

Fourier térbeli analízis, inverz probléma

Orvosi képdiagnosztika

6-8. ea. 2016 ősz

6. előadás tartalma

- Fourier transzformációk és kapcsolataik:
 - FS, FT, DTFT, DFT, DFS
 - Mintavételezés, interpoláció
 - Spektrumszivárgás
- Képek analízise frekvenciatartományban:
 - Spektrumképek értelmezése
 - Frekvenciatérben egyszerűbb műveletek
 - Ideális szűrések problémái

Folytonos Fourier Transzformáció

- Lineáris transzformáció a véges energiájú, folytonos függvények tere felett:
 - $F(\omega) = FT\{f\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\{-j \cdot x \cdot \omega\} dx$
 - $f(x) = FT^{-1}\{F\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp\{j \cdot x \cdot \omega\} d\omega$
- Legfontosabb tulajdonságai:
 - Konvolúció tétel: $(f * g) = FT^{-1}\{(F \cdot G)(\omega)\}$
 - Fordított konvolúció: $((f \cdot g)(x)) = \frac{1}{2\pi} FT^{-1}\{F * G\}|_x$
 - Parseval tétel: $E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$

Folytonos Fourier Transzformáció

– Valós jel spektruma: $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$

– Páros, valós jel spektruma:

$$F(-\omega) = \operatorname{Re}\{F(-\omega)\} = \operatorname{Re}\{F(\omega)\} = F(\omega)$$

– Páratlan, valós jel spektruma:

$$F(-\omega) = \operatorname{Im}\{F(-\omega)\} \cdot j = \operatorname{Im}\{F(\omega)\} \cdot (-j) = \overline{F(\omega)}$$

– Periodikus jel spektruma diszkrét:

$$F(\omega) = 0, \text{ ha } \omega \neq k \cdot (2\pi \cdot f) \Big|_{k \in \mathbb{Z}}$$

– Ekvivalens egy unitér transzformációval:

- Ez pl. maga után vonja a bijektivitást

Folytonos Fourier Sorfejtés

- Lineáris transzformáció a periodikus folytonos függvények tere felett:

$$- c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cdot \exp(-j \cdot x \cdot 2\pi n/T) dx; \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$- f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \exp\{j \cdot x \cdot 2\pi n/T\}$$

- Kapcsolat a folytonos FT-val:

- Mintavételezi a spektrumot: $c_n = 1/T \cdot F(2\pi \cdot n/T)$

- Periodikus jel $\Leftrightarrow$ diszkrét spektrum

- Egyéb tulajdonságokat örökli a folytonos FT-től

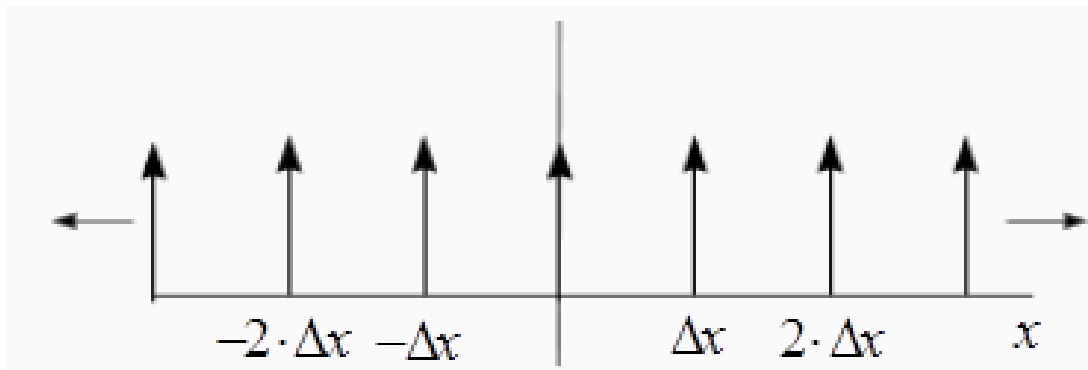
Diszkrét idejű Fourier Transzformáció (DTFT)

- Adott egy mintavételezéssel előállt végtelen hosszú, abszolút összegezhető jel: $f[n]$
- Definíció:
 - $X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] \exp\{-j \cdot \omega \cdot n\}$
 - $x[n] = 1/2\pi \cdot \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) \exp\{j \cdot \omega \cdot n\} d\omega$
- Alapvető tulajdonságok:
 - $n \in \mathbb{Z}$, de $\omega \in \mathbb{R}$
 - $X(\omega + 2 \cdot k \cdot \pi) \big|_{k \in \mathbb{Z}} = X(\omega)$
 - Egyéb tulajdonságait örökli a folytonos FT-től

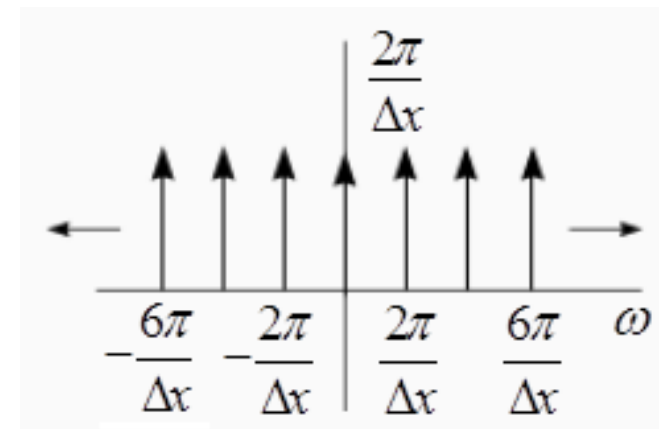
Matematikai mintavételezés

Folytonos FT és DTFT kapcsolata

- Végtelen impulzus fésű:
 - Matematikai mintavételezés: folytonos jel elemenkénti szorzata az impulzus fésűvel.
 - Időtartománybeli szorzás $\Leftrightarrow$ Spektrumok konvolúciója



Impulzusfésű az időtartományban



frekvenciatartományban

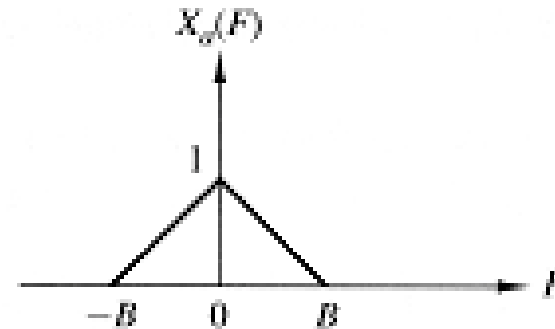
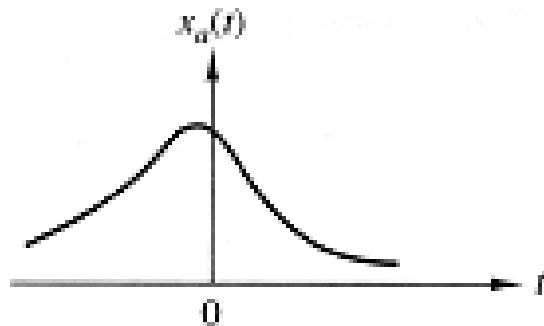
Mintavett jel spektruma

- Formálisan a mintavett jel spektruma:

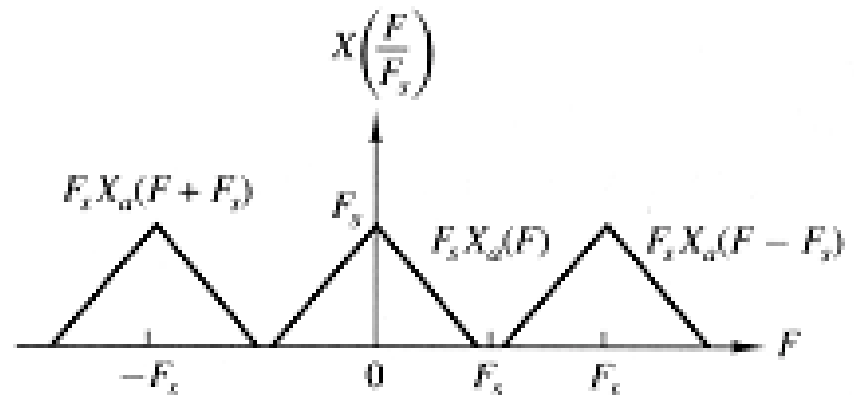
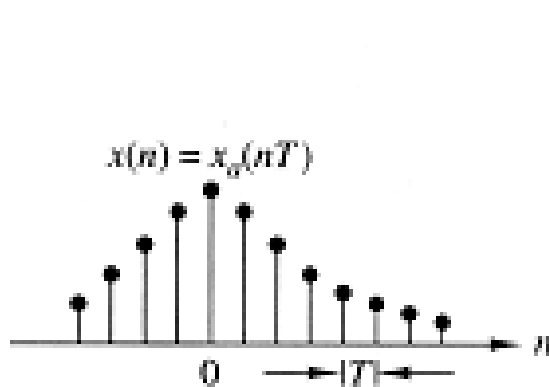
$$X_s(\omega) = \frac{2\pi}{\Delta x} X(\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{\Delta x}\right) = \frac{2\pi}{\Delta x} \sum_k X\left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{\Delta x}\right)$$

- Δx : mintavételezések távolsága
 - $X(\omega)$: folytonos idejű jel spektruma
 - $X_s(\omega)$: mintavételezett jel spektruma
- Nyquist mintavételi törvény:
 - $bw\{x\} < (1/2) \cdot f_s$; $f_s = (1/\Delta x)$
 - Ha nem tartjuk be alul mintavételezés: $K \cdot X_s(\omega) \neq X(\omega)$

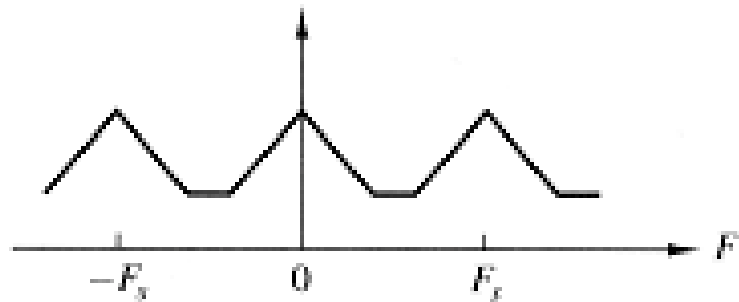
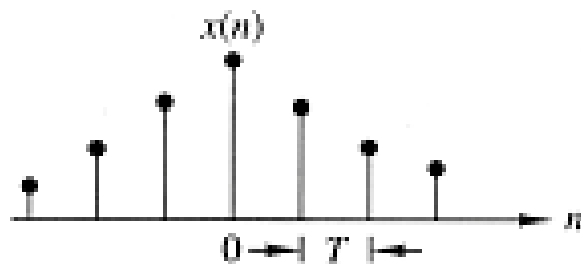
Helyesen mintavételezés interpretációja



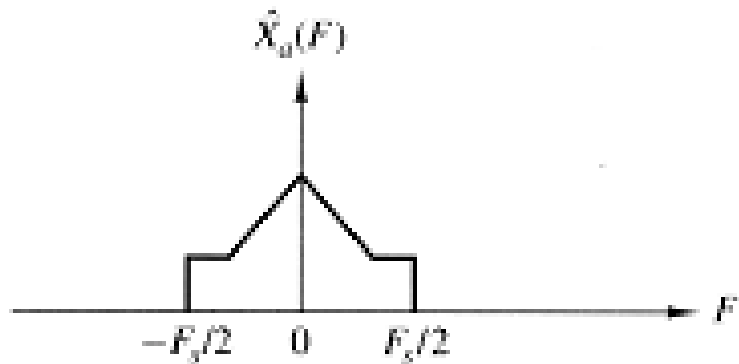
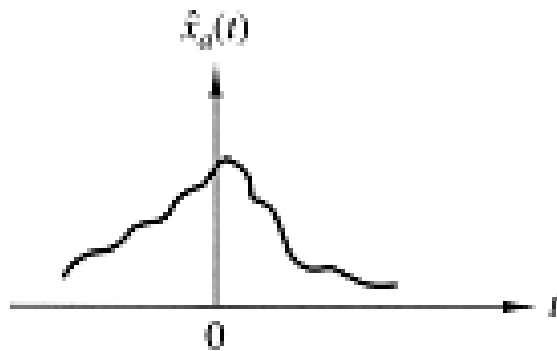
(a)



Alul mintavételezés interpretációja spektrum átlapolódása



(d)



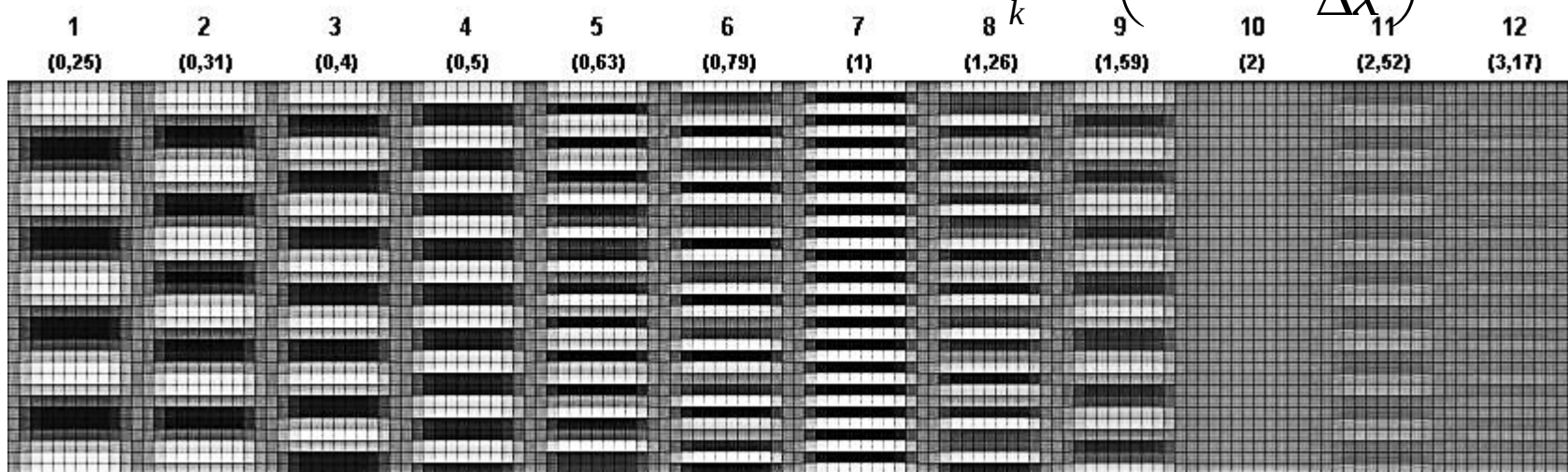
Spektrum átlapolódása moire / aliasing

- Spektrum átlapolódása által generált jeltorzulás



Spektrum átlapolódása - aliasing

- Aliasing formálisan: $X_s(\omega) \propto \sum_k X\left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{\Delta x}\right) \neq X(\omega)$



- Anti-aliasing filter – mintavételezés előtti alul-áteresztő szűrés:
 - Pl. Bayer szűrős fényképezőgépeknél optikai szűrő
 - Radiológiában az elkent PSF-ek miatt elhagyható

Mintavett jel rekonstrukciója

- Rekonstrukció (interpoláció):
 - Cél: a mintavételezett jel értékének előállítása két mintavételezési pont között
 - Ha sérült a mintavételezési törvény, akkor lehetetlen
 - LTI rendszerrel: $x_R = x_S * h_R$
 - Ideális interpolációs kernel:
 - $H_R(\omega) = \begin{cases} K & |-\omega_L \leq \omega/2\pi \leq \omega_L \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad \omega_L = f_s/2$
 - $h_R \propto \text{sinc}(\omega_L \cdot x)$

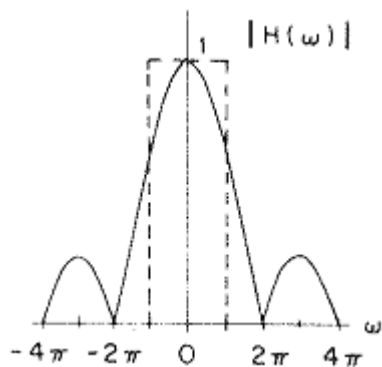
Interpoláció hibái

- Megfigyelt tartomány széle:
 - Súlyfüggvény „kilóg” a megfigyelt tartományból
- $|H_R(\omega)| \neq 0 \quad |\omega| > f_s/2$ esete:
 - Lényegesen jelentősebb hibaforrás
 - Mintavett jel rekonstrukciója:
 - $X_R(\omega) = H_R(\omega) \cdot X_S(\omega) \propto \sum_k H_R(\omega) \cdot X\left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{\Delta x}\right)$
 - $X_R(\omega) \neq X(\omega)$, ha $|\omega| > f_s/2$
 - Példa rá a Nearest Neighbour interpoláció (ZOH)

