Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

Digitális technika VIMIAA02 1. EA

Fehér Béla
BME MIT

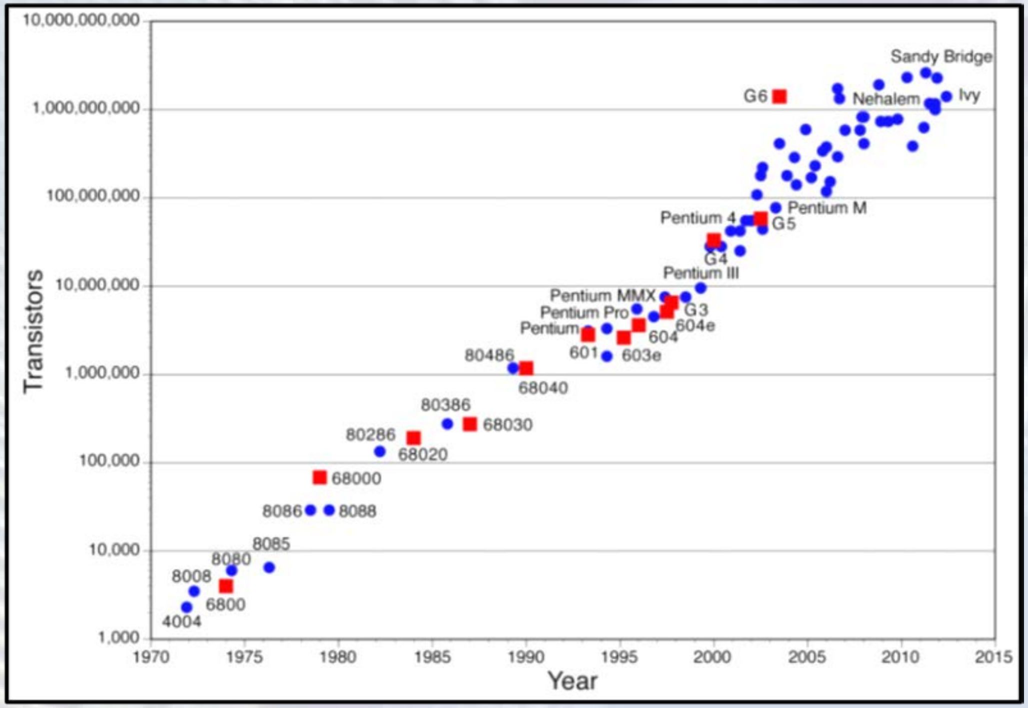
Digitális Rendszerek

- **Számítógépek**
  - Számítógép központok
  - Asztali számítógépek
  - Hordozható számítógépek
    - ~ Az adatfeldolgozó egység neve **CPU**

- **Beágyazott rendszerek**
  - Autó ECU
  - Kapu kódzár
  - Vérnyomásmérő
    - ~ Az adatfeldolgozó egység neve **mikrovezérlő**

Digitális Rendszerek

- **CPU↔ MIKROPROCESSZOR ↔ Mikrovezérlő**
  - Széles teljesítményskála, szinte folytonos átmenet
    - Méret, műveletvégzési képesség, magok száma
  - A technológiai háttér közös: Félvezető technológia
    - Óriási fejlődési ütem
    - Moore törvény: tranzisztorok száma
      - 1965: évente 2x
      - 1975: 2 évente 2x
    - Órajelsebesség
    - Energiafogyasztás

