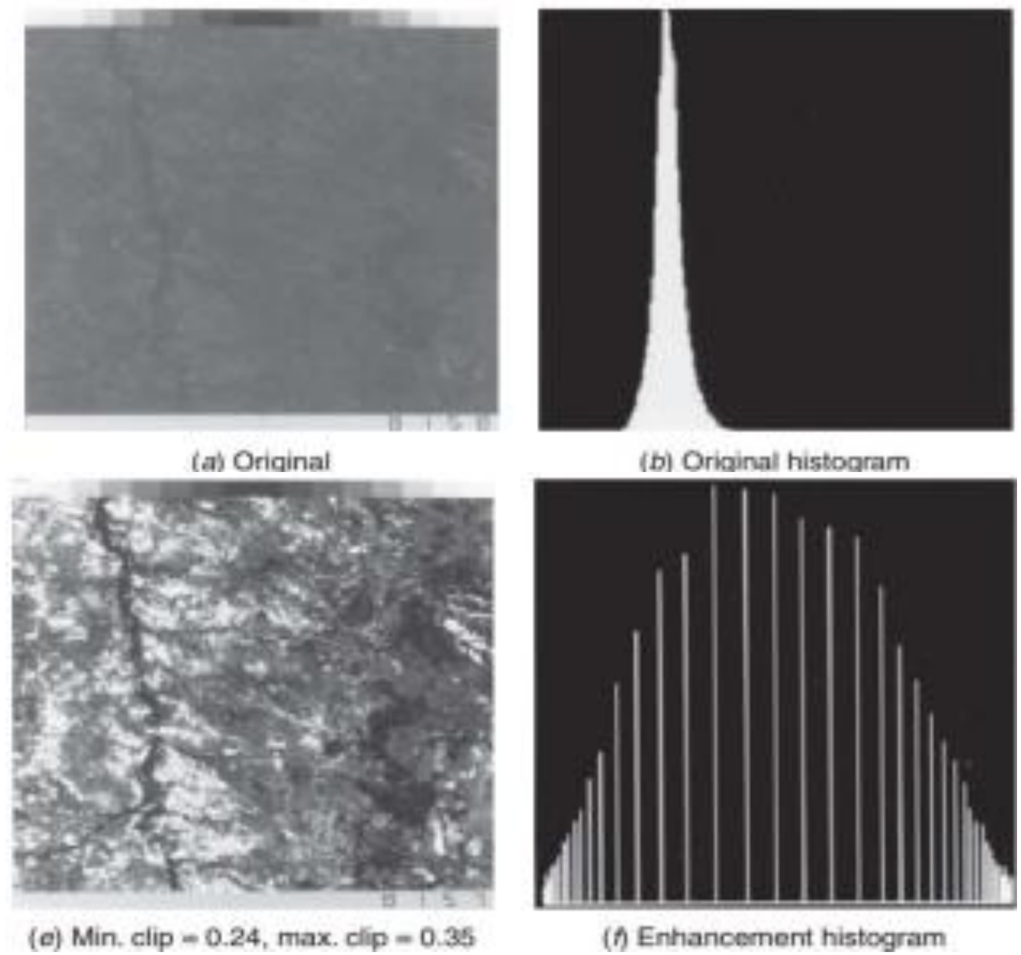
Hisztogram

- Kép pixelek intenzitásainak sűrűségfüggvénye:
  - Bináris esetben két Kronecker delta
  - Ablakozás: hisztogram közepének és szélességének állítása