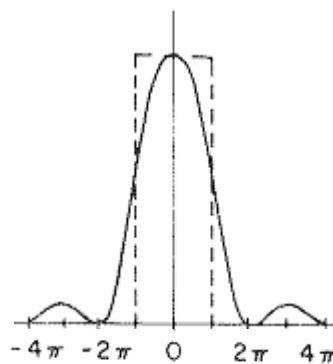
Interpolációk összehasonlítása

- Átviteli/súlyfüggvényük analízisével:

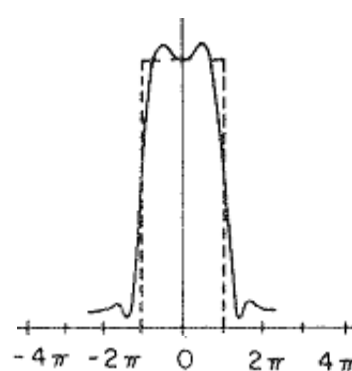
Nearest Neighbour



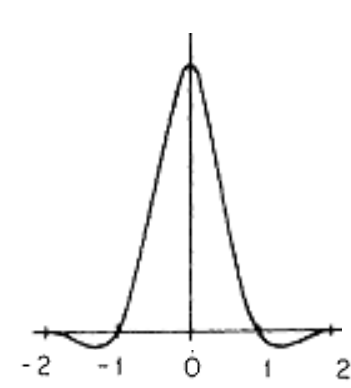
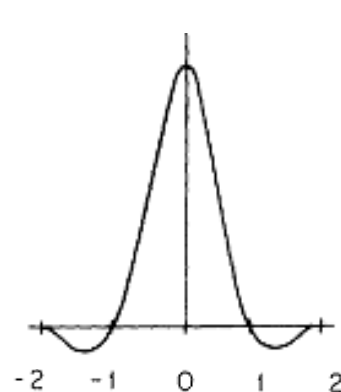
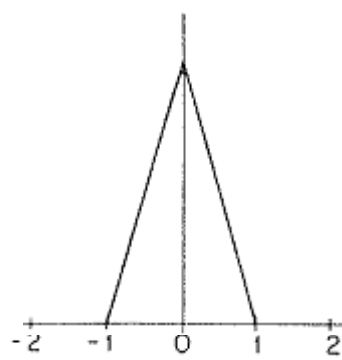
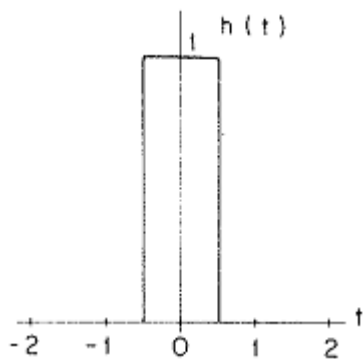
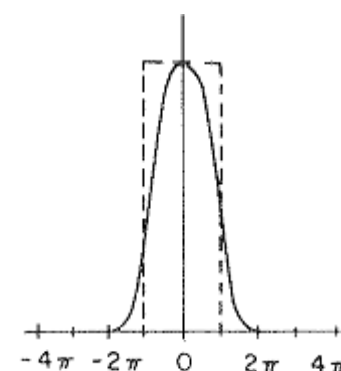
Lineáris



Köbös Spline



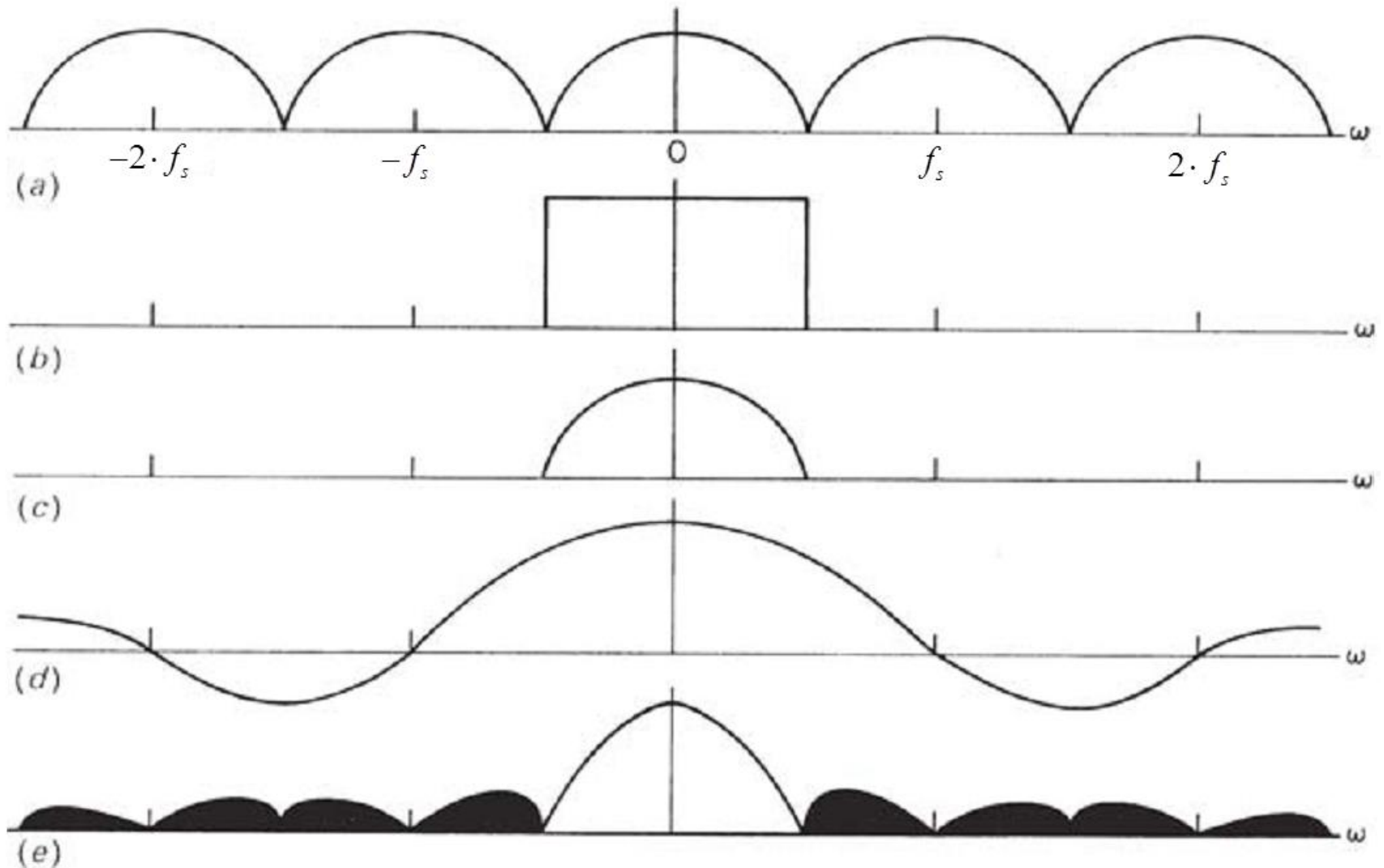
Köbös B-Spline



Átviteli függvény

Súlyfüggvény

(Hibás) interpoláció vizualizációja



Integráló mintavételezés

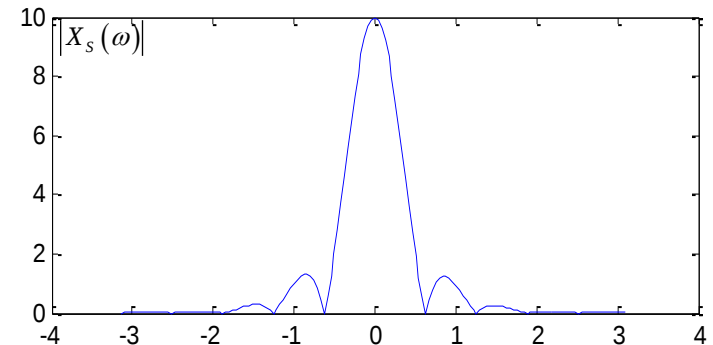
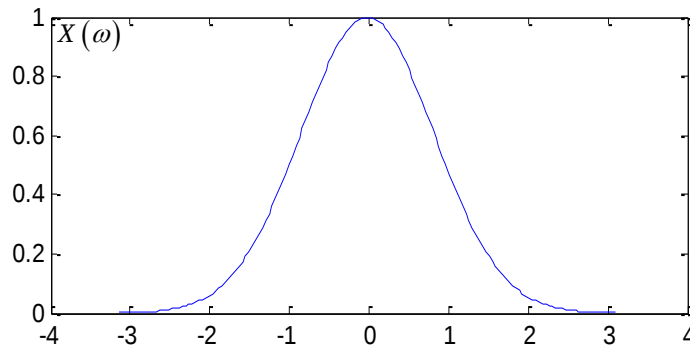
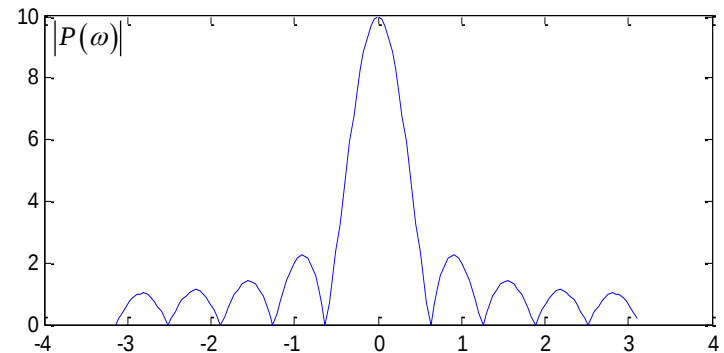
- Érzékelők integrálják a foton fluxust:
 - Érzékelőelemek **homogén** súlyfüggvénye: $p(x)$
 - Adekvát az alábbi modell:
 1. Megszűrjük a folytonos jelet az érzékelők súlyfüggvényével
 2. Elvégezzük a matematikai mintavételezést
- $$X_s(\omega) \propto (X(\omega) \cdot P(\omega)) * \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{\Delta x}\right) \right)$$
- Ha az érzékelőelemek súlyfüggvénye nem homogén, akkor nem modellezhető LTI rendszerrel

Integráló mintavételezés - példa

- Ideális, integráló mintavételezés esete:

$$- p(x) = \begin{cases} 1/\Delta_x & |x| < \Delta_x/2 \\ 0 & |x| > \Delta_x/2 \end{cases}$$

$$- P(\omega) = \Delta x \cdot \text{sinc}(\Delta x \cdot \omega/2)$$



Diszkrét Fourier Transzformáció (DFT)

- Diszkrétizált jelet N pontban ismerjük:

$$- X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\{-j \cdot n \cdot (k \cdot 2\pi/N)\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\{-j \cdot n \cdot k \cdot \Delta\omega\}$$

$$- x[n] = (1/N) \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot \exp\{j \cdot 2\pi kn/N\}$$

- Kapcsolat a DTFT-vel:

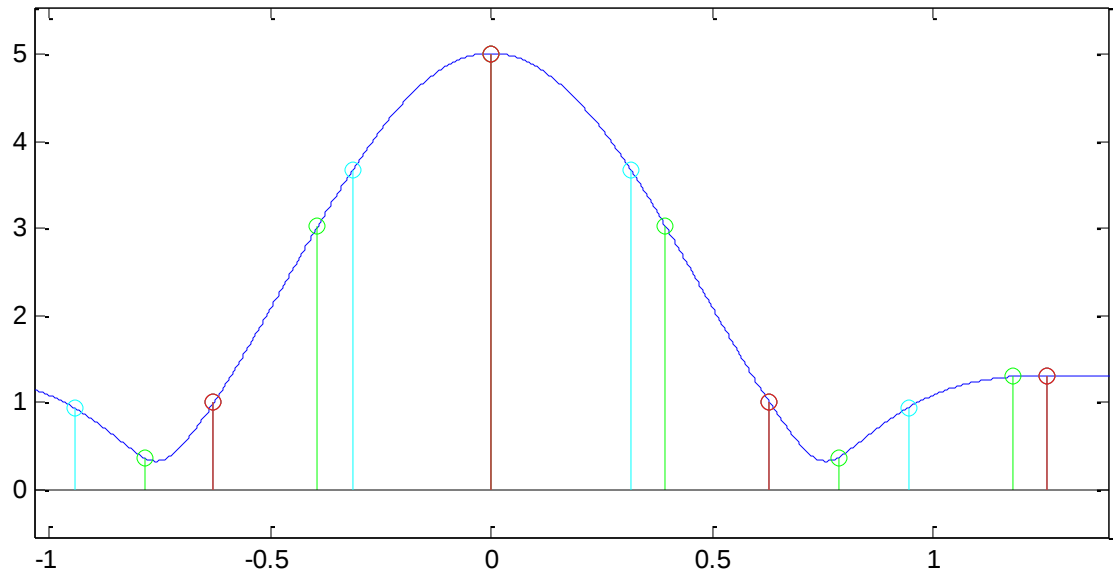
$$- x[n] = \begin{cases} y[n] & n \in [0, 1, \dots, N-1] \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad \text{megfigyelési ekvivalens}$$

- DFT mintavételezi a megfigyelési ekvivalens DTFT spektrumát: $Y_k = X(k \cdot \Delta\omega)$

- C^N feletti ortogonális transzformáció, mi a mátrixa?

DFT pontszáma

- Megfigyelési ekvivalens DTFT spektrumát tetszőleges felbontással mintavételezhetjük:
 - Ha M minta érdekel, akkor $M-N$ db 0-val paddelünk
 - A fizikai (folytonos) jel spektrumáról ezáltal nem tudunk meg többet!
 - 2-Radix FFT



7. Előadás tartalma

- Spektrumszivárgás
- Képfeldolgozás frekvencia tartományban:
 - 2D Spektrum gépi ábrázolása
 - Szűrések frekvenciatartományban
 - Spektrumképek értelmezése
- Inverz probléma – dekonvolúció:
 - Inverz probléma formális felírása
 - Dekonvolúció nehézsége
 - Közismert algoritmusok: Wiener inverz szűrés, RLA/ ML-EM, MAP becslés, és ezek kapcsolataik

DFT és a DFS kapcsolata

- A DFT által meghatározott spektrum diszkrét:

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot \exp\{j \cdot 2\pi kn/N\} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot \exp\{j \cdot 2\pi kn/N + 2\pi k\} = x[n+N] \end{aligned}$$

- Lényegében **Diszkrét Fourier Sorfejtés (DFS)**
- DFT kapcsolata a Diszkrét Fourier Sorfejtéssel:
 - DFT időtartományban véges idejű diszkrét jelet vár
 - DFS periodikus, végtelen idejű diszkrét jelet vár
 - Ezt leszámítva identikusak.