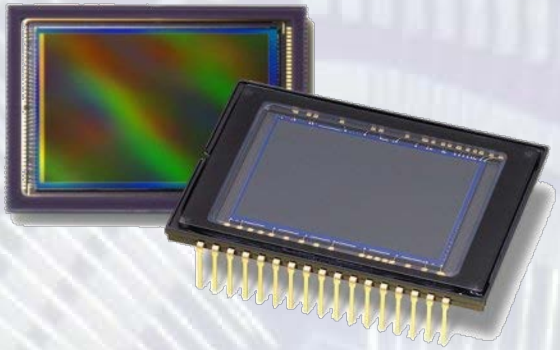


Digitális Rendszerek

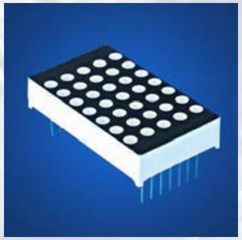
- **Összetett rendszerek tervezése**
  - **Hierarchia**
    - Részekre osztás, majd újabb szintek bevezetés
  - **Modularitás**
    - Jól definiált funkciók és interfészek, építkezhetőség
  - **Egységesítés, szabványosítás**
    - Közös funkciók uniformizálása
    - Erőteljes újrahasznosítás
  - **A digitális technika tárgyban a tervezési feladatok végrehajtása során is ezeket az elveket fogjuk felhasználni, alkalmazni**

Digitális technika

- **Közvetlen digitális bemeneti jelek**
  - Nyomógomb
  - Billentyűzetek
    - Kódolás
    - Leolvasás
  - Képérzékelők



- **Közvetlen digitális kimeneti jelek**
  - LED-ek, kijelzők
  - Léptető motor



Digitális technika

- **Adatábrázolás**
  - Numerikus értékek
    - Külső jelek analóg/digitális konverzió után T = 26,5 °C
    - Belső adatok reprezentációja π = 3,1415
    - Memória cím értéke 0x8000_FA14
      (32 biten, 16-os számrendszerben, értéke 2 147 547 668_{10})
  - Egyéb jelek, kódok
    - ON-OFF, egyéb diszkrét állapotok (P-PS-Z-S-P)
    - Karakterek, kódtáblák
    - Speciális kódok (pozíció kód, tömörített, stb.)

Digitális technika

- **Számábrázolási módszerek**
  - Pozícionális számábrázolás, **n** helyiértéken, tetszőleges számrendszerben

$$D = \sum_{i=0}^{n-1} d_i * r^i$$

  - ahol **r** a számrendszer alapja (radix)
  - $\mathbf{d_i}$ a számrendszer egy számjegye (digit)
  - Akár tekinthetjük egy polinomnak is, ***r*** hatványaival

$$D=d_{n-1}*r^{n-1}+d_{n-2}*r^{n-2}+\ldots\ldots+d_2*r^2+d_1*r^1+d_0*r^0$$

  - Például ismerjük az r = 10-es számrendszert
  - Ebben a decimális digitek ismert szimbólumai: 0, 1, 2 ,3 ,4 ,5 ,6, 7, 8, 9, (0…r-1)

Digitális technika

- **Számábrázolási módszerek**
- **Példa:**
  - A 2014_{10} jelentése értelemszerűen:
  - $2014_{10} = 2*10^3 + 0*10^2 + 1*10^1 + 4*10^0 =$
    $= 2000 + 0 + 10 + 4 = 2014_{10}$
  - Ugyanez a számjegy sorozat a 8-as számrendszerben is egy érvényes szám, de más számértéket jelent (kb. a fele)
  - $2014_8 = 2*8^3 + 0*8^2 + 1*8^1 + 4*8^0 =$
    $= 2*512 + 0 + 1*8 + 4*1 = 1036_{10}$

Digitális technika

- **Digitális technikában fontos számrendszerek**
- **Tízes/Decimális/Dekadikus r = 10**
  - d_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
- **Kettes/Bináris r = 2**
  - d_i = 0, 1, (a nevük bit, **bi**nary digi**t == bit)**
- **Nyolcas/Oktális r = 8**
  - d_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,
- **Tizenhatos/Hexadecimális r = 16**
  - d_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F
  - d_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, c, d, e, f
  - A számjegyek fenti szimbólumait a gépek bináris bitsorozatokkal reprezentálják

Digitális technika

- **Számjegyek bitkódjai → természetes kódkép**

  $D = \sum_{i=0}^{n-1} d_i * ri$ alapján

Érték	BIN	OKT	DEC	HEX	HEXDIG
0	0	000	0000	0000	0
1	1	001	0001	0001	1
2		010	0010	0010	2
3		011	0011	0011	3
4		100	0100	0100	4
5		101	0101	0101	5
6		110	0110	0110	6
7		111	0111	0111	7
8			1000	1000	8
9			1001	1001	9
10				1010	A, a
11				1011	B, b
12				1100	C, c
13				1101	D, d
14				1110	E, e
15				1111	F, f

