

Alapfogalmak a Mérés laboratórium 2. és 3. tárgyak műszeres méréseihez

2016.09.05.

Szántó Péter, Pálfi Vilmos

1 Tartalom

1	Alapfogalmak	4
1.1	SI prefixumok	4
1.2	Periódusidő, frekvencia	4
1.3	Egyenáram, váltakozó áram	4
1.3.1	Áramerősség.....	4
1.3.2	Feszültség.....	5
1.3.3	Teljesítmény.....	5
1.4	decibel	5
2	Passzív áramköri elemek	6
2.1	Soros kapcsolás	6
2.2	Párhuzamos kapcsolás	7
2.3	Kapacitás	8
2.3.1	Kapacitás egyenáramú áramkörben.....	8
2.3.2	Kapacitás váltóáramú áramkörben.....	11
2.4	Induktivitás	11
3	Jelek	13
3.1	Periodikus jelek	13
3.2	Mintavételezés	14
3.2.1	A diszkrét Fourier-transzformáció.....	15
3.2.2	A mintavételezés hatása a spektrumra.....	15
3.3	Periodikus jelek mintavételezése	17
3.4	Alul- és túlmintavételezés	20
3.5	Analóg-digitális átalakítás	21
3.5.1	Kvantálási zaj.....	23
3.5.2	Átlapolásgátló szűrés.....	24
3.6	Digitális-analóg átalakítás	24
4	Rendszerek	26
4.1	Átviteli karakterisztika	26
4.1.1	Aluláteresztő.....	26
4.1.2	Felüláteresztő.....	28
4.1.3	Sáváteresztő.....	29
4.1.4	Sávzáró.....	29
4.1.5	Átviteli karakterisztika példa.....	29
4.1.6	Aluláteresztő RC szűrő.....	31
4.1.7	Felüláteresztő RC szűrő.....	33
5	Zárszó	35
6	Hivatkozás	36

Jelen dokumentumnak nem célja....

....az érintett tématerületek minden részletre kiterjedő, alapos és matematikailag megfelelően alátámasztott tárgyalása; ezt megteszik (illetve jobb esetben az olvasás pillanatában már megtették) a laborok műszeres méréseinek témáihoz kapcsolódó tárgyak (Fizika, Jelek, Szabályozástechnika, Elektronika).

Cél viszont....

....az, hogy a méréseken érintett fontosabb mérnöki fogalmakat, témákat röviden és remélhetőleg viszonylag szemléletesen áttekintse. Az áttekintés leginkább ismeretterjesztő jelleggel, néha pongyolaságba hajlóan történik. Az ideális az lenne, ha a felemlegetett területek mindenki világképében a megfelelő helyre kerülnének anélkül, hogy közben elvesznénk a képletek rengetegében. *(Azért lesznek képletek ☺. Így utólag nem is annyira kevés.)* Mélyebb ismeretek, a leírtak háttere pedig megtalálható az emlegetett tárgyakhoz kapcsolódó jegyzetekben.

A Mérés laboratórium 2. tárgyhoz mindenképpen szükséges az első két fejezet, a továbbiakban leírtak inkább a Mérés laboratórium 3. tárgyban kerülnek elő.

Ennek ellenére javasoljuk a 3. és 4. fejezetek átfutását már a Mérés laboratórium 2. során, így legalább van idejük leülepedni a fogalmaknak.

1 Alapfogalmak

1.1 SI prefixumok

Előtag	Jele	Hatvány
piko-	p	10^{-12}
nano-	n	10^{-9}
mikro-	μ	10^{-6}
milli-	m	10^{-3}
- (egy)		10^0
kilo-	k	10^3
mega-	M	10^6
giga-	G	10^9
tera-	T	10^{12}

Például:

$$1s = 10^3ms = 10^6\mu s = 10^9ns = 10^{12}ps$$

1.2 Periódusidő, frekvencia

Egy jel akkor periodikus, ha létezik olyan T (>0) időtartam (periódusidő), hogy minden t -re igaz az alábbi kifejezés:

$$x(t + T) = x(t)$$

Azaz tetszőleges t és $(t+T)$ időpillanatokban a jel értéke azonos. A periódusidő mértékegysége értelemszerűen idő (s).

Az egységnyi idő (1 s) alatti periódusok száma a jel frekvenciája, ebből következően:

$$f = \frac{1}{T}$$

A frekvencia mértékegysége 1/s (egy-per-szekundum), ismertebb nevén Hertz (Hz).

1.3 Egyenáram, váltakozó áram

1.3.1 Áramerősség

Az áramerősség definíciója: az időegység alatt átáramlott töltés, azaz

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Mértékegysége: Amper (A).

Egyenáramról akkor beszélünk, ha ez az érték állandó, tehát a töltések egyenletes sebességgel, azonos irányba mozognak. Magyarán, ha ábrázoljuk az idő-áram függvényt, akkor egy vízszintes egyenest kapunk.

Ha a fenti kitétel nem teljesül, akkor változó áramról beszélünk. A változó áramok egy kitüntetett csoportja pedig a váltakozó áram, amikor is a töltések ugyanannyit mozognak előrefelé mint hátrafelé. Ha a mozgást leíró függvény egy szinuszejel, akkor pedig váltóáramról beszélünk.

Magyarországon 50 Hz-es váltóáramú a villamos hálózat, azaz a töltések másodpercenként ötvenszer egy század másodperc ideig az egyik, ötvenszer egy század másodpercig pedig a másik irányba mozognak, a szinusz pozitív, illetve negatív fél periódusának megfelelően.

A szokásos jelölések az angol elnevezésekből adódnak, az egyenáramot (direct current) a DC, míg a váltóáramot (alternating current) az AC betűszóval szokás jelölni.

1.3.2 Feszültség

Definíciószerűen a feszültség két pont közötti potenciálkülönbség. Jelölésére nyilat szokás használni, amely megegyezés szerint a nagyobb potenciálú pontból a kisebb potenciálú felé mutat. Mértékegysége: Volt (V).

Bár a DC és AC rövidítések áramra vonatkoznak, ugyanúgy használatosak feszültségre is. A váltófeszültség jellemzésére tipikusan nem az amplitúdót, hanem az effektív értéket (RMS – root-mean-square, négyzetes középérték) szokás alkalmazni. Az RMS érték szemléletesen azt mutatja meg, hogy mekkora egyenáram fűtőértékével egyezik meg a váltóáram fűtőértéke. A hálózati feszültségként megadott 230 V is RMS érték, az amplitúdó ebben az esetben 325 V (lásd Mérés laboratórium 2., 4. mérés).

1.3.3 Teljesítmény

A teljesítmény az egységnyi idő alatt végzett munka (mértékegysége Watt (W)), a pillanatnyi elektromos teljesítmény pedig a pillanatnyi áramerősség és a pillanatnyi feszültség szorzata:

$$P(t) = I(t) * U(t)$$

1.4 deciBel

A Bel (B) teljesítmény jellegű mennyiségek arányának tízes alapú logaritmus, ennek tízszerese a deciBel (dB):

$$x[db] = 10 \log_{10} \frac{P_1}{P_0}$$

Amennyiben a teljesítménnyel négyzetesen arányos mennyiségek arányait szeretnénk dB-ben kifejezni (pl. feszültség, áramerősség, hangnyomás), akkor a négyzetre emelés kihozható a logaritmus elé, tehát:

$$x[dB] = 10 \log_{10} \frac{P_1}{P_0} = 10 \log_{10} \frac{U_1^2}{U_0^2} = 20 \log_{10} \frac{U_1}{U_0}$$

A 3 dB arány kb. kétszeres teljesítménynek felel meg, azaz $\sqrt{2}$ -szörös feszültségnek. Kétszeres feszültség négyszeres teljesítményt, s így 6 dB arányt jelent. Hasonlóan a -3 dB arány fele teljesítményt, míg a -6 dB negyed akkora teljesítményt, s fele akkora feszültséget jelent.

Megj.: Amennyiben a logaritmusban szereplő tört értéke tíz tetszőleges egész számú hatványa, úgy a dB fejen történő kiszámítását elvárjuk.

2 Passzív áramköri elemek

A három legfontosabb passzív elem az ellenállás, a kondenzátor és az induktivitás.

Legfontosabb ezek közül is az elektromos ellenállás (rezisztencia). Az ellenállás jele R, mértékegysége Ohm (Ω). Az ellenállásra jellemző, hogy a rajta átfolyó áram (I) arányos az ellenálláson eső feszültséggel (U), az arányossági tényező pedig az ellenállás. Képletszerűen (Ohm-törvény):

$$R = \frac{U}{I}$$

Fenti képletet a teljesítmény előző képletébe helyettesítve:

$$P = U * I = \frac{U^2}{R} = I^2 R$$

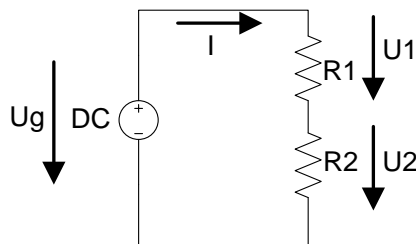
Azaz egy ellenálláson hővé disszipált teljesítmény mind a feszültséggel, mind pedig az áramerősséggel négyzetesen arányos.

A következőkben az ellenállásokból felépített legegyszerűbb alapkapcsolásokat (párhuzamos és soros kapcsolás) tekintjük át.

(Szemléletli megjegyzés. Az energiamegmaradás törvénye viszonylag általános érvényű, tehát egy passzív elemekből felépített hálózat NEM termel energiát. Azaz a generátor feszültségénél nagyobb érték nem jelenhet meg a rendszerben. Ha hosszadalmas számításokkal mégis ilyen eredményre jutnánk, akkor legalább kezdjünk el merengeni, mert előfordulhat, hogy a hiba bennünk van!. Hasonló okokból ne használjunk be olyan eredményt, hogy $U = \infty!$)

2.1 Soros kapcsolás

Az ellenállások soros kapcsolását szemlélteti az alábbi ábra.



A bal oldali feszültségforrás feszültsége (azaz a két pontja közötti potenciálkülönbség) legyen U_g , az R_1 és R_2 ellenállásokon eső feszültség pedig rendre U_1 és U_2 . Az ellenállásokon átfolyó áram megegyezik, hiszen egyetlen „áramút” van a kapcsolásban, ahol áram tud folyni. Az Ohm-törvénynek megfelelően az alábbiak írhatók fel:

$$R_1 = \frac{U_1}{I}; R_2 = \frac{U_2}{I}$$

Átrendezve:

$$U_1 = I * R_1; U_2 = I * R_2$$

$$I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2}$$

Észrevehető az is, hogy a kapcsolás alsó és felső pontja között a bal oldali ágot tekintve U_g a potenciálkülönbség, míg a jobb oldali ágon U_2+U_1 (az R_2 ellenállás felső pontja a kapcsolás alsó pontjához képest U_2 potenciálon van, felső pontja ehhez képest még U_1 potenciálkülönbséggel rendelkezik). Azaz

$$U_g = U_1 + U_2$$

Behelyettesítve:

$$U_g = I * R_1 + I * R_2 = I * (R_1 + R_2) = I * R_e$$

Azaz, ha a két sorba kapcsolt ellenállást egyetlen ellenállással szeretnénk helyettesíteni (eredő ellenállás), akkor ennek értéke:

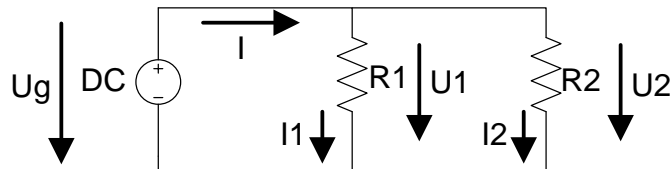
$$R_e = R_1 + R_2$$

Ha pedig az egyes ellenállások feszültségét szeretnénk meghatározni, akkor a fenti képletek alapján:

$$U_1 = I * R_1 = \frac{U_g}{R_e} R_1 = U_g \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$U_2 = I * R_2 = \frac{U_g}{R_e} R_2 = U_g \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

2.2 Párhuzamos kapcsolás



Párhuzamos kapcsolás esetén az alábbiakat jelenthetjük ki. A kapcsolás alsó pontja (azaz a feszültségforrás, az R_1 és R_2 ellenállás alsó pontjai) ugyanazon a potenciálon vannak, és ugyanez igaz a felső pontokra is. Tehát

$$U_g = U_1 = U_2$$

Az ábrán jelölt áramokra igaz, hogy egy csomópontba befolyó áramok összege megegyezik a csomópontból kifolyó áramok összegével (csomóponti törvény), tehát

$$I = I_1 + I_2$$

Az Ohm-törvény még mindig igaz, vagyis:

$$R_1 = \frac{U_1}{I_1}; R_2 = \frac{U_2}{I_2}$$

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_g}{R_1}; I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{U_g}{R_2}$$

Behelyettesítve

$$I = I_1 + I_2 = \frac{U_g}{R_1} + \frac{U_g}{R_2} = U_g * \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = U_g * \frac{R_1 + R_2}{R_1 * R_2} = U_g \frac{1}{R_e}$$

Tehát, ha a két ellenállásunkat újfent egyetlen eredő ellenállással szeretnénk helyettesíteni, akkor ennek értéke:

$$R_e = \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2} = R_1 \times R_2$$

ahol \times az ún. replusz operátor.

2.3 Kapacitás

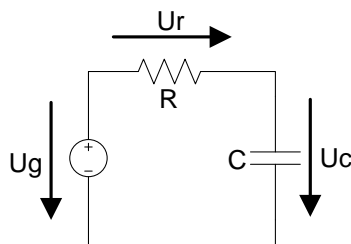
2.3.1 Kapacitás egyenáramú áramkörben

Anélkül, hogy a fizikai részletekbe mennénk, a kondenzátort (kapacitás) szemléletesen egy töltéstároló elemként képzelhetjük el, amelynek jellemzője a kapacitása (jele: C, mértékegysége: Farad, röviden F). A kapacitásra felvitt töltések száma arányos a kapacitás feszültségével, az arányossági tényező a C kapacitás. Azaz (felhasználva, hogy az áramerősség az időegység alatt átáramlott töltések száma):

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{I * t}{C}$$

Tehát, ha egy kondenzátort egyenárammal töltünk, akkor feszültsége az idő előrehaladtával folyamatosan nő. Ugyanez igaz a kisütésre, amikor a kondenzátorból töltést veszünk ki; állandó áramerősséget feltételezve a kondenzátor feszültsége folyamatosan csökken. Az egyenáramú működés vizsgálatához tekintsünk egy tipikus kapcsolást!