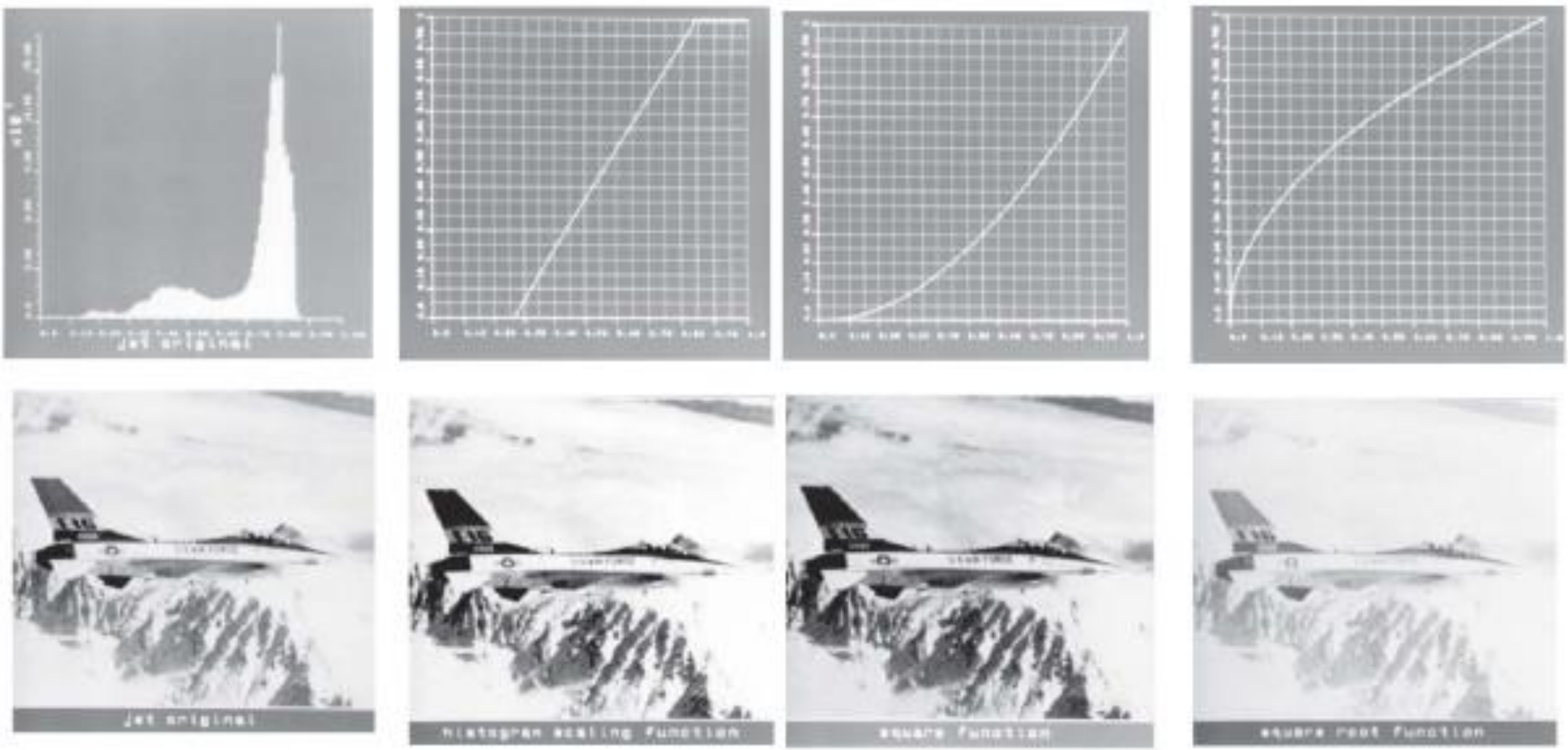
Hisztogram kiegyenlítése

- Cél a kontraszt (elkülönítendő objektumok intenzitásainak különbsége) növelése:



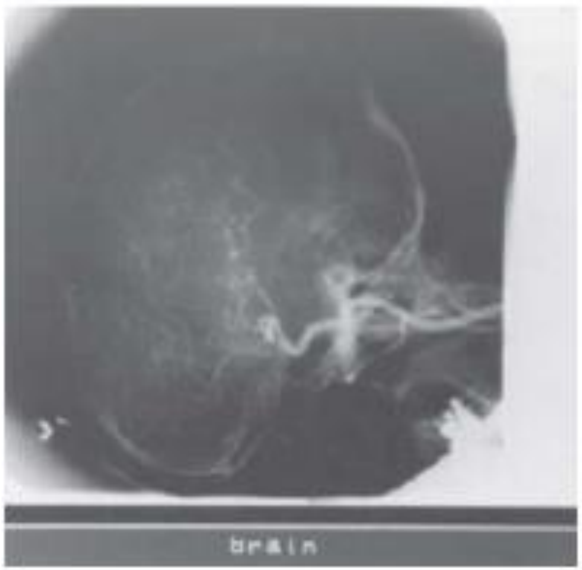
(a) Original
(b) Original histogram
(e) Min. clip = 0.24, max. clip = 0.35
(f) Enhancement histogram