- $\mathbf{X_2 = b_0*2^0}$
- $\mathbf{X_8 = b_2*2^2 + b_1*2^1 + b_0*2^0}$
- $\mathbf{X_{10} = b_3*2^3 + b_2*2^2 + b_1*2^1 + b_0*2^0}$
- $\mathbf{X_{16} = b_3*2^3 + b_2*2^2 + b_1*2^1 + b_0*2^0}$
  - X_{16}, X_{10} bináris felírása formailag azonos, értelmezési tartományuk eltérő

Digitális technika

- **Konverzió számrendszerek között**
- **Bináris ↔ Hexadecimális, egyszerű csoportosítás**
  - $16 = 2^4$, 1 hexadecimális digit 4 bináris digit (bit)
  - $2014_{16} = 10000000010100_2$, csoportosítás jobbról kezdve és bal oldalon 4 bitre kiegészítve

2				0				1				4			
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0

  - Szokásos írásmód $2014_{16} = 0010\_0000\_0001\_0100_2$
- **Bináris ↔ Oktális hasonlóan, 3 bites csoportokkal**
  - $8 = 2^3$, 1 oktális digit 3 bináris digit (bit)
  - $2014_8 = 010\_000\_001\_100_2$

Digitális technika

- **A Decimális → Bináris konverzió bonyolultabb, valódi számítási algoritmust kíván**
  - Egészosztás 2-vel, a maradék az új bit, a legkisebb helyiértéktől kezdve, amíg 0 lesz a hányados
  - Példa decimális jelöléssel
  - Eredmény:
    Visszafelé kiolvasva, az első bit a legkisebb helyiértékű bit, (LSB Least Significant Bit)
    $2014_{10} = 11111011110_2$

Osztandó	Osztó	Hányados	Maradék
2014	:2	1007	0
1007	:2	503	1
503	:2	251	1
251	:2	125	1
125	:2	62	1
62	:2	31	0
31	:2	15	1
15	:2	7	1
7	:2	3	1
3	:2	1	1
1	:2	0	1

Digitális technika

- **Decimális → Bináris konverzió, másik algoritmus**

$$2^{N+1} >= \text{Decimális szám} > 2^N$$

- Ha igen, akkor a bináris alakban $d_N = 1$ és a kivonás után újabb feltétel vizsgálat következik a következő (kisebb) hatvánnyal
- Az első bit a legnagyobb helyiértékű bit (MSB, Most Significant Bit)

$2014_{10} = 11111011110_2$

Dec. Szám	2^N	Szám> 2^N ?	Különbség	Bin. Digit
2014	2048	nem	2014	0
2014	1024	igen	990	1
990	512	igen	478	1
478	256	igen	222	1
222	128	igen	94	1
94	64	igen	30	1
30	32	nem	30	0
30	16	igen	14	1
14	8	igen	6	1
6	4	igen	2	1
2	2	igen	0	1
0	1	nem	0	0

Digitális technika

- **A Bináris → Decimális konverzió fontosabb**
  - Előző algoritmus inverze: Táblázat alapján, minden aktív d_i bináris digit numerikus értékét összegezzük

- $\mathbf{11111011110_2 = 2014_{10}}$, mert
  $\mathbf{=1*2^{10} + 1*2^9 + 1*2^8 + 1*2^7 + 0*2^5 + 1*2^6 + 1*2^4 + 1*2^3 + 1*2^2 + 1*2^1 + 0*2^0}$ **,**
  $\mathbf{= 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 0 + 16 + 8 + 4 + 2 + 0}$
  $\mathbf{= 2014}$