Kondenzátor feltöltése



A kondenzátor árama megegyezik az ellenállás áramával, valamint az is igaz, hogy a kondenzátoron és az ellenálláson eső feszültség összege egyenlő a generátor feszültségével (sorosan vannak kapcsolva). A feszültség bekapcsolásának pillanatában a kondenzátor feszültsége 0, így a teljes U_g feszültség az R ellenálláson esik, a töltőáram tehát nagy lesz. A feltöltés során a kondenzátor feszültsége nőni kezd, és igen hosszú idő után (azaz teljesen feltöltött állapotban) a teljes U_g feszültség a kondenzátoron esik, így a töltőáram 0 lesz. A két határhelyzet között a kondenzátoron eső feszültség egyre nő, ami a töltőáram folyamatos csökkenését vonja maga után. Ebből talán érezhető, hogy a töltés egyre lassuló folyamat, hiszen a töltőáram egyre kisebb.

A kondenzátor áramára és feszültségére felírható az alábbi differenciálegyenlet:

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

Fenti áramkörünkben az ellenálláson és a kondenzátoron ugyanakkora áram folyik, azaz

$$U_g = Ri(t) + U_c(t) = RC \frac{dU_c}{dt} + U_c(t)$$

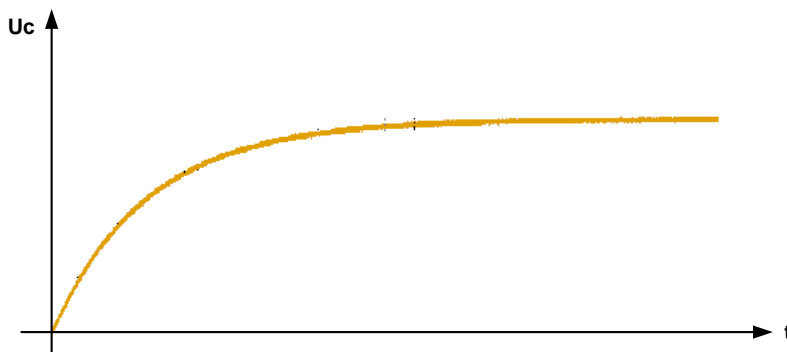
Ezen remek differenciálegyenletet megoldva és átrendezve, a kondenzátor feszültségére az alábbi összefüggés adódik:

$$U_c = U_g(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

Az ellenálláson eső feszültség:

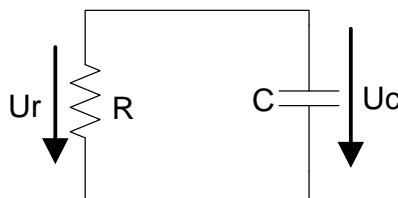
$$U_R = U_g - U_c$$

Így a feltöltés során az ellenálláson a feszültség folyamatosan csökken. A kondenzátor feszültségének alakulását az alábbi ábra szemlélteti.



Kondenzátor kisütése

Ha a feltöltés után a tápfeszültséget lekapcsoljuk (azaz rövidzárral helyettesítjük), akkor kisütjük a kondenzátort.



Az első pillanatban a kondenzátor és az ellenállás feszültsége abszolút értékben megegyezik (előjelük az előző ábra jelölését használva különbözik!), tehát a kisütő áram abszolút értéke maximális lesz ($I = \frac{U_c}{R}$). A továbbiakban a kondenzátor feszültsége egyre kisebb lesz, minek hatására a kisütő áram

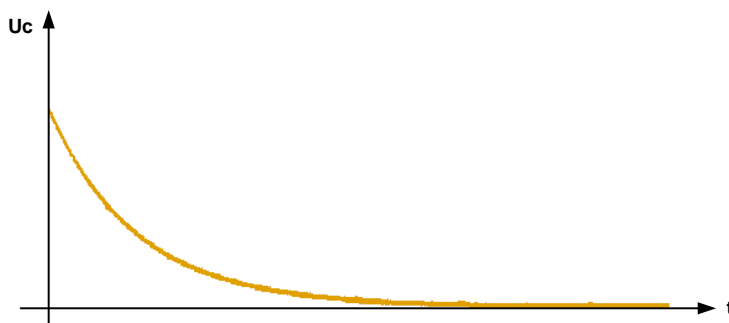
is csökken, így a kisütés esetében is exponenciális görbéhez jutunk. Felírva a kondenzátor feszültségét:

$$U_c = U_g e^{-\frac{t}{RC}}$$

Az ellenállás feszültsége:

$$U_R = -U_c$$

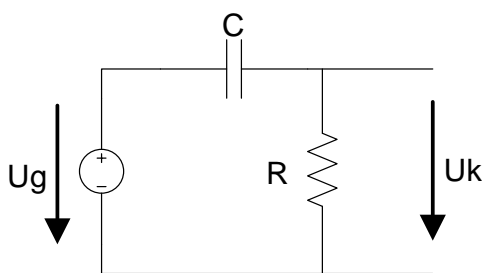
A kisütés idő-feszültség grafikonja az alábbi:



A fenti RC kapcsolásra jellemző az időállandója, ami $\tau = RC$. Feltöltés során egy τ idő alatt a kondenzátor $(1 - e^{-1})$ részére töltődik fel (~63%), míg kisütéskor ugyanennyi idő alatt töltésének e^{-1} része (~37%) marad meg. 5τ időtartam alatt éri el a töltöttségi szint a ~99%-át, illetve ennyi idő alatt kisütéskor a töltéseknek csak ~1%-a marad a kondenzátorban.

Soros csatoló kondenzátor hatása a jelalakra

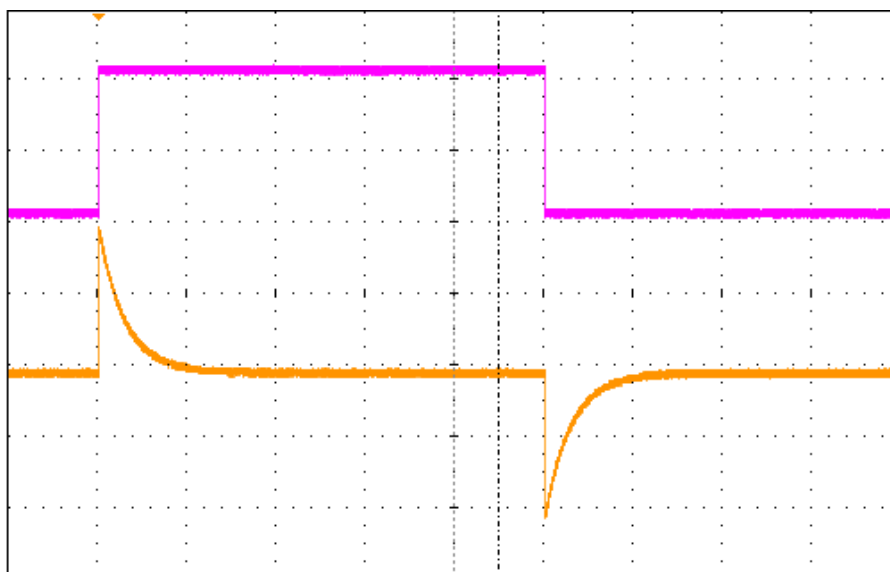
Tekintsük a következő kétkaput, ami az előzőekben tárgyalt kapcsolat.



A feszültséggenerátorral állítsunk elő kis frekvenciájú négyzögjelet (periódusideje $> \tau$), amelynek alacsony értéke 0 V, magas értéke pedig 1 V! Ezt az esetet tekinthetjük úgy, hogy a négyzögjel magas értéke alatt a kondenzátort egyenfeszültséggel töltjük, alacsony állapota alatt pedig kisütjük. A kétkapu kimeneti feszültsége pedig legyen az ellenállás feszültsége!

A generátorfeszültség megjelenésekor tehát a kondenzátor töltődik, ugyanekkor az ellenállás feszültsége a kezdeti U_g értékről exponenciálisan csökken. A kisütés kezdetekor (azaz amikor a generátor feszültsége 0 lesz) az ellenálláson $-U_g$ feszültség mérhető, ami exponenciálisan 0-ra csökken.

AC üzemmódban az oszcilloszkóp bemenete éppen a fenti kapcsolást valósítja meg, az alábbi ábra ennek hullámformáját mutatja. A felső jel a generátor feszültsége, az alsó pedig a kétkapu U_k kimeneti feszültsége. Az ábrából következően hasonló jeleket (pl. digitális áramkörök ki- és bemenete) NEM mérünk AC üzemmódban.



2.3.2 Kapacitás váltóáramú áramkörben

Az ellenállással ellentétben a kapacitás (és az induktivitás) azon tulajdonsága, hogy „mennyire akadályozza a rajta átfolyó áramot” függ a rajta átfolyó váltakozó áram frekvenciájától. Konkrétan a kondenzátor impedanciája (azaz váltakozó áramú ellenállása):

$$Z_c(f) = \frac{1}{j2\pi fC} = -j \frac{1}{2\pi fC}$$

Ahol f a frekvencia, C pedig a kondenzátor kapacitása.

A fenti képlet alapján a következő megállapításokat tehetjük:

- A kapacitás impedanciája nem valós, hanem képzetes. Ez mindössze annyit jelent, hogy a kapacitás árama és feszültsége nincs fázisban, egymáshoz képest el vannak tolvá a szinuszos hullámformák.
- A képzetes ellenállás abszolút értéke fordítottan arányos a frekvenciával. Tehát, minél nagyobb a váltakozó áram frekvenciája, a kondenzátor ellenállása annál kisebb.

Kondenzátoros alapkapsolások frekvenciatartománybeli vizsgálatára a 4. fejezetben még visszatérünk.

2.4 Induktivitás

Hasonlóan a kondenzátorhoz az induktivitás (pongyolábban: tekercs) ellenállása is frekvenciafüggő:

$$Z_L(f) = j2\pi fL$$

Ahol L az induktivitás (mértékegysége Henry, H).

Tehát:

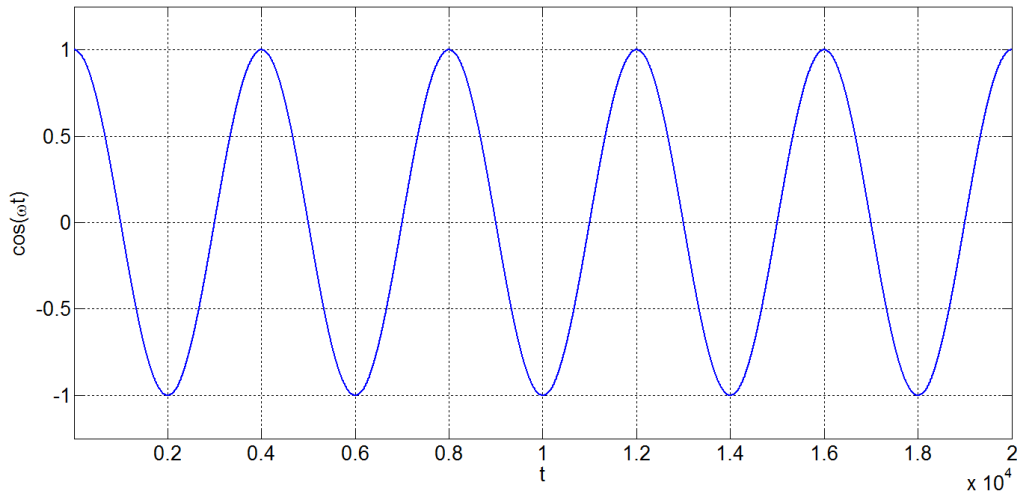
Mérés laboratórium 2./3. – Alapfogalmak a műszeres mérésekhez

- Az induktivitás impedanciája adott frekvencián ugyancsak képzetes.
- Abszolút értéke egyenesen arányos a frekvenciával.

