

ANWENDUNG DES RAUSCHMODELLS DER QUANTISIERUNG ZUR BESCHREIBUNG VON A/D-WANDLERN

I. Kollár, dr. techn.

Technische Universität Budapest, Lehrstuhl für Messtechnik
und Instrumentenwesen

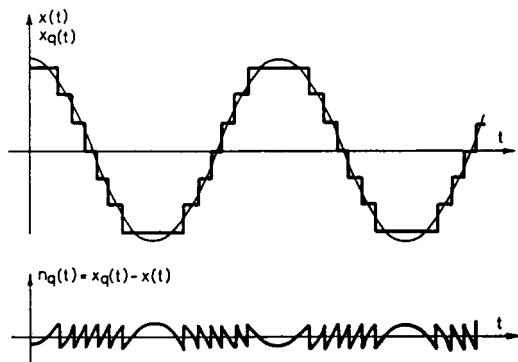
Zusammenfassung

Unter gewissen Bedingungen kann der Quantisierungsfehler als unkorreliertes, gleichverteiltes, weisses Rauschen betrachtet werden. Im vorliegenden Artikel sind diese Bedingungen formuliert und für häufige Signale ausgewertet. Auch die Anwendung eines Hilfssignals (Dithers) wird untersucht und praktische Anwendungsbeispiele werden vorgeführt.

1. Einführung

Vor der digitalen Signalverarbeitung müssen die Signale in Zeit und Amplitude diskretisiert werden. Diese zwei Operationen - Abtasten und Quantisierung - werden mit Hilfe von A/D-Wandlern realisiert. Das Abtasten ist eine lineare Operation mit gut ausgearbeiteter Theorie. Im Gegensatz zum Abtasten ist die Quantisierung eine nichtlineare Operation. Durch diese Tatsache werden die mathematischen Schwierigkeiten ihrer Analyse erklärt. Auch bei gleichmässiger Quantisierung (das ist ein mathematisches Modell der gewöhnlichen A/D-Wandler) ergeben sich seriöse Probleme bei der Beschreibung des ganzen Meßsystems, da der Effekt eines A/D-Wandlers oft nicht vernachlässigt werden kann. Man möchte trotzdem ein zumindest annähernd lineares Modell benutzen, um die gut ausgearbeiteten Methoden der Signalanalyse anwenden zu können.

Ein einfaches Beispiel zeigt, dass diese Idee an sich gar nicht unmöglich ist. Nehmen wir ein sinusförmiges Signal,



Figur 1.1 Quantisierung einer Sinuswelle

Summary

Under certain conditions the quantization error may be modelled as uncorrelated, uniformly distributed white noise (quantization noise). In this paper these conditions are formulated and evaluated for common signal types. The use of an auxiliary signal (dither) is investigated, and practical application examples are given.

das ziemlich grob quantisiert wird (siehe Figur 1.1).

Man kann beobachten, dass der Quantisierungsfehler

$$n_q(t) = x_q(t) - x(t), \quad (1.1)$$

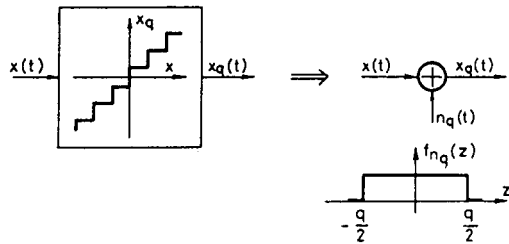
folgende Eigenschaften besitzt:

- Während des größten Teils der Beobachtungszeit (vor allem wo das originelle Signal steil ist) ist er fast sägezahnförmig, was bedeutet, dass wenn $n_q(t)$ als Realisierung eines Zufallsprozesses betrachtet werden kann, eine fast gleichmässige Wahrscheinlichkeitsverteilung anzunehmen ist.
- Die Form des Quantisierungsfehlers weicht wesentlich von der des originellen Signals ab. Der Quantisierungsfehler beschreibt nämlich nur das lokale Verhalten von $x(t)$ in Bezug auf die nächste Quantisierungsstufe und gibt über das globale Verhalten sehr wenig Information. Dies bedeutet im statistischen Sinne, dass $n_q(t)$ und $x(t)$ annähernd unabhängig oder wenigstens unkorreliert sind.
- Von der Anzahl und den Stellen der Nullkreuzungen her ist es klar, dass in $n_q(t)$ ziemlich viele Oberwellen anwesend sind, das heisst, dass $n_q(t)$ im Frequenzbereich eine viel grössere Bandbreite hat als $x(t)$.

Aufgrund dieser Beobachtungen kann das sogenannte Rauschmodell der Signalquantisierung formuliert werden (siehe Figur 1.2): der Quantisierungsfehler wird durch ein additives,

- gleichverteiltes,
- mit $x(t)$ unkorreliertes (eventuell von $x(t)$ unabhängiges),
- weisses

Rauschen modelliert. (Figur 1.2).