DFT és FFS kapcsolata

- Vizsgáljuk a mintavételezett jelet folytonos időben:

$$- x_s(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t) \text{ és } x_s(t + N \cdot \Delta t) = x_s(t)$$

$$\begin{aligned} - c_k &= \frac{1}{N \cdot \Delta_x} \int_{0-0}^{N\Delta_x-0} x_s(t) \cdot \exp \left\{ -j \cdot t \cdot k \cdot \frac{2\pi}{N \cdot \Delta_x} \right\} dt = \\ &= \frac{1}{N \cdot \Delta_x} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp \left\{ -j \cdot n \cdot \frac{k \cdot 2\pi}{N} \right\} \propto \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp \{ -j \cdot n \cdot k \cdot 2\pi / N \} \end{aligned}$$

- Mintavételezés hatásai:
 - DFT felbontása: $\Delta f = f_s / N = 1 / (N \cdot \Delta x)$ $\omega_k = 2\pi \cdot k \cdot \Delta f$
 - Aliasing (már volt)

DFT és FFS kapcsolata

- Vizsgáljuk a mintavételi időben:

A megfigyelt jelrészlet egy periódusa egy folytonos periodikus jelnek.

$$- x_s(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t) \text{ és } x_s(t + N \cdot \Delta t) = x_s(t)$$

FFS

$$- c_k = \frac{1}{N \cdot \Delta_x} \int_{0-0}^{N\Delta_x-0} x_s(t) \cdot \exp \left\{ -j \cdot t \cdot k \cdot \frac{2\pi}{N \cdot \Delta_x} \right\} dt =$$

$$= \frac{1}{N \cdot \Delta_x} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp \left\{ -j \cdot n \cdot \frac{k \cdot 2\pi}{N} \right\} \propto \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp \left\{ -j \cdot n \cdot k \cdot 2\pi / N \right\}$$

DFT

- Mintavételezés hatásai:

- DFT felbontása: $\Delta f = f_s / N = 1 / (N \cdot \Delta x)$ $\omega_k = 2\pi \cdot k \cdot \Delta f$
- Aliasing (már volt)

Spektrumszivárgás - ablakozás

- DFT kapcsolata a DTFT-vel és a DFS-el:
 - Impliciten cirkuláris jelet feltételez (DFS)
 - Tegyük fel, hogy az eredeti jelünk (végtelen terjedelmű) véges részét tudtuk mintavételezni:
$$h[n] = \text{rect}_T[n], \quad y[n] = y_\infty[n] \cdot h[n]$$
 - Ideális esetben: $Y_{(k)} = Y_\infty(k \cdot \Delta\omega)$
 - A valóságban: $Y_{(k)} = 1/2\pi \cdot (Y_\infty * H)(k \cdot \Delta\omega)$
 - Cél lenne a DTFT spektrumot szivárgás nélkül mintavételezni: $Y_{(k)} := Y_\infty(k \cdot \Delta\omega)$

Spektrumszivárgás - ablakozás

- DFT kapcsolata a DTFT-vel és a DFS-el:

- Impliciten cirkuláris jelet feltételez (DFS)

- $\sum_{k=1}^T \delta[n-k]$, hogy Végtelen kiterjedésű mintavételezett jel (megfigyelési ekvivalens) ni:

$$h[n] = \text{rect}_T[n], \quad y[n] = y_\infty[n] \cdot h[n]$$

- Ideális esetben: $Y_{(k)} = Y_\infty(k \cdot \Delta\omega)$
- A valóságban: $Y_{(k)} = 1/2\pi \cdot (Y_\infty * H)(k \cdot \Delta\omega)$
- Cél lenne a DTFT spektrumot szivárgás nélkül mintavételezni: $Y_{(k)} := Y_\infty(k \cdot \Delta\omega)$

Spektrumszivárgás - ablakozás

– Tehát a megfigyelt jel DFT spektruma:

$$Y_k = 1/2\pi \cdot (Y * H)(k \cdot \Delta\omega)$$

– $h[n]$ az úgynevezett ablak függvény

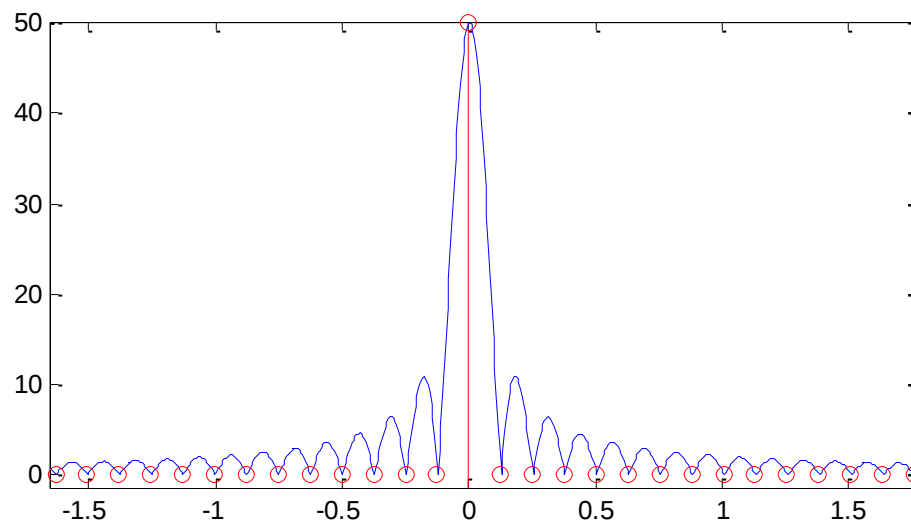
- Ha expliciten nem ablakozunk, akkor: $h[n] = \text{rect}_T[n]$

Pl.: $T = 50$

Kék görbe: rect ablak DTFT
spektrum amplitúdója

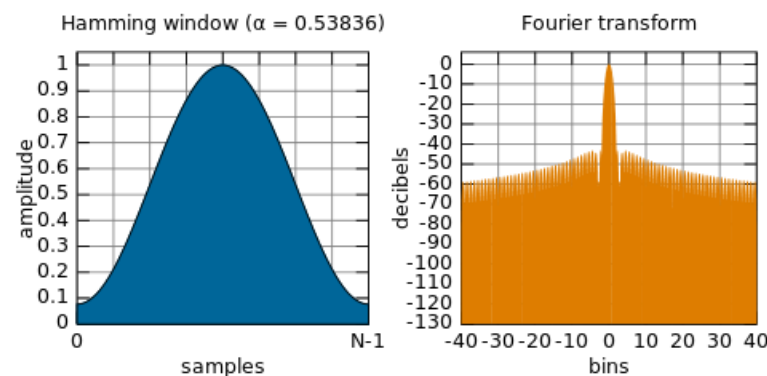
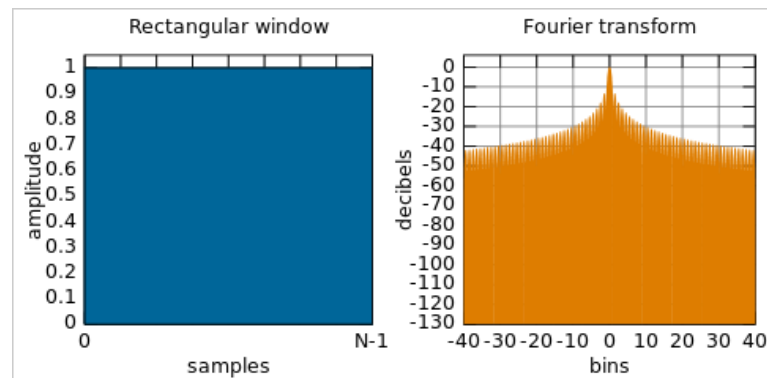
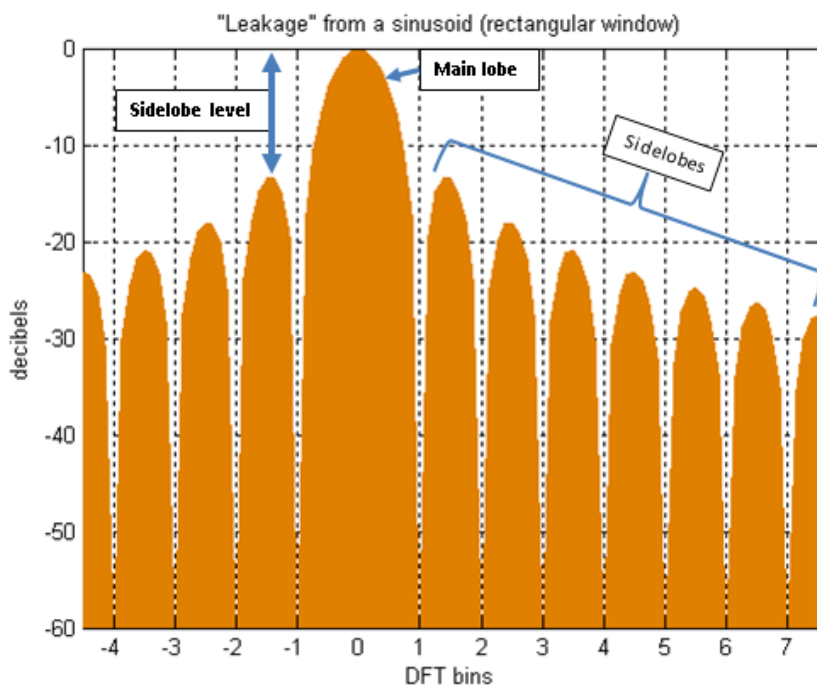
Piros pontsor: rect ablak DFT
spektrum amplitúdója

Mikor nincs spektrumszivárgás?



Spektrumszivárgás - ablakozás

- DFT előtti ablakozás:
 - Képtérben az általunk definiált $h[n]$ -el szorzunk
 - Ablakfüggvények tulajdonságai:

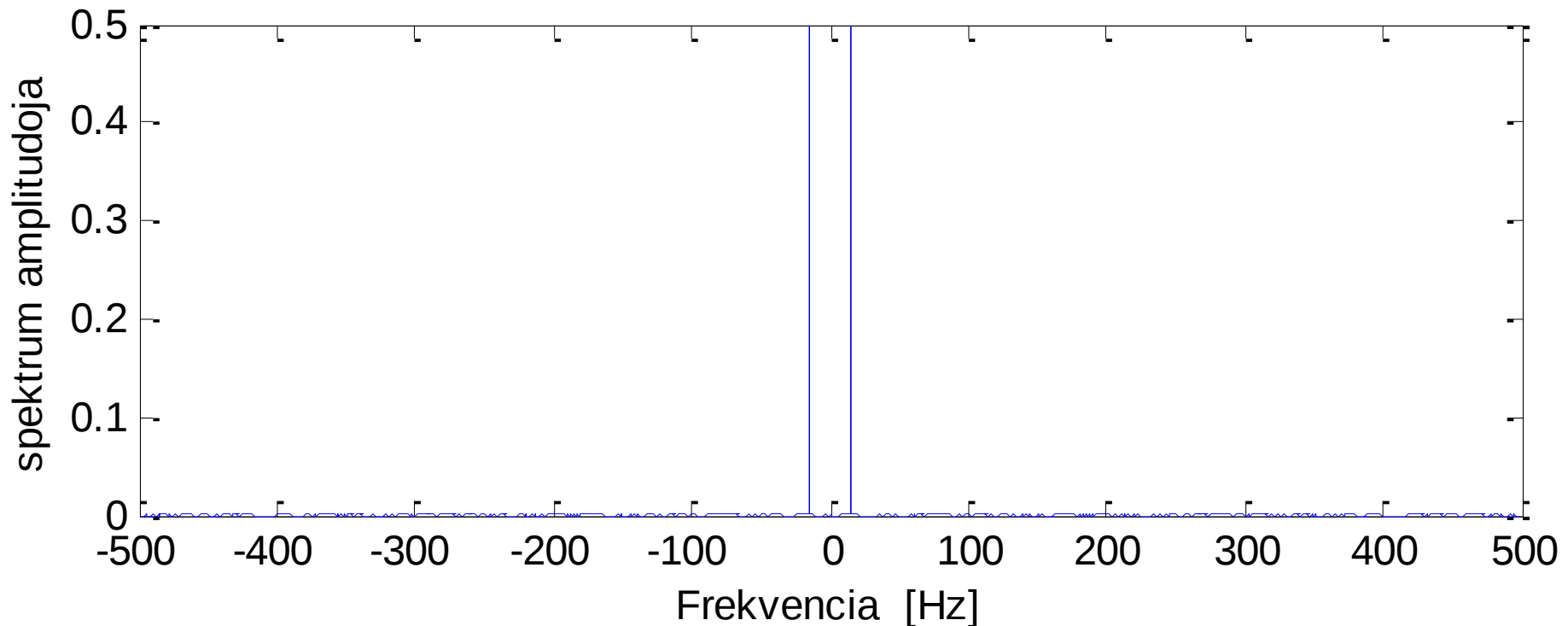


Koherens mintavételezés

- Periodikus jelből egész számú periódusnyit mintavételezünk $(y_N) : N/f_s = k/f, k \in \mathbb{Z}_+$
 - f : periodikus jelünk frekvenciája, N : minták száma
 - N pontos négyzetes ablak DTFT spektruma:
 - $H_{rect} = \sin(\omega/\Delta f)/(\omega/\Delta f)$
 - $H_{rect}(k \cdot \Delta f) = \delta_{k,0}$ ha $k \in \mathbb{Z}$
 - $Y_s(\omega) = 0$, ha $\omega \neq k \cdot \Delta f \mid_{k \in \mathbb{Z}}$
 - Tehát a DFT által mintavételezett frekvenciákon nem torzul az ablakozás miatt a DTFT spektruma
 - Különben Spektrumszivárgás.

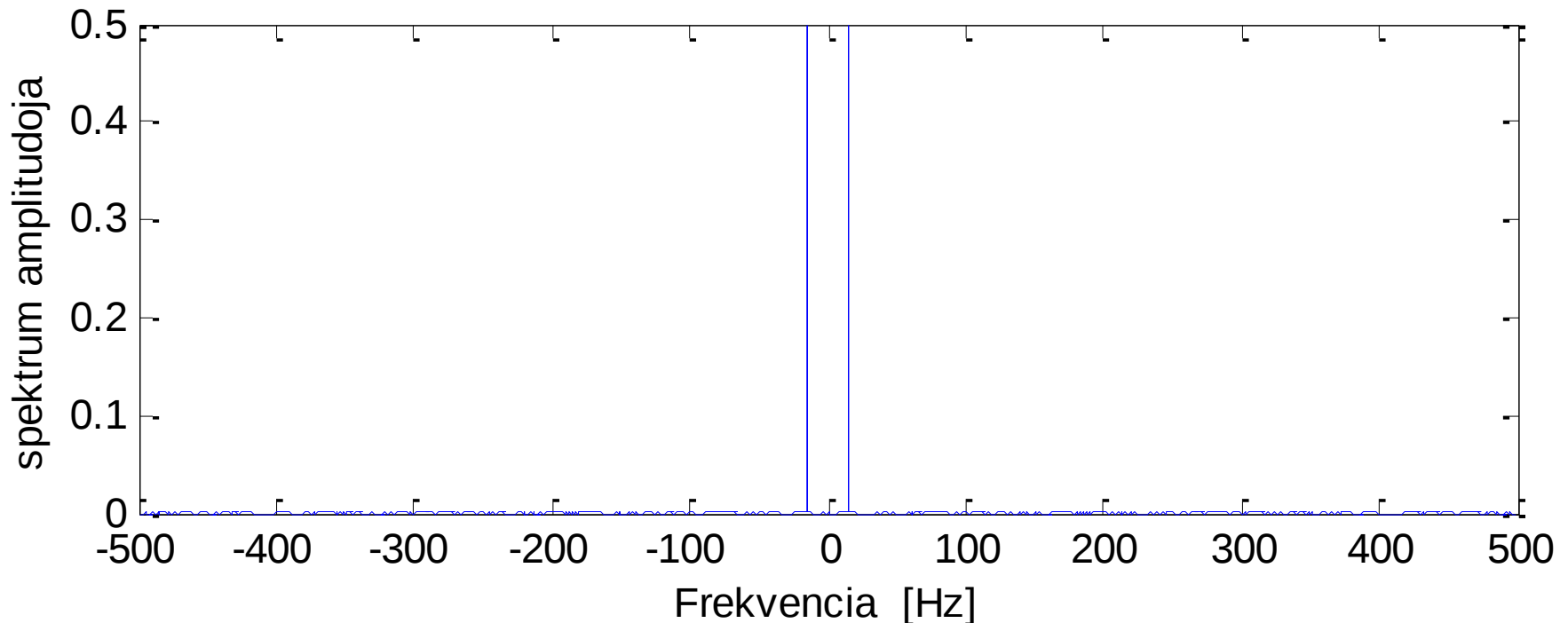
Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$



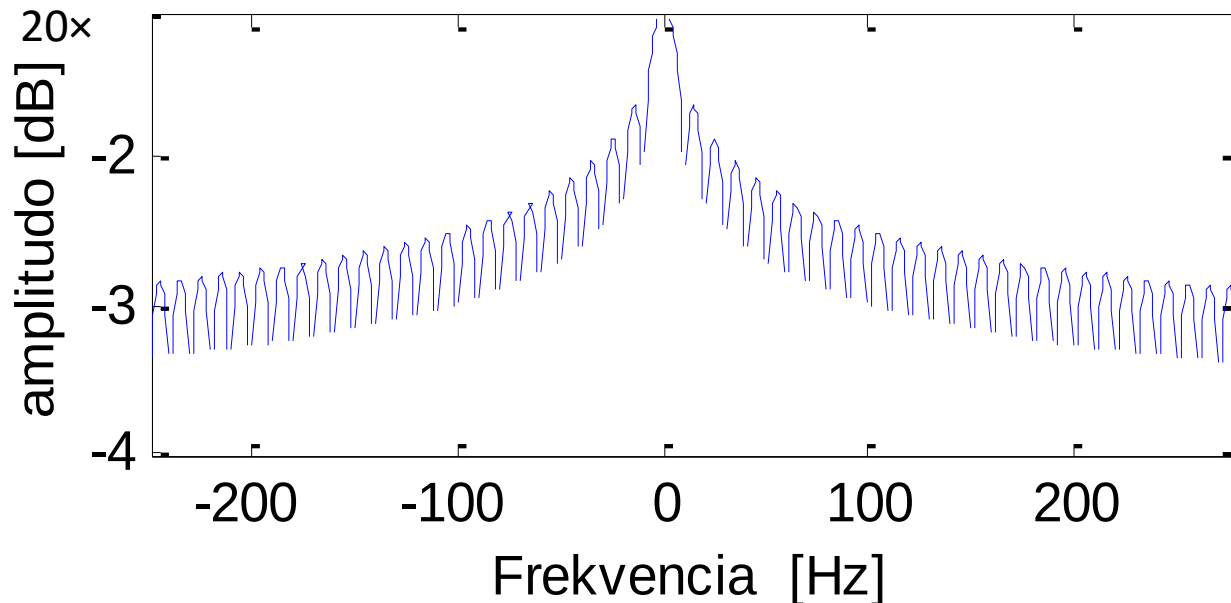
Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
 - Mintavételezzük ($y_\infty[\cdot]$): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = \infty$
 - Mivel a mintavételi törvényt nem sértjük meg:



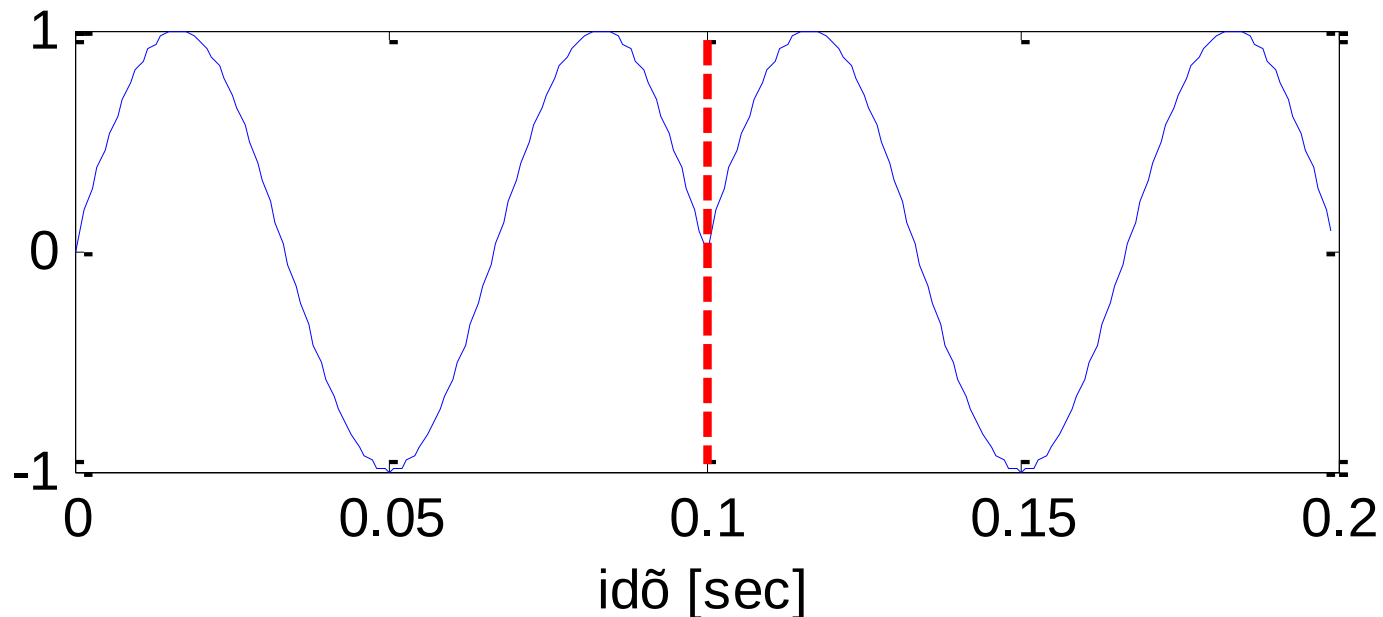
Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
 - Mintavételezzük (y_{100}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 100$
 - Megfigyelési ekvivalens: $(y_\infty \cdot \text{rect}_{100})[\cdot]$
 - Implicit ablak DTFT spektrumának részlete:



Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
 - Mintavételezzük (y_{100}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 100$
 - DFT által „látott” jel: $y_{100}[n] = (y_\infty \cdot h_{\text{Rect}})[\text{mod}_{100}(n)]$

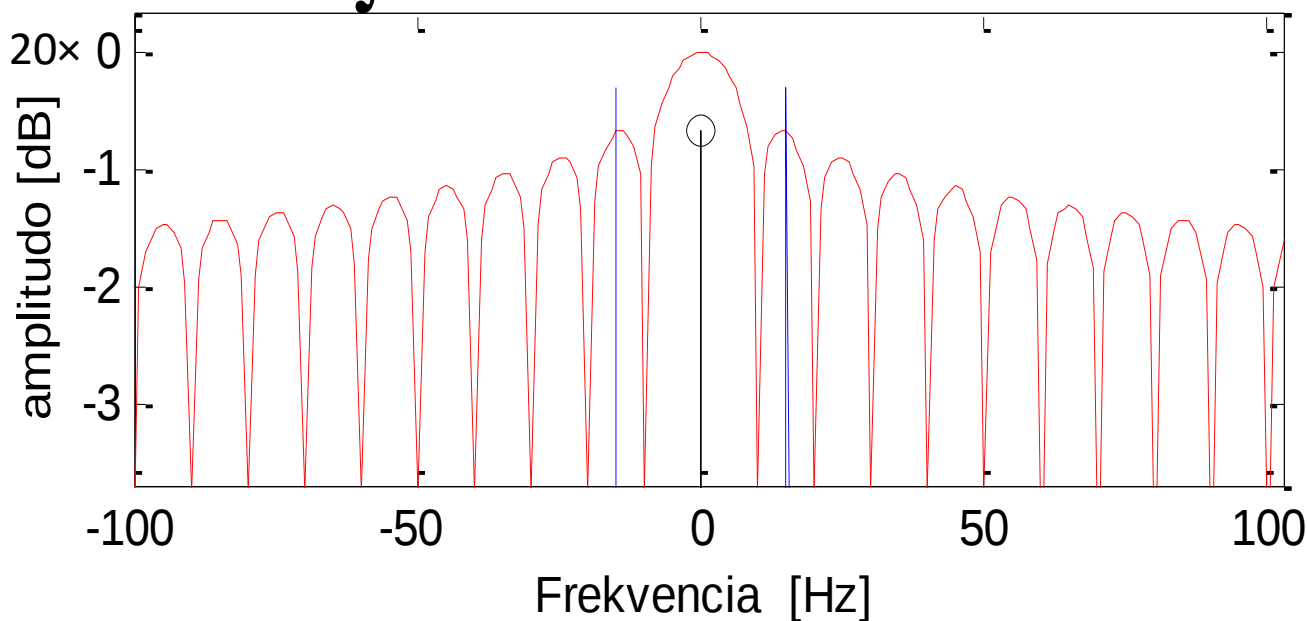


Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
 - Mintavételezzük (y_{100}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 100$
 - Megfigyelési ekvivalens spektruma: $Y_{100} \propto Y_\infty * H_{rect}$

$$Y_{100}(0) = \int Y_\infty(\tau) \cdot \frac{1}{2\pi} H_{rect}(0 - \tau) d\tau$$

Piros: ablak normált spektruma

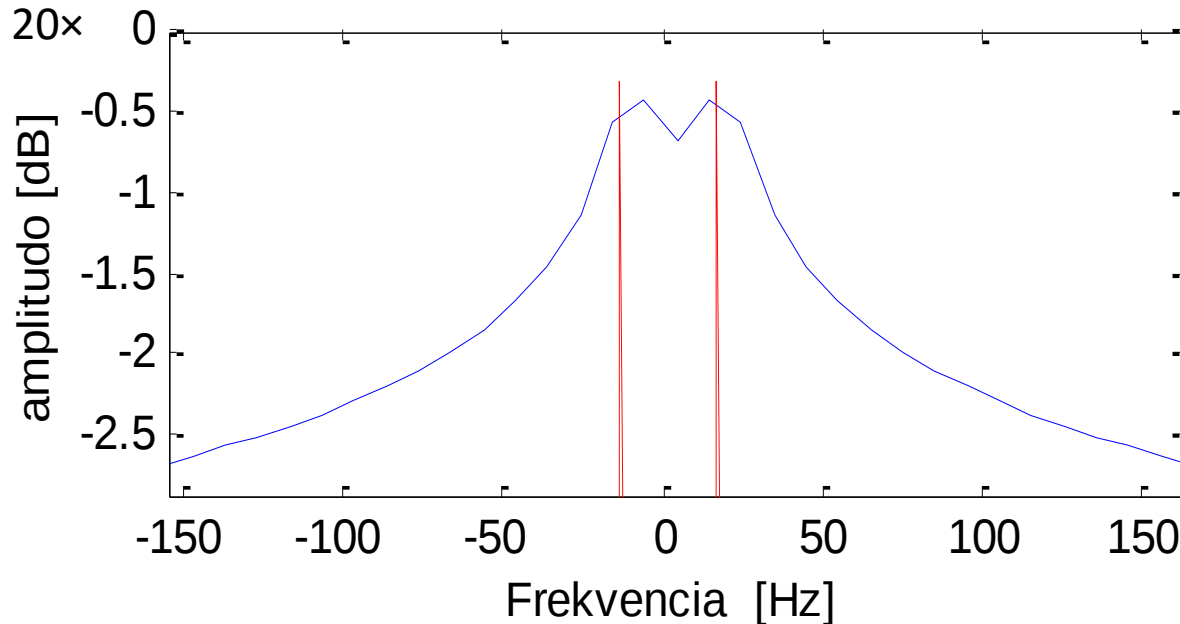


Kék: folytonos jel spektruma

Fekete: $N=100$
mintavétellel előálló
jel spektrumának DC
komponense

Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
 - Mintavételezzük (y_{100}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 100$
 - Megfigyelési ekvivalens spektruma: $Y_{100} \propto Y_\infty * H_{rect}$

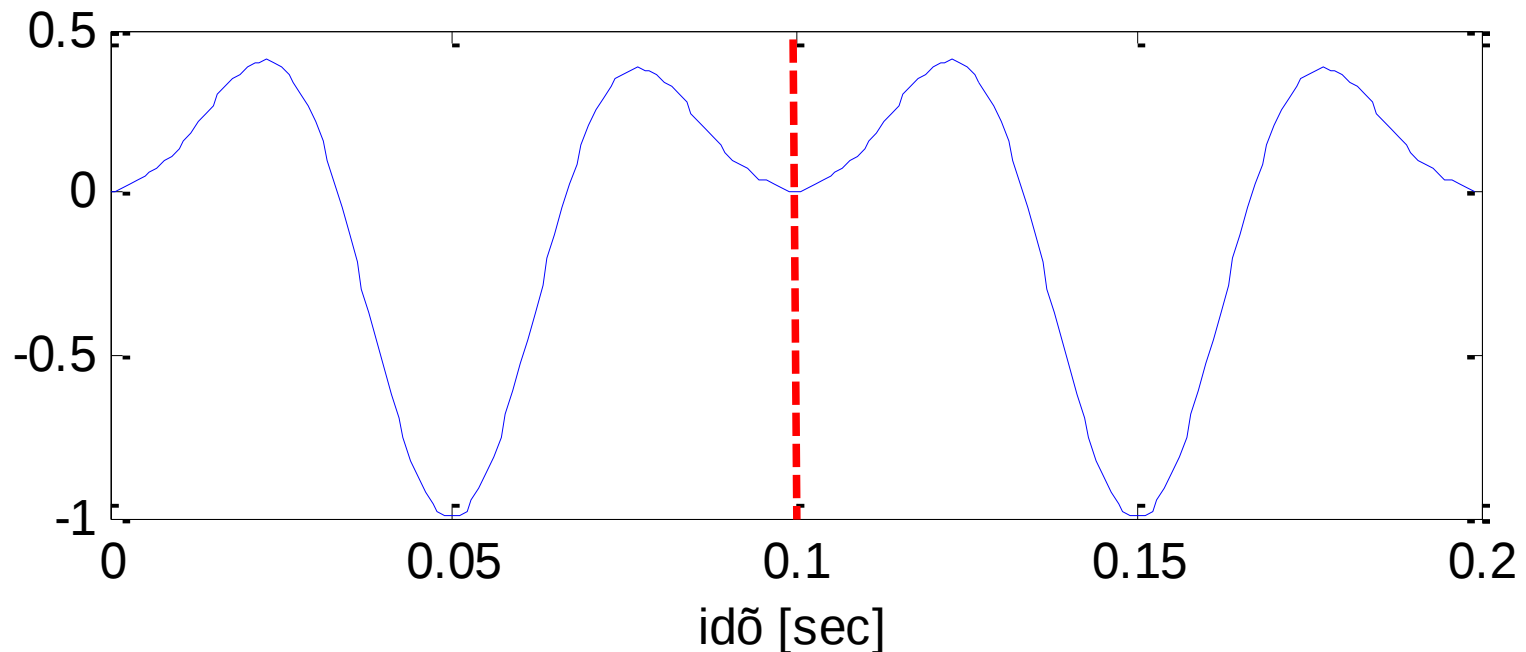


Piros: folytonos jel
spektruma

Kék: $N=100$
mintavétellel előálló
jel spektruma

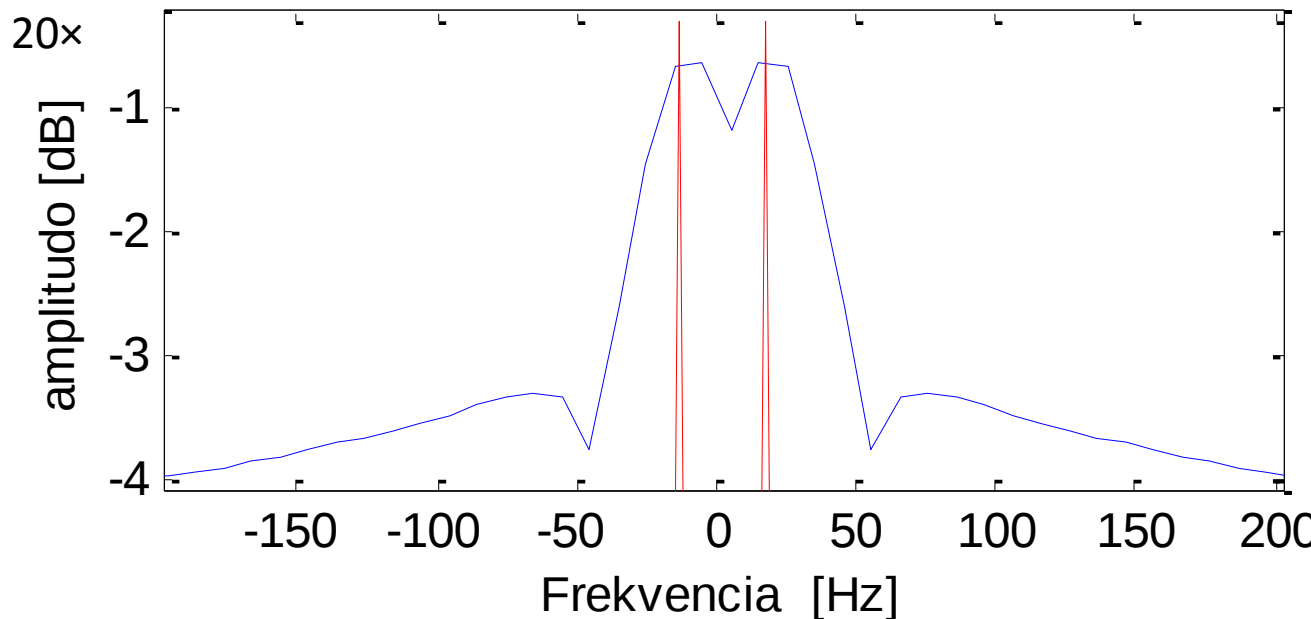
Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés, Hamming ablak

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
 - Mintavételezzük (y_{100}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 100$
 - DFT által „látott” jel: $y_{100}[n] = (y_\infty \cdot h_{Ham})[\text{mod}_{100}(n)]$



Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés, Hamming ablak

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
 - Mintavételezzük (y_{100}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 100$
 - Megfigyelési ekvivalens spektruma: $Y_{100} \propto Y_{\infty} * H_{Ham}$

