

A CMAC hálózat általánosítási hibája

Az elért eredmények bemutatását megelőzően röviden összefoglaljuk a CMAC hálózat felépítését és főbb sajátosságait.

A CMAC hálózat

A CMAC (Cerebellar Model Articulation Controller) hálózatot 1975-ben javasolta Albus [1]. A perceptronból származtatott hálózat kétlépéses leképezést valósít meg, így sok szempontból rokonítható az RBF hálózatokhoz. A hálózat itt is a bemenet valamilyen nemlineáris transzformációját valósítja meg, majd a transzformált értékek egy lineáris, ellenőrzött tanítású réteg bemenetére kerülnek.

A CMAC hálózat a bemenetet egy ún. asszociációs vektorra képezi le mégpedig úgy, hogy véges számú, diszkrét bemeneti értéket tételez fel, és minden lehetséges bemeneti értékhez egy egyértelmű asszociációs vektort rendel. Ez azt jelenti, hogy a CMAC hálózat kvantált bemenetekkel dolgozik. b -bités kvantálót feltételezve, egydimenziós bemenetnél $R=2^b$, N -dimenziós bemenetnél $R^N=2^{Nb}$ különböző bemeneti értékünk lehet.

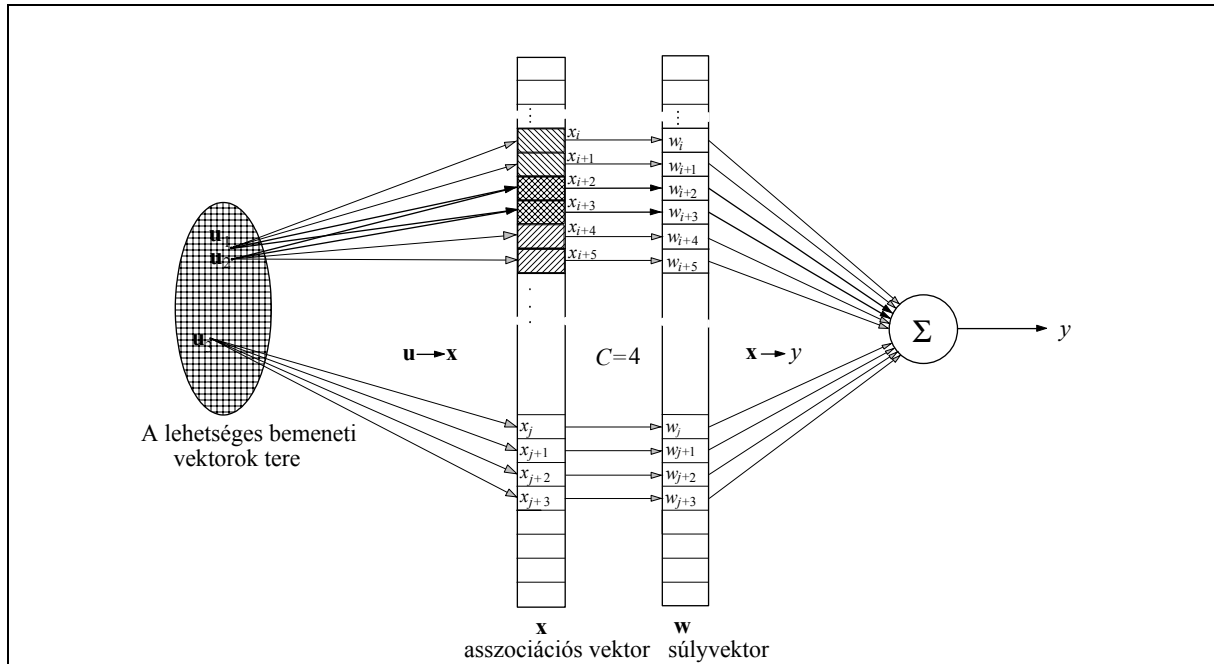
Az egyes bemeneti értékekhez rendelt asszociációs vektorok olyan sokbités bináris vektorok, amelyekben minden diszkrét bemeneti értékhez rögzített számú bit lesz aktív (1 értékű), míg a vektor összes többi bitje 0 értéket vesz fel. Az aktív bitek száma - amelyet a továbbiakban c -vel jelölünk - a hálózat fontos paramétere, befolyásolja a hálózat általánosítóképességét. Az asszociációs vektort úgy is elképzelhetjük, mint egy sokelemű neuronréteget, melynek neuronjai közül minden különböző diszkrét bemenetre pontosan c kerül gerjesztett állapotba, vagyis ad 1 értékű kimenetet. A gerjesztett neuronok célszerűen a rétegben egymás melletti helyeken találhatók és olyan módon kerülnek kiválasztásra, hogy az egymáshoz közeli bemeneti értékekre válaszul részben azonos neuronok aktivizálódjanak. Minél közelebbi értékek kerülnek a hálózatra, annál nagyobb lesz az átfedés az aktív neuronok, vagyis az asszociációs vektor aktív bitjei között. Szomszédos, tehát egymástól egy kvantumnyira lévő bemenetekhez a c aktív bitből $c-1$ lesz közös, míg a legalább c kvantum távolságban lévő bemenetekre adott asszociációs vektor válaszokban már nem találunk közös aktív biteket. Minthogy minden asszociációs bit több (pontosan c) lehetséges diszkrét bemeneti érték mellett lesz aktív, azt a bemeneti tartományt, amely mellett egy bit aktívvá válik az adott bithez tartozó érzékelő mezőnek (receptive field) nevezik.

Az asszociációs vektor a hálózat kimeneti rétegének bemenetül szolgál. A háló kimenete adott bemenethez a megfelelő asszociációs vektor és a súlyvektor skalár szorzataként áll elő:

$$y^{(l)} = \mathbf{w}^T \mathbf{a}^{(l)}$$

Mivel az asszociációs vektor bináris vektor, valójában szorzásra nincs szükség a kimenet meghatározásához, az asszociációs vektorban lévő aktív bitek c súlyértéket választanak ki a kimeneti réteg súlyai közül, majd a kimeneti összegző ezen súlyok összegeként állítja elő a hálózat bemenetre adott válaszát. Ha $c=1$, akkor minden diszkrét bemenethez csak 1 aktív bit tartozik az asszociációs vektorban, és a hálózat kimenete ezen bit által kiválasztott súly értéke lesz. Ha tehát az asszociációs vektor pontosan annyi bites, ahány különböző diszkrét bemeneti értékünk lehet, akkor egy egyszerű táblázattal állunk szemben. Ha a táblázat értékei - az egyes súlyok - a diszkrét bemenetekre adandó kívánt válaszok, akkor a hálózat minden diszkrét bemeneti értékre nyilvánvalóan a pontos kívánt választ fogja adni. A CMAC hálózat alapvető architektúráját és leképezéseit mutatja az 1 ábra.