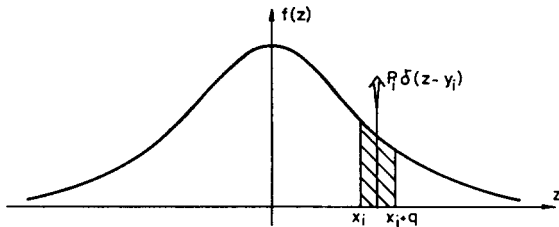


Figur 1.2 Das Rauschmodell der Signalquantisierung

Vom Beispiel her wird aber auch klar, dass dieses Modell vor allem für stochastische Signale gilt (ein sinusförmiges Signal ist auch als stochastisch zu betrachten, z.B. wenn die Phase zufällig ist), und dann auch nur unter gewissen Bedingungen. Nachstehend werden diese Bedingungen abgeleitet und erklärt.

2. Das Quantisierungstheorem von Widrow

Untersuchen wir, was mit der Wahrscheinlichkeitsdichte während der Quantisierung geschieht (siehe Figur 2.1).



Figur 2.1 Einfluss der Quantisierung auf die Wahrscheinlichkeitsdichte. $y_i = x_i + \frac{q}{2}$

Am Ausgang des Quantisierers treten nur diskrete Werte auf, je mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit. Zum Beispiel ist die Wahrscheinlichkeit des Wertes y_i im Fall einer kontinuierlichen Verteilungsfunktion:

$$P_i = P(y=y_i) = P(x_i \leq x < x_{i+1}) = \int_{x_i}^{x_i+q} f_X(z) dz. \quad (2.1)$$

Eine diskrete Verteilung ist mit Diracsstößen beschreibbar:

$$f_y(u) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} P_i \frac{1}{q} \delta\left(\frac{u-y_i}{q}\right) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{x_i}^{x_i+q} f_X(z) dz \frac{1}{q} \delta\left(\frac{u-y_i}{q}\right) \quad (2.2)$$

Von (2.2) und Figur 2.1 hat man den Eindruck, dass bei der Quantisierung eine Art Abtasten der Wahrscheinlichkeitsdichte auftritt. Wenn berücksichtigt wird, dass die Dirac-Stöße nur bei $z=y_i$ von Null abweichen, kann (2.2) weiter umgeformt werden:

$$f_y(u) = \frac{1}{q} \underbrace{\int_{u-q/2}^{u+q/2} f_X(z) dz}_{g(u)} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{u-y_i}{q}\right). \quad (2.3)$$

In (2.3) erkennt man die mathematische Abtastung von $g(u)$, und in $g(u)$ eine Faltung zwischen $f(x)$ und einer Gleichverteilung (rechteckige Funktion). Bei der Ableitung des Abtasttheorems untersucht man das Fourier-Transformierte der Zeitfunktion. Bei der Quantisierung kann man z.B. das Fourier-Rücktransformierte von $f(x)$, das heisst, die charakteristische Funktion der Zufallsvariable x untersuchen:

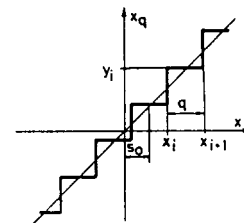
$$W_X(\alpha) = E \left\{ e^{j\alpha x} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z) e^{j\alpha z} dz. \quad (2.4)$$

Ähnlich dem Fall der Abtastung wird die charakteristische Funktion wiederholt, aber wegen der Faltung mit dem Fourier-Transformierten der Gleichverteilung multipliziert. Für die Quantisierungskennlinie von Fig. 2.2 bekommt man:

$$W_q(\alpha) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{+j2\pi k \frac{s_0}{q}} W_X \left[\alpha - \frac{2\pi k}{q} \right] \text{sinc} \left[\frac{q\alpha}{2} - q\pi \right]$$

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad (2.5)$$

Der Einfachheit halber nehmen wir im folgenden $s_0=0$ an (die Behauptungen sind auch für $s_0 \neq 0$ gültig).



Figur 2.2 Kennlinie eines gleichmäßigen Quantisierers

Man kann aufgrund von (2.5) die Bedingung der Wiederherstellbarkeit von $W_x(\alpha)$ und dadurch von $f_x(z)$ angeben: kein Überlappen darf in $(-\frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{q})$ auftreten, das heisst, $W_x(\alpha)$ muss ausserhalb dieses Intervalls gleich Null sein. Es ist hier zu erwähnen, dass diese Bedingung für reelle Signale nur annähernd erfüllt werden kann, da zu einem α -begrenzten $W(\alpha)$ eine unendlich breite Wahrscheinlichkeitsdichte gehört.