3 Jelek

3.1 Periodikus jelek

Egy jel periodikus, ha létezik olyan T periódusidő, amellyel a jelet eltolva önmagát kapjuk. Az egyik legismertebb periodikus jel a szinuszjel, ennek időtartománybeli alakja a következő:



$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f t + \phi),$$

ahol A az amplitúdó, f a frekvencia és ϕ a kezdőfázis. Érdeemes a szinuszjelet átírni komplex alakba is:

$$A \cdot \cos(2\pi f t + \phi) = C_1 e^{j2\pi f t} + C_{-1} e^{-j2\pi f t},$$

ahol

$$C_1 = \frac{A}{2} \cdot e^{j\phi} \text{ és } C_{-1} = \overline{C_1}.$$

Ezek szerint a valós szinuszjel felírható két, f és $-f$ frekvenciájú komplex exponenciális jel összegeként. A következőkben nézzük meg a Fourier-sor komplex alakját:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot e^{j2\pi k f t}.$$

Ha az $x(t)$ jel valós, akkor biztosan igaz, hogy $C_{-k} = \overline{C_k}$. A feltétel azért fontos, mert garantálja, hogy a jel valós legyen. A fenti alakot nézzük meg egy adott k és $-k$ értékpárra! A fenti képlet analógiájára:

$$C_k e^{j2\pi k f t} + C_{-k} e^{-j2\pi k f t} = A \cdot \cos(2\pi k f t + \phi).$$

Tehát azt kaptuk, hogy valós periodikus jelekre a Fourier-sor megadja a jelet végtelen sok szinuszjel (vagy komplex exponenciális, a kettő ugyanaz) összegeként. Ezt a fajta megközelítést célszerű megjegyezni, mert mintavételezési és szűrési feladatoknál jóval átláthatóbb, mint az időtartománybeli. Érdeemes azt is megfigyelni, hogy a Fourier-sorban a komplex exponenciálisak frekvenciái a jel f frekvenciájának egész számú többszöröse, azaz a spektrum diszkrét. Példaként nézzük meg a szimmetrikus négyszögjel Fourier-sorát:

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin(2\pi ft) + \frac{1}{3} \sin(3 * 2\pi ft) + \frac{1}{5} \sin(5 * 2\pi ft) + \frac{1}{7} \sin(7 * 2\pi ft) + \dots \right)$$

Látható, hogy itt nem csupán egész számú többszöröse a felharmonikusok frekvenciái az alapharmonikusnak, hanem csak páratlan egész többszörösekről beszélhetünk. Ez annak a következménye, hogy a négyszögjel szimmetrikus, vagyis 50% a kitöltési tényezője. Ha ez megváltozna, úgy a spektrumában is előkerülnének a páros többszörös felharmonikusok. Hasonlóan viselkedik a szimmetrikus háromszögjel Fourier-sora is:

$$x(t) = \frac{8}{\pi^2} \left(\sin(\omega 2\pi ft) - \frac{1}{3^2} \sin(3 * 2\pi ft) + \frac{1}{5^2} \sin(5 * 2\pi ft) - \frac{1}{7^2} \sin(7 * 2\pi ft) + \dots \right)$$

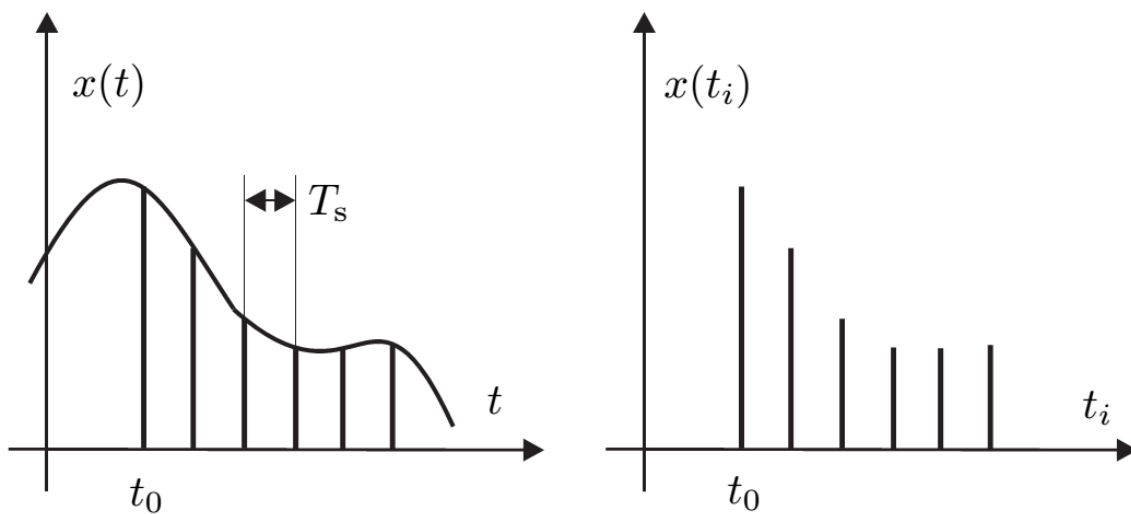
Megjegyezzük még, hogy Fourier-sora csak periodikus jeleknek van, tranziens jelekre a Fourier-transzformációt használjuk, ami levezethető a Fourier-sorból. A mondanivalója nagyon hasonló, csak a tranziens jelek spektruma folytonos, mivel nincs periódusidejük.

(Zárójeles megjegyzés. A következő ökölszabály segít megállapítani, hogy különböző típusú periodikus jeleknek jellegre milyen az amplitúdóspektruma: ha egy periodikus jelet n -szer kell deriválni az idő szerint ahhoz, hogy $\delta(t)$ sorozatot kapjunk, akkor amplitúdóspektrumának jellege (más néven burkológörbéje, ne feledjük, hogy a spektrum diszkrét, lásd fentebb) a frekvenciával $\frac{1}{f^n}$ módon függ össze. Pl., a szimmetrikus háromszögjel deriváltja a négyszögjel, ennek deriváltja pedig a $\delta(t)$ sorozat, hisz az átváltások végtelen gyorsan mennek végbe. Tehát a háromszögjel amplitúdóspektrumának jellege $\frac{1}{f^2}$ (ahogy ez a fentebbi sorfejtésen is látható).

Érdeemes elgondolkodni azon, hogy a fenti szabály hogyan alkalmazható a szinuszjel spektrumára.)

3.2 Mintavételezés

A mintavételezés során a folytonos függvényhez egy mintasorozatot feleltetünk meg úgy, hogy egyenletes időközönként mintákat veszünk belőle. A következő ábrán egy folytonos jel mintavételezése látható, a mintavételezés a t_0 időpontban kezdődik.



Az ábrán T_s jelöli a két mintavétel között eltelt időt. Ennek reciproka (f_s) nagyon fontos fogalom, az ún. mintavételi frekvencia. Mintavételezés után a jel értékét nem ismerjük tetszőleges t időpontban, csak a $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots$ mintavételi időpontokban, azaz gyakorlatilag egy számsorozatot kapunk.

3.2.1 A diszkrét Fourier-transzformáció

Mivel a mintavételi időpontokon kívül nem ismerjük a jelet, így a spektrumát is csak bizonyos pontokban tudjuk meghatározni DFT (diszkrét Fourier-transzformáció) segítségével. A DFT általános alakja a következő:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-\frac{j2\pi kn}{N}},$$

ahol $X(k)$ a k . spektrum érték ($k = 0, \dots, N - 1$), $x[n]$ pedig a mintavételezett jel n . mintája, N pedig a mintaszám. A képletből látszik, hogy a kiszámított spektrum maga is diszkrét. Az, hogy milyen a DFT felbontása (mekkora Δf , két szomszédos pont távolsága) a minták számán és a mintavételi frekvencián múlik az alábbi összefüggés szerint:

$$\Delta f = \frac{f_s}{N}.$$

Például, ha 10 kHz frekvenciával veszünk 1000 mintát, akkor a DFT felbontása

$$\Delta f = \frac{10 \text{ kHz}}{1000} = 10 \text{ Hz}.$$

A k . spektrumértékhez (X_k) tartozó frekvencia pedig:

$$f_k = k \cdot \Delta f.$$

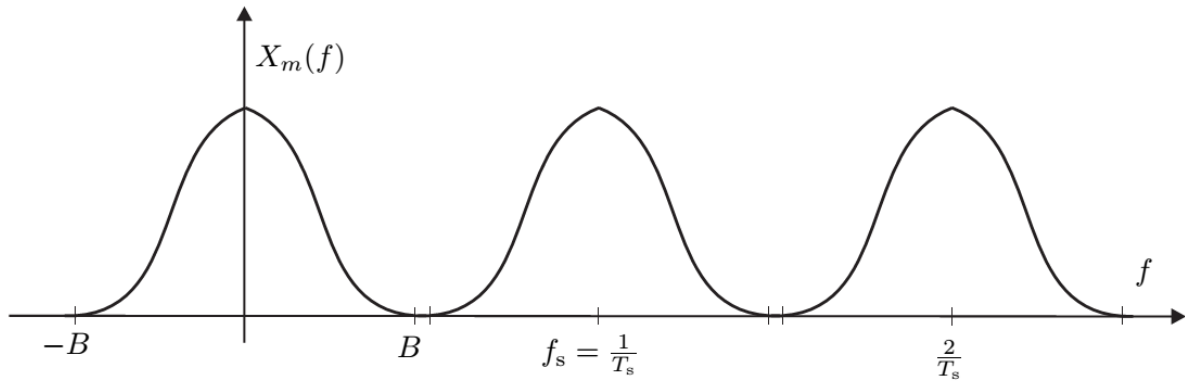
A DFT eredménye tehát a jel frekvenciakomponenseit a $[0, f_s - \Delta f]$ tartományban mutatja. A DFT további nagyon fontos tulajdonsága, hogy valós bemeneti jel esetén fennáll a komplex konjugált szimmetria. Ennek következménye, hogy valós jelekre az amplitúdóspektrum szimmetrikus lesz a 0 Hz frekvenciára. Ezen felül teljesül, hogy $X(k + N) = X(k)$.

3.2.2 A mintavételezés hatása a spektrumra

Egy jel mintavételezésekor a frekvenciát körültekintően kell megválasztani. A cél az, hogy a $[0, f_s - \Delta f]$ tartományban a jel spektruma jól legyen számítható a DFT segítségével, azaz a helyes spektrumot kapjuk eredményül. Adódhat a kérdés: mégis mitől változna meg a jel spektruma a DFT eredményében? A spektrum megváltozása a mintavételezés miatt megy végbe. Tegyük fel, hogy tudunk végtelen számú mintát venni, ekkor $\Delta f = 0$ a DFT felbontását leíró képlet miatt, azaz a jel spektrumát végtelen pontosan ismerjük. Jelölje $X(f)$ az eredeti, $X_m(f)$ pedig a mintavételezett jel spektrumát. A kettő kapcsolata a következő lesz:

$$X_m(f) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} X(f - i \cdot f_s).$$

A fenti képlet tehát azt mondja, hogy a mintavételezett jel spektrumát úgy kapjuk meg, hogy az eredeti jel spektrumát megismételjük minden $i \cdot f_s$ frekvencián ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), mint az a következő ábrán is látható:



Ha tehát a mintavételi frekvenciát túl kicsire választjuk, az ábrán látható spektrumok „összeérnek”, átlapolódnak. Mi a spektrumot a DFT után a $[0, f_s - \Delta f]$ tartományban látjuk, viszont az eredmény torz lesz, ha f_s túl kicsi értéke miatt oda „belóg” a $-f_s$ és f_s körül is megjelenő $X(f)$ spektrum széle. Frekvenciatartomány és időtartomány kéz a kézben járnak: ha a frekvenciatartományban torzul a jel, időtartományban is megváltozik, tehát az oszcilloszkóp által kirajzolt görbe is helytelen lesz, ha f_s rosszul van megválasztva. A mintavételi frekvencia helyes megválasztását megadó tételt Nyquist-Shannon tételnek vagy más néven mintavételi tételnek nevezik: ha egy jel Fourier-transzformáltja sávkorlátozott, azaz $X(f)=0$ ha $|f|>B$, akkor $f_s>2B$ esetén az eredeti időfüggvény hibátlanul visszaállítható (B a jelben található legnagyobb frekvenciakomponens).

Fontos gyorsan leszögezni, hogy a helyreállíthatóságnak a végtelen számú minta is feltétele, mivel ekkor fogjuk a spektrumot végtelen felbontással ismerni! Ha a mintaszám véges, akkor a fenti tétel a teljes visszaállíthatóságot nem biztosítja, csak annyit garantál, hogy nem lesz átlapolódásból származó torzulás a spektrumban.

A fentiek jobb megértését elősegítendő következnek pár példa.

1. példa: $f=50$ Hz frekvenciájú szinuszjelet akarunk mintavételezni. Úgy szeretnénk a mintavételi frekvenciát meghatározni, hogy betartsuk a mintavételi tételt. A szinuszjel periodikus, ezért a sávkorlátja meghatározásához a Fourier-sorát kell megnéznünk. Ebből láthatjuk, hogy a mi 50 Hz-es szinuszunk Fourier-sorában két komponens lesz, egy a -50 Hz frekvencián és a másik az 50 Hz frekvencián. Innen megállapítható, hogy a jel sáv szélessége $B=50$ Hz, tehát a mintavételi tétel betartásához $f_s>100$ Hz választás szükséges.

2. példa: $f=50$ Hz-es négyszögjelet szeretnénk mintavételezni a mintavételi tétel betartásával. A négyszögjel Fourier-sorában végtelen sok elem található, tehát a sávkorlátja is $B = \infty$, tehát a négyszögjelet nem tudjuk a spektrum torzulása nélkül mintavételezni.

3. példa: $f=50$ Hz-es szinuszjelet mintavételezünk $f_s=60$ Hz frekvenciával. Milyennek fogjuk látni a mintavételezett jel frekvenciáját? A feladat megoldásához frekvenciatartományban kell gondolkodnunk. Az 1. feladat alapján a szinuszjel spektrumának két komponense az 50 Hz és -50 Hz frekvenciákon található. Tudjuk, hogy a mintavételezés hatására a jel spektruma periodikus lesz, mégpedig az f_s frekvenciával. Tehát a mintavételezett jel az alábbi spektrumkomponenseket fogja tartalmazni: $0 \cdot f_s \pm 50$ Hz, $-f_s \pm 50$ Hz, $f_s \pm 50$ Hz, $-2f_s \pm 50$ Hz, $2f_s \pm 50$ Hz és így tovább. Mivel f_s frekvenciával mintavételezünk, mi a spektrumot a $[0, f_s - \Delta f]$ tartományban látjuk, ezért a fenti értékekből ki kell választanunk azokat, melyek ebbe a tartományba belesznek. Ez a következő két

érték lesz: $-f_s+50 \text{ Hz} = -10 \text{ Hz}$, $f_s-50 \text{ Hz}=10 \text{ Hz}$. Tehát két komponensünk lesz, azaz egy 10 Hz-es szinuszelet fogunk látni az oszcilloszkóp képernyőjén.

4. példa: A körülmények ugyanazok, mint a 3. példában, csak van még egy szinuszelünk, melynek frekvenciája $f_2=20 \text{ Hz}$. Ha az 50 Hz-es és 20 Hz-es szinuszelek összegét $f_s=60 \text{ Hz}$ frekvenciával mintavételezzük, akkor az oszcilloszkópon egy 10 Hz-es és egy 20 Hz-es szinusz összegét fogjuk látni, az előző példának megfelelően.