Digitális technika

- **Bináris → Decimális konverzió, másik algoritmus**
  - Az osztó/hányados algoritmus inverze: Legnagyobb helyiértékű bittől kezdve duplázás és következő bit hozzáadása lépésről-lépésre
  - Alapja a számpolinom felírása Horner formulával:

$$\mathbf{D} = \sum_{i=0}^{n-1} b_i * 2^i$$

$$= b_{n-1}*2^{n-1}+b_{n-2}*2^{n-2}+\ldots\ldots+b_2*2^2+b_1*2^1+b_0*2^0$$

$$= ((((((b_{n-1}*2)+b_{n-2})*2+\ldots\ldots+b_2)*2+b_1)*2+b_0$$

– **Példa: 2014_{10} = 11111011110_2 =**

= ((((((((((1*2+1)*2+1)*2+1)*2+1)*2+0)*2+1)*2+1)*2+1)*2+1)*2+0)

Digitális technika

- **Számrendszerek és konverziók összefoglalása**
  - Fontos számrendszerek: bináris, hexadecimális és decimális
  - A bináris az elsődleges, minden új ismeretünk majd erre épül, azonban nagyobb értéktartománynál mérete miatt kezelhetetlen, áttekinthetetlen, kényelmetlen
  - A hexadecimális formátum ennek egy tömörített formája, nincs szükség algoritmikus konverzióra, a többjegyes hexa számokat számjegyenként bináris sorozattá alakítva közvetlenül a teljes bináris formát kapjuk. Az {A,B,C,D,E,F} szimbólumokat használjuk a {10,11,12,13,14,15} számértékek jelölésére
  - A többjegyes decimális számok bináris kezelése bonyolult. Mindkét irányban (DEC→BIN, BIN→DEC) algoritmikus megoldások szükségesek, amelyek speciális aritmetikai műveletek elvégzése után adják meg a konverzió eredményét.

Digitális technika

- **Néhány fontosabb bináris érték, fejben számoláshoz**

2^7	2^8	2^{10}	2^{16}	2^{20}	2^{30}	2^{32}
128	256	1024	65536	1048576	1073741824	4294967296
~száz		~ezer		~millió	~milliárd	

- **Apró kellemetlenség, 1000 ≠ 1024**
- A korábban elterjedt k, M, G, T nagyságrendi jelölések nem teljesen precízek

SI (decimális)				IEC (bináris)			
jel	név	érték		jel	név	érték	
k	kilo	10^3	1000^1	Ki	kibi	2^{10}	1024^1
M	mega	10^6	1000^2	Mi	mebi	2^{20}	1024^2
G	giga	10^9	1000^3	Gi	gibi	2^{30}	1024^3
T	tera	10^{12}	1000^4	Ti	tebi	2^{40}	1024^4

- Az új szabványos jelölés lassan terjed, mi is nehezen tanuljuk, de egy informatikusnak illik tudni róla

Bináris számábrázolás tulajdonságai

- **Eddig pozitív egészek**
  - N bit, 0-tól 2^N-1 terjedő pozitív egész értéktartomány
  - Pozíció függő súlytényező: helyiérték (1,2,4,8…)
- **Aritmetikai műveletek:**
  - **Bináris összeadás szabályai** (2 operandus között): 0 + 0 = 0, 1 + 0 = 1, 0 +1 = 1, 1 + 1 = 10, ahol az 1 az átvitel a következő, eggyel magasabb helyiértékre
    - Példa 6 + 3 = 9, 4 biten
    - Átvitel a 2. pozíción
    - Eredmény esetleg 4 + 1 jegy, pl. 9 + 8 = 17

		1		
	0	1	1	0
+	0	0	1	1
	1	0	0	1

Bináris számábrázolás tulajdonságai

- **Bináris szorzás szabályai**
  - Egy bites operandusokra:
    0 * 0 = 0, 1 * 0 = 0, 0 * 1 = 0, 1 * 1 = 1
  - Bit szorzásnál nem keletkezik átvitel, de lesznek részszorzatok, amiket páronként összegezni kell (vagy esetleg több bemenetű összeadással?)
  - Példák: 6*3 = 18 14*11 = 154

	0	1	1	0	*	0	0	1	1
	0	0	0	0					
		0	0	0	0				
			0	1	1	0			
				0	1	1	0		
	0	0	1	0	0	1	0		

				1	1	1	0	*	1	0	1	1
				1	1	1	0					
			1	1	1	0						
		0	0	0	0							
	1	1	1	0								
1	0	0	1	1	0	1	0					