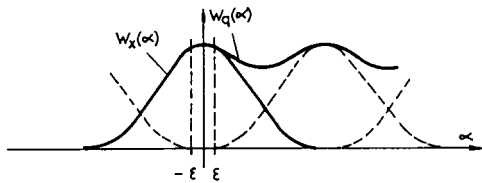
Bei der Quantisierung braucht man aber die Wiederherstellbarkeit eigentlich nicht. Sehr oft werden nur Momente (z.B. Mittelwert, Varianz, Korrelation) oder Funktionen von Momenten (Spektrum, usw.) gemessen. Die Momente sind mit der charakteristischen Funktion eng verbunden:

$$E\{x^n\} = \left. \frac{1}{j^n} \frac{d^n W_x(\alpha)}{d\alpha^n} \right|_{\alpha=0} \quad (2.6)$$

Dies bedeutet, dass wenn $W_x(\alpha)$ in der Umgebung von $\alpha=0$ wieder hergestellt werden kann, sind die Momente von x auch bestimmbar, also ist es ausreichend, wenn $W_x(\alpha)$ für

$$\alpha > \frac{2\pi}{q} - \epsilon, \quad \epsilon > 0,$$

gleich Null ist (siehe Figur 2.3).



Figur 2.3 Bedingung der Meßbarkeit der Momente

Das ist das sogenannte Quantisierungstheorem von Widrow [1,2]. Für gemischte Momente sind ähnliche Bedingungen mit Hilfe mehrfacher charakteristischer Funktionen zu formulieren [4].

Beobachten wir jetzt, wie sich $W_q(\alpha)$ bei $\alpha \rightarrow 0$ benimmt. Da es im Intervall $(-\epsilon, +\epsilon)$ kein Überlappen gibt, ist in diesem Intervall

$$W_q(\alpha) = W_x(\alpha) \text{sinc}\left(\frac{q\alpha}{2}\right), \quad (2.7)$$

und die Zusammenhänge zwischen den Momenten sind die folgenden (siehe (2.6) und (2.7)):

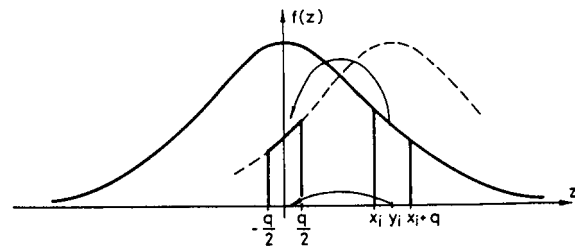
$$\begin{aligned} E\{x\} &= E\{x_q\} \\ E\{x^2\} &= E\{x_q^2\} - \frac{q^2}{12} \\ E\{x^3\} &= E\{x_q^3\} - 3E\{x_q\} \frac{q^2}{12} \\ E\{x^4\} &= E\{x_q^4\} - 6E\{x_q^2\} \frac{q^2}{12} + \frac{7q^4}{240} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Die Ausdrücke in (2.8) sind die sogenannten Sheppard-Korrekturen. Diese sehen ebenso aus, als ob man zu x ein unabhängiges, zwischen $(-q/2, q/2)$ gleichverteiltes Rauschen addierte. In (2.7) sind tatsächlich zwei charakteristische Funktionen multipliziert, was der Faltung der entsprechenden Wahrscheinlichkeitsdichten entspricht: $f_x(z)$ und eine Gleichverteilung. Die Faltung entspricht wiederum der Addierung zweier unabhängiger Zufallsvariablen. Daraus folgt, dass die oben formulierte Bedingung für die ersten zwei Eigenschaften des Rauschmodells hinreichend ist.

3. Notwendige und hinreichende Bedingungen

Man kann mit anderen Methoden auch die notwendigen und hinreichenden Bedingungen formulieren. Zuerst werden wir die Wahrscheinlichkeitsdichte des Quantisierungsfehlers berechnen [4].

Überlegen wir, wie diese Wahrscheinlichkeitsdichte hergestellt werden kann. In jedem Quantisierungsintervall wird die Eingangsgrösse x in die Ausgangsgrösse y_i transformiert. Die Subtraktion $y_i - x$ bedeutet, dass die Dichtefunktion von x in diesem Intervall zu Null verschoben und auf die vertikale Achse abgespiegelt wird (Figur 3.1).



Figur 3.1 Konstruktion der Wahrscheinlichkeitsdichte des Quantisierungsfehlers.

Abgesehen von der Spiegelung kann man feststellen, dass all diese Transformationen durch eine Wiederholung von $f_x(z)$ in Abständen q und ein Ausschneiden zwischen $(-q/2, q/2)$ exakt beschrieben werden können. Diese Wiederholung entspricht im α -Bereich einem mathematischen Abtasten. Wenn man diese Dirac-Stösse wieder rücktransformiert, erhält man die gesuchte Formel:

$$\begin{aligned} f_n(z) &= \frac{1}{q} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W\left(\frac{2\pi k}{q}\right) e^{-j2\pi \frac{k}{q} z} = \frac{1}{q} \sum_{\substack{k \\ k \neq 0}} W\left(\frac{2\pi k}{q}\right) e^{-j2\pi \frac{k}{q} z} \\ & \quad - \frac{q}{2} \leq z < \frac{q}{2} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Aus der Eindeutigkeit der Fourier-Reihenentwicklung folgt, dass die gesuchte hinreichende und notwendige Bedingung der Gleichverteilung wie folgt ist:

$$\dot{W}_x\left(\frac{2\pi k}{q}\right) = 0, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.2)$$