A gyakorlatban c értékét egynél nagyobbra, de az asszociációs vektor hosszánál jóval kisebbre választjuk. A bemenetről az asszociációs vektorra való leképezés tulajdonképpen egy ritka bináris kód hozzárendelése a bemenethez, mivel az M -bités vektorban csupán $c \ll M$ aktív bit lesz.



1. ábra A CMAC hálózat leképezései

Az aktív cellák határozzák meg, hogy a kimeneti lineáris összegző rétegben mely súlyok összegeként áll elő a kimeneti érték. Az aktív asszociációs bitek elrendezése biztosítja a hálózat általánosítóképességet. Két bemeneti vektor, \mathbf{x}_1 és \mathbf{x}_2 hasonlóságát a hozzájuk tartozó \mathbf{a}_1 és \mathbf{a}_2 asszociációs vektorok metszete mutatja. Egymástól távol lévő bemeneti vektorok (\mathbf{x}_3 és \mathbf{x}_1 vagy \mathbf{x}_2) esetében nincsenek közös aktív asszociációs bitek (\mathbf{a}_3 és \mathbf{a}_1 vagy \mathbf{a}_2). A jobb áttekinthetőség kedvéért az ábrán csak az aktív biteket és az általuk kiválasztott súlyokat jelöltük. Természetesen nem szükséges - és többdimenziós bemenet esetén nem is lehetséges -, hogy minden bemeneti értékhez az asszociációs vektor szomszédos c bite legyen aktív. A bemenetről az asszociációs vektorokra való leképezésnél mindössze azt kell biztosítani, hogy minél közelebb van egymáshoz két bemeneti vektor, annál nagyobb átfedés legyen az asszociációs vektorok között, vagyis az asszociációs vektorok Hamming távolsága annál kisebb legyen.

A kimeneti érték meghatározásához tulajdonképpen az aktív cellák indexeit kell ismerni, mivel ezek fogják kijelölni azokat a memóriarekeszeket, ahol az adott bemenethez tartozó kimenetet meghatározó súlyok találhatóak.

Többdimenziós bemeneti jelnél az asszociációs vektor nagyon sok bites is lehet, hiszen ha az N dimenziós bemeneti mintatérben minden komponens R értéket vehet fel, a bemeneti mintatérben R^N különböző mintapont lehetséges. Pl. egy 10 dimenziós feladatnál, ahol minden komponens 10 bitre kvantálunk, a lehetséges diszkrét bemeneti vektorok és így az asszociációs cellák száma már megvalósíthatatlanul nagy: 2^{100} . Eddigi formájában a CMAC hálózat súlyait tároló memória tehát csak meglehetősen kis bemeneti dimenzió és felbontás mellett lesz realizálható méretű. A jelen vizsgálatban csak az egydimenziós esettel foglalkozunk, ezért a többdimenziós CMAC sajátosságait nem mutatjuk be. Egydimenziós esetben az asszociációs vektor hossza, vagyis a súlyvektor mérete:

$$M = R + c - 1,$$

A kedvező tulajdonságok ellenére a hálózat képességeit illetően számos megválaszolatlan kérdés van. A háló modellező képességére vonatkozó eredmények hiányosak, pontatlanok, számos egymásnak ellentmondó publikáció látott napvilágot pl. [2], [3], [4]. Az OTKA

pályázat keretében ezért célul tűztük ki a CMAC háló modellező képességének, általánosítási hibájának pontosabb meghatározását.

A bináris CMAC háló modellező képessége

A háló modellező képessége eltérő egydimenziós és többdimenziós bemenet esetén [5]. Egydimenziós esetben a háló bármilyen tanítópont-készlet hibátlan megtanulására képes (ebben az értelemben a CMAC univerzális approximátor, sőt a kívánt leképezést a tanítópontokban nemcsak közelíti, hanem pontosan meg is valósítja), többdimenziós esetben azonban csak az additív függvényosztályba tartozó nemlineáris leképezéseket tudja hibátlanul megtanulni [5]. A háló általánosító-képességét, vagyis a tanítópontok közötti tesztelőpontokban adott választát illetően azonban még egydimenziós esetben is jelentős lehet az approximáció hibája.

A kutatás során megvizsgáltuk egydimenziós bemenet mellett az általánosítási hiba okait, megállapítottuk, hogy milyen kapcsolat van az általánosítási hiba, a tanítópontok elhelyezkedése és a hálózat fő paramétere (c) között. Adott feltételek mellett analitikus összefüggéseket állítottunk fel az általánosítási hibára és olyan módosított tanulási eljárást javasoltunk, mely az általánosítási hibát jelentősen csökkenti.

Az általánosítási hiba analitikus meghatározása

A megtanított háló válasza adott x bemenetre:

$$y = \mathbf{a}^T \mathbf{w}^*, \quad (1)$$

ahol \mathbf{a} az x bemenetnek megfelelő asszociációs vektor, \mathbf{w}^* pedig a tanítás eredményeképpen kapott súlyvektor: $\mathbf{w}^* = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y}_d$, amennyiben \mathbf{A}^{-1} létezik.

Itt \mathbf{A}^{-1} a tanítópontokhoz tartozó asszociációs vektorokból képezett

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \leftarrow & \mathbf{a}^{(1)T} & \rightarrow \\ \leftarrow & \mathbf{a}^{(2)T} & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & \mathbf{a}^{(L)T} & \rightarrow \end{bmatrix} \quad (2)$$

mátrix inverze, $\mathbf{w}^T = [w^{(1)} w^{(2)} \dots w^{(M)}]$ a hálózat súlyvektora, $\mathbf{x}^T = [x^{(1)} x^{(2)} \dots x^{(L)}]$ az $\{x^{(l)}, y_d^{(l)}\}_{l=1}^L$ tanítópontok bemeneteiből, $\mathbf{y}_d^T = [y_d^{(1)} y_d^{(2)} \dots y_d^{(L)}]$ a megfelelő kívánt kimenetekből képezett L elemű vektor,

Minthogy \mathbf{A} nem kvadratikusan mátrix a súlyvektor meghatározásához \mathbf{A} pszeudoinverzét kell meghatározni.