Az előző példában bemutatott eset igen zavaró, mivel előfordulhat, hogy azért mintavételeztünk f_s frekvenciával, mert mi csak és kizárólag a $[0, f_s - \Delta f]$ sávra voltunk kíváncsiak. Hogy a nem kívánt komponensek belapolódását elkerüljük, mintavételezés előtt aluláteresztő szűrőn engedik át a jelet (lásd fentebb). Az aluláteresztő szűrő vágási frekvenciája $f_c = \frac{f_s}{2}$, tehát még a mintavételezés előtt eldobnak a jelből minden olyan frekvenciakomponenst, ami átlapolódást okozhat. Úgy is mondhatnánk, hogy az átlapolásgátló szűrő „kierőszakolja” a mintavételi tétel betartását. A mérés során érdemes odafigyelni arra, hogy az átlapolásgátló szűrő sem tökéletes, rendelkezik átmeneti tartománnyal, ezért ugyan csökkentett amplitúdóval, de átjuthatnak rajta $\frac{f_s}{2}$ -nél nagyobb frekvenciájú jelkomponensek rajta. Az átlapolódási jelenség elkerülésére az analóg-digitális átalakítás előtt egy aluláteresztő szűrésre van szükség, amely a bemeneti jelből kiszűri az $f_s/2$ -nél magasabb frekvenciájú komponenseket. Ennek hiányában a következőket tapasztaljuk (f_{in} a bemenő jel frekvenciája):

- $0 \dots \dots \frac{f_s}{2}$ frekvenciatartományba eső jelek helyesen jelennek meg.
- $\frac{f_s}{2} \dots \dots f_s$ frekvenciatartományba eső jelek belapolódnak a $0 \dots \dots \frac{f_s}{2}$ tartományba, az érzékelt frekvencia pedig $f_s - f_{in}$ lesz.
- $f_s \dots \dots (f_s + \frac{f_s}{2})$ frekvenciatartományba eső jelek belapolódnak a $0 \dots \dots f_s/2$ tartományba, az észlelt frekvencia $f_{in} - f_s$ lesz.

Tehát, ha egy átlapolásgátló szűrő nélküli analóg-digitális átalakítóra rákötünk egy jelgenerátort, és elkezdjük növelni a generált szinuszel frekvenciáját, akkor a digitális oldalon először növekvő frekvenciájú jelet kapunk ($0 \rightarrow \frac{f_s}{2}$), $\frac{f_s}{2}$ elérése után az észlelt frekvencia elkezd csökkenni ($\frac{f_s}{2} \rightarrow 0$), majd f_s elérése után újra növekedni ($0 \rightarrow \frac{f_s}{2}$) és így tovább.

A szűrőkről még lesz szó bővebben a későbbiekben (4. fejezet), aki számára a fentiek nem teljesen világosak, az a szűrők tanulmányozása után térjen ide vissza.

3.3 Periodikus jelek mintavételezése

Egy mintavételezett jelet nem tudunk Fourier-sorba fejteni, ezért a frekvenciatartománybeli viselkedésének ellenőrzéséhez a DFT-t használjuk. Periodikus jelek esetén a DFT eredményét nem csak a mintavételezés miatti átlapolódás befolyásolhatja. Koherensnek nevezzük egy periodikus jel mintavételezését akkor, ha a jelből pontosan egész számú periódust mintavételezünk. A koherens mintavételezés fontosságát a szinuszel példáján keresztül mutatjuk be.

1. példa: $f_x=15 \text{ Hz}$ -es szinuszelet szeretnénk koherensen mintavételezni $f_s=37 \text{ Hz}$ frekvenciával, hogy betartsuk a mintavételi tételt is. Arra kell rájönnünk, hogy legalább hány mintára lesz szükségünk a koherencia biztosításához. Legyen a keresett minimális mintaszám N , és legyen D a mért periódusok száma (nem feltétlenül egész!) N minta esetén. A fenti mennyiségek az alábbi módon függnek össze:

$$\frac{f_x}{f_s} = \frac{D}{N}$$

Ebből D kifejezhető:

$$D = N \frac{f_x}{f_s}$$

Tehát N értékét addig kell növelnünk, míg D -re egész számot nem kapunk. A legkisebb mintaszám, amelyre D egész lesz az $N=37$, ekkor $D=15$ periódust fogunk mérni a jelből. Vagyis a mintavétel a fenti esetben koherens lesz, ha a mintaszám 37 egész számú többszöröse.

2. példa: szinuszjel mintavételezünk, a mintákat az alábbi jelmodell segítségével írhatjuk le:

$$x[k] = 1,75 \cdot \cos(2\pi \cdot 0,15 \cdot k + \pi/3), k=0, 1, 2, \dots, N-1.$$

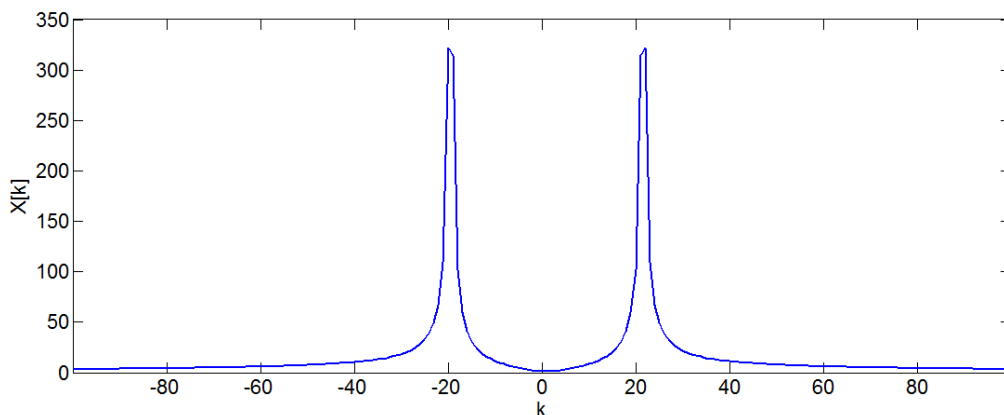
Koherens lesz-e a mintavétel, ha $N=40$ mintát veszünk? A $\cos()$ 2π periodikus függvény, tehát a koherencia vizsgálatához azt kell eldöntenünk, hogy a 0. mintánk és a 40. mintánk esetében a fáziskülönbség 2π egész számú többszöröse-e (azaz ugyanúgy folytatódik-e a jel a 40 minta után, mint ahogy a 0. mintánál kezdődik). A $k=40$ és $k=0$ mintavételi időpontokban a fázis rendre $(2\pi \cdot 0,15 \cdot 0 + \frac{\pi}{3})$ és $(2\pi \cdot 0,15 \cdot 40 + \frac{\pi}{3})$, aminek különbsége $2\pi \cdot 6$. Tehát a fáziskülönbség 2π egész számú többszöröse, így a mintavételezés koherens.

A koherencia fogalmának tisztázása után nézzük meg a koherensen mintavételezett szinuszjel diszkrét Fourier-transzformáltjának eredményét zárt alakban:

$$x[k] = A \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{D}{N} \cdot k + \varphi), k=0, \dots, N-1 \rightarrow X_k = \begin{cases} N \frac{A}{2} e^{j\varphi}, k = D \\ N \frac{A}{2} e^{j\varphi}, k = -D \\ 0 \text{ egyébként} \end{cases}$$

Ebből látható, hogy a DFT eredménye csak az D és $-D$ (vagy $N - D$, ahogy jobban esik, lásd a DFT periodicitását) helyeken tér el a nullától. A fenti mintavételezés koherens volt, így D egész szám (tulajdonképpen ő a mért periódusok számát jelöli).

Most tegyük fel, hogy a mintavételezés nem koherens, legyen pl. $D=20,5$. A spektrum eredménye az alábbi lesz:



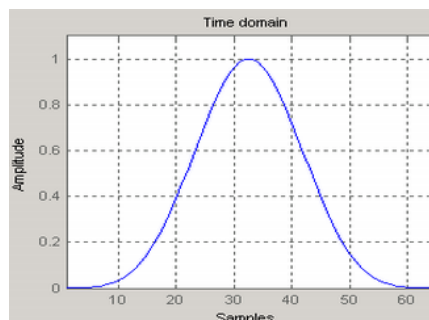
A spektrum jól láthatóan különbözik attól, mint amit fent állítottunk: nem csak két pontban különbözik zérustól. A csúcsok nagyjából jó helyen vannak (-20,5 és 20,5-nél kéne lenniük, de a DFT csak egész k helyeken rajzolja ki a spektrumot), viszont nem két egyenes vonalat látunk, hanem „szoknyákat”. Ezt nevezzük spektrumszivárgásnak: a teljesítmény látszólag átszivárog olyan, a csúcs körül található frekvenciákra, ahol igazából zérus értékű kellene, hogy legyen a spektrum. A probléma abból származik, hogy véges számú adatot dolgoztunk fel a DFT-vel. Ha a mintaszám végtelen lenne, helyesen látnánk a spektrumot (ekkor, ugye, a DFT felbontása is végtelen lenne, tehát pontosan látnánk a csúcsokat a -20,5 és 20,5 helyeken, és nem lenne szivárgás sem). A véges mintaszámot (N) úgy modellezhetjük, mintha az időtartományban a DFT végrehajtása előtt egy olyan ablakfüggvénnyel szoroztuk volna be a szinuszt, amely N szomszédos pontban 1 értékű, máshol mindenütt zérus értéket vesz fel: $\varepsilon[k] - \varepsilon[k - N - 1]$. Egy ilyen ablakfüggvény DFT-jének jellege a következő:

$$\frac{\sin((k-D)\pi)}{\sin\left(\frac{(k-D)\pi}{N}\right)}$$

Vagyis, ha D nem egész, akkor az egész k értékekre a függvény nem fog 0 értéket felvenni, és ezeket látjuk „szoknyaként” a DFT eredményében. Tehát, a szinuszjel nem koherens mintavételezésekor az ablakfüggvény mintái megjelennek a spektrumban, a jelenséget spektrumszivárgásnak nevezzük.

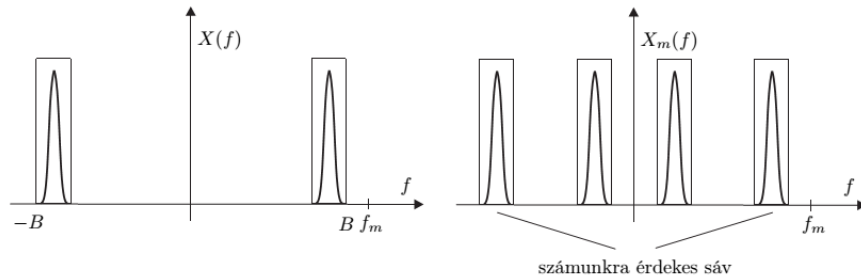
Nem koherens mintavétel esetén a spektrumszivárgáson túl ún. léckerítés-hatással (picket fence effect) is találkozhatunk. A léckerítés-hatás abból következik, hogy a DFT-t csak véges számú ponton számoljuk ki. Képzeljük el, hogy az utcán sétálva egy „hagyományos”, háromszög alakú tetővel rendelkező családi házat nézünk egy kerítésen keresztül, ahol a lécek közötti réseken látunk csak át. Ha pont úgy állunk, hogy egy lécc kitakarja a ház legmagasabb pontját, nem tudjuk megmondani a ház magasságát. Ehhez nagyon hasonlóan: ha nem koherensen mintavételezünk egy szinuszelet, akkor a hozzá tartozó csúcs a DFT két pontja közé fog esni, azaz nem fogjuk tudni az amplitúdót pontosan megmondani (pl. a fenti, nem koherensen mintavételezett szinusz DFT-jét mutató ábra alapján az amplitúdót kb. 320-nak becsülnénk, azonban a helyes érték 512, csak ezt nem látjuk, mert nem egész számú periódust mintavételeztünk).

Megjegyezzük, hogy amennyiben a koherens mintavételezés nem lehetséges, a szivárgás hatása az időbeli minták ablakozásával jelentősen csökkenthető. Az ablakozás során a bemeneti jelünkből nem egyszerűen kivágunk N darab mintát, hanem a kivágott mintasort megszorozzuk egy olyan ablakozó függvénnyel, amely a mintasor szélén (jobb és bal oldal) kis értékű, a közepe felé pedig egyre nő; ilyen például a Blackmann-Harris ablak, amelyet az alábbi ábra szemléltet.



3.4 Alul- és túlmintavételezés

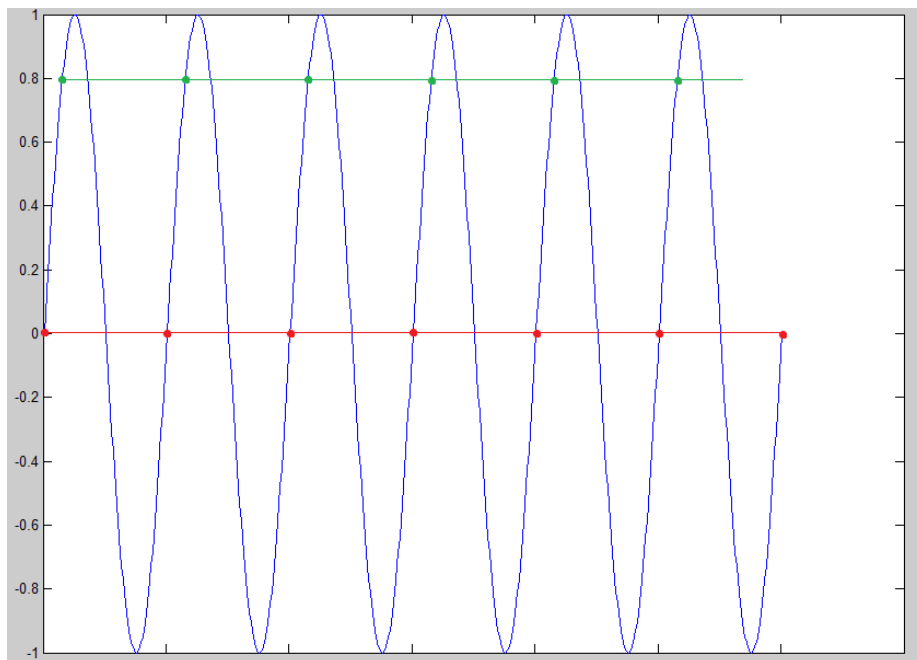
Alumintavételezésnek nevezzük azt, amikor a mintavételi tételt nem betartva mintavételezünk egy jelet. Ilyenkor a mintavett jel spektrumában a nagyfrekvenciás komponensek belapolódnak a $\left[-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2} - \Delta f\right]$ tartományba. Néha azonban ez nem okoz gondot, pl. tisztában vagyunk vele, hogy a jel spektruma nagyon keskeny. A következő ábra ilyen esetet mutat be:



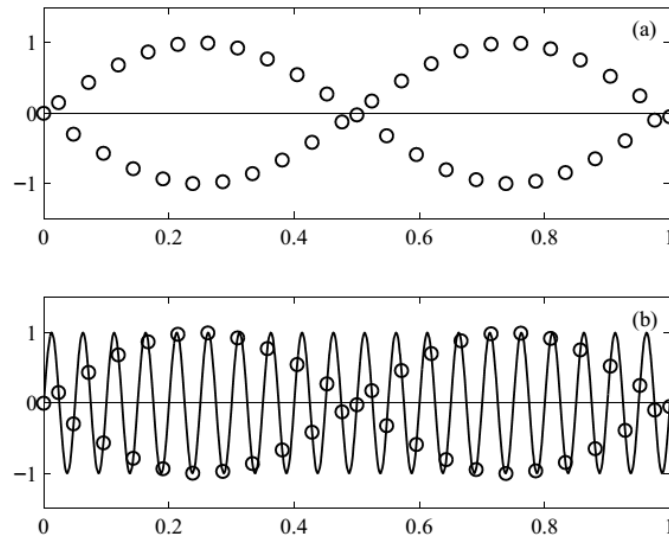
A keskeny spektrum miatt az átlapolódás nem okoz torzulást a spektrumban. Az időtartományban mindez azt jelenti, hogy ugyanazt a jelalakot kisebb frekvencián fogjuk látni.