Die Korrelation zwischen x und n_q gestaltet sich etwas komplizierter [4]:

$$E\{x n_q\} = \frac{q}{2\pi} \sum_{k \neq 0} (-1)^k \dot{W}_x\left(\frac{2\pi k}{q}\right). \quad (3.3)$$

x und n_q sind also dann unkorreliert, wenn die erste Ableitung von $W_x(\alpha)$ an gewissen Stellen gleich Null ist:

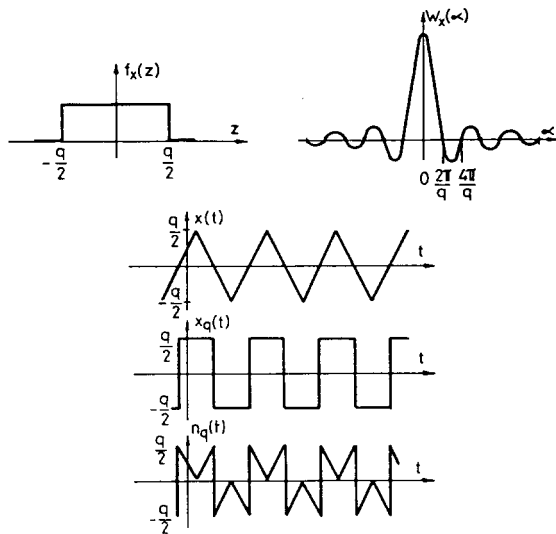
$$\dot{W}_x\left(\frac{2\pi k}{q}\right) = 0, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.4)$$

Im Zusammenhang mit der Unabhängigkeitsbedingung können wir folgendes feststellen: da aus der Unabhängigkeit Gleichungen für gemischte Momente jeder höheren Ordnung folgen, erwartet man, dass alle Ableitungen von $W_x(\alpha)$ bei $\frac{2\pi k}{q}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ gleich Null sind, was im wesentlichen der hinreichenden Bedingung von Widrow entspricht.

Beispiel 1: Gleichverteiltes Signal

$$f_x(z) = \frac{1}{q}, \quad -\frac{q}{2} \leq z < \frac{q}{2}; \quad W_x(\alpha) = \text{sinc}\left(\frac{q\alpha}{2}\right), \quad (3.5)$$

siehe Figur 3.2.



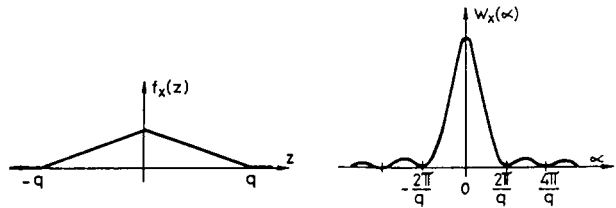
Figur 3.2 Ein gleichverteiltes Signal

Da (3.2) erfüllt und (3.4) nicht erfüllt wird, ist n_q gleichverteilt, aber mit x korreliert, was einfach zu erkennen ist.

Beispiel 2: Dreieckförmig verteiltes Signal

$$f_x(z) = \frac{1}{q} \left[1 - \frac{|z|}{q}\right], \quad -q < z < q; \quad W_x(\alpha) = \text{sinc}^2\left(\frac{q\alpha}{2}\right) \quad (3.6)$$

siehe Figur 3.3.



Figur 3.3 dreieckförmig verteiltes Signal

Da (3.2) und (3.4) gleichmässig erfüllt sind, ist n_q gleichverteilt und auch mit x unkorreliert.

Beispiel 3: Gauss'sches Signal

$$f_x(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}; \quad W_x(\alpha) = e^{j\alpha\mu - \frac{\alpha^2\sigma^2}{2}}. \quad (3.7)$$

Daraus ist ersichtlich, dass die charakteristische Funktion gar keine Nullstellen hat, das heisst, dass weder (3.2) noch (3.4) erfüllt werden. Nachdem aber $W_x(\alpha)$ schnell gegen Null konvergiert ($W_x(\alpha)$ selbst ist auch eine Gauss'sche Funktion), werden die Bedingungen beinahe erfüllt, wenn σ im Verhältnis zu q nicht zu klein ist. Es wird oft eine Faustregel benutzt: man muss $q < \sigma$ sichern. Daraus folgt

z.B.:

$$W_x\left(\frac{2\pi}{q}\right) < e^{-2\pi^2} \approx 2,7 \cdot 10^{-9}.$$

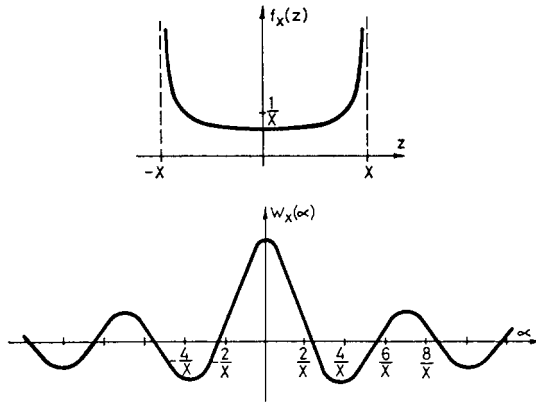
Beispiel 4: Sinusförmiges Signal (siehe Figur 3.4)

$$f_x(z) = \frac{1}{\pi\sqrt{X^2 - z^2}}, \quad |z| < X;$$

$$W_x(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} J_0(X\alpha) \approx \frac{1}{\pi\sqrt{X\alpha}} \cos\left(X\alpha - \frac{\pi}{4}\right). \quad (3.8)$$

\uparrow
 $X\alpha \gg 1$

wo X die Sinusamplitude und J_0 die Bessel'sche Funktion 0-ter Ordnung ist.



Figur 3.4 Kennfunktionen eines sinusförmigen Signals

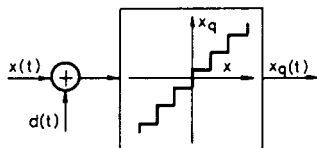
$W_x(\alpha)$ hat zwar Nullstellen, diese können aber mit $\frac{2\pi k}{q}$ nicht übereinstimmen. $W_x(\alpha)$ hält ziemlich langsam auf Null zu, wie man von der Näherung aus sehen kann; demzufolge ist ein sinusförmiges Signal für die Quantisierung sehr ungünstig (man erwartet dies übrigens auch aufgrund der Form von $f_x(z)$).

$W_x(\alpha)$ ist klein wenn $X\alpha \gg 1$ ist, was bedeutet, dass $X \gg q$ erfüllt werden soll.

Diese Ergebnisse werden hier nicht eingehender untersucht, da bei solchen Signalen eher die sogenannte Dither-Technik angewandt wird.

4. Anwendung eines Dithers

Nehmen wir an, dass ein unabhängiges Hilfssignal, ein Dither mit einem Mittelwert gleich Null vor der Quantisierung zum originellen Signal $x(t)$ addiert wird (Figur 4.1).



Figur 4.1 Anwendung eines Dithers

Man weiss, dass beim addieren zweier unabhängiger Zufallsvariablen die charakteristischen Funktionen multipliziert werden. Als Ergebnis der Quantisierung erhalten wir also folgendes:

$$W_q(\alpha) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_x\left[\alpha - \frac{2\pi k}{q}\right] W_d\left[\alpha - \frac{2\pi k}{q}\right] \text{sinc}\left[\frac{q\alpha}{2} - k\pi\right]. \quad (4.1)$$

$$W_{x+d}\left[\alpha - \frac{2\pi k}{q}\right]$$

Aus (4.1) ist leicht zu erkennen, dass das Dither allein sichern kann, damit $W_{x+d}(\alpha)$ die gewünschten Bedingungen erfüllt. Da das Dither die Momente auf bekannte Weise modifiziert, können die Momente von x berechnet werden. Als Dither kann man jedes Signal anwenden, das selbst die oberen Bedingungen erfüllt. Sogar ein sinusförmiges Dither hoher Amplitude wird manchmal benutzt (siehe Abschnitt 6.)

Die Dither-Technik bietet noch eine spezielle Möglichkeit. Durch Erfüllung der oben gegebenen Bedingungen kann man absichern, dass z.B. n_q mit $x+d$ unkorreliert ist. Uns ist aber nur das wichtig, dass n_q und x unkorreliert sind. In [6] stellt man dar, dass sogar die Unabhängigkeit von n_q und x mit der Erfüllung der Bedingung

$$W_d\left[\frac{2\pi k}{q}\right] = 0, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

gesichert wird. Diese Bedingung sorgt auch für die Gleichverteilung von n_q .

Die Anwendung des Dithers hat auch einen "Nebeneffekt" [7]. Ist die Amplitude des Dithers groß im Vergleich zu q , wird das originelle Signal vor der Kennlinie des Quantisierers bedeutend "bewegt", das heisst, dass viele Quantisierungsstufen benutzt werden. Ein reeller A/D-Wandler hat immer differentielle Nichtlinearitäten, die in der Größenordnung von q liegen. Durch das Dither können diese Nichtlinearitäten gegeneinander "ausgespielt" werden, was bedeutet, dass die resultierenden scheinbaren Nichtlinearitäten viel kleiner werden. Dieses Prinzip ist in gewissen hochpräzisions-A/D-Wandlern auch zu benutzen [8].