A pszeudoinverz meghatározása

A pszeudoinverz [5] szerint

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}, \quad (3)$$

amennyiben az $L \times L$ méretű $(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}$ létezik.

A megtanított háló válasza az összes lehetséges bemenetre felírható:

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{w}^*, \quad (4)$$

vagyis

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{y}_d \quad (5)$$

ahol \mathbf{T} az összes lehetséges asszociációs vektorból képezett asszociációs mátrix:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

A tanítópontoknak megfelelő súlyvektor az LMS algoritmussal iteratív tanulással, vagy közvetlenül a Wiener-Hopf egyenlet megoldásával, az inverz mátrix numerikus meghatározásával kapható meg. A háló válaszanak és általánosítási hibájának analitikus meghatározásához a mátrix pszeudoinverzének analitikus meghatározása szükséges.

Jelenleg általános esetben nincs ismert eljárás a pszeudoinverz analitikus meghatározására. Néhány speciális esetben sikerült analitikus eredményt elérni, így ezen speciális esetekben a háló válasza analitikusan is meghatározható, és így ismert approximálandó függvény esetén analitikus összefüggés adható az általánosítási hibára is. Az általános esetre a speciális esetekből vonható le minőségi következtetés.

A pszeudoinverz számításához $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ inverzét kell felírnunk. $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ abban az esetben, ha a tanítópontok egymástól egyenletes d távolságban helyezkednek el (a tanítópontokat egyenletes mintavételezéssel nyertük, és a mintavételi távolság d) olyan Toeplitz mátrix, melynek a főátlójában lévő elemek értéke c , a háló általánosító paramétere, a mellékátlókban lévő elemek értéke pedig rendre $c-d$, $c-2d$, ..., $c-zd$, ahol $z = \left\lfloor \frac{c}{d} \right\rfloor$.

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} c & c-d & c-2d & \dots & c-zd & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c-d & c & c-d & c-2d & \dots & c-zd & 0 & \dots & 0 \\ c-2d & c-d & c & c-d & c-2d & \dots & c-zd & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & c-zd & \dots & c-2d & c-d & c \end{bmatrix} \quad (7)$$

Analitikus eredmény eléréséhez további megkötéseket kell tenni. Ugyanis jelenleg még a Toeplitz mátrixok inverzének analitikus meghatározására sem ismert általános eljárás. Speciális Toeplitz mátrix esetében viszont az inverz analitikusan meghatározható. Ilyen speciális eset, ha $z=1$, vagyis ha a mátrix kontinuáns (tridiagonális) Toeplitz mátrix (szimmetrikus egyenletes kontinuáns mátrix). Ekkor a mátrix inverze [6] alapján határozható meg. A Toeplitz mátrix inverze analitikusan meghatározható akkor is, ha

$$a_{ij} \begin{cases} \neq 0, & \text{ha } |i-j| \leq 2 \\ = 0, & \text{ha } |i-j| > 2 \end{cases}, \quad (8)$$

vagyis ha a mátrixnak 5 nemzérus átlója van [7] (a főátló és a mellette lévő 2-2 mellékátló nemzérus), azonban az analitikus összefüggések bonyolultsága miatt ezzel az esettel nem foglalkoztunk.

Bevezetve a $\mathbf{B} = (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}$ jelölést, \mathbf{B} szintén Toeplitz mátrix lesz. Ha a mátrix mérete kellően nagy, és a szélhatásoktól eltekintünk, \mathbf{B} mátrix főátlóbeli elemtől l távolságra lévő $i, i+l$ - edik ($l = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm L/2$) eleme az alábbi formában írható fel:

$$\mathbf{B}_{i,i+l} = (-1)^{|l|} \frac{1}{r} \left(\frac{c-r}{2b} \right)^{|l|}, \quad (9)$$

ahol $r = \sqrt{c^2 - 4b^2}$ és $b = c - d$.

A megtanított háló válaszáinak analitikus meghatározása

Mivel \mathbf{B} Toeplitz mátrix, a tanítópontokbeli kívánt válaszoknak az inverz mátrixszal való szorzása

$$\mathbf{v} = \mathbf{B}\mathbf{y}_d = (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{y}_d \quad (10)$$

- amennyiben a szélhatásoktól eltekintünk - egy olyan FIR szűrésnek felel meg (ld. a 2 ábrát), ahol a szűrő diszkrét súlyfüggvénye a \mathbf{B} mátrix egy sorának elemeiből áll:

$$v_j = \mathbf{b}_j^T \mathbf{y}_d. \quad (11)$$

Az inverz mátrix ismeretében felírható a megtanított CMAC háló összes lehetséges bemeneti értékre adott válasza.

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{A}^T \mathbf{B}\mathbf{y}_d = \mathbf{T}\mathbf{A}^T \mathbf{v} \quad (12)$$