Kontrasztjavítás – hisztogram globális módosítással



Adaptív kontrasztnövelés

- Nem mindig célszerű a kép minden területén u.a. leképezés szerint módosítani az intenzitásokat



eredeti

nemadaptív

adaptív

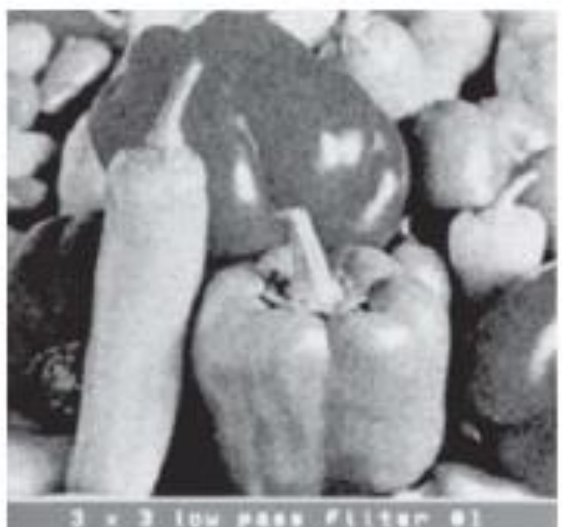
Szűrések

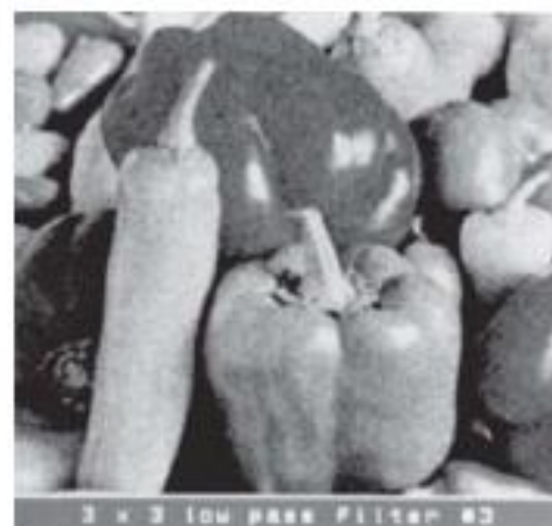
- Képet átküldjük egy rendszeren
  - Mely a kimeneti kép adott pixelét tipikusan a szomszédos pixelek értékei alapján módosítja
- Tipikus célok:
  - Zajszűrés a képek spektrumának egy bizonyos részének elnyomásával / intenzitások kicserélésével
  - Alakzatok / érdekesebb objektumok kiemelése
    - Élkiemelés
    - Illesztett szűrés

Zajszűrések – LTI rendszerrel

- Rendszerek súlyfüggvényét kernelnek hívjuk:
  - Kernellel tehát konvolváljuk a képet
  - Tipikusan uniform / Gauss kernel

$$\mathbf{H} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$





Zajszűrés – medián szűrés

- Szűrt kép adott képpontjának intenzitása a szomszédos képpontok intenzitásának mediánja
  - Impulzus zajt jobban kezeli, mint a lineáris szűrések
  - Általánosítás az orders of statistics szűrők:
    - Nem a medián, hanem sorrendezésben előre definiált helyű

Élkiemelés

- Cél a kép intenzitásainak gyors változásait kiemelni
- LTI rendszerrel:
  - Sobel / Prewitt kernelek alkalmazásával:
    - Képeket kvázi felül- áteresztik
  - Sokszor kombinálják simító szűrőkkel:
    - Cél a tipikusan magasfrekvenciás zaj csillapítása
    - Pl. Derivative of Gaussian, Laplacian of Gaussian
    - Lényegében egy sáváteresztő rendszer
- Nemlineáris rendszerekkel:
  - Hiszterézises küszöbölésű Canny, stb.