Szemléletes példája az alumintavételezésnek a visszafelé forgó kerék filmekben. Amíg a kerék elég lassan forog (fél fordulatnál kevesebbet két képkocka között), addig a videón is jól jelenik meg. A gyorsuló forgással egy idő után megsértjük a mintavételi törvényt, ha például a kerék majdnem egy teljes fordulatot (pl. 0,75-t) megtesz két képkocka között, akkor úgy fogjuk látni, hogy ellenkező irányba forgott 0,25 fordulatot.

Egy másik szemléletes eset, amikor a mintavételezési frekvencia megegyezik a bemeneti szinuszjel frekvenciájával. Ekkor a mintavételezési pontjainkban a szinusz amplitúdója mindig ugyanakkora, azaz a mintavett pontokból rajzolható görbe egy vízszintes egyenes, értéke pedig attól függ, hogy a mintavételezési időpontok a szinusz milyen fázisára esnek (az alábbi ábrán a zöld és piros pontok két esetet mutatnak).



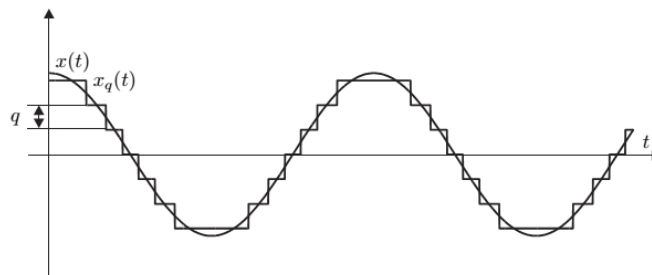
Túlmintavételezésnek nevezzük, amikor a mintavételi frekvencia jóval nagyobb, mint amit a mintavételi tétel előírna. Tulajdonképpen nem volna szükség túlmintavételezésre a spektrum torzítatlanságához, az esetek többségében mégis célszerű a jelet túlmintavételezni, mivel az oszcilloszkópon csalóka ábrát kaphatunk, ha épphogy csak betartjuk a tétel előírását. Az alábbi ábrán a felső kép a mintavételezett jelet mutatja, amit első ránézésre két, ellentétes fázisú és megegyező szinuszjelnek tűnik. A valóság azonban (alsó kép) az, hogy egy viszonylag nagy frekvenciájú jelet mintavételeztünk, a mintavételi tételt betartjuk (a mintavételi frekvencia láthatóan nagyobb, mint a jel frekvenciájának kétszerese), de csak éppen hogy.



A tanulság tehát, hogy célszerű törekedni a túlmintavételezésre.

3.5 Analóg-digitális átalakítás

Az A/D átalakítás tulajdonképpen a jel amplitúdótartománybeli diszkrétizálását vagy más néven kvantálását jelenti. Az A/D átalakítók mintavételezést és kvantálást is végeznek a feldolgozandó jelen. A műveletek végrehajtási sorrendje lényegtelen: ugyanaz lesz az eredmény, ha először mintavételezünk és azután kvantálunk, vagy fordítva. A következő ábra egy folytonos szinuszjel kvantálását illusztrálja:



Az ábrán $x(t)$ jelöli az átalakítandó, $x_q(t)$ pedig az átalakított jelet. Az átalakítandó $x(t)$ jel értékészlete folytonos: tetszőleges valós értéket felvehet. Az átalakított $x_q(t)$ jel pedig csak olyan

értéket vehet fel, amit az A/D átalakító ábrázolni tud. Az ábrán q jelöli a kvantum nagyságot: ez az a feszültségtartomány, amelyen belül minden értékhez az A/D átalakító egy bizonyos számértéket rendel hozzá. A kvantum nagyságot szokták *LSB*-vel is jelölni (least significant bit). Habár a fenti ábra a kvantálás folyamatát jól mutatja be, az A/D átalakítók működéséről hamis képet ad, mivel azt a benyomást kelti, hogy az analóg-digitális átalakítás során a folytonos $x(t)$ feszültségjelhez egy folytonos, de diszkrét értékekből álló $x_q(t)$ feszültségjel rendel hozzá. Nem szabad arról megfeledkezni, hogy az A/D átalakítás során mintavételezés is történik, ezért valójában a kimenete egy olyan számsorozat, amelyben minden elem értéke csak egy bizonyos érték halmazból kerülhet ki. A fentiek megértését elősegítendő egy számpélda következik.

1. példa: Van egy $b=10$ bites A/D átalakítónk, amely a $[0\text{ V}, 5\text{ V}]$ tartományban tud jeleket átalakítani. Először határozzuk meg, hogy az A/D milyen kimeneti kódokat tud megadni! Mivel 10 bites, ezért a kimeneti kódok 10 bit hosszúak lesznek, 0000000000-tól 1111111111-ig. Ezekből összesen $2^{10}=1024$ db van, tehát az A/D átalakító 1024 különböző érték meghatározására képes. Ha ismerjük a kódok számát és a feszültségtartományt, amelyen belül az átalakító működik, meg tudjuk határozni a kvantum nagyságot. Jelen esetben:

$$q = LSB = \frac{5\text{ V} - 0\text{ V}}{2^{10}} = 4,883\text{ mV}.$$

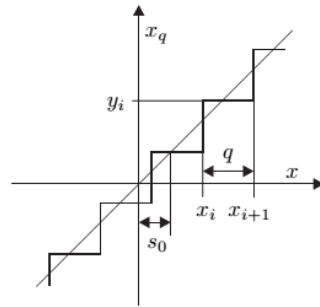
Tehát a kvantum nagyságnak mindig van dimenziója, amely egyezik a bemeneti jel dimenziójával. Végül azt kell meghatároznunk, hogy az egyes digitális értékekhez milyen feszültségértékek tartoznak az $x_q(t)$ kvantált jelben. Jelölje D a digitális kód értékét, U pedig a feszültséget:

$$U = D \cdot q.$$

A fenti példában az A/D átalakítót a bitszámával jellemeztük, ami nagyon fontos és alapvető tulajdonsága minden A/D átalakítónak. Azt is láttuk, hogy az átalakító csak a $[0\text{ V}, 5\text{ V}]$ tartományon végzett átalakítást. Minden A/D átalakítóhoz definiálva van egy ilyen tartomány, az ezen kívül eső feszültségeket az A/D úgy kezeli, mintha valamelyik végértéket kapná bemenetnek (jó esetben, rosszabb esetben egyszerűen elég). A tartomány felső határát jelöljük *FS*-sel (Full Scale), a tartomány szélességét pedig *FSR*-rel (Full Scale Range). Ez tehát megadja annak a feszültségtartománynak a szélességét, amelyen belül az átalakítás folyik. Unipolárisnak nevezzük azokat az átalakítókat, melyeknél az átalakítás alsó határa 0 V (a fenti példában tehát unipoláris A/D-vel számoltunk), ebben az esetben $FS = FSR$. Léteznek azonban bipoláris A/D-k is, melyek a $[0, FS]$ helyett a $[-FS, FS]$ tartományban alakítanak át, ez esetben $FSR = 2 \cdot FS$. Ha az *FSR* és a b bitszám ismert, akkor a kvantum nagyság számíthatóvá válik:

$$q = LSB = \frac{FSR}{2^b}.$$

A fentiek ismeretében már könnyen értelmezhetővé válik az ideális kvantáló karakterisztikája:



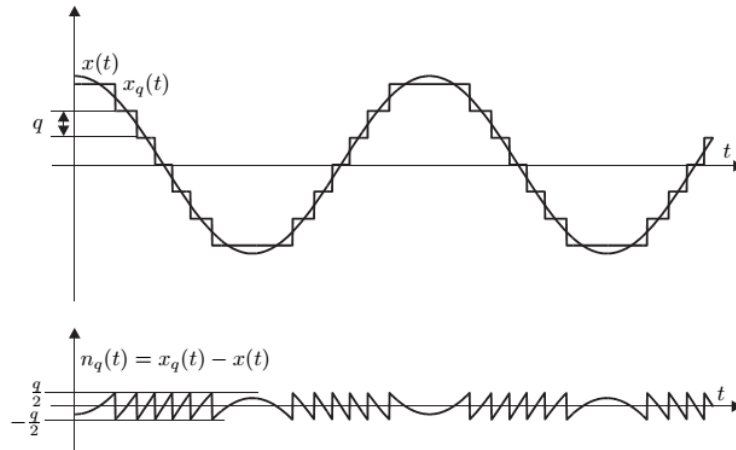
Szándékosan írtunk kvantálót A/D átalakító helyett: a fenti karakterisztika azt adja meg, hogyan rendelődnek hozzá az egyes folytonos x feszültségértékekhez a diszkrét x_q értékek, de itt mindkét koordináta-tengely dimenziója feszültség. A kvantáló tehát feszültséghez feszültséget rendel, míg az A/D átalakító ezekhez a kvantált feszültségekhez egy digitális számot (az ábrán ez y_i , ez tehát már nem feszültség dimenziójú, csak az összerendelés illusztrálására van a tengelyhez írva). A valóságban mi mindig a digitális kódot kapjuk meg, abból kell tudnunk visszaszámolni, hogy az milyen feszültségértéket reprezentált (a kvantáló csak egy, a megértést segítő fogalom). A fenti átalakító-karakterisztikán látható, hogy az egy lépcsőfüggvény: értéke egy darabig konstans, majd ugrik egyet, és így tovább. Ezeknek az ugrásoknak a helye fontos jellemzője az analóg-digitális átalakítóknak, ezeket nevezzük komparálási szinteknek (vagy más néven átváltási szinteknek). A komparálási szintek dimenziója feszültség. Látható, hogy ideális átalakító esetén két szomszédos komparálási szint mindig q távolságra van egymástól, és a két szomszédos komparálási szint közé eső x feszültségértékekhez ugyanaz az x_q érték (ennélfogva ugyanaz a D digitális kód) rendelődik hozzá. Másképp fogalmazva, az FSR tartomány 2^b darab q nagyságú részre van felosztva, és ezeket a részeket a $2^b - 1$ darab komparálási szint választja el egymástól.

3.5.1 Kvantálási zaj

Az analóg-digitális átalakítók működése az előzőek ismeretében felfogható úgy is, hogy először egy kvantáló előállítja a folytonos kvantált jelet, ez mintavételeződik, aztán mintánként hozzárendelődik egy digitális érték, amit a számítógép fel tud dolgozni. Ha az volna a feladatunk, hogy a digitális érték ismeretében határozzuk meg az eredeti x jel értékét, akkor x_q meghatározásáig jutnánk csak el ($x_q = D \cdot q$), onnantól kezdve nem tudnánk többet mondani az eredeti x értékről. Az A/D átalakítás során tehát információvesztés történik, az eredeti jelet a mintákból nem tudjuk helyreállítani, azaz minden egyes digitális kódból kiszámolt feszültség pontatlan lesz (hacsak nem $x = x_q$, de ez elég ritka). Ezt a pontatlanságot nevezik kvantálási hibának, ennek értéke pedig a kvantumnagyság függvénye, hiszen a szomszédos komparálási szintek kvantumnagyságnyi távolságra vannak egymástól, azaz annyit tudunk mondani, hogy milyen határok között mozog a D digitális kódhoz tartozó feszültség. Manapság a kvantálók ún. kerekítéses kvantálók, ez annyit jelent, hogy a bemeneti x értékhez a hozzá legközelebbi x_q rendelődik hozzá (másik típus a csonkolásos kvantáló, mikor a bemeneti x értékhez nem a legközelebbi, hanem a legközelebbi x -nél kisebb x_q érték rendelődik). Kerekítéses kvantáló esetén az n_q kvantálási hiba értéke az alábbi sávban található:

$$-\frac{q}{2} < n_q \leq \frac{q}{2}.$$

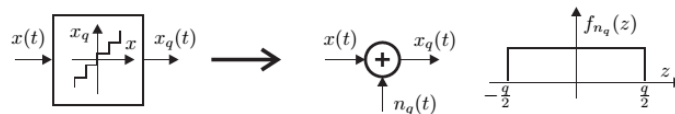
Az alábbi ábrán egy szinuszjel kvantálása és a kvantálási hiba alakulása látható:



Célszerű volna a kvantálási hibát statisztikailag is jellemezni, de ehhez először modelleznünk kell. Mivel a hiba maximális és minimális értékén kívül semmit nem tudunk, célszerű egyenletes eloszlású valószínűségi változónak tekinteni a $[-\frac{q}{2}, \frac{q}{2}]$ intervallumban. Ebből következik, hogy várható értéke és szórása:

$$\mu = 0, \sigma = \frac{q}{\sqrt{12}}.$$

A kvantálást tehát felfoghatjuk úgy is, mintha az eredeti jelhez egy egyenletes eloszlású zajt kevernénk hozzá, ahogy az a következő ábrán is látható:



3.5.2 Átlapolásgátló szűrés

Az A/D átalakítók döntő többségének bemenetén átlapolásgátló szűrő található, hogy a jel mintavételezéséből fakadó spektrumtorzulást el lehessen kerülni (lásd mintavételezés fejezet). A szűrést még a mintavételezés és kvantálás előtt végzik el. Az átlapolásgátló szűrő vágási frekvenciája:

$$f_c = \frac{f_s}{2},$$

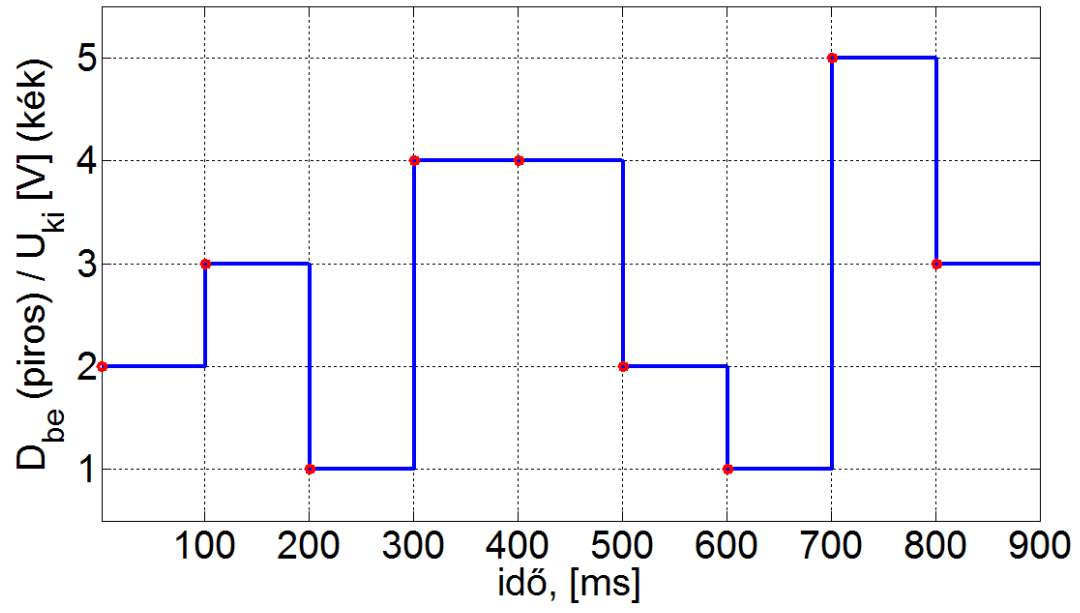
ahol f_s az A/D mintavételi frekvenciája. Fontos, hogy ezek az aluláteresztő szűrők sosem ideálisak, mindig rendelkeznek egy átmeneti tartománnyal az áteresztő és záró tartományok között.

3.6 Digitális-analóg átalakítás

A digitális-analóg átalakítást az A/D átalakítás ismeretében nagyon könnyű megérteni: itt digitális kódokhoz rendelünk konstans feszültségértékeket. Mivel a konstans digitális kódokhoz konstans feszültségek tartoznak, nincsenek komparálási szintek. A kvantum nagyság itt ugyanúgy határozható meg, mint az A/D átalakítók esetében:

$$q = LSB = \frac{FSR}{2^b}.$$

Ideális esetben bármely két szomszédos digitális kódhoz tartozó kimeneti feszültség különbsége q . Ebből az is következik, hogy a jel a D/A visszaalakítás után lépcsőzetes alakot fog felvenni:



4 Rendszerek

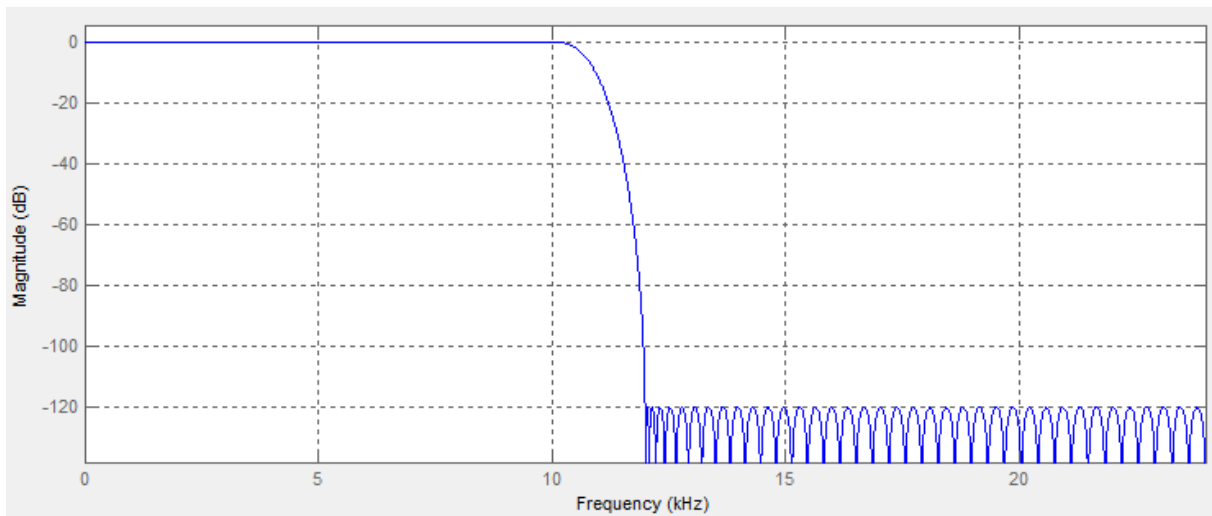
4.1 Átviteli karakterisztika

Viszonylag sok rendszerünk jellemezhető az átviteli karakterisztikájával, ami szemléletesen a rendszer bemeneti jele és kimeneti jele közötti összefüggést mutatja meg (a pontos részletektől újfent eltekintünk). A spektrumhoz hasonlóan az átviteli karakterisztikát is a frekvenciatartományban értelmezzük: azt jelenti, hogy a rendszerünk a bemeneti jel egyes komponenseit (azaz a bemeneti jel spektrumában található szinuszos komponenseket) mekkora mértékben erősíti, illetve mekkora mértékben tolja el időben (azaz mekkora mértékben módosítja a komponens fázisát). Tehát, ha az átviteli karakterisztikát grafikusán ábrázoljuk, akkor újfent két ábrát kapunk. Az amplitúdó-karakterisztika x tengelyén a frekvencia, y tengelyén pedig az erősítés mértéke található; míg a fázis-karakterisztika x tengelye ugyancsak frekvenciaértékeket tartalmaz, y tengelye viszont a fázistolás mértékét adja meg.

Tipikus ábrázolási formaként megemlíthető a Bode-diagram, amely az amplitúdó-karakterisztika és a fáziskarakterisztika grafikus ábrázolása mégpedig úgy, hogy mind az amplitúdó-, mind pedig a frekvenciatengely skálázása logaritmikus.

Tekintsünk át néhány tipikus átviteli karakterisztika típust (minden esetben csak az amplitúdó-karakterisztika szerepel lineáris frekvenciatengellyel)!

4.1.1 Aluláteresztő



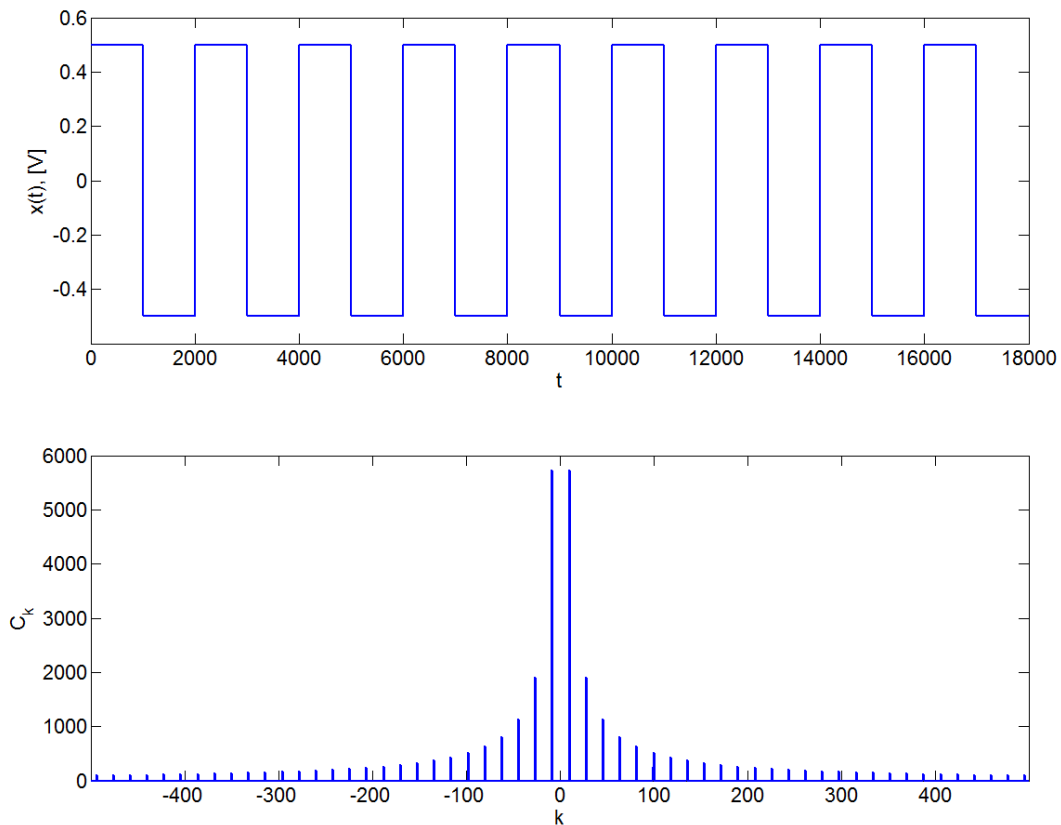
Az aluláteresztő karakterisztikájú rendszer bizonyos frekvenciakomponensekig átereszt a bemeneti jelet, bizonyos frekvencia felett azonban kiszűri a komponenseket. Jellemzésére az áteresztő tartomány felső frekvenciája (itt 10 kHz), a záró sáv alsó frekvenciája (itt 12 kHz), valamint a zárósáv elnyomásának mértéke (itt 120 dB) szolgál.

Az izgalom fokozása érdekében egy számítási példát is bemutatunk.

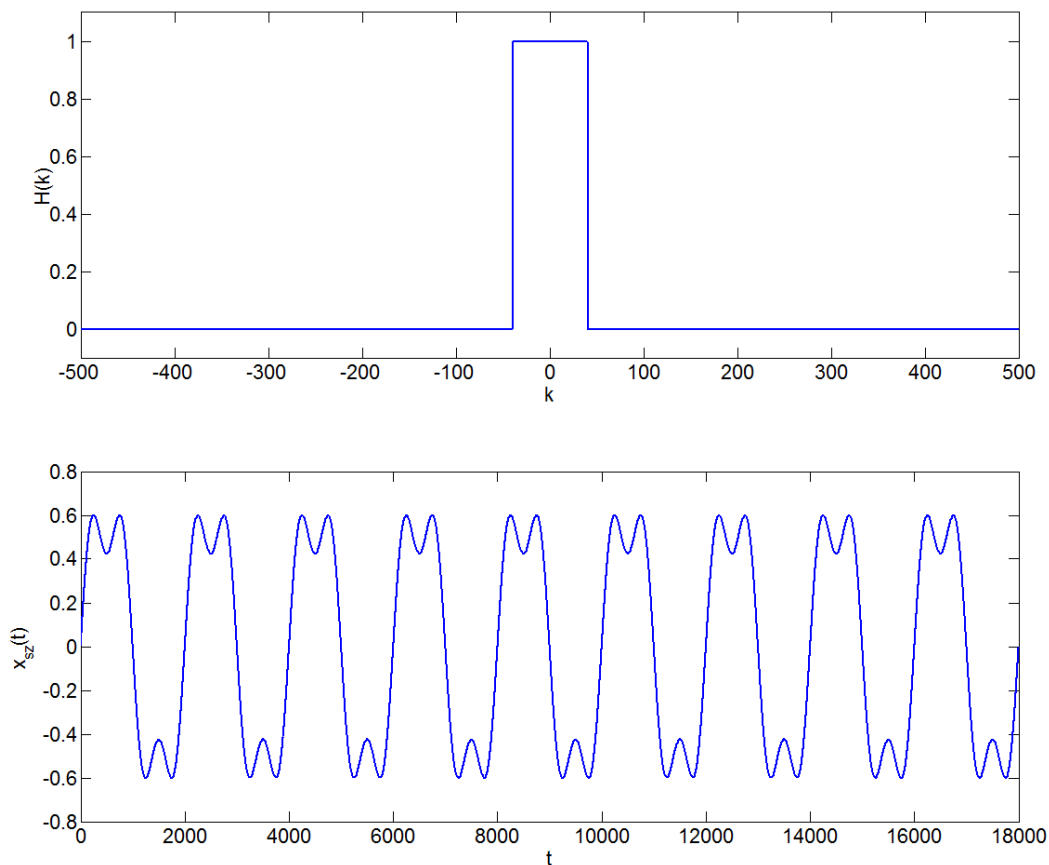
1. példa: 50 Hz-es négyszögjelet szűrünk $f_c = 175$ Hz-es ideális aluláteresztő szűrővel. Egy ilyen szűrő karakterisztikája a következő:

$$H(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_c \\ 0, & |f| > f_c \end{cases}$$

Ha tehát a négyzetjel Fourier-sorában egy adott $k \cdot f$ frekvenciájú komplex exponenciálisra igaz, hogy $|k \cdot f| < f_c$, akkor a hozzá tartozó C_k együttható 1-gyel szorzódik, máskülönben 0-val. A négyzetjel Fourier-sora végtelen sok szinuszelet tartalmaz, mivel a fel- és lefutó élknél a változás végtelen gyorsan megy végbe, amihez végtelen nagy frekvenciájú szinuszkomponensek kellenek. Tudjuk, hogy a négyzetjel alkotó komplex exponenciálisok frekvenciái a $k \cdot 50$ Hz frekvenciákon vannak, ahol $k=0, \pm 1, \pm 2$ stb. Ezek közül azok a komplex exponenciálisok fognak átjutni a szűrőn, amelyek frekvenciája abszolút értékben kisebb f_c -nél, vagyis a következők: -150 Hz, -100 Hz, -50 Hz, 0 Hz, 50 Hz, 100 Hz, 150 Hz. Tehát a négyzetjel alkotó végtelen sok szinuszból csak 4 darab fog átjutni a szűrőn: egy 150 Hz-es, egy 100 Hz-es, egy 50 és egy 0 Hz-es (ez a legutolsó a DC szint). A következő ábrákon látható a négyzetjel az időtartományban és a hozzá tartozó spektrum.