Die Vorteile des Dithers müssen selbstverständlich teuer zu stehen kommen. Berechnen wir die Varianz des quantisierten Signals:

$$\text{var}\{x_q\} \approx \text{var}(x) + \text{var}(d) + \frac{q^2}{12}. \quad (4.2)$$

Ein großes Dither verursacht eine wesentliche Varianz-Vergrößerung, die z.B. durch Subtrahierung des (gemessenen oder digital hergestellten) Dithers aus dem quantisierten Signal eliminiert werden kann, wenn diese überhaupt möglich ist. Es können auch spezielle Techniken angewandt werden (siehe Abschnitt 6. und [7]). Wenn die Eliminierung nicht durchführbar ist, muss man viel länger messen und eine viel längere Mittelung durchführen.

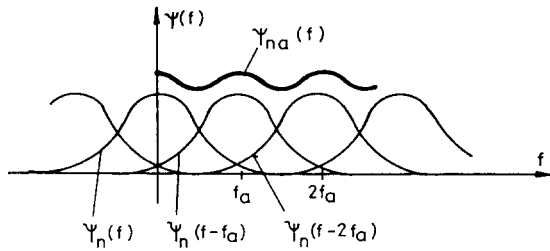
5. Das Spektrum des Quantisierungsrauschens

Wir haben schon im Abschnitt 1. gesehen, dass das Quantisierungsrauschen eine grössere Bandbreite hat als das originelle Signal. Im Modell von Figur 1.2 kann aber das Quantisierungsrauschen nicht weiß sein:

$$P(n_q) = \text{var}(n_q) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(f) df \approx \frac{q^2}{12} < \infty, \quad (5.1)$$

also $\psi_n(f)$, die spektrale Leistungsdichte von $n(t)$, kann der ganzen f -Achse entlang nicht konstant sein. Zum Glück

taucht die Quantisierung (A/D-Wandlung) gewöhnlich mit Abtastung zusammen auf. Das Spektrum des abgetasteten Quantisierungsrauschens kann schon weiss sein (siehe Figur 5.1): ist die Abtastfrequenz klein genug, resultieren die überlappenden Spektren in ein annähernd konstantes (weisses) Spektrum.

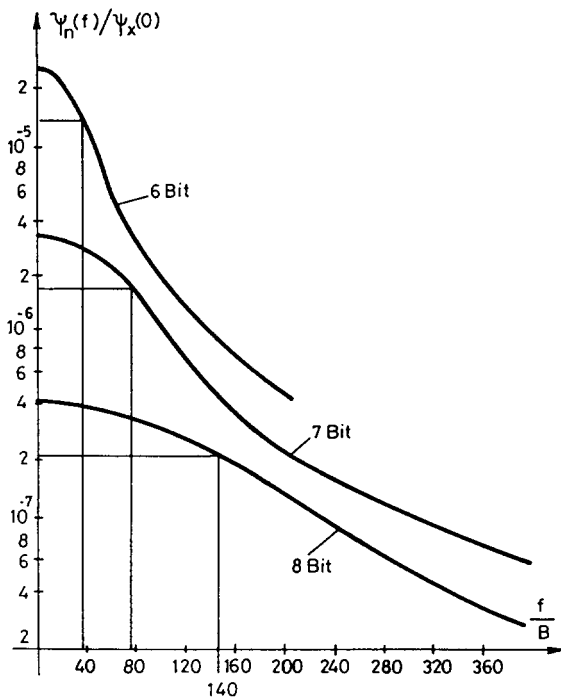


Figur 5.1 Entstehung des weissen Spektrums durch Abtasten

Bevor wir die Bedingungen des weissen Rauschspektrums formulieren, fassen wir kurz zusammen, warum ein weisses Spektrum vorteilhaft ist:

- Dieses Spektrum ist vom Spektrum des originellen Signals unabhängig, die spektralen Eigenschaften werden also vom Eingangssignal nicht beeinflusst;
- Ein weisses Spektrum bedeutet, dass die abgetasteten Werte unkorreliert sind, eine Mittelung ist also effektiv und planbar;
- Die Rauschleistung ist der f-Achse entlang gleichmässig verteilt, was bei Spektrummessungen vorteilhaft ist.

Für bandbegrenzte Gauss'sche Signale ist das Spektrum $\psi_n(f)$ in [10] gegeben (siehe Figur 5.2).



Figur 5.2 Spektrum des Quantisierungsrauschens eines bandbegrenzten Gauss'schen Signals. Das Intervall $(-4\sigma_x, 4\sigma_x)$ ist dem Eingangsbereich des A/D-Wandlers gleich. B ist die Bandbreite von $x(t)$.