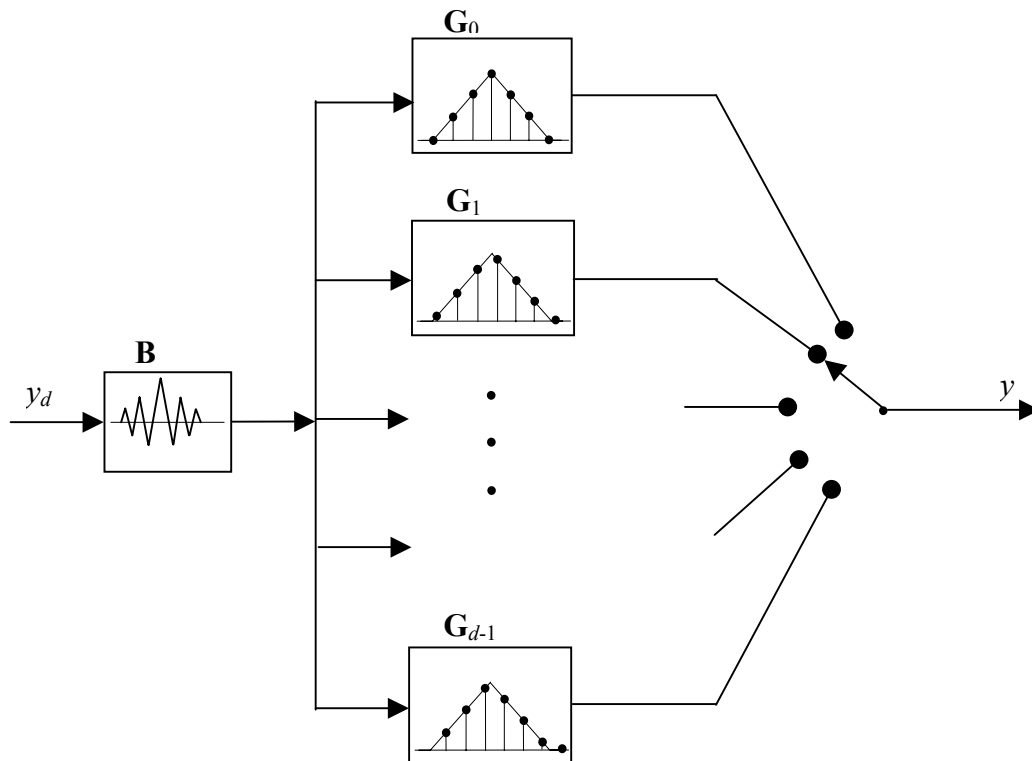
Ehhez még $\mathbf{T}\mathbf{A}^T$ felírására van szükség. Mivel \mathbf{A} a \mathbf{T} mátrix minden d -edik sorából áll, pl. $c=8$ és $d=5$ mellett:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 11111111000000000000 \dots 0 \\ 0000011111111100000000 \dots 0 \\ 000000000001111111100 \dots 0 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ 000000000000 \dots 0111111111 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{TA}^T = \begin{bmatrix} c & c-d & . & 0 & 0 \\ c-1 & c-d+1 & . & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c-d & c & 1 & 1 & 0 \\ c-d-1 & c-1 & \dots & 2 & \dots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & d+2 & c-1 & d-1 & 0 \\ 1 & d+1 & c & d & 0 \\ 0 & d & \dots & c-1 & \dots & d+1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2 & i & c-1 & c-d-1 \\ 0 & 1 & i-1 & c & c-d \\ 0 & 0 & i-2 & c-1 & c-d+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & c-d & c \end{bmatrix}. \quad (14)$$

A mátrix oszlopvektorai (a szélhatásoktól eltekintve) $2c-1$ tartójú diszkrét háromszögfüggvényekből állnak, ahol az egymást követő oszlopok d hellyel vannak eltolva. A \mathbf{v} vektor \mathbf{TA}^T mátrixszal való szorzása ennek megfelelően egy szűrőbankkal való szűrésnek felel meg (3. ábra), ahol az egyes szűrők súlyfüggvényei a $2c-1$ tartójú háromszögfüggvény d pontonkénti, de eltolt fázishelyzetű mintavételezésével állnak elő. A mátrix $j+kd$ -edik ($k = 0, 1, 2, \dots$) soraiból felépített mátrix, \mathbf{G}_j , a j -edik szűrőt valósítja meg. Amennyiben $j=0$, a szűrő kimenete a tanítópontokban adja meg a választ. Ez a szűrő a \mathbf{B} mátrix által megvalósított szűrés inverze, ugyanis \mathbf{G}_0 sorai a \mathbf{TA}^T kd -edik soraiból állnak, $k = 0, 1, 2, \dots$, vagyis $\mathbf{G}_0 = \mathbf{AA}^T = \mathbf{B}^{-1}$. Ez nyilvánvaló, hiszen a tanítópontokban a CMAC hibátlanul visszaadja a kívánt válaszokat. Ha $j \neq 0$ a megfelelő \mathbf{G}_j mátrixok egy-egy interpolációs szűrőt képviselnek.

A háló általánosítási hibája legegyszerűbb esetben konstans függvény tanításánál vizsgálható. Képezzük a tanítópontok sorozatát egy konstans függvény d távolságra lévő mintavételi pontjaiból, vagyis a tanítópontokban a kívánt válasz értéke legyen D , az összes tanítópontozhoz rendelt kívánt válaszok vektora $\mathbf{y}_d^T = [D \ D \ D \ \dots \ D]$. A tanítópontok közötti választ az interpolációs modell adja meg, illetve az (5) összefüggés szerint határozhatjuk meg.



3. ábra A CMAC interpolációs modellje

Konstans jelnél azonban egyszerűbben is eljuthatunk az eredményhöz. Közvetlenül meghatározhatók a hálózat súlyai a

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{y}_d \quad (15)$$

összefüggés alapján, ugyanis az egyes súlyok a pszeudo inverz mátrix megfelelő soraiban az elemek összegeként (az összeg D -szereseként) adódnak. \mathbf{A}^\dagger sorai a \mathbf{B} mátrix soraiból épülnek fel az alábbiak szerint:

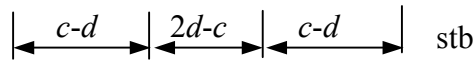
$$\mathbf{A}^\dagger = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0^T + \mathbf{b}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{b}_0^T + \mathbf{b}_1^T \\ \dots\dots\dots \\ \mathbf{b}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{b}_1^T \\ \dots\dots\dots \\ \mathbf{b}_1^T + \mathbf{b}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{b}_1^T + \mathbf{b}_2^T \\ \dots\dots\dots \\ \mathbf{b}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{b}_2^T \\ \dots\dots\dots \\ \vdots \\ \dots\dots\dots \\ \mathbf{b}_{L-1}^T + \mathbf{b}_L^T \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{L-1}^T + \mathbf{b}_L^T \end{bmatrix} \begin{matrix} c-d \text{ sor} \\ \\ \\ \\ 2d-c \text{ sor} \\ \\ \\ \\ c-d \text{ sor} \\ \\ \\ \\ 2d-c \text{ sor} \\ \\ \\ \\ \text{stb} \\ \\ \\ c-d \text{ sor} \end{matrix} \tag{16}$$

ahol \mathbf{b}_i^T a \mathbf{B} mátrix i -edik sora. Mivel a szélhatástól eltekintve \mathbf{B} minden sora ugyanazon elemekből épül fel, \mathbf{B} minden sorában az elemek összege azonos, S .

$$S = D \frac{2b - c + r}{r(2b + c - r)} \tag{17}$$

A súlyvektor felépítése ennek megfelelően konstans függvény esetén

$$\mathbf{w}^* = [2S \dots 2S : S \dots S : 2S \dots 2S : \dots]^T \tag{18}$$



A háló válasza az egyes bemenetekre a megfelelő pozíciójú c súly összege. Így annak ellenére, hogy konstans függvényt tanult meg a hálózat a súlyok nem lesznek azonos értékűek. Attól függően tehát, hogy mely bemenetekre kívánjuk a háló válaszát meghatározni a kimenet eltérő számú $2S$ és S értékű súly összegeként áll elő.