  - Az eredmény alapvetően 2N bites (4+4 = 8)

Előjeles számábrázolás

- **Eddig: Összeadás, szorzás, (~~maradékos osztás~~) → Egyik sem vezet ki a pozitív számok halmazából, bár a számtartományt esetleg növelni kell!**
- **Kivonás? Negatív hozzáadása? Mi a negatív?**
- **Előjeles számok:**
  - Normál jelölésben van – (elő)jel, egyedi szimbólum
  - De itt csak „0” és „1” van, nincs több szimbólum
  - Más szabály kell (az előjel is egy új bit):
    - Előjel + érték (pl. lebegőpontos formátum mantissza)
    - Eltolt (offset) bináris (pl. lebegőpontos form. exponens)
    - Egyes komplemens
    - **Kettes komplemens – Csak ezzel foglalkozunk**

Előjeles számábrázolás

- **Komplemens kódok: A kettes komplemens fontos!!**
- Egyes komplemens (1’s C):
  - Képzési szabálya: Negatív értékhez minden bináris számjegyet invertálunk (0→1,1→0)
- **Kettes komplemens (2’s C):**
  - Képzési szabálya:
    Negatív értéknél minden bitet invertálunk és az így kapott számhoz hozzáadunk 1-et és csak az eredeti számú bitet őrizzük meg
  - Más módszer: A szám értékét 2^N-ből binárisan kivonva megkapjuk a negatívjának 2’s C kódját.
    Pl. 4 bitre -5 képzése: 2^4-5=16-5 → 10000 – 0101= 1011,
    mert igaz, hogy 0101 + 1011 = 1<u>0000</u>, ami viszont 4 biten 0.

Bináris	2's C
0111	+7
0110	+6
0101	+5
0100	+4
0011	+3
0010	+2
0001	+1
0000	0
1111	-1
1110	-2
1101	-3
1100	-4
1011	-5
1010	-6
1001	-7
1000	-8

Digitális technika

- **Kettes komplemens számábrázolás**
  - A pozícionális számábrázolás definíciója alapján

$$D = -\,b_{n\text{-}1} * 2^{n\text{-}1} + \sum_{i=0}^{n-2} b_i * 2^i$$

  - b_{n-1} a legnagyobb helyiértékű bit (MSB), b_i pedig a többi bit. Az MSB negatív értékű, ha nem nulla
  - A 2’s C előjeles számokkal végzett műveletvégzési szabályok megegyeznek a normál pozitív számokra vonatkozókkal
  - Egyetlen 0 kód, önmaga kettes komplemens kódja
  - Könnyű aritmetikai tesztek (=, ≠, >, <, ≤, ≥)

Előjeles számábrázolás

- **Kettes komplemens (2’s C) méretkonverzió**
  - **Előjel kiterjesztés**: Számjegyek számának növelése
  - Pozitív számokra egyértelmű, bal oldalon kiegészítés 0-kal, a numerikus érték természetesen nem változik
  - A **+5** érték 4 biten 0101 és 12 biten 0000_0000_0101
  - A **–5** érték 4 biten 1011 és 12 biten 1111_1111_1011
    - Mert a 2’s C szabályai szerint ennek bitjeit invertálva + 1, azaz 0000_0000_0100 + 1 = 0000_0000_0101
  - Általánosan, ha kevesebb bitről **előjel kiterjesztéssel** méretet növelünk több bitre, az **érték** nem változik
    - Jelentősége: pl. konverzió különböző méretű adatformátumok között (8 bites bájt → 32 bites szó)

Valós számok

- **Az eddigi pozícionális számrendszer, a törtrészre is kiegészíthető, csak negatív kitevőkkel**
  - r^{-1}, r^{-2}, ….. r^{-n}, tört helyiértékek, r^0 –tól jobbra (½,¼…)
- **Bináris előjeles számrendszer valós számokra**

2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}
-16	8	4	2	1	0,5	0,25	0,125