Klasszikus élkiemelő kernelek

Roberts

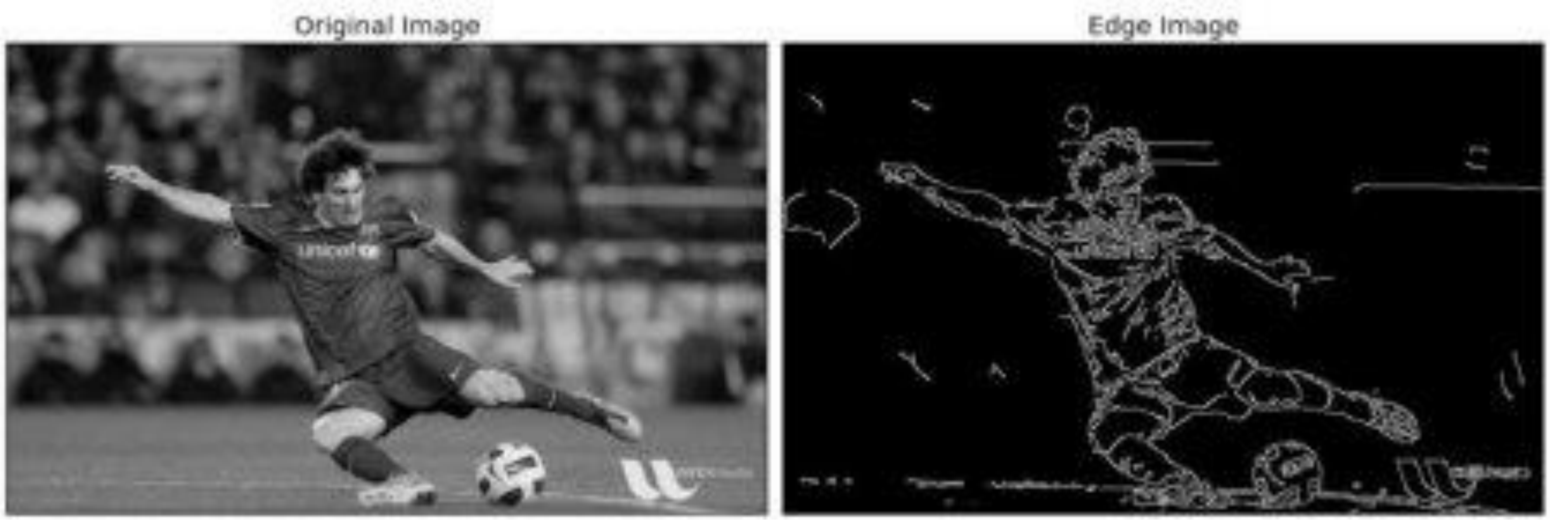
$$\begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sobel

$$\mathbf{G}_y = \begin{bmatrix} +1 & +2 & +1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} * \mathbf{A} \quad \text{and} \quad \mathbf{G}_x = \begin{bmatrix} +1 & 0 & -1 \\ +2 & 0 & -2 \\ +1 & 0 & -1 \end{bmatrix} * \mathbf{A}$$