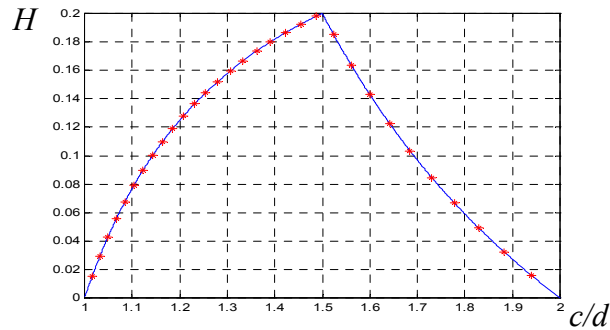
A tanítópontokban $2(c-d)$ $2S$ értékű és $2d-c$ S értékű súly összege a háló kimenete, két szomszédos tanítópont között viszont $2(c-d)-m$ $2S$ értékű és $2d-c+m$ S értékű súly összege adja a kimenetet, ahol $m = \min(c-d, 2d-c)$. A kettő különbsége a maximális általánosítási hiba konstans kívánt leképezés esetén:

$$H = mS = \min[(c-d), (2d-c)]S = \min[(c-d), (2d-c)] \frac{1}{r} \left(1 + 2 \frac{r-c}{2b+c-r} \right) D \tag{19}$$

$$m = \begin{cases} 2d - c & \text{ha } 1 < \frac{c}{d} \leq 1,5 \\ c - d & \text{ha } 1,5 \leq \frac{c}{d} < 2 \end{cases} \quad (20)$$

A hiba csak a c/d aránytól és a konstans jelszinttől (D) függ.

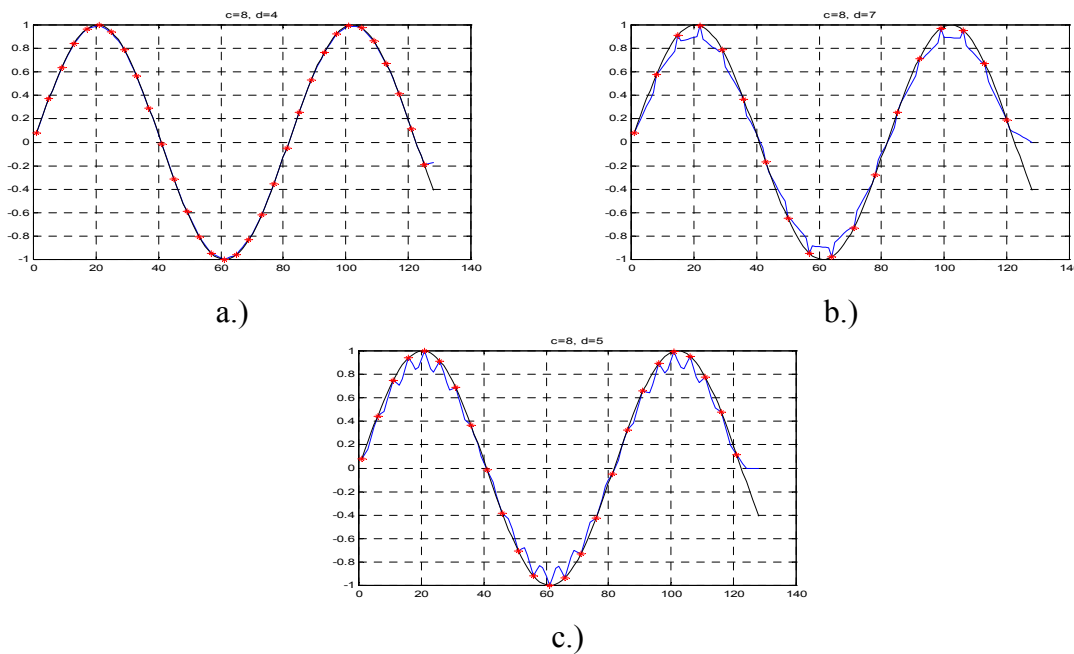
A hiba alakulását a c/d arány függvényében mutatja a 4. ábra.



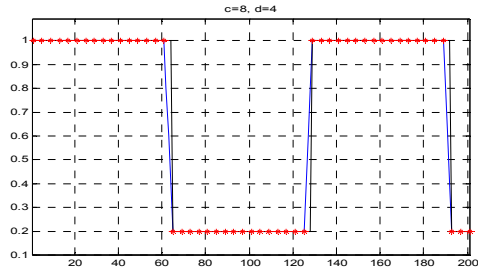
4. ábra Az általánosítási hiba alakulása a c/d arány függvényében konstans függvény, $f(x) \equiv 1$ esetében

A hiba maximális értéket ($-0,2 D$) a $c/d = 1,5$ értéknél (illetve az ezt biztosító legközelebbi egész c és d értékeknél) veszi fel.

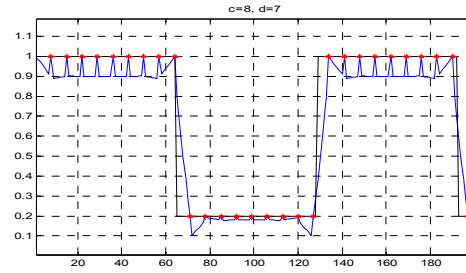
Az alábbi ábrák az egydimenziós bináris CMAC hálózat általánosító képességét illusztrálják különböző hálózat paraméter értékek mellett.



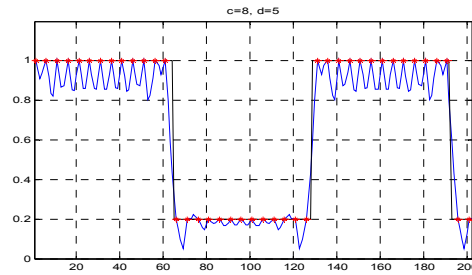
5. ábra Szinuszos jellel tanított háló válasza $c=8$ és a.) $d=4$, b.) $d=7$, c.) $d=5$ mellett



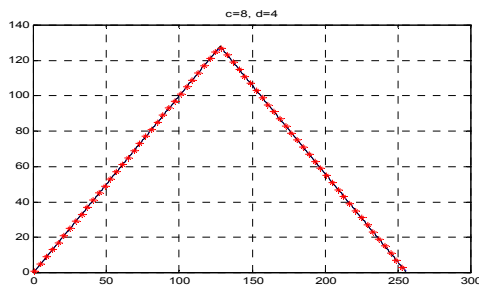
a.)