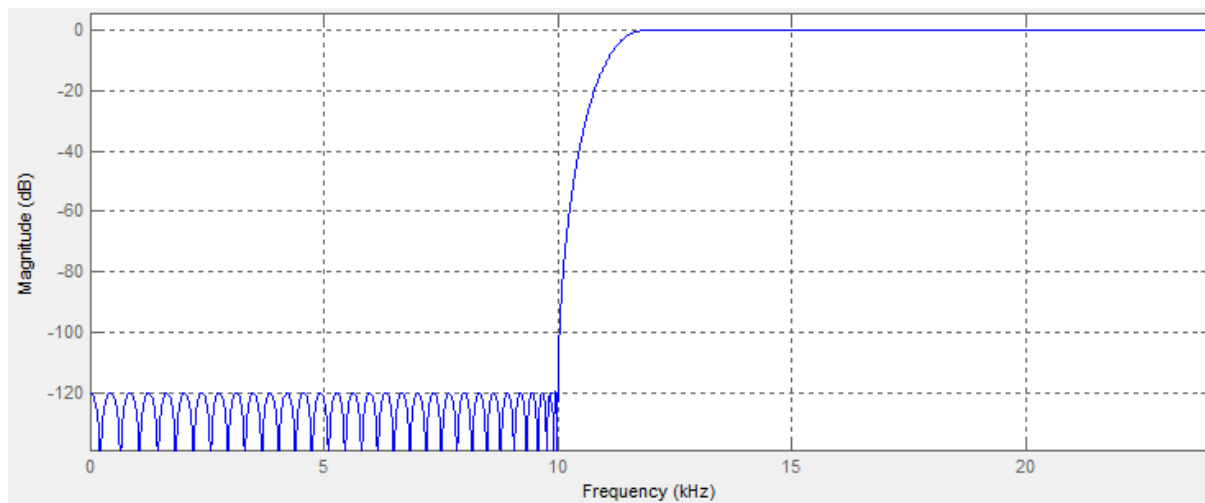


Az alábbi ábrákon az ideális aluláteresztő szűrő karakterisztikája, illetve a szűrt négyzetjel időtartománybeli mintái láthatók. A szűrt négyzetjel ábráján látható, hogy a szűrés hatására a jel „hullámossá” válik: a szűrő vágási frekvenciájánál nagyobb frekvenciájú szinuszok egyenesítették ki a jelet. Ezek hiányában a csúcserték is megnőtt 0,5 V-ról 0,6 V-ra.



A valóságban, sajnos, nem létezik ideális aluláteresztő szűrő. Az áteresztő- és zárótartomány között mindig található egy ún. átmeneti tartomány, amely ugyan csillapítja a jelet, de még nem nyomja el teljesen ($0 < H(f) < 1$). Ha a négyzögjelünket valódi aluláteresztő szűrővel szűrjük, akkor azt fogjuk tapasztalni, hogy az átmeneti tartományba eső komponensek amplitúdója lecsökken, tehát ezek a szinuszok kisebb amplitúdóval ugyan, de átjutnak a szűrőn (mivel az ide eső C_k együtthatók 1-nél kisebb számmal szorzódnak).

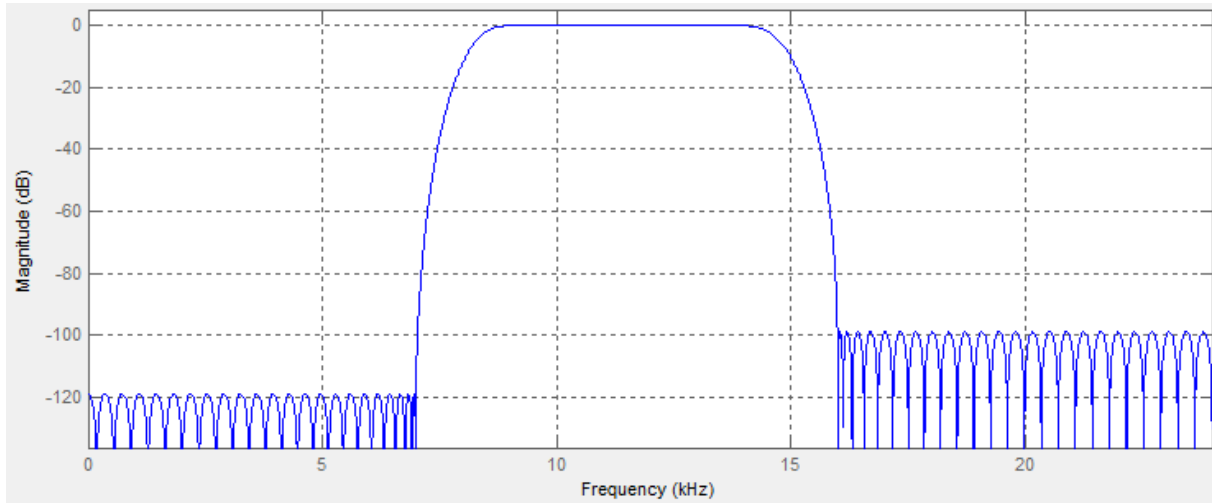
4.1.2 Felüláteresztő



A felüláteresztő rendszer az előző ellentétét valósítja meg: csak adott frekvencia felett engedi át a bemeneti jelet, alatta kiszűri a komponenseket. Jellemzésére ugyancsak a záró tartomány felső

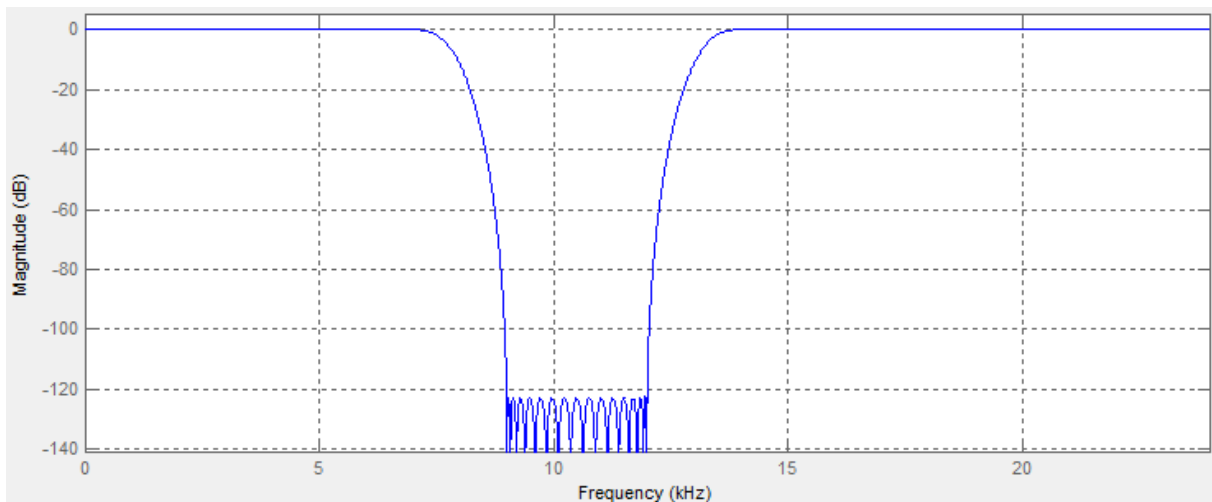
frekvenciája, az áteresztő tartomány alsó frekvenciája (itt rendre 10 és 12 kHz), valamint az elnyomás mértéke szolgál.

4.1.3 Sáváteresztő



A sáváteresztő rendszer felfogható egy felüláteresztő és egy aluláteresztő rendszer sorba kapcsolásának, az ábrából láthatóan az ilyen rendszerek csak két frekvenciaérték közötti komponenseket engedik át. Jellemzésére ugyancsak a záró és áteresztő tartományok frekvenciái (összesen 4), illetve az elnyomások (2) használhatók.

4.1.4 Sávjáró

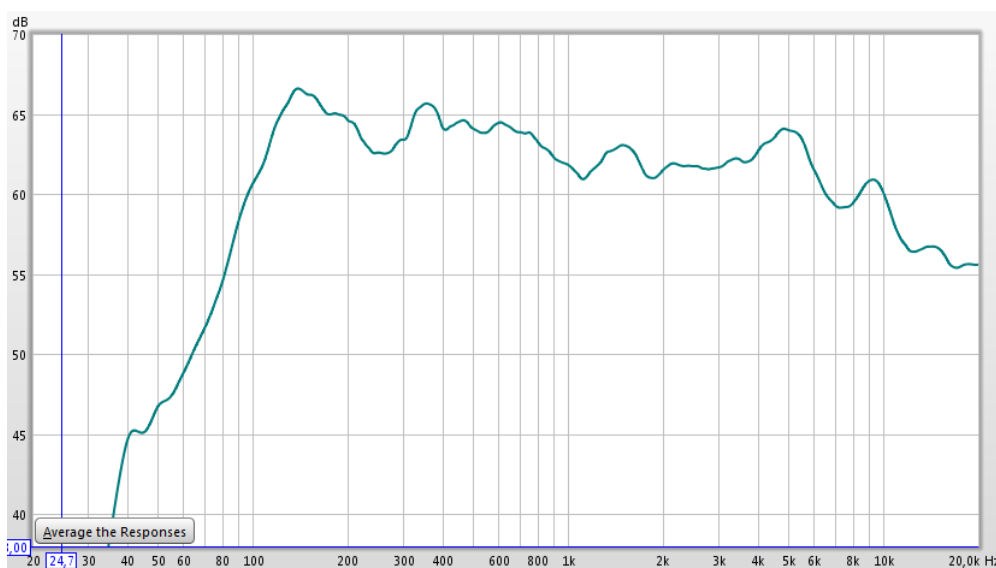


Utolsó tipikus példánk a sávjáró rendszer, amely adott tartományon kívül eső frekvenciakomponenseket enged át.

4.1.5 Átviteli karakterisztika példa

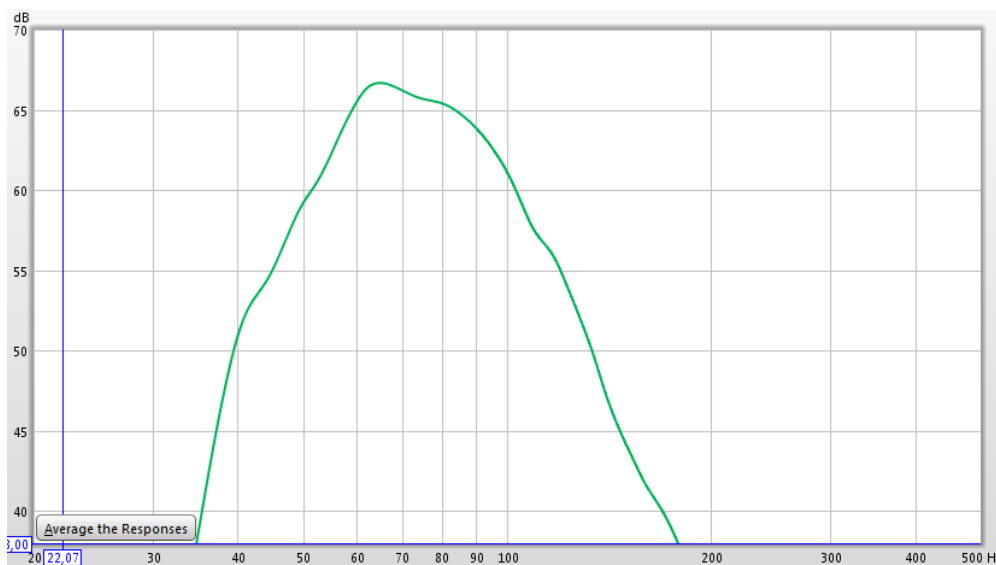
Példaként vizsgáljuk meg egy kisebb házimozsi hangrendszerét!. Tegyük fel, hogy beszereztünk egy rendes erősítőt és egy 5.1-es hangrendszert, amely – helyszúke miatt – 5 kisebb hangdobozból (szatellit) valamint egy mélynyomóból áll. Egy idő után feltehetően meg fogjuk találni az erősítő beállításai között a „crossover” opciót, ami azt adja meg, hogy milyen frekvencia alatt továbbítsa az erősítő a hangokat a szatellitok helyett a mélynyomóra. Ennek eldöntéséhez tudnunk kell, hogy a szatellitok és a mélynyomó milyen frekvenciatartomány megszólaltatására képes. Ez jobb esetben normálisan szerepel az adatlapon, rosszabb esetben nem szerepel, vagy nem teljesen fedi a

valóságot. Ha viszont rendelkezésünkre állnak a megfelelő átviteli karakterisztikák, akkor megfelelő döntést tudunk hozni. Nézzük meg először egy kisebb hangdoboz amplitúdó-karakterisztikáját!