Implicit (nem létező) „kettedes” pont a ↑ megfelelő helyen

- **Tehát ebben a számformátumban pl. előjelesen a**
  - 00110101 = 6,625 illetve az 11111111 = -0,125
- **Tetszőleges pontosság, bitszám növelésével, DE**
  - Probléma: $0{,}1_{10} = 0{,}0001100110011001100\ldots_2$

Fixpontos számábrázolás tulajdonságai

- A teljes értéktartományt (FSR, Full Scale Range) a legnagyobb helyiértékű bit (MSB) értéke határozza meg, a példában az előjeles számokra ~ **$\pm 2^4$ = ~ ± 16**

2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}
-16	8	4	2	1	0,5	0,25	0,125

- Két érték közötti min. eltérést (felbontás, pontosság) a legkisebb helyiértékű bit (LSB) értéke határozza meg, a példában ~ **$\pm 2^{-3}$ = ~ ±0,125**
  - Nagy értéktartomány → sok egész bit
  - Nagy pontosság → sok törtrész bit
  - Rögzített bitszámnál kompromisszum kell
  - Megoldás → Skálázó tényező alkalmazása

Lebegőpontos számformátum

- A számok normál alakját modellezi, a választott számrendszer szerinti skálázó tényező használatával

$$\mathbf{D = (-1)^{e} * m * r^{k}}$$

- ahol **e** az előjel, **m** a mantissza, **r** a radix (2 vagy 10), **k** a kitevő. A szabvány több méretet definiál (32/64/128 bit).
  - Pl. az IEE754 szabvány szerint, 32 biten a formátum a következő: e=1 bit, m=24 (23+1) bit, k=8 bit, és az érték **(-1)^e*(1+m)*2^(k-127)**
- Értéktartománya széles: 32 biten maximum $\pm 3{,}4 * 10^{38}$
- Tartalmazza a 0-t, és a legkisebb értékei $\pm 1{,}4 * 10^{-45}$
- Egyenletes relatív pontosság, a mantissza pontossága, 2^{-23}

Decimális számábrázolás

- **Digitális hardver → bináris számábrázolás**
- **„Könnyű” a műveletvégzők tervezése**
  - ADD, SUB, (MULT, DIV, SQRT)
- **Azonban szükség lehet a decimális értékre vagy akár decimális aritmetikára**
  - Pl. numerikus kijelzés esetén, banki számítások, stb.
- **Két megoldás lehetséges, feladattól függ a választás**
  - Decimális adatok tárolása (nem hatékony), decimális műveletvégzés (bonyolultabb), közvetlen eredmény
  - Bináris adatok tárolása (hatékony), bináris műveletek (egyszerűbb), kijelzés előtt BIN → DEC konverzió

Decimális számábrázolás

- **Decimális számjegyek kódolása, ábrázolása**
- **A binárisan kódolt decimális (BCD, Binary Coded Decimal) kódban a bitek a természetes 8-4-2-1 súlyozással szerepelnek**
- **Léteznek még más, speciális alkalmazási követelményeknek megfelelő kódok, melyek egyes alkalmazásokban előnyösen használhatók (nem tárgyaljuk)**
- **Aritmetikai műveleteknél a BCD digitekkel végzett műveleteknél az átvitel kezelése bonyolult (nem tárgyaljuk)**

Érték	BCD
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

Kódolási technikák

- **A numerikus értékeknél fixpontos (előjeles) egész, tört, lebegőpontos**
- **Nemcsak számokkal dolgozunk:**
  - Szöveg, hang, kép, stb.
- **Tetszőleges egyedi események, állapotok**
- **A továbbiakban megvizsgáljuk a kódolási technikák néhány egyszerűbb területét**
- **Feladat: Adott célra legkedvezőbb kódolás elérése**

Kódolási technikák

- **A bináris kódolási szimbólumkészlet 2 elemű {0,1}**
- **A legegyszerűbb esetekben**
  - k db bittel 2^k db kódszó képezhető, ill.
  - N darab kódszót minimum $n \geq \lceil \log_2 N \rceil$ bittel tudunk képezni (pl. 10 db kódszó minimum $\lceil \log_2 N \rceil = 3{,}32 \rightarrow 4$)
- **Kódkészlet osztályozása**
  - Fix vagy változó hosszúságú
  - Numerikus, alfanumerikus, grafikus
  - Pozíció kód vagy szomszédos kódolású
  - Redundáns biteket tartalmazó hibajelző és/vagy javító