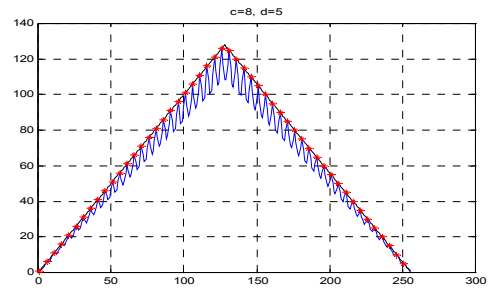
b.)



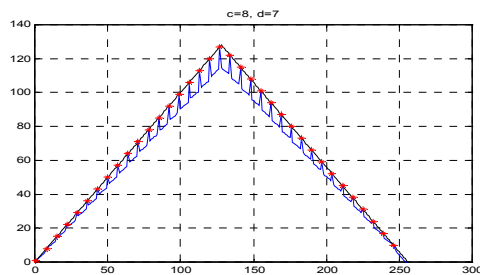
c.)

6. ábra Négyzögjellel tanított háló válasza $c=8$ és a.) $d=4$, b.) $d=7$, c.) $d=5$ mellett

a.)

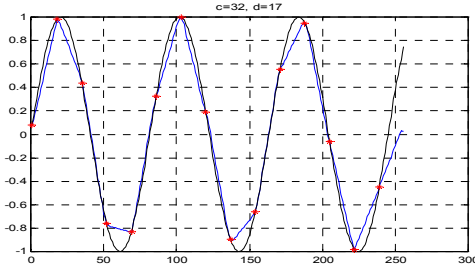


b.)

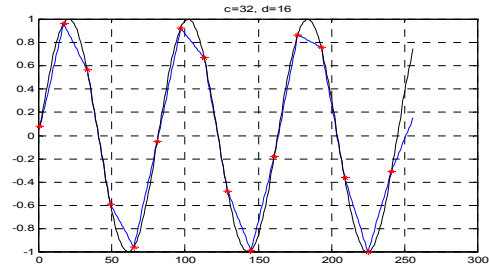


c.)

7. ábra Háromszögjellel tanított háló válasza $c=8$ és a.) $d=4$, b.) $d=7$, c.) $d=5$ mellett



a.)



b.)

8. ábra Szinuszos jellel tanított háló válasza $c=32$ és a.) $d=17$, b.) $d=16$ mellett

Az eredmények általánosítása

Bár analitikus eredményt a fenténél általánosabb esetre a megfelelő Toeplitz mátrix inverzének analitikus meghatározásánál fellépő nehézségek miatt nem sikerült elérni, egyszerű geometriai értelmezés alapján a fenti eredmények általánosíthatók mindazon esetekre, amikor a tanítópontok egyenletes elhelyezkedésűek. A 3. ábrán bemutatott interpolációs modell akkor is érvényes, csupán a szűrő együtthatók (súlyfüggvény) meghatározására nincs közvetlen c/d függvényében kifejezhető analitikus összefüggés. A maximális általánosítási hiba konstans kívánt leképezés esetén:

$$H = S \{ (B_N K_N + B_K K_K) - [(B_N - m) K_N + (B_N + m) K_K] \} = S m (K_N - K_K) \quad (21)$$

ahol

$$m = \min(c_{MOD d}, kd_{MOD c}) \quad (22)$$

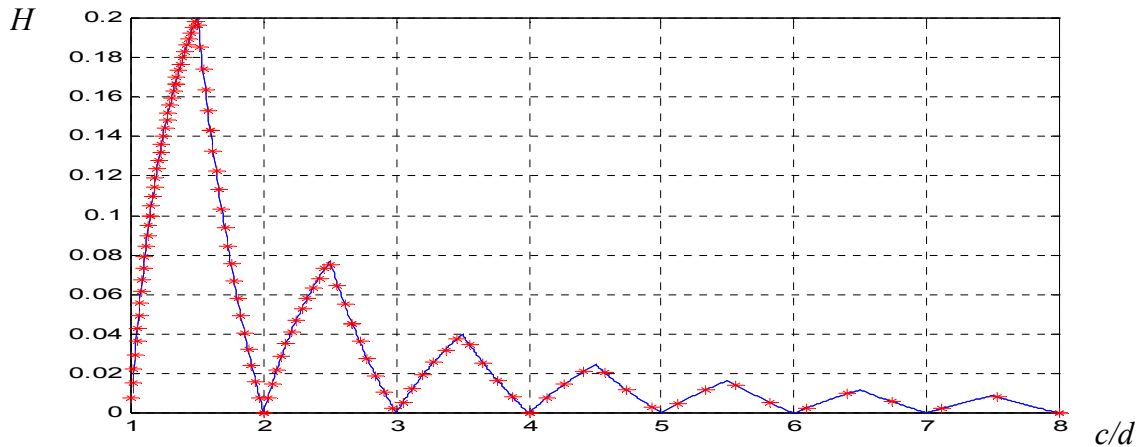
$$S = \frac{D}{K_K B_K + K_N B_N} \quad (23)$$

$$B_N = \left(\left\lfloor \frac{c}{d} \right\rfloor + 1 \right) c_{MOD d}, \quad B_K = c - B_N \quad (24)$$

és

$$K_N = \left\lfloor \frac{c}{d} \right\rfloor + 1, \quad K_K = \left\lfloor \frac{c}{d} \right\rfloor = K_N - 1. \quad (25)$$

($\lfloor \cdot \rfloor$ az egész részt jelöli) A maximális általánosítási hiba konstans leképezés esetén ennek megfelelően meghatározható bármely c/d arány mellett (9. ábra). Jól látható hogy a $1 < c/d < 2$ tartományban a kapott eredmény megegyezik a 4. ábrán látható hiba függvényével.



9. ábra Az általánosítási hiba alakulása a c/d arány függvényében konstans függvény, $f(x) \equiv 1$ esetében

A speciális esetekre meghatározott eredmények közelítőleg érvényesek általános örülmények között is. Amennyiben a háló által megtanulandó leképezés elegendően sima, az általánosítási hiba adott bemenetnél közel arányos a megfelelő függvényértékkel.

További következtetések vonhatók le, ha a tanító pontok elhelyezkedése nem egyenletes. A vizsgálatokból megállapítható, hogy kis általánosítási hibájú háló akkor nyerhető, ha a háló általánosítási paraméterének és a mintapontok elhelyezkedését jellemző tanítópont-távolságoknak a viszonyára bizonyos megkötéseket betartunk.