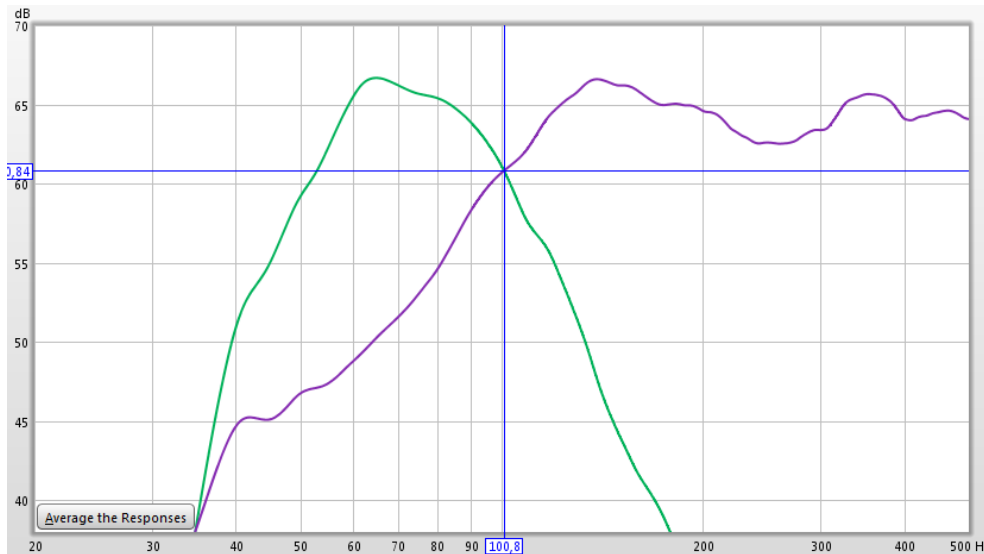
Az emberi fül által észlelt frekvenciatartományt 20 Hz és 20 kHz között szokás megadni (bár ennél a többség jóval szűkebb tartományt hall). A fenti ábrán a közepes és nagyobb frekvenciák visszaadása többé-kevésbé rendszerben van (a magas tartományban tapasztalt elnyomás a méréshez használt mikrofon hibája), kis méretű dobozaink ezeket viszonylag kulturáltan képesek megszólaltatni. Sajnálatos módon ugyanakkor (elsősorban a méretéből fakadóan) szatellit sugárzóink erős kihívásokkal szembesül, amikor a kisfrekvenciás komponensek reprodukcióját kérjük rajta számon (ezek lennének a mély hangok), azaz az hallható tartományt tekintve felüláteresztő jellegűnek tekinthető, kb. 100-120 Hz alatt nem várhatunk tőle túl sokat.

Ezen frekvenciatartomány megszólaltatása a mélynyomó hatásköre, aminek amplitúdó-karakterisztikáját az alábbi ábra mutatja.



Mint látható, mélynyomónk sáváteresztő jellegű, kb. 50 és 100-120 Hz közötti hangok megfelelő erősségű megszólaltatása várható el tőle. Ebből kifolyólag viszonylag egyenletes hangképet akkor kapunk, ha a fent említett „crossover” frekvenciát 100 Hz környékére választjuk: a 100 Hz-nél

mélyebb hangokat a mélynyomó fogja megszólaltatni, a magasabbakat pedig a szatellitok (ez csak azért kevésbé barbár megoldás, mert a mélyhangok irányát fülünk nem igazán tudja meghatározni, így nem akkora veszteség, ha ezek egy hangszóróból jönnek). Együtt ábrázolva a szatellit és a mélynyomó amplitúdó karakterisztikáját:



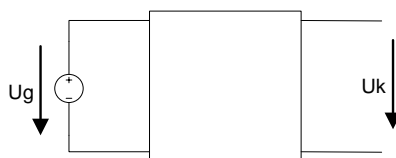
A két karakterisztika metszéspontja a már megállapított 100 Hz-en van, s itt mindkét egység csillapítása 6 dB a csúcspontokhoz képest. Azaz 100 Hz-en mind a mélynyomó, mind pedig a szatellit a maximális hangnyomás felét generálja. Mivel a hangnyomás a teljesítménnyel négyzetesen arányos, a fenti rendszer nem teljesen tökéletes, hiszen a „crossover” frekvencián a mélynyomó és a szatellitok összteljesítménye fele az 50 és 150 Hz-en mérhető teljesítménynek (az más kérdés, hogy a teljes hallható tartományon ennél nagyobb eltérések is előfordulnak, valamint az állítás csak akkor igaz, ha a két szinusz fázishelyzete megegyezik).

A már emlegetett „crossover” menüpontban beállított frekvencia pedig azt határozza meg, hogy a mélynyomó-kimenet előtt levő aluláteresztő szűrő, illetve a szatellit-kimenetek előtt levő felüláteresztő szűrők milyen frekvenciáig (illetve -tól) szűrjenek.

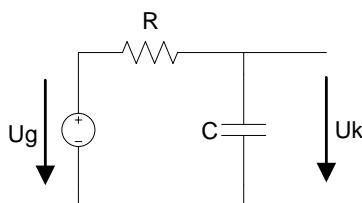
(A teljesség kedvéért megjegyzendő, hogy igazán pontos akusztikai méréseket csak úgy lehet végezni, ha a különböző tárgyak, falak okozta hangvisszaverődéseket kiküszöböljük, erre való az ún. süketszoba. Megemlíthető továbbá, hogy az erősítők egy jelentős része rendelkezik valamilyen automatikus kalibrációval, így egy mikrofon segítségével a kezdeti beállítások egy gombnyomással elvégezhetők (sikerességük már más kérdés...). Sőt, az Audyssey cég MultEQ technológiája arra is vállalkozik, hogy a mért átviteli karakterisztika alapján a hangsugárzók illetve a szoba okozta hibákat kompenzálja.)

4.1.6 Aluláteresztő RC szűrő

Tekintsünk egy kétkaput, melynek bemenetét U_g feszültségforrással gerjesztjük, s az U_k kimeneti feszültséget szeretnénk meghatározni.



A kétkapu álljon egy $R=10\ \Omega$ ellenállásból és $C=470\ \mu\text{F}$ kondenzátorból!



Határozzuk meg kapcsolásunk amplitúdó karakterisztikáját, azaz a kimeneti (U_o) és bemeneti (U_g) feszültség viszonyát különböző frekvenciákon!. Az ellenállás és a kondenzátor sorba kapcsolásából számítható eredő impedancia (lásd 2.1 fejezet):

$$Z_e = Z_R + Z_C = R - j \frac{1}{2\pi f C} = R + \frac{1}{j2\pi f C}$$

Átviteli karakterisztikánk (amit jelölünk T-vel):

$$T(f) = \frac{U_k}{U_g}$$

A fenti kapcsolásban folyó áram:

$$I = \frac{U_g}{Z_e}$$

Behelyettesítve, majd Z_c -vel elosztva a tört számlálóját és nevezőjét is:

$$U_k = I * Z_C = U_g * \frac{Z_C}{Z_e} = U_g * \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} = U_g * \frac{1}{1 + \frac{Z_R}{Z_C}} = U_g * \frac{1}{1 + Rj2\pi f C}$$

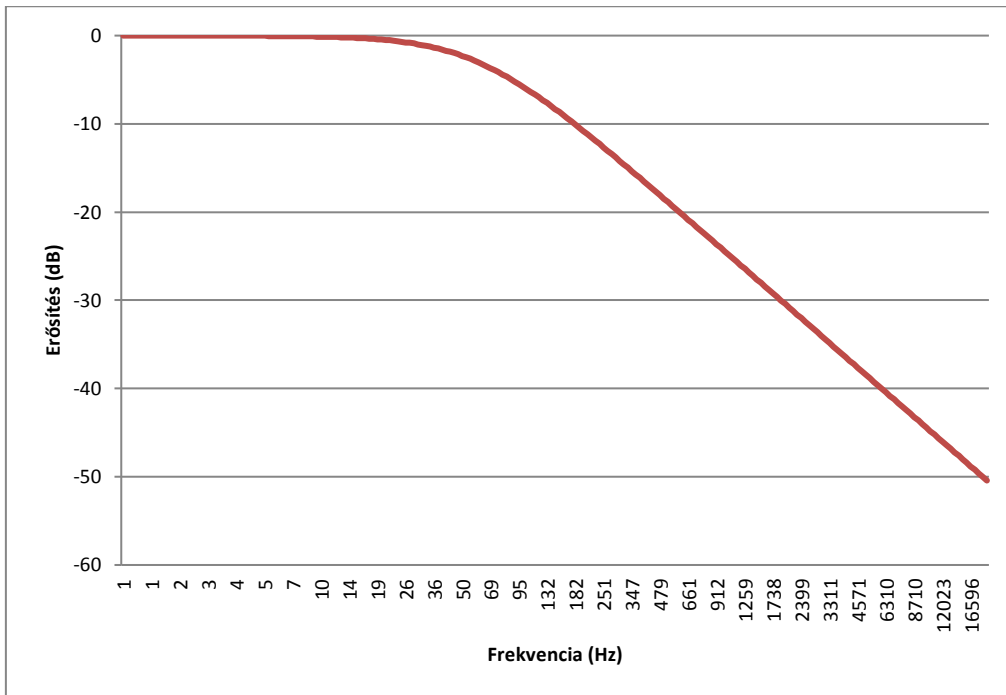
Tehát az átviteli karakterisztika:

$$T(f) = \frac{1}{1 + Rj2\pi f C}$$

Az amplitúdó karakterisztika ennek abszolút értéke. Felhasználva, hogy két komplex szám hányadosának abszolút értéke megegyezik a két szám abszolút értékének hányadosával, a fenti kifejezés számlálójának és nevezőjének képezve az abszolút értékét (komplex szám abszolút értéke: $|C| = \sqrt{\text{Re}(C)^2 + \text{Im}(C)^2}$):

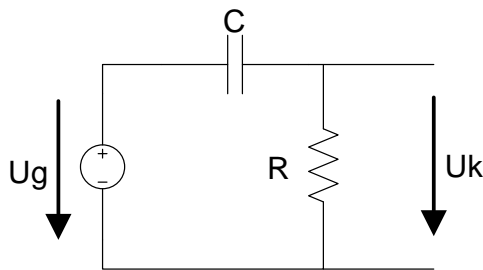
$$|T(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 f^2 R^2 C^2}}$$

Logaritmikusan tengelyeken ábrázolva a fenti kifejezést megállapíthatjuk, hogy kapcsolásunk egy passzív elemekből álló aluláteresztő szűrőt realizál.



4.1.7 Felüláteresztő RC szűrő

Tekintsük az alábbi kapcsolást, mely ugyanazokból az alkatrészekből épül fel, mint előző kapcsolásunk, csak a kétkapu kimenete nem a kondenzátorról, hanem az ellenállásról kerül kivezetésre.



Az előző levezetéshez hasonló okokból:

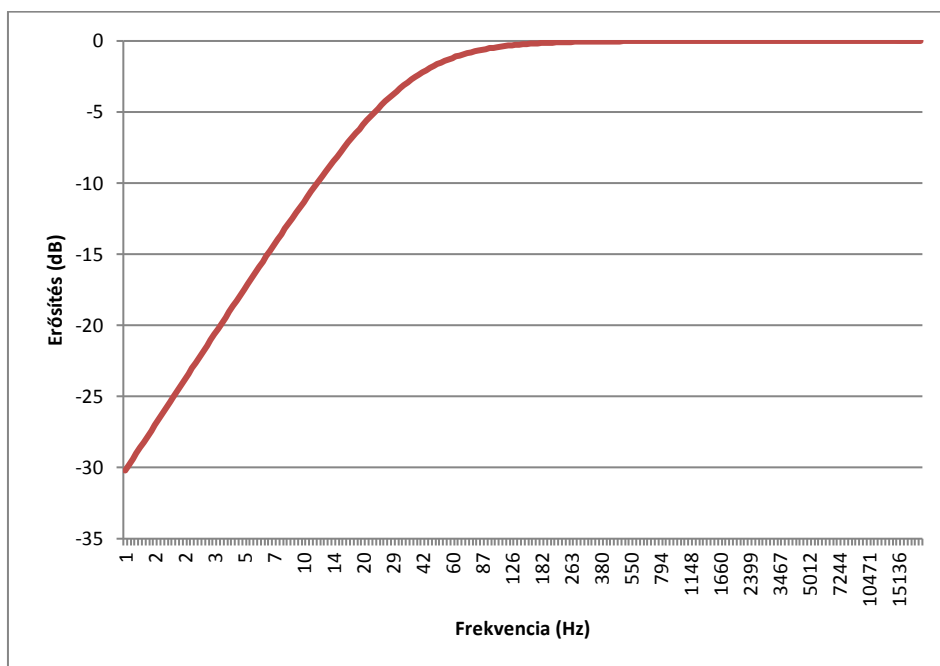
$$U_k = I * Z_R = U_g * \frac{Z_R}{Z_e} = U_g * \frac{Z_R}{Z_R + Z_C} = U_g * \frac{\frac{Z_R}{Z_C}}{1 + \frac{Z_R}{Z_C}} = U_g * \frac{Rj2\pi fC}{1 + Rj2\pi fC}$$

Ebből az átviteli függvény, illetve annak abszolút értéke:

$$T(f) = \frac{Rj2\pi fC}{1 + Rj2\pi fC};$$

$$|T(f)| = \frac{R2\pi fC}{\sqrt{1^2 + (Rj2\pi fC)^2}}$$

Grafikusan ábrázolva:



Hasonló megoldást alkalmaznak az oszcilloszkópok AC üzemmódban („AC csatolás”): a bemenetre kapcsolt soros kondenzátor segítségével megvalósított felüláteresztő szűrő eltávolítja a bemeneti jelből a DC komponenst (aminek meglehetősen alacsony a frekvenciája: 0).

5 Zárszó

A fentiek átolvasása után – némi egyszerűsítéssel élve – három lehetőséget tudunk elképzelni (olvasói oldalról):

- „Ez az egész teljesen triviális, de legalábbis mindent értek.” Ez az ideális állapot, nem nagyon lesz gond a műszeres mérések elvégzésével.
- „Szó-szó, hála Imphotepeknek.” Azaz vannak homályos részek. Ezeknek érdemes egy kicsit utánanézni még akkor is, ha esetleg a tématerülethez kapcsolódó tárgyat még nem tanultátok, vagy éppen most tanuljátok.
- „Hát ez nekem tök kínai!” Ha a vélemény megformálója hozzánk hasonló mértékben beszél az említett nyelvet, akkor baj van. A teljesen ismeretlen területek átnézésére, megértésére fordítsatok elegendő időt!

6 Hivatkozás

- [1] Balogh László, Dr. Kollár István, Dr. Németh József, Dr. Péceli Gábor, Dr. Sujbert László, „Digitális Jelfeldolgozás – segédlet a „Digitális jelfeldolgozás (BMEVIMM4084) tárgyhoz, Méréstechnika és Információs rendszerek tanszék, Budapest, 2000-2008.