Mit wachsender Quantenzahl wächst die Bandbreite beinahe proportional. Wählt man den verdoppelten 3dB-Wert als obere Grenze der Abtastfrequenz für ausreichendes Überlappen, erhält man folgendes:

$$f_a < 2 \cdot 140 \cdot B \underbrace{\frac{8\sigma_x}{2^{8q}}}_{1} = 9 \frac{\sigma_x}{q} B \quad (5.2)$$

Von anderen Ergebnissen in der Literatur [11, 12] sind ähnliche Ausdrücke zu bekommen [9].

Für sinusförmige Signale sind in [13] gleichartige Bedingungen gegeben:

$$f_a < 3 \frac{X}{q} f_1, \quad (5.3)$$

wo X die Sinusamplitude, f_1 die Frequenz ist. (Rein theoretisch ist das Spektrum selbstverständlich diskret. Wird es aber mit begrenzter Auflösung gemessen, z.B. in [13] mit $\Delta f \approx \frac{1}{20} \cdot \frac{2\pi X}{q} f_1$, bekommt man schon ein annähernd weisses Spektrum. Ist hingegen das Signal etwas verrauscht, erzeugt die Nichtlinearität des Quantisierers wieder ein mehr oder weniger weisses Spektrum).

(5.2) und (5.3) haben eine sehr ähnliche Struktur. Diese Beobachtung erlaubt eine allgemeine, von der Signalform unabhängige Bedingung zu formulieren.

Um dies zu tun, betrachten wir wieder die Quantisierung eines Sinussignals (Figur 1.1). Die mittlere "Frequenz" der sägezahnförmigen Teile ist anscheinend dem Verhältnis der Signalsteilheit und q proportional:

$$"f" \approx \frac{E(|x(t)|)}{q} \quad (5.4)$$

Die obere Grenze der Abtastfrequenz zeigt, wieviel Abtastwerte pro mittlere "Sägezahnperiode" entnommen werden dürfen:

$$f_a < K \frac{E(|x(t)|)}{q} \quad (5.5)$$

Von (5.2) ist $K \approx 3$ und von (5.3) ist $K \approx 0,8$.

Es ist kein Wunder, dass mehr Abtastwerte pro "Sägezahnperiode" aus einem zufälligen Signal entnommen werden dürfen, als aus einem ziemlich deterministischen Signal (Sinus z.B.). Der Wert von K ändert sich ein wenig mit der Signalform, aber nicht sehr stark. $K = 0,8$ scheint für alle in der Praxis vorkommenden Signalformen geeignet zu sein. Es ist aber nicht mehr geeignet, wenn sich das Signal von unserem Gesichtspunkt aus nachteilig benimmt (in längeren Intervallen beinahe konstant ist). Ein wenig Rauschen (eventuell Dither) genügt aber, um dies zu beheben.

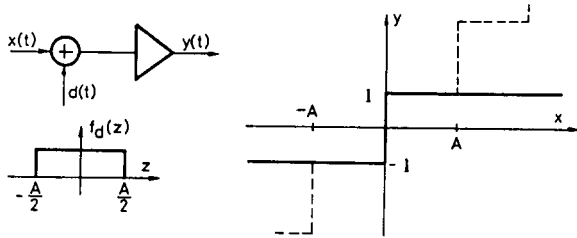
Die Ungleichung (5.5) ist sehr vorteilhaft, weil sie sehr einfach durch Messung zu überprüfen ist.

6. Beispiele

Stochastisch-ergodische Messtechnik

Ein gutes Beispiel für die Wirksamkeit der oben präsentierten Theorie bietet die sogenannte stochastisch-ergodische Messtechnik (SEM) [14]. Ein Komparator mit im Intervall $(-A/2, A/2)$ gleichverteiltem Hilfssignal ist das Grundelement (siehe Figur 6.1). $y(t)$ nimmt nur die Werte ± 1 auf, weshalb es einfach ist, diese zu bearbeiten. Für die Erwartungswerte gilt folgendes:

$$E\{x(t)\} = \frac{A}{2} E\{y(t)\}.$$



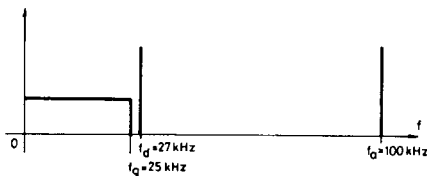
Figur 6.1 Grundelement der stochastisch-ergodischen Messtechnik

Da $x(t)+d(t)$ den Wert A niemals überschreitet, ist die Fortsetzung ausser $(-A, A)$ völlig uninteressant. Man kann annehmen, dass sie z.B. nicht konstant ist, sondern stufenförmig fortgesetzt wird (siehe Figur 6.1, gestrichelte Linie). So betrachtet ist die SEM ein Spezialfall der oben dargelegten Theorie: gleichmässige Quantisierung mit gleichverteiltem Dither.