Optimális eredményt (a tanítópontokban hibátlan választ, a közbenső pontokban a tanítópontok közötti lineáris interpolációt) kapunk, ha $c=kd$, ahol $k > 0$ egész szám. Minél nagyobb k értéke, annál nagyobb a simító hatás, azonban ugrás alakú jeleknél annál nagyobb tartományra terjed ki az ugrásnál bekövetkező tanzien. Amennyiben az előbbi feltétel nem tartható be, törekedni kell, hogy a c/d arány minél közelebb legyen az egészhez. Nem egyenletesen elhelyezkedő tanítópontok esetén c értékét a tanítópontok átlagos távolságára, illetve e távolság egész számú többszörösére célszerű megválasztani.

A fenti eredmények további általánosítása, amennyiben a tanítópontok nem periódikus elhelyezkedésűek. Bár erre az esetre analitikus eredmény nem adható a geometriai megfontolásokból ara lehet következtetni, hogy közel egyenletes mintavételi távolság esetén, ami a tanító pontok elhelyezkedésére amúgy is általános követelmény a hiba egy legrosszabb esetben fenálló hibával közelíthető. A legrosszabb eset közel egyenletes tanítópont elhelyezkedés mellett akkor következik be, ha az egymást követő pontok távolsága $c/2+1$ illevec $c-1$.

Többdimenziós eset. Bár a CMAC viselkedése egy- és többdimenziós esetben jelentősen különbözik, bizonyos általános megállapítások (pl. a c/d arányra vonatkozó megállapítások) közelítőleg többdimenziós esetre is érvényesek.

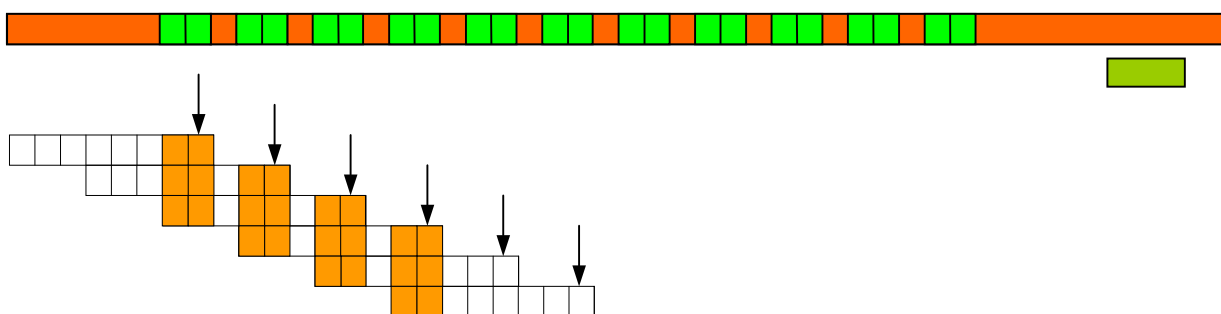
Az általánosítási hiba jelentős csökkentése a megfelelő c érték illetve c/d arány megválasztásán túl - ami nem minden esetben lehetséges - egy regularizációs tag bevezetésével, a tanító eljárás módosításával lehetséges.

Az eredmények származtatása egyszerű geometriai megfontolások alapján.

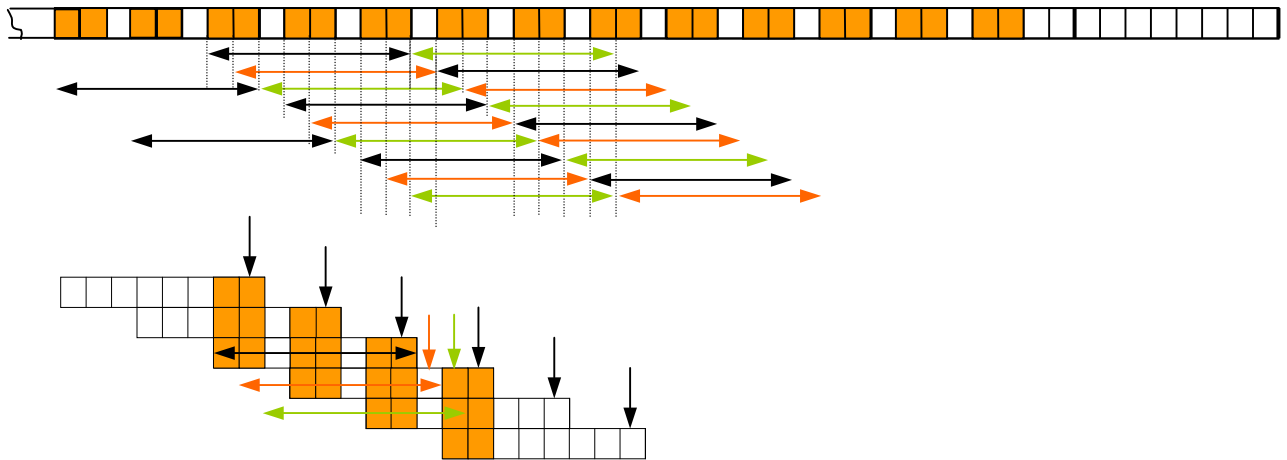
A bináris CMAC minden lehetséges diszkrét bemenetre egy egyedi asszociációs vektorral válaszol, melyben c „1” értékű bit található. A diszkrét bemenetk és az asszociációs vektorok között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van, azonban olyan módon, hogy a szomszédos bemenetekhez tartozó asszociációs vektorok aktív bitjei közötti átlapolódás annál nagyobb, minél közelebbiek a bemenetek. A szomszédos kódolás feltételét betartó bármilyen bitelrendezés alkalmazható, ezek mind egyenértékűek, ezért az egyszerű áttekinthetőség kedvéért a T mátrixnál alkalmazott kódolást használjuk.

Ennél a kódolásnál minden bemenethez olyan bináris asszociációs vektort rendelünk, melynek szomszédos c bitje aktív, a szomszédos diszkrét bemenetekhez pedig eggyel eltolt aktív bitsoport tartozik. Az alábbi ábra egyenletes d mintavételi távolságra elhelyezett bemenetekhez rendelt aktív bitsoportokat mutatja.