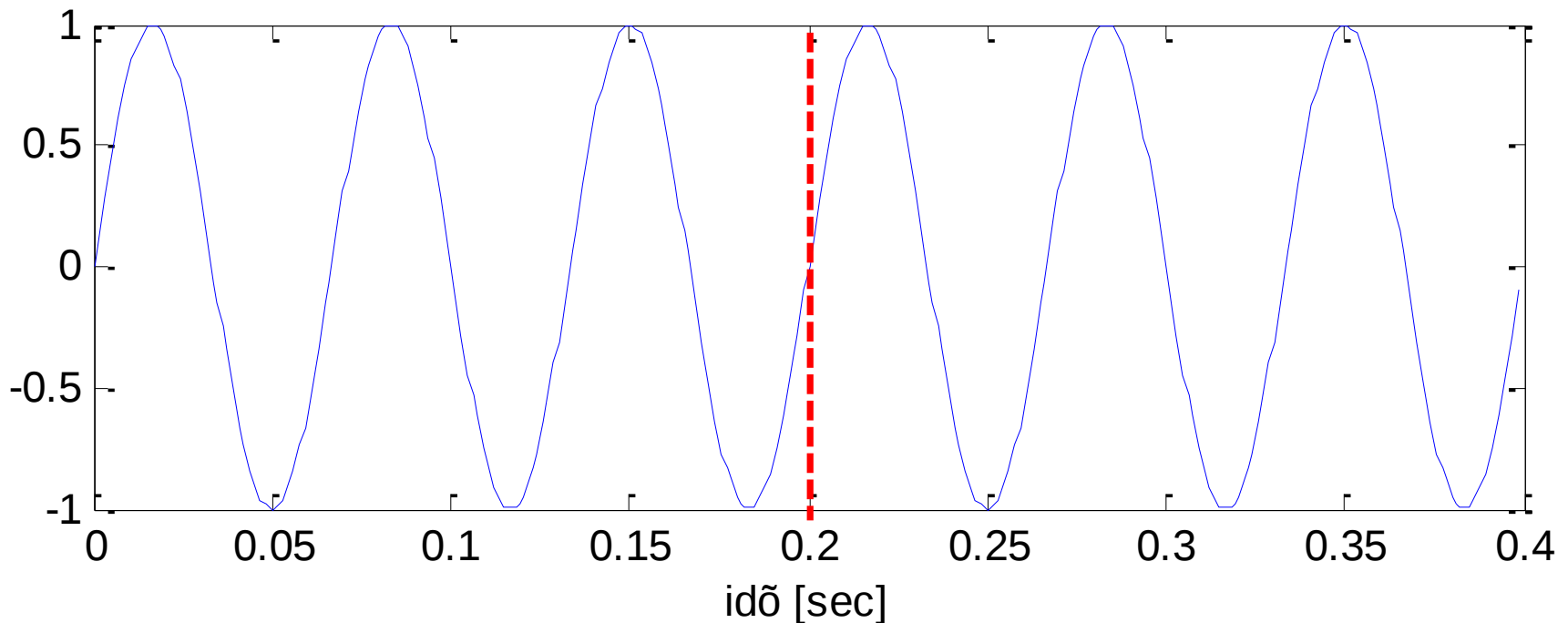


Piros: folytonos jel
spektruma

Kék: $N=100$,
Hamming ablakos,
mintavételezett jel
spektruma

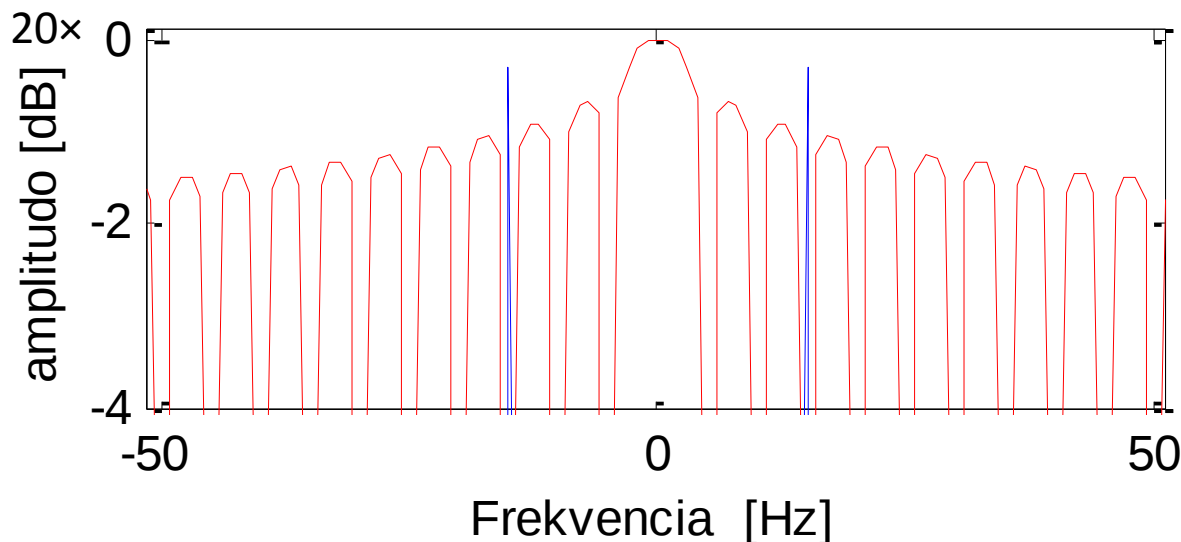
Koherens mintavételezés

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
 - Koherensen mintavételezzük (y_{200}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 200$
 - DFT által „látott” jel: $y_{200}[n] = y_\infty[\text{mod}_{200}(n)] = y_\infty[n]$



Spektrum koherens mintavételezés esetén

- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
 - Mintavételezzük (y_{200}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 200$
 - Megfigyelési ekvivalens spektruma: $Y_{200} \propto Y_\infty * H_{rect}$
- $$Y_{200}(0) = \int Y_\infty(\tau) \cdot \frac{1}{2\pi} H_{rect}(0 - \tau) d\tau$$
- Piros: ablak normált spektruma

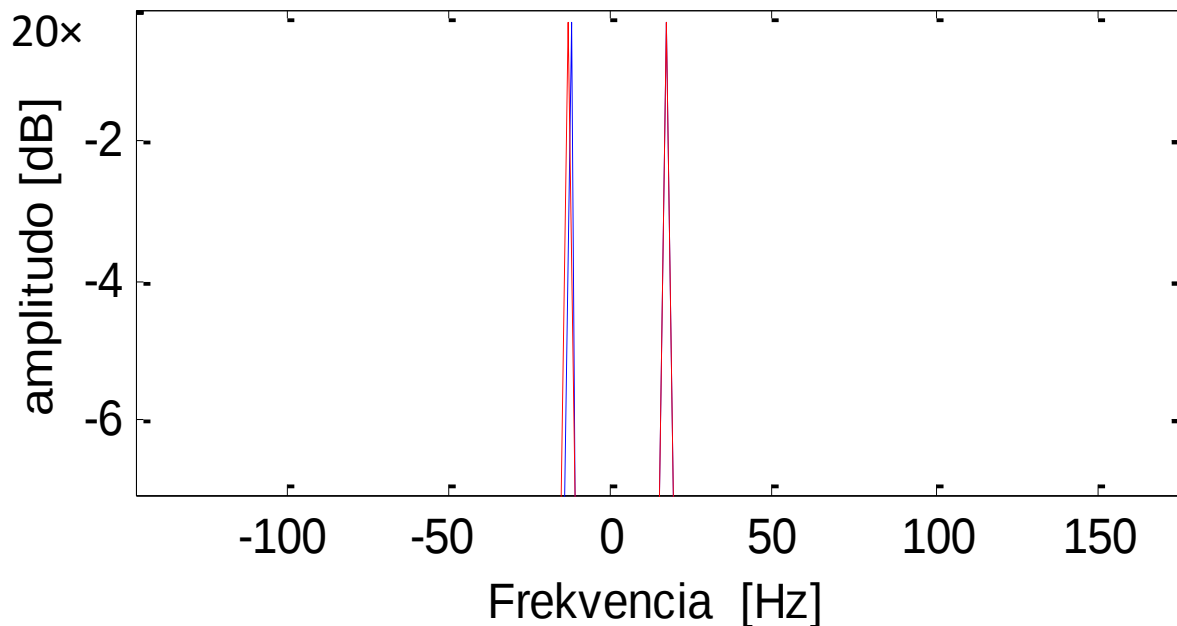


Kék: folytonos jel spektruma

Fekete: $N=200$
mintavétellel előálló
jel spektrumának DC
komponense ($\log(0)$)

Spektrum koherens mintavételezés esetén

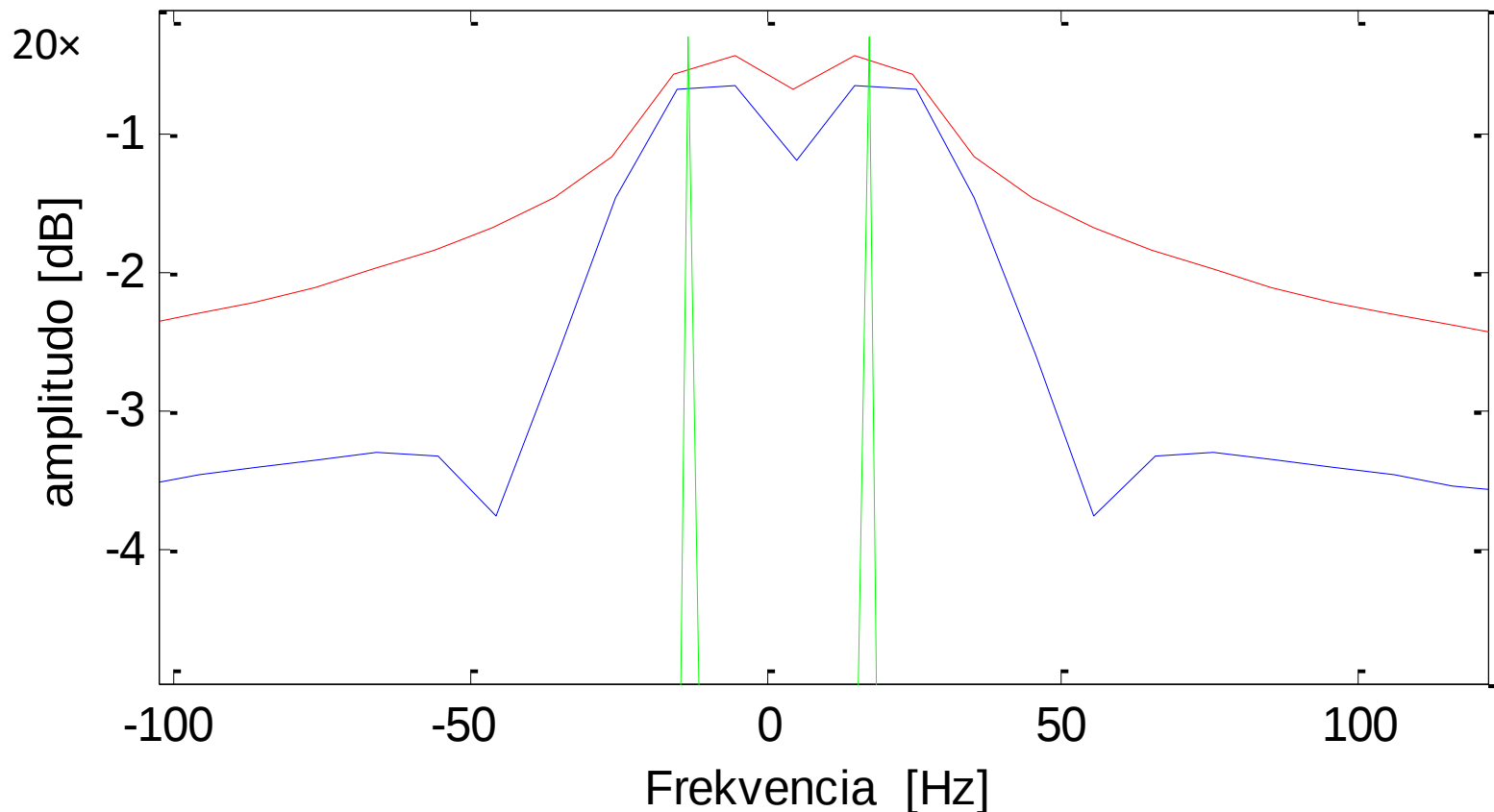
- Adott folytonos jel: $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$
 - Koherensen mintavételezzük (y_{200}): $f_s = 1\text{kHz}$, $N = 200$
 - Megfigyelési ekvivalens spektruma: $Y_{200} \propto Y_\infty * H_{rect}$



Piros: folytonos jel
spektruma

Kék: $N=200$
mintavétellel előálló
jel spektruma

Koherensen mintavett / ablakozott, nem koherensen mintavett jelek spektruma



Zöld: koherensen mintavételezett jel spektruma, kék: Hamming ablakos, piros: téglalap ablakos spektrum

2D DFT

Többi transzformáció esetén is hasonló a többdimenziós eset

- Analízis irány:

$$F_{u,v} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f[m,n] \exp \{ -2\pi j \cdot (u \cdot m/M + v \cdot n/N) \} =$$
$$= \sum_{m=0}^{M-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} f[m,n] \cdot \exp \{ -2\pi j \cdot (v \cdot n/N) \} \right) \exp \{ -2\pi j \cdot (u \cdot m/M) \}$$

- Tulajdonságok:

- Periodikus: $[M,N]$ szerint

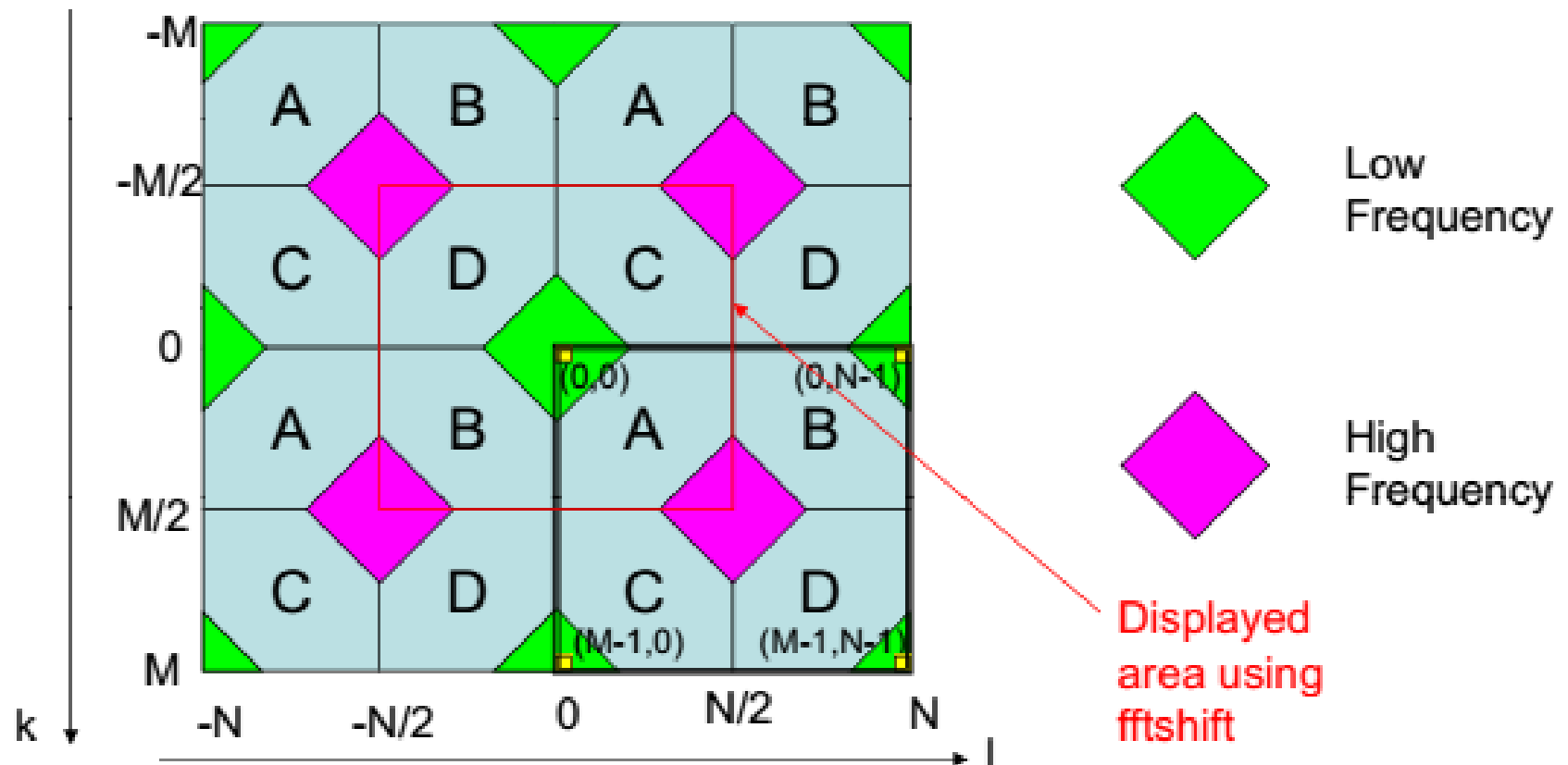
- Valós jel esetén: $F_{u,v} = \overline{F_{-u,-v}} = \overline{F_{M-u,N-v}}$

- Ha M, N páros: $F_{M/2+u,N/2+v} = F_{M/2-u,N/2-v}$

- Spektrum hullámfrontos interpretációja

2D DFT spektrum

- Spektrum blokkjai:



2D DFT spektrum gépi ábrázolása

- Konjugált szimmetria valós jelek esetén:

0	1	2	3	4	3	2	1
5	6	7	8	9	33	32	31
10	11	12	13	14	30	29	28
15	16	17	18	19	27	26	25
20	21	22	23	24	23	22	21
15	25	26	27	19	18	17	16
10	28	29	30	14	13	12	11
5	31	32	33	9	8	7	6