Quantisierung in einem Spektralanalysator

Ein anderes Beispiel der oberen Techniken bietet der HP3582A Spektralanalysator von Hewlett-Packard [15]. Ein 12-Bit A/D-Wandler ist eingebaut, und ein sinusförmiges Dither von -45dB (bezogen auf das Gesamtbereich des A/D-s, das heisst, $x_d \approx 11,5q$) wird angewandt. Im Datenblatt ist angegeben, dass die minimale detektierbare Signalamplitude bei -75dB ($<0,7q$!) liegt. Dies kann nur deshalb stimmen, weil das Dither den Einfluss der differentialen Nichtlinearitäten verkleinert.

Es ist aus der Frequenzverteilung deutlich sichtbar (siehe Figur 6.2), warum dieses relativ grosse Dither keine Varianzvergrößerung verursacht.



Figur 6.2 Frequenzverteilung im Spektralanalysator HP3582A

Die Grenzfrequenz des Analysators liegt bei 25 kHz , die Ditherfrequenz ist auf 27 kHz eingestellt und die Abtastfrequenz ist etwa 100 kHz . Die ganze Leistung des Dithers fällt ausser dem analysierten Band, d.h., der Verarbeitungsalgorithmus selbst entfernt diese Leistung von dem Ergebnis.

Es ist leicht zu überprüfen, ob das Quantisierungsrauschen tatsächlich weiss ist:

$$f_a \approx 100\text{ kHz} \ll 3 \frac{11,5q}{q} 27\text{ kHz} \quad (6.1)$$

also (5.5) reichlich erfüllt ist.

Literatur

- [1] Widrow, B.: A Study of Rough Amplitude Quantization by Means of Nyquist Sampling Theory. Sc.D. Dissertation, M.I.T. Elec. Eng. Dept., Electronics Systems Lab., Cambridge, Mass. 1956.
- [2] Widrow, B.: Statistical Analysis of Amplitude Quantized Sampled Data Systems. Trans. AIEE, Vol. 79, Part II., Appl. and Ind., No. 52, pp. 555-568. (1961)
- [3] Kollár, I.: Statistical Theory of Quantization: Results and Limits. Periodica Polytechnica - Electrical Engineering, Vol. 28, Nos 2-3, pp. 173-190. (1984)
- [4] Sripad, A.B. - Snyder, D.L.: A Necessary and sufficient Condition for Quantization Errors to be Uniform and White. IEEE Trans. on Acoustics... Vol. ASSP-25, No.5, pp. 442-448. (1977)
- [5] Dobrowiecki, T.: Modelling a Quantizer - Models and Possible Approaches. Periodica Polytechnica - Electrical Engineering, Vol. 28, Nos. 2-3, pp. 159-172. (1984)
- [6] Schuchmann, L.: Dither Signals and their Effect on Quantization Noise. IEEE Trans. on Communication Theory, Vol. COM-12, pp. 162-165. (1964)
- [7] Kollár, I.: Errors Introduced by Digital Power/Energy Measurements. Proc. X. World Congress of IMEKO, Acta IMEKO 1985, Vol. 5, pp. 343-349, OMIKK-Technoinform, 1985.
- [8] De Lotto, I. - Paglia, G.E.: Dithering Improves A/D Converter Nonlinearity. IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement, Vol. IM-35, No. 2, pp. 170-177. (1986)
- [9] Kollár, I.: The Noise Model of Quantization. Proc. 1st IMEKO TC4 Symposium "Noise in Electrical Measurements," Como (Italy), June 10-21, 1986. pp. 125-129, OMIKK-Technoinform, 1987.

- [10] Bennett, W.R.: Spectra of Quantized Signals. Bell System Technical Journal, Vol. 27, No. 4, pp. 446-472. (1948)
- [11] Robertson, G.H.: Computer Study of Quantizer Output Spectra. Bell System Technical Journal, Vol. 48, No. 5, pp. 2391-2403. (1969)
- [12] Katzenelson, J.: On Errors Introduced by Combined Sampling and Quantization. IRE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-7, pp. 58-68. (1962)
- [13] Claasen, T.A.C.M. - Jongepier, A.: Model for the Power Spectral Density of Quantization Noise. IEEE Trans. on Acoustics ..., Vol. ASSP-29, No. 4, pp. 914-917. (1981)
- [14] Wehrmann, W.: Einführung in die stochastisch-ergodische Impulstechnik. R. Oldenburg Verlag, Wien, (1973)
- [15] Pendergrass, N.A. - Farnbach, J.S.: A High Resolution, Low Frequency Spectrum Analyzer. Hewlett-Packard Journal, Vol. 29, No. 13, pp. 2-13. (1978)

Adresse des Autors:
 István Kollár, dr. techn.
 Technische Universität Budapest
 Lehrstuhl für Messtechnik und Instrumentenwesen
 H-1521 Budapest, Műegyetem rkp. 9.
 Ungarn

I. Kollár, "Anwendung des Rauschmodells der Quantisierung zur Beschreibung von A/D Wandlern". (The Use of the Noise Model of Quantization to Describe A/D Converters). *Zeitschrift der SGA (Switzerland)*, Vol. 8, No. 2, pp. 3-10. 1988.