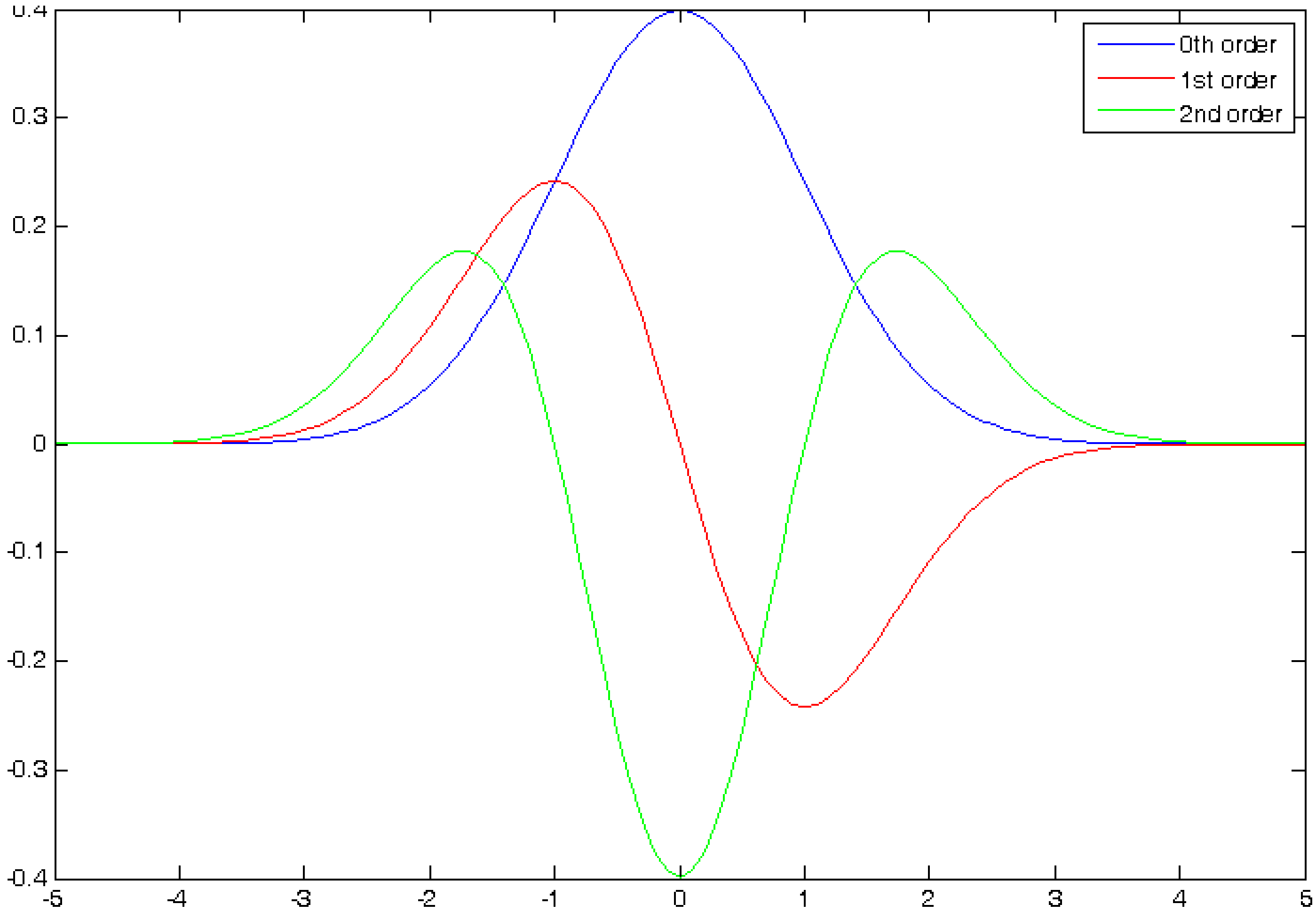
Prewitt

$$\mathbf{G_x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & +1 \end{bmatrix} * \mathbf{A} \quad \text{and} \quad \mathbf{G_y} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & +1 \end{bmatrix} * \mathbf{A}$$



Sáváteresztő jellegű élkiemelés

- Gauss derivált kernelek:



Kék: Gauss függvény

Piros: Derivative of Gaussian

Zöld: Laplacian of Gaussian

Sáváteresztő jellegű élkiemelés

- Laplacian of Gaussian példa:

Élkiemelő szűrések példák

(a) Simple Derivative – eq. (107)*ii*

(b) Sobel – eq. (110)

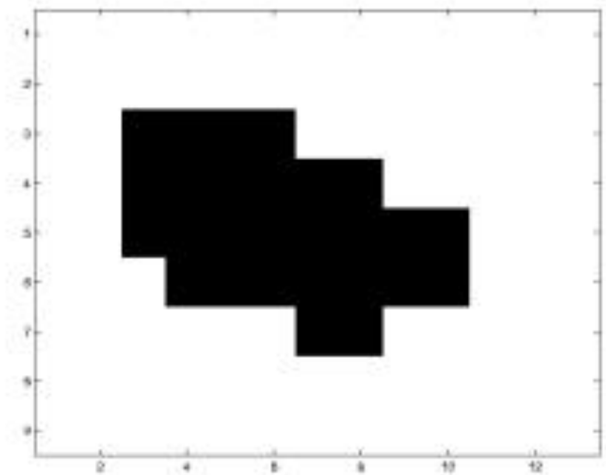
(c) Gaussian (σ=1.5) & eq. (107)*ii*

Illesztett szűrés

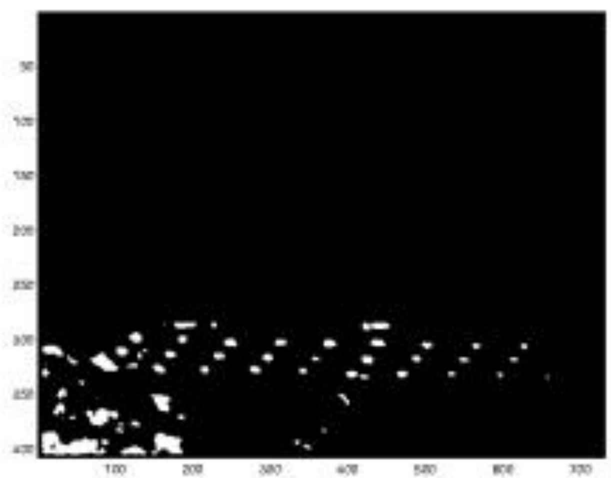
- Definiálunk egy templete-et:
  - Célunk ezt megtalálni a képen
  - Ennek vesszük a keresztkorrelációját a kép különböző részleteivel (csúszóablak szerűen végigtolva a képen)
  - Szűrt kép intenzitása azon régióban nagy, mely korrelált a sablonnal
- Sok esetben ez nem elég:
  - Különböző méretekben / orientációba fordulhat elő Ilyenkor „template bank”-ot alkalmazunk (tehát több sablonunk van, mindegyikre elvégezzük a szűrét), majd aggregáljuk a szűrések kimenetét

Illesztett szűrés példa

(a) Original Minefield IR Image.



(b) Target Template.



(c) Matched Filtered Image.