M=N=8

 real x x Conjugate pairs

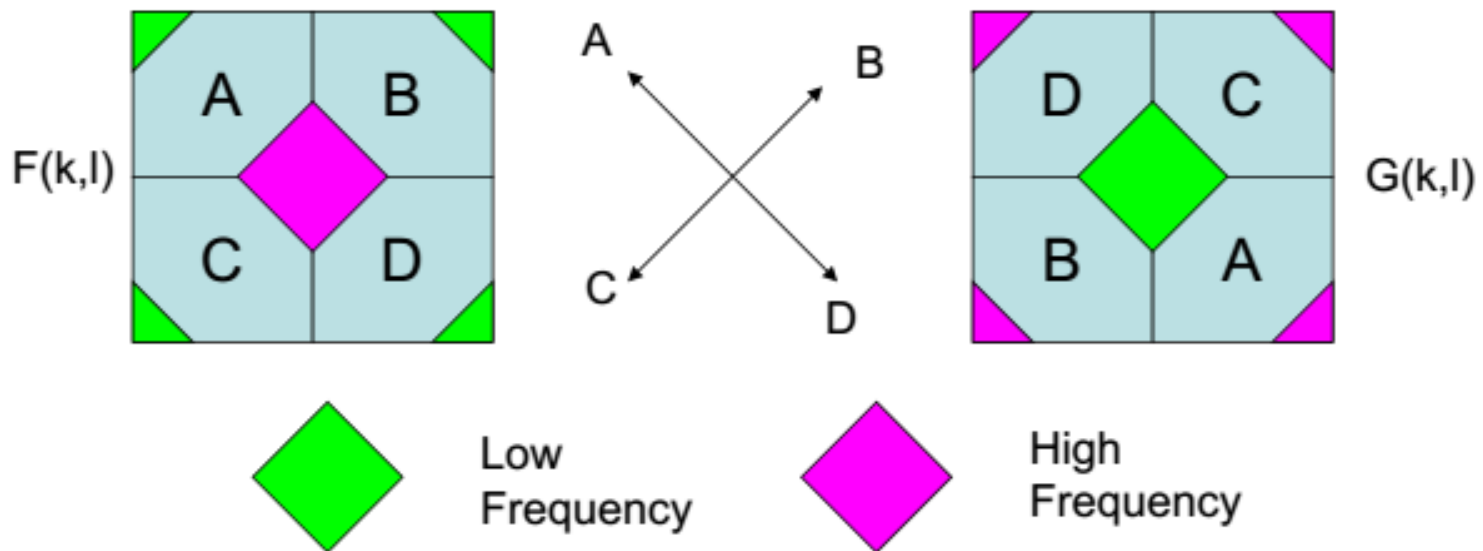
 Nyquist frekvenciához tartozó komponens

0	1	2	3	4	4	3	2	1
5	6	7	8	9	40	39	38	37
10	11	12	13	14	36	35	34	33
15	16	17	18	19	32	31	30	29
20	21	22	23	24	28	27	26	25
20	25	26	27	28	24	23	22	21
15	29	30	31	32	19	18	17	16
10	33	34	35	36	14	13	12	11
5	37	38	39	40	9	8	7	6

M=N=9

2D DFT spektrum

- Általában a DC komponenst „csavarjuk” középre:
 - Ampl. moduláció: $g[m,n] = f[m,n] \cdot (-1)^{(m+n)}$

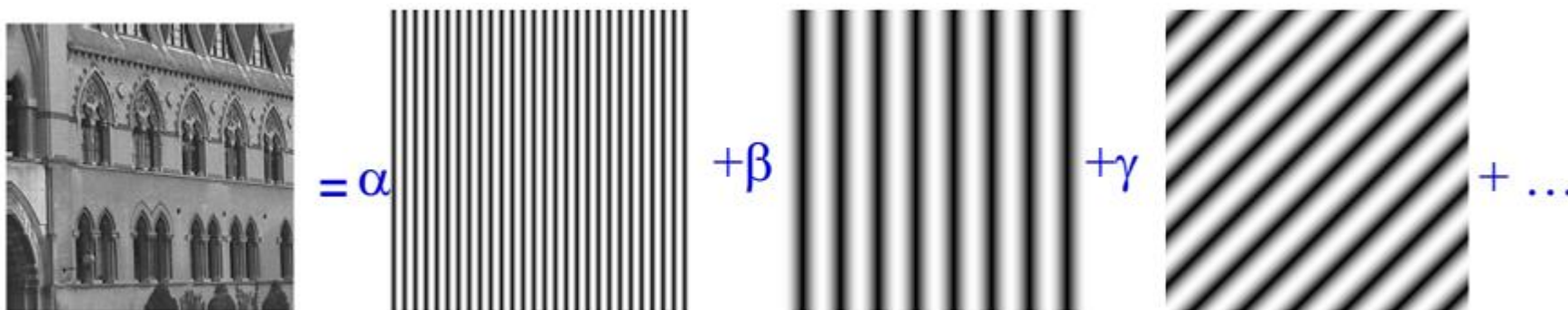


2D DFT Számolási tulajdonságok

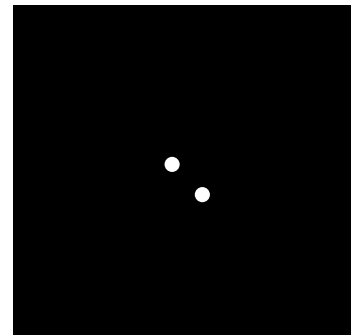
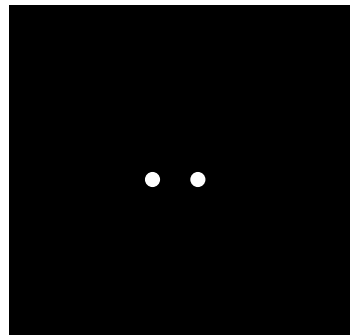
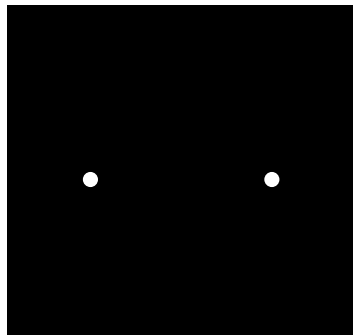
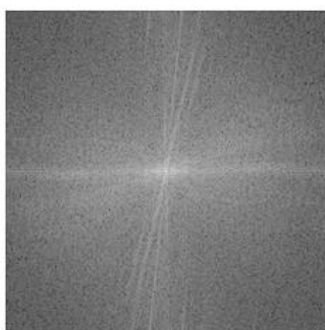
- 1D DFT komplexitása:
 - Direkt módszer: $O(N^2)$
 - FFT: $O(N \times \log(N))$, hatékonyan számítható, ha N 2 hatvány (radix-2 Cooley-Tukey)
- 2D DFT komplexitása ($N \times N$ -es képre):
 - Direkt számítás: $O(N^4)$
 - Szeparálással: $O(N^3)$
 - Szeparálás + FFT: $O(N^2 \times \log(N))$
- Half Complex ábrázolással helyben tárolható!

2D DFT Vizuális értelmezés

- Lényegében egy bázis transzformáció ortogonális bázisokra (szinuszos hullámok)

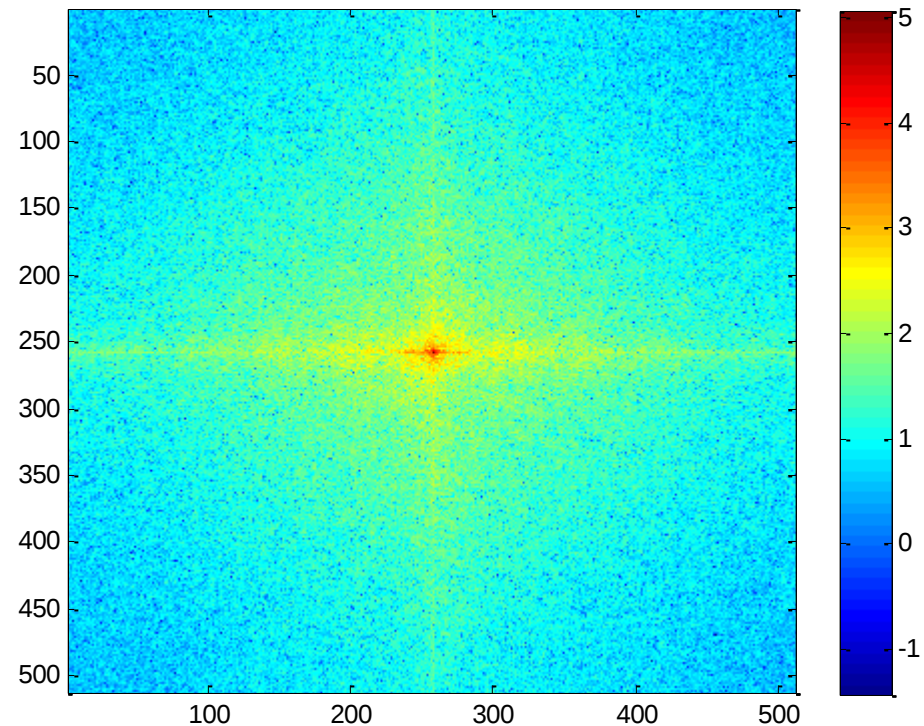


Spektrum amplitudója:



Képek spektrumának jellemzői

- Alacsony frekvenciákon nagy energia:



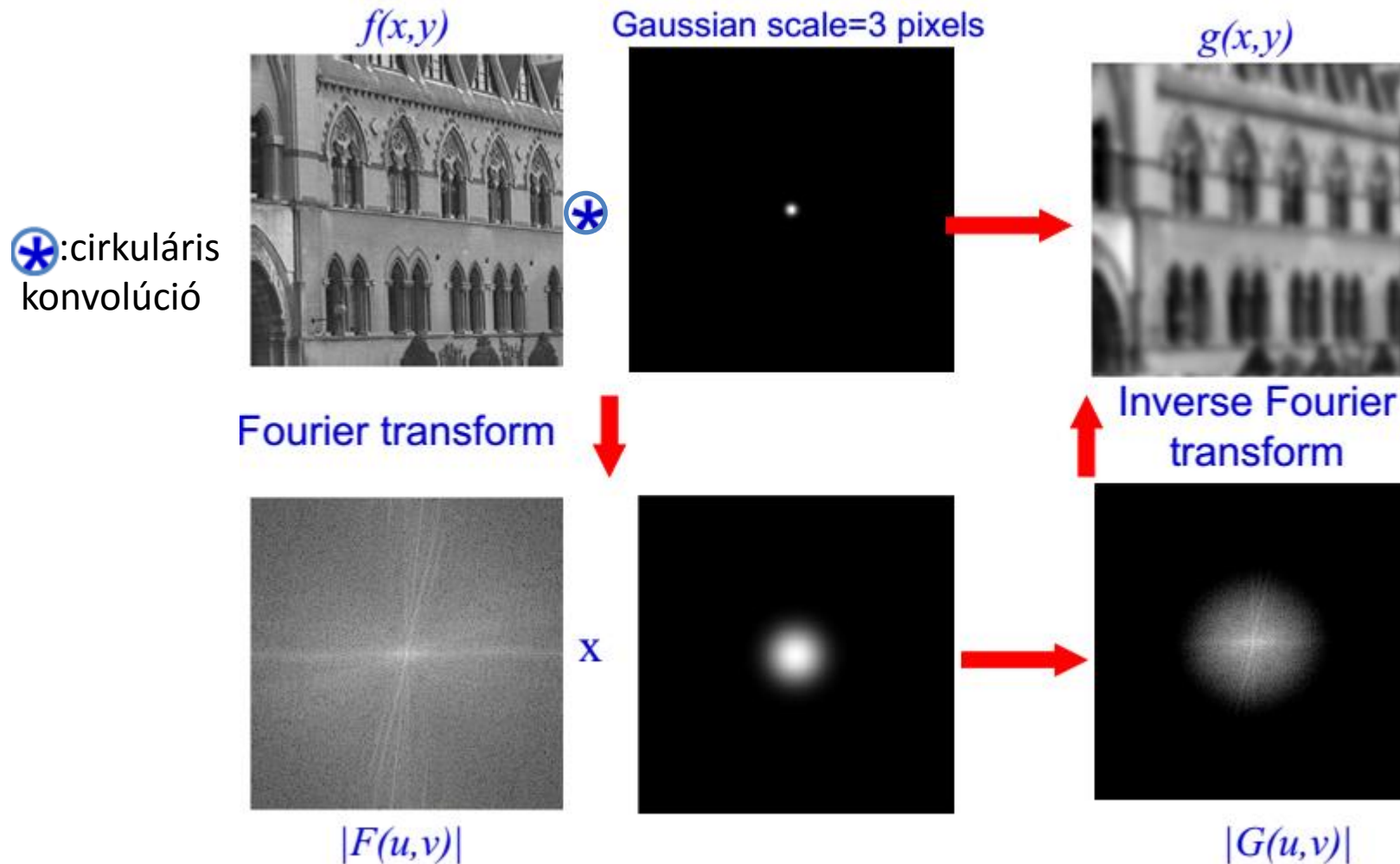
Spektrum amplitúdója logaritmikus skálán

2D DFT konvolúciós tétele:

- DFS- es analógia – cirkularitás:
 - $(f \otimes g)[n] = \sum_{m=0}^N f[m] \cdot g[\text{mod}_N(n-m)] = (f' * g')[n]$
 - $f'[n] = f[\text{mod}_N(n)]$, míg $g'[m] = g[\text{mod}_N(m)]$
- Mit tegyünk, ha $f * g$ -t akarjuk DFT-vel számolni?
 - Terjesszük ki f és g méretét $[N+M]$ hosszúra:
 - Ezt időtartomány / síktartományban is meg kell tenni
 - Általános módszerek: 0-val paddelés, kép széleire tükrözés, alul-áteresztő szűréseknél súlyozás, kiterjesztés a kép szélső pixelének intenzitásával, stb.
 - 5×5-ös kernel esetén már gyorsabb

Konvolúció tétel fontossága

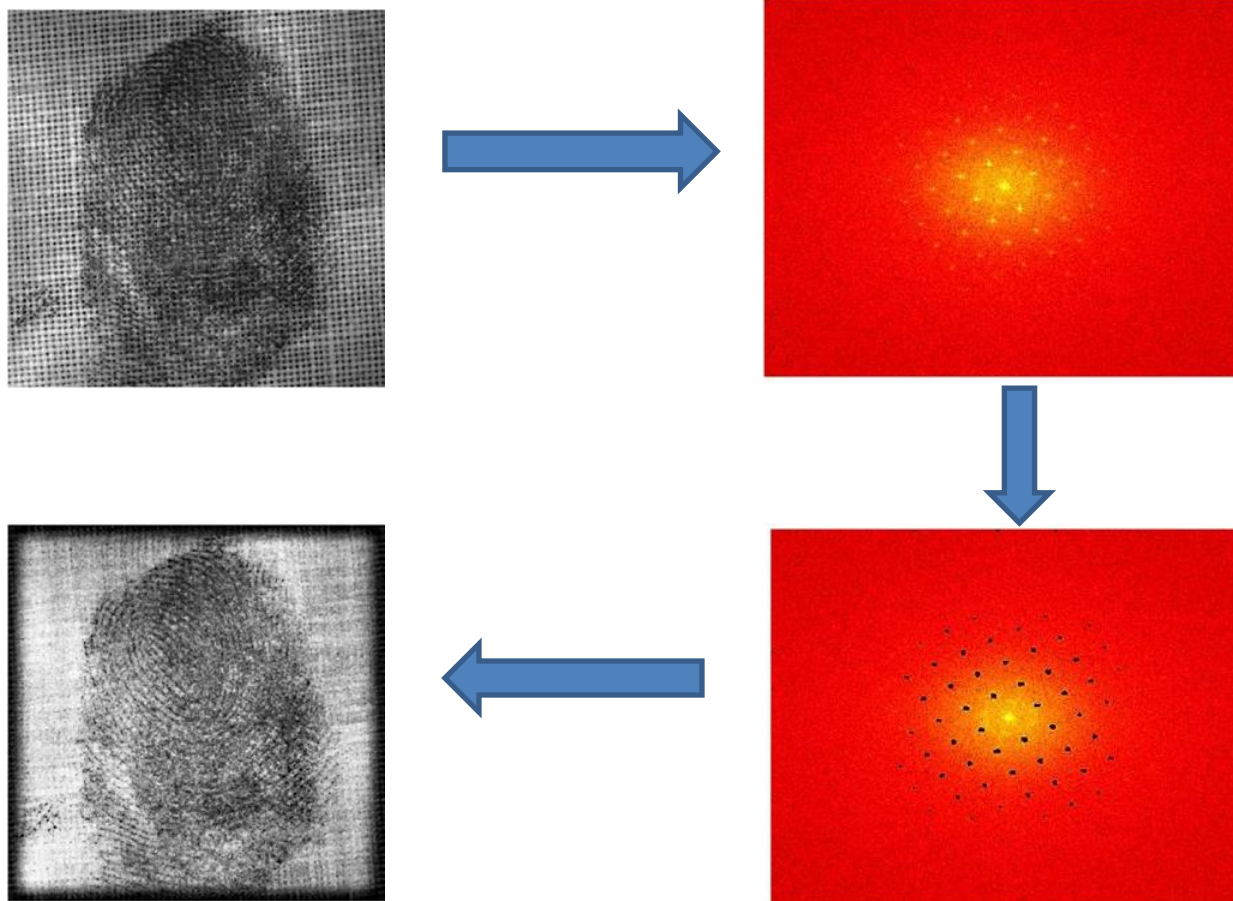
- Lineáris szűrések frekvenciatérben:



2D DFT Példa – periodikus textúra

ampl. moduláció

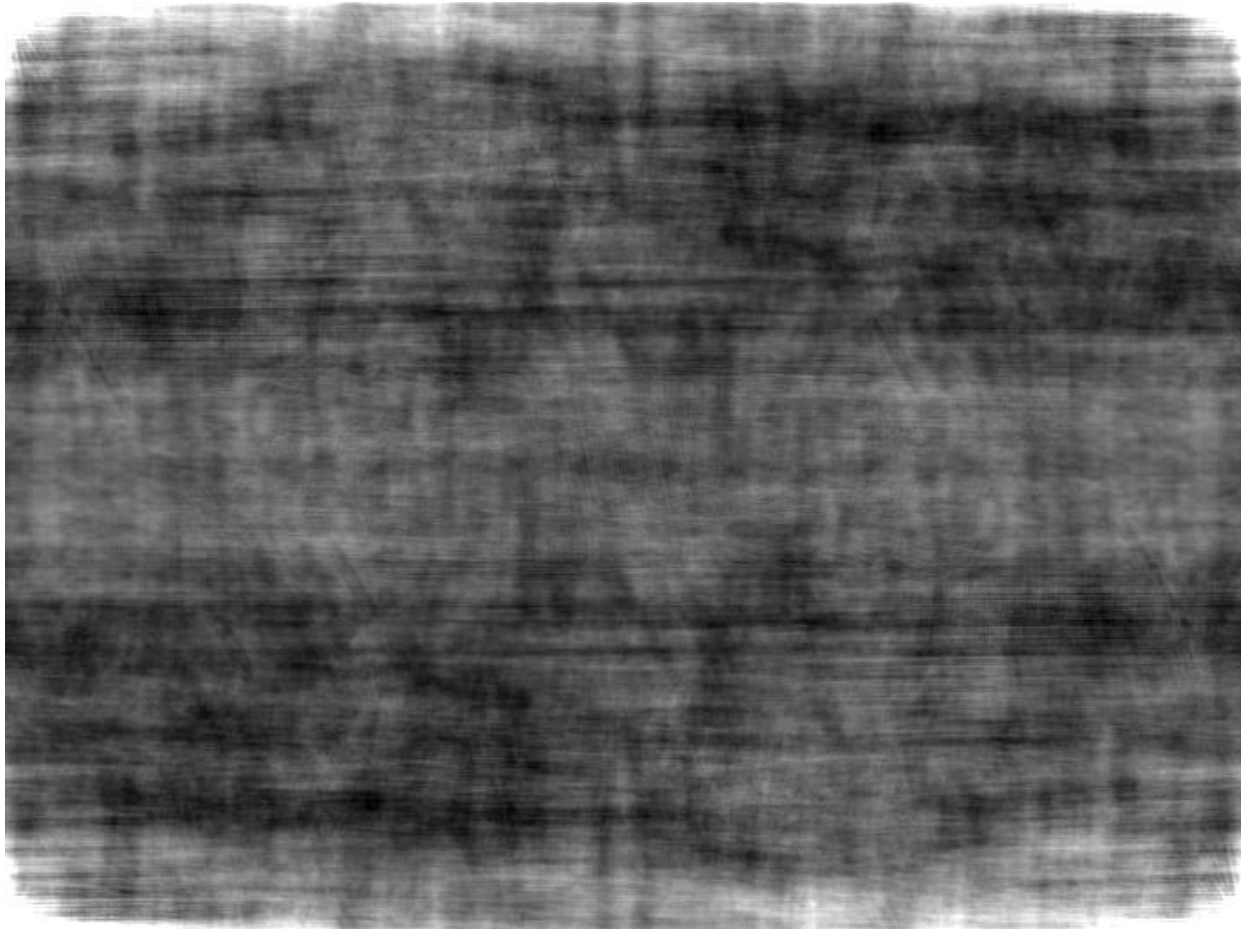
- Periodikus mintázat $\Leftrightarrow$ csúcsok a spektrumban:



2D DFT példa – rekonstrukció spektrum amplitúdóból és fázisból



2D DFT példa – spektrum amplitúdójából rekonstruált kép



2D DFT példa – spektrum fázisából rekonstruált kép

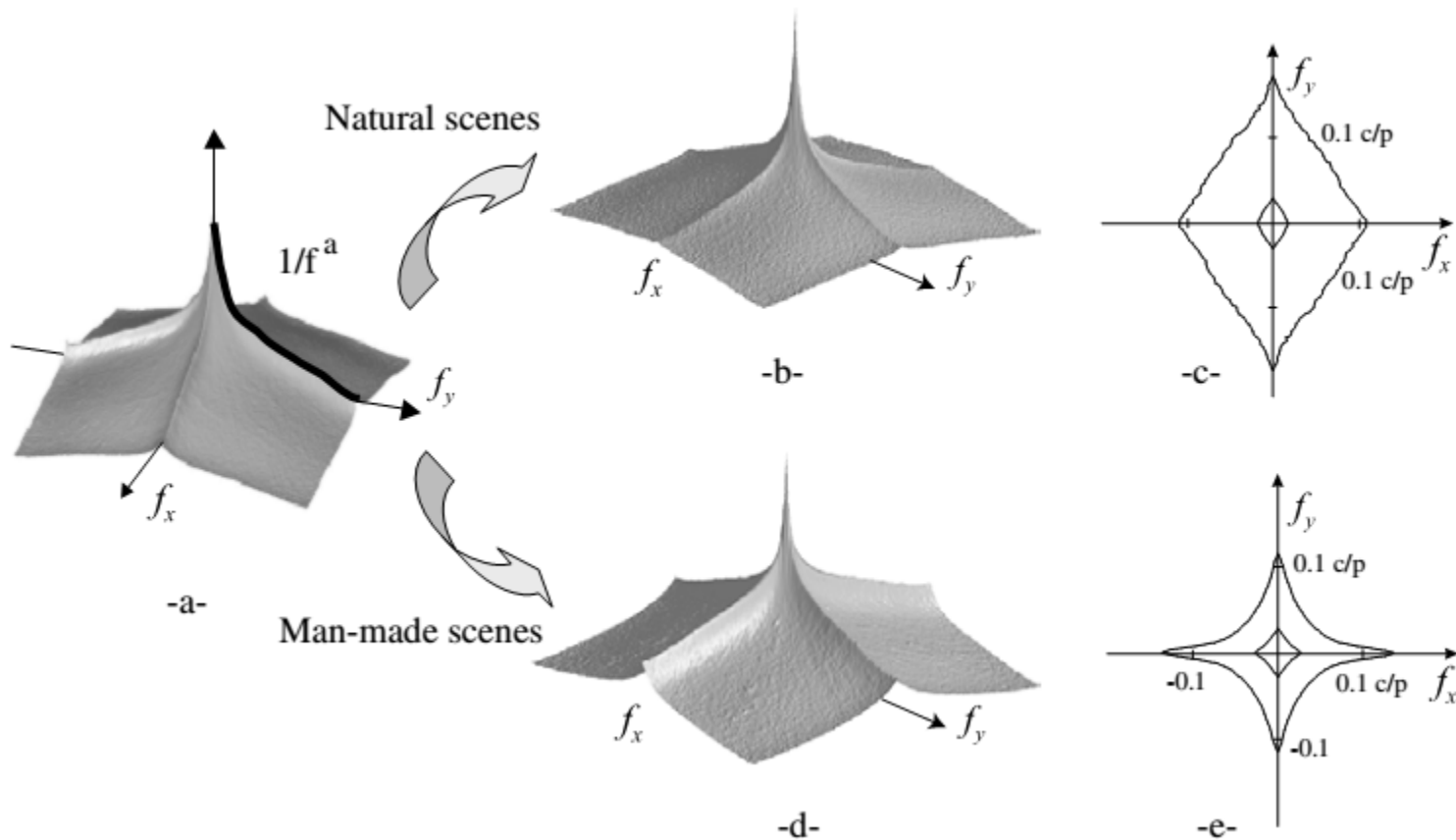


Polár koordinátás DFT

- Motiváció:
 - Radon transzformáció és annak invertálása
 - Regisztráció: elforgatás és eltolás könnyen számolhatóvá válik
- Számítása – folytonos eset:
 - $F\{\theta, \rho\} = \iint_{x,y} f(x, y) \cdot \exp(-2\pi j \cdot \rho \cdot (x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta))) dy dx$
 - Nem szeparábilis
 - Fourier vetítő sík tétel
 - Spektrum vonal profiljai $\Leftrightarrow$ Radon transzformáció 1D Fourier transzformáltjai

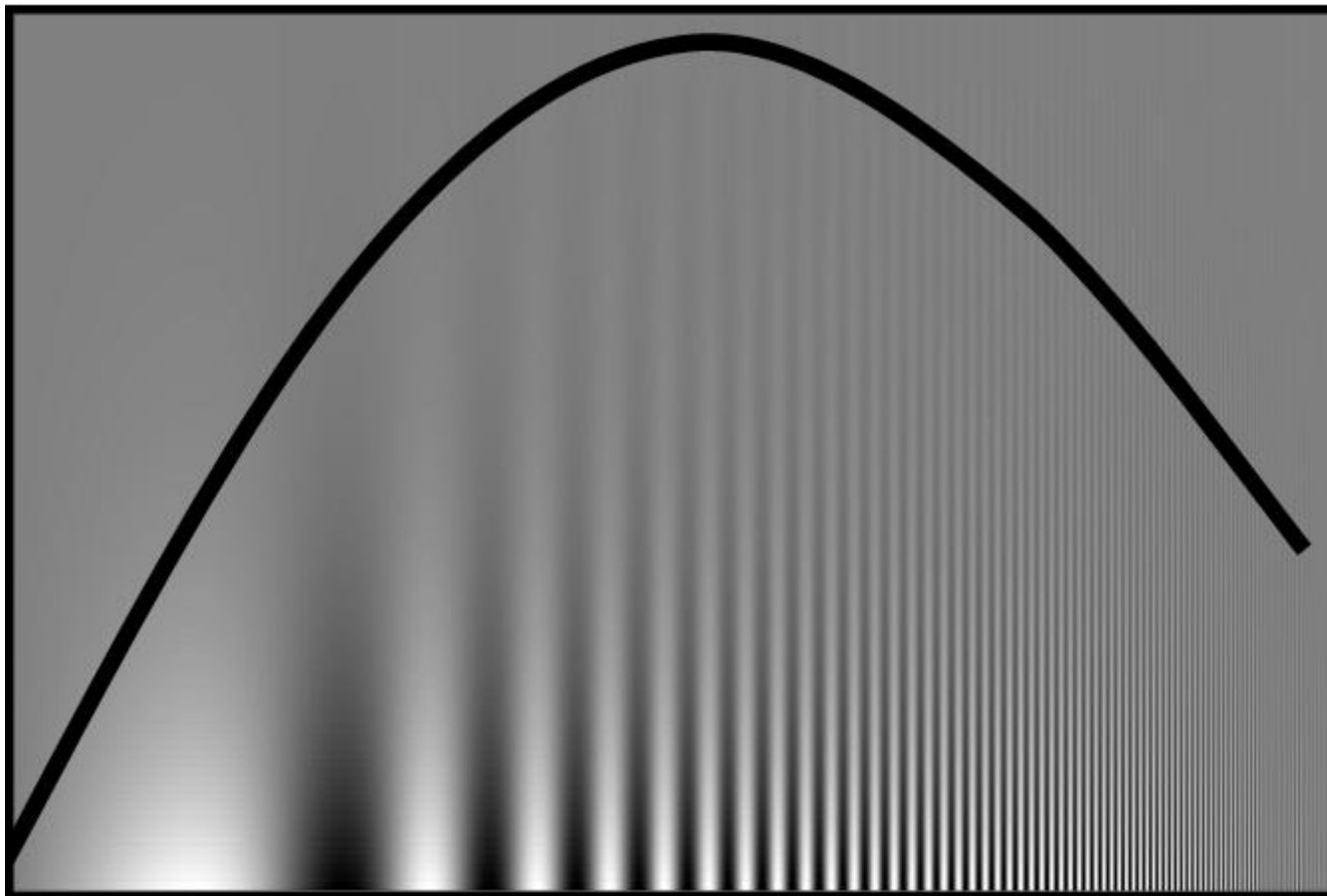
Majd a rekonstrukciónál
bizonyítjuk is!

Digitális képek átlagos energiaspektruma



Frekvenciatartomány és emberi látás

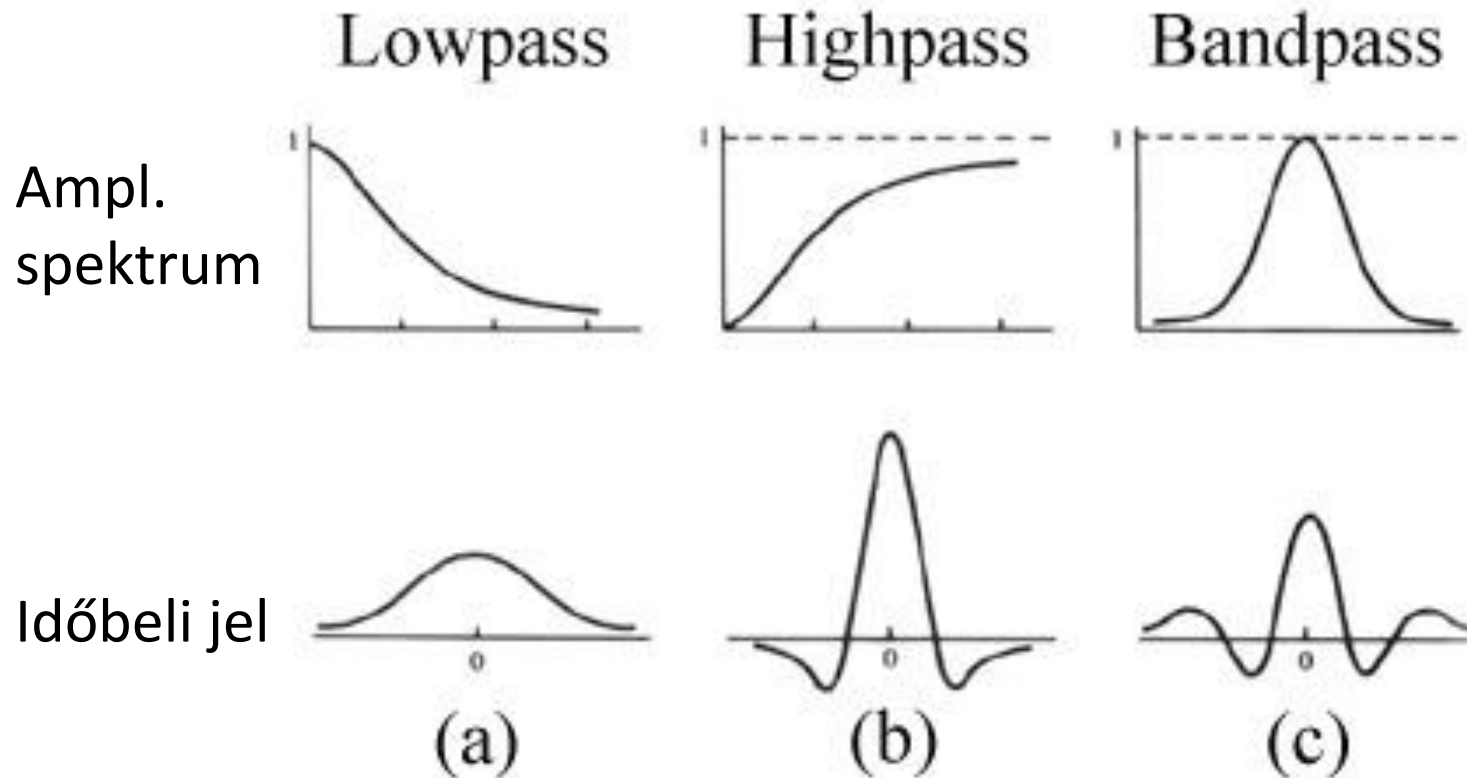
- Campbell-Robson kontraszt érzékenységi görbe:



8. Előadás tartalma

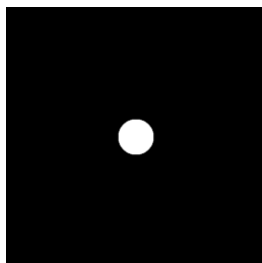
- Lineáris szűrők:
 - Klasszikus szűrők súly és átviteli függvénye
 - Gibbs jelenség
- Inverz probléma – dekonvolúció:
 - Inverz probléma formális felírása, statisztikai értelmezése
 - Dekonvolúció nehézsége
 - Közismert algoritmusok: Wiener inverz szűrés, RLA/ ML-EM, MAP becslés, és ezek kapcsolataik

Szűrők idő és frekvencia tartományban



Ideális szűrők

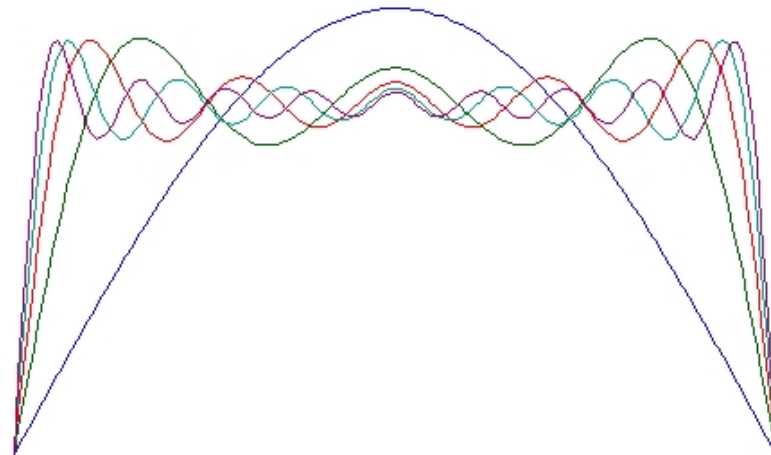
- Amplitúdó éles vágásánál Gibbs jelenség:



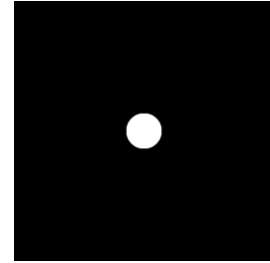
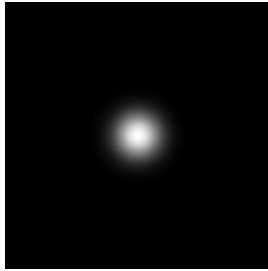
Gibbs gyűrű effektus

- Gibbs jelenség elkerülhető „sima” átmenetű szűrőkkel:
 - Butterworth szűrő: adott sávkorlát mellett a legsimább ampl. spektrumú lineáris szűrő
 - Gauss szűrő: alkalmazásával nincs Gibbs artefekt

Reconstruction of the periodic square waveform with 1, 3, 5, 7, 9 sinusoids



Gibbs gyűrű effektus



Inverz probléma

- Megfigyelési modell (zajos LTI): $g = h * f + \eta$
 - h -t (avagy a PSF-t) mi befolyásolhatja?
 - Páciens bemozdulása a felvételek készítése alatt
 - Out-of-focus elrendezés
 - Szóródó fotonok képek rögzítése során
 - Jelen előadás során $f, g \in R_+^2$ és $\eta \in R^2$:
 - f a vizsgált 3D objektum projekciója
- Alapötlet – direkt módszer:
 - Dekonvolúció frekvenciatérben: $F_{(u)} = (G / H)_{(u)}$

Inverz probléma statisztikai interpretációja

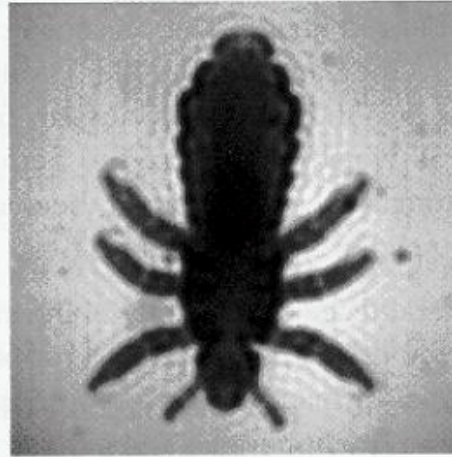
- Cél megbecsülni $P\{f\}$ -et:
 - Maximum likelihood módszer:
 - $f_{ML}^* = \arg \max_f \{P\{g|f\}\}$
 - Gyakorlatban majdnem mindig $P\{g|f\} = P_\eta\{g - h * f\}$ és az $f_{ML}^* = \arg \min_f \{-\log\{P\{g|f\}\}\}$ -t szoktuk keresni
 - Maximum a posterior (MAP) becslés:
 - $f_{ML}^* = \arg \max_f \{P\{f|g\}\} = \arg \max_f \{P\{g|f\} \cdot P\{f\}\}$
 - Gyakorlatban ezeket a szélsőérték keresési problémákat is negatív logaritmálás után oldjuk meg.

Direkt dekonvolúció zajérzékenysége

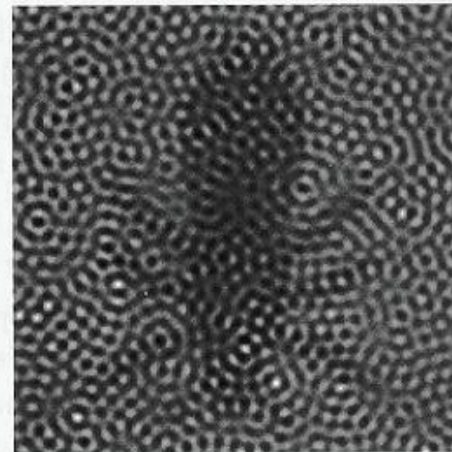
- Problémák a direkt módszerrel:
 - PSF-et nem ismerjük pontosan $\tilde{H} \neq H$
 - $\tilde{F} = G / \tilde{H} = F \circ (H / \tilde{H}) + \textcolor{red}{N} / \textcolor{red}{\tilde{H}} \neq F$
 - a PSF általában alul-áteresztő jellegű
 - magas frekvenciákon $\textcolor{red}{N.} / \textcolor{red}{\tilde{H}}$ dominál (~ 0 -val osztás)



a



b



c

a: elmosott kép

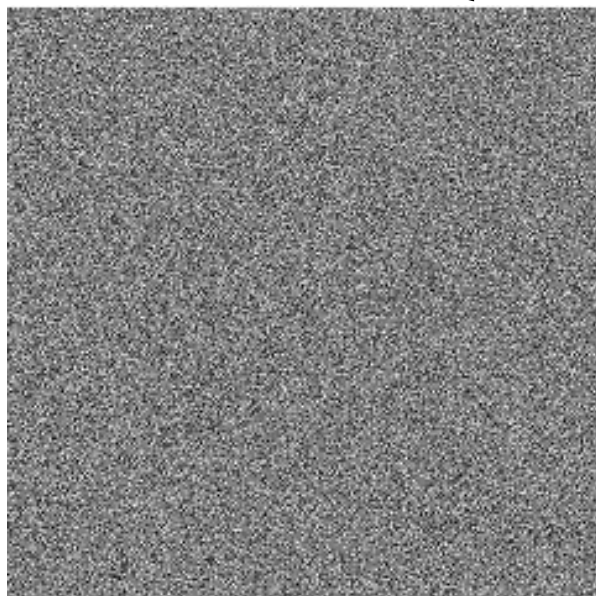
b: direkt
dekonvolúció
eredménye, ha
nincs additív zaj

c: eredmény ha
van additív zaj

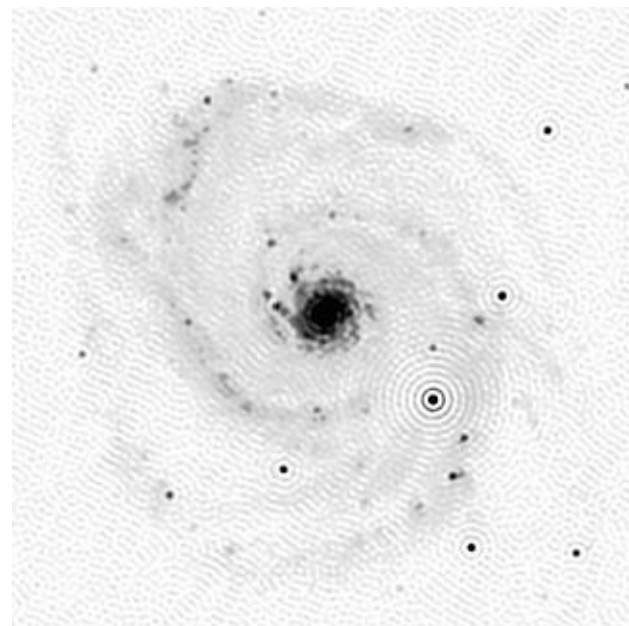
Csonkolt dekonvolúció

- Azon frekvenciákon, melyeken az MTF alacsony 0 legyen az eredmény

$$- \tilde{F}_{(u)} = \begin{cases} G_{(u)} / H_{(u)} & |H_{(u)}| > \varepsilon \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$



Direkt dekonvolúció eredménye



Csonkolt dekonvolúció eredménye

Wiener inverz-szűrés

- Várható értékben legpontosabb szűrő:

- $F_{(u)}^{Wiener} = H_{(u)}^{Wiener} \cdot G_{(u)}$

- $f^{Wiener} = \arg \min \left\{ E \left\{ \left\| f^{Wiener} - f^{valódi} \right\|_2^2 \right\} \right\}$

- A matematikai levezetést hanyagolva:

$$H_{(u)}^{Wiener} = \frac{H_{(u)}^*}{\left| H_{(u)} \right|^2 + E \left\{ \left| N_{(u)} \right|^2 \right\} / E \left\{ \left| F_{(u)} \right|^2 \right\}}$$

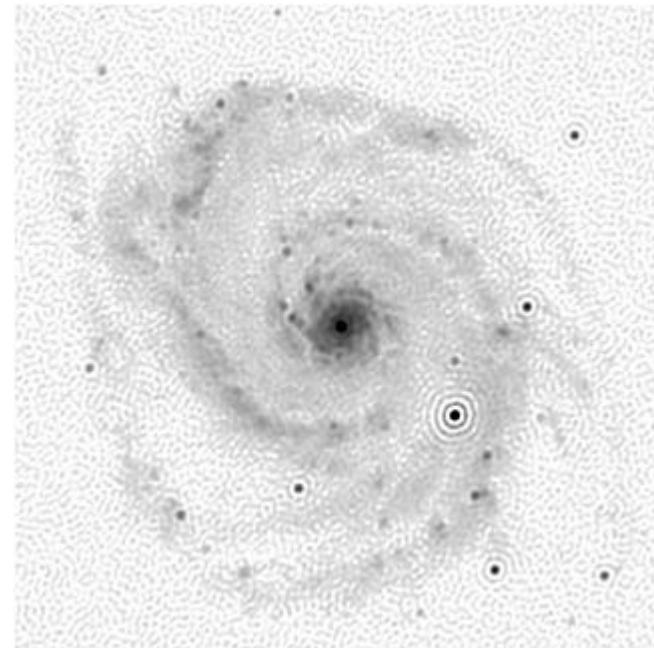
- Interpretáció:

$$H_{(u)}^{Wiener} \approx \begin{cases} 1 / H_{(u)} & |SNR_{(u)} \gg 1 \\ 0 & |SNR_{(u)} \ll 1 \end{cases} \quad SNR_{(u)} = \sqrt{\frac{\left| H_{(u)} \right|^2 E \left\{ \left| F_{(u)} \right|^2 \right\}}{E \left\{ \left| N_{(u)} \right|^2 \right\}}}$$

Wiener inverz szűrés

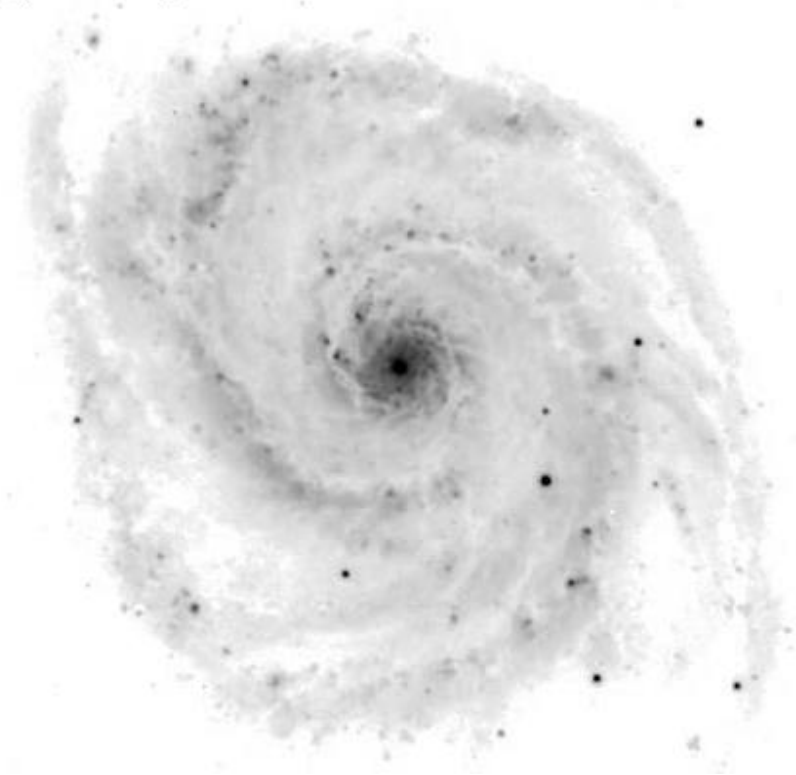
- Az eredmény (f^{Wiener}) gyakran nem realiztikus:
 - Negatív intenzitások is előfordulnak (negatív fluxus?)
 - Nagyfrekvencián a hirtelen romló SNR Gibbs artefektet generál
- SNR gyakran nem mérhető ki

Wiener szűrés eredménye: jobb részletgazdagság, de a gyűrűk egy része megmaradt

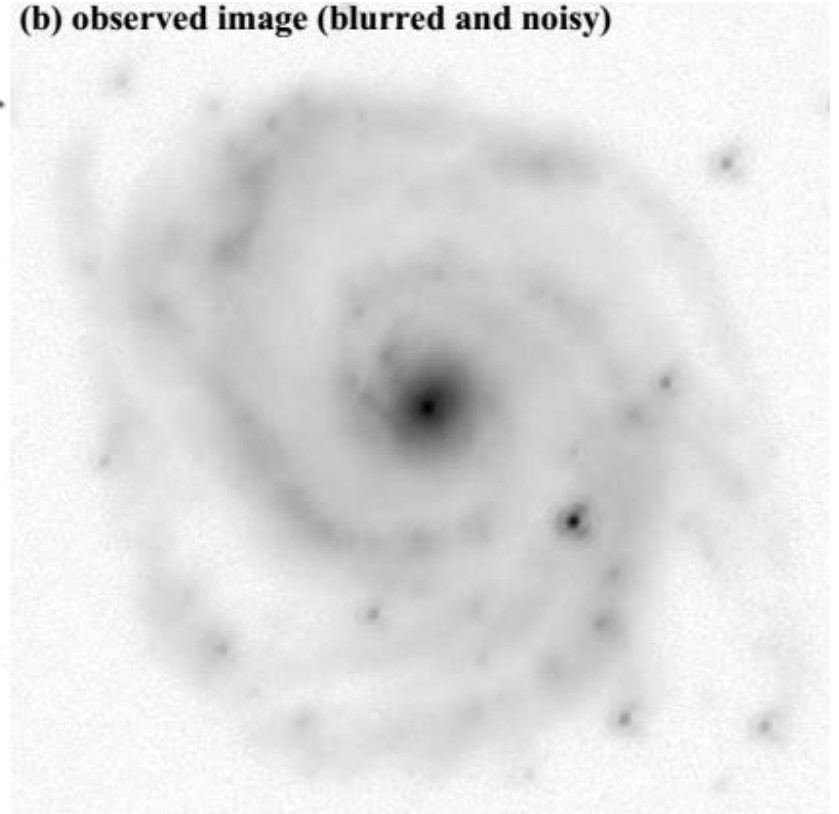


Eljárások illusztrálása -0-

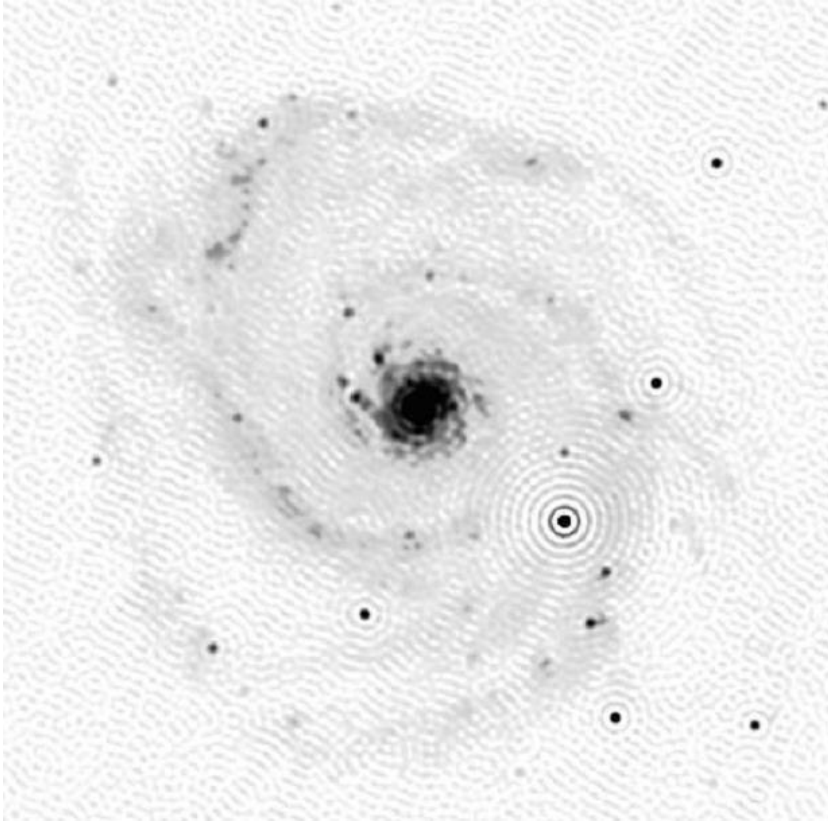
(a) true brightness distribution