Kódolási technikák

- **Fix hosszúságú kódok**
  - Minimális bitszám igény, min. $n \geq \lceil \log_2 N \rceil$
    - Bináris, vagy bármely, tetszőleges sorrendű
  - Nem minimális bitszám mellett
    - k-az-n-ből, pl. 1-az-N-ből, 2-az-5-ből
    - Könnyen kezelhető, értelmezhető, digitális hardverrel generálható, dekódolható

1-a-6-ból
100000
010000
001000
000100
000010
000001

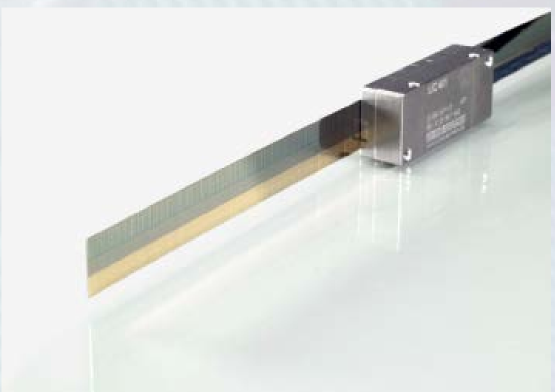
  - Eredeti ASCII (American Standard Code for Information Interchange) karaktertáblázat 7 bites, 128 db kódszó, pl.
    & = 010_0110
    A = 100_0001
    a = 110_0001

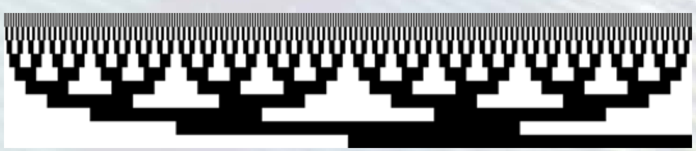
ASCII Code Chart

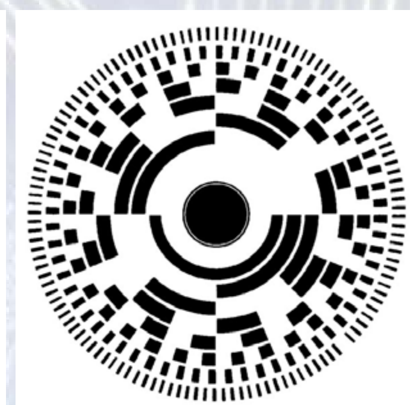
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	NUL	SOH	STX	ETX	EOT	ENQ	ACK	BEL	BS	HT	LF	VT	FF	CR	SO	SI
1	DLE	DC1	DC2	DC3	DC4	NAK	SYN	ETB	CAN	EM	SUB	ESC	FS	GS	RS	US
2		!	"	#	$	%	&	'	(	)	*	+	,	-	.	/
3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	:	;	<	=	>	?
4	@	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
5	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	[	\	]	^	_
6	`	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o
7	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	{	|	}	~	DEL

Kódolási technikák

- **Pozíció kódok**
  - A lineáris ill. forgó abszolút pozíció jeladóknál a kód megbízható adatátvitelt ad, a **szomszédos** kódszavak között mindig csak1 bit változás (forgóadónál a végértéken is)







Kódolási technikák

- **Gray, tükrözött kód bináris kód**
- **n bitből $N=2^n$ méretű kódszókészlet generálható**

0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0

  - A bal alsó saroktól kezdve kiolvashatók a 2, 3, 4 bites kódtáblák (2 bit 4 db, 3 bit 8 db, 4 bit 16 db)
  - Lehet kevesebb, de páros kódszó számot is használni, az aktuális tábla középszimmetrikus oszlopaival (pl. 10 db kódszó 4 biten, ha éppen erre lenne szükség)
  - Ha már megismertük a XOR (Exclusive OR, kizáró VAGY) logikai függvényeket, látni fogjuk, hogy a Gray kód generálása viszonylag könnyű

1. EA vége