A nyilak a tanítópontok pozícióját és hozzájuk kapcsolódóan az asszociációs vektorok aktivizált bitjeit jelölik. Minden tanítópontoz c (jelen esetben 8) aktív asszociációs bit tartozik, melyek a tanítópontok d eltolásának megfelelően szintén d pozícióval vannak egymáshoz képest eltolva. Mivel $d < c$, a szomszédos tanítópontok által kiválasztott aktív bitek között lesz átfedés. Két szomszédos tanítópontnál az átfedés mértéke $c-d$. Ha a $2d < c$ feltétel is teljesül a bitek között lesznek olyanok is, melyeket 3 szomszédos tanítópont mindegyike aktivizál, vagyis mely bitek által kiválasztott súlyokat háromszor módosítunk egy tanítási ciklus alatt. Az előbbi biteket (súlyokat, bázisfüggvényeket) 2 tanítópont, az utóbbiakat 3 tanítópont aktivizál, tehát az előbbi súlyokat kétszer, az utóbbiakat háromszor módosítjuk egy tanítási ciklus alatt. **A súlymódosítási minta** a periódikus tanítópont elrendezés miatt szabályosan ismétlődik. A felső ábra zöld bitjei 3-szor, sárga bitjei kétszer kerülnek módosításra minden tanítási ciklus alatt.



Amennyiben $z = \left\lfloor \frac{c}{d} \right\rfloor$



Az ábrán az is követhető, hogy a tanítópontok közötti bemenetek mely biteket választják ki, vagyis mely súlyok vesznek részt a háló válaszának előállításában.

A tanítópontoknál (fekete nyilak) maximális számú (B_N) N_N -szer módosított súly kerül kiválasztásra, míg a tanítópontok között a maximális számban módosított súlyok száma csökken a minimális számban módosított súlyok számának növekedése mellett. A kiválasztott súlyok összege tehát megváltozik, vagyis a háló válasza a tanítópontok között el fog térni a tanítópontokba adott váasztól.

Kétféle megközelítés: az elsőben megnézzük, hogy adott tanítópont mely bázisfüggvényeket aktivizálja, a másodikban, hogy egy bázisfüggvényt mely tanítópontok aktivizálnak)és ebből kijön az is, hogy egy adott bázisfüggvényt hány tanítópont aktivizál)

i -edik bemenet (tanítópont) által aktivizált bázisfüggvények $i, i-1, \dots, i-c+1$

$i+1$ -edik bemenet által aktivizált bázisfüggvények $i+1, i, \dots, i-c+2$

$i+2$ -edik bemenet által aktivizált bázisfüggvények $i+2, i+1, \dots, i-c+3$

$i+k$ -edik bemenet által aktivizált bázisfüggvények $i+k, i+k-1, \dots, i+k-c+1$

$i+d$ -edik bemenet (tanítópont) által aktivizált bázisfüggvények $i+d, i+d-1, \dots, i+d-c+1$

Az i -edik bitet aktivizáló tanítópont indexek: $i, i+d, \dots, i+ld$

Ahol $l = \left\lfloor \frac{c}{d} \right\rfloor$, vagyis egy tanítóponttal fázisban lévő bit $z+1$ tanítópont hatására aktivizálódik.

Az $i+1$. bit az $i+d, \dots, i+ld$ indexű tanítópontok hatására aktivizálódik, ha

$$i + ld - c + 1 \leq i + 1$$

ebből $l \leq \frac{c}{d}$. vagyis $l = \left\lfloor \frac{c}{d} \right\rfloor$. és a bázisfüggvény l tanítópont hatására aktivizálódik. (eddig ezt z -vel jelöltem)

Az $i+k$. bit az $i+d, \dots, i+ld$ indexű tanítópontok hatására aktivizálódik, ha $k < d$. (Az egész d szerint periódikus, tehát nem érdemes tovább vizsgálni.) és

$$i + ld - c + 1 \leq i + k$$

ebből

$$l \leq \frac{k + c - 1}{d}, \text{ vagyis } l = \left\lfloor \frac{k + c - 1}{d} \right\rfloor.$$

Ez addig megy így, amíg $\left\lfloor \frac{k + c - 1}{d} \right\rfloor$ nem lesz nagyobb, mint $\left\lfloor \frac{c}{d} \right\rfloor$.

A legnagyobb ilyen index k_{\max} . (vagyis a legnagyobb olyan index, amihez még az N_k tartozik)

Az i -edik bázisfüggvény tehát N_N -szer $(z+1)$ aktivizálódik, a következő már csak z -szer (N_k -szor), és így folytatódik k_{\max} -ig. A fennmaradó $k_{\max}+1, k_{\max}+2, \dots$ indexű bázisfüggvények megintcsak N_N -szer lesznek kiválasztva.

k_{\max} értéke meghatározható abból, hogy:

$$\left\lfloor \frac{k_{\max} + c}{d} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{c}{d} \right\rfloor. \text{ Mivel } c = zd + c \bmod_d, \text{ és } \left\lfloor \frac{k_{\max} + c}{d} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{c}{d} \right\rfloor + 1, \text{ sőt } \frac{k_{\max} + c}{d} = \left\lfloor \frac{c}{d} \right\rfloor + 1$$

felírható, hogy $c + k_{\max} = zd + c \bmod_d + k_{\max} = (z+1)d$

ebből

$$k_{\max} = d - c \bmod_d$$

Az asszociációs bitek kiválasztásainak száma ezért egy olyan d szerint periódikus négyeszfüggvény, ami N_N és N_k értékeket vehet fel. A kiinduló pontban N_N , az azt követő k_{\max} pontban N_k , majd a további maradék pontban N_N , tehát összesen $c-k_{\max}$ pontban lesz N_N .

Ennek a négyeszfüggvénynek a c szélességű négyeszfüggvényel vett diszkrét konvolúciója a háló válasz konstans tanító jelnél.

Irodalom

- [5] Brown, M., C. Harris: "Neurofuzzy adaptive modelling and control" Prentice Hall, New York, 1994.
- [1] Albus, J. S. "A New Approach to Manipulator Control: The Cerebellar Model Articulation Controller (CMAC)", Transaction of the ASME, Sep. 1975. pp. 220-227.
- [2] Brown, M. - Harris, C. J. - Parks, P. "The Interpolation Capability of the Binary CMAC", Neural Networks, Vol. 6. No. 3. 1993. pp. 429-440.
- [3] Horváth, G. (szerkesztő) "Neurális hálózatok és műszaki alkalmazásai" Egyetemi tankönyv, Műegyetemi Kiadó, 1998.
- [4]
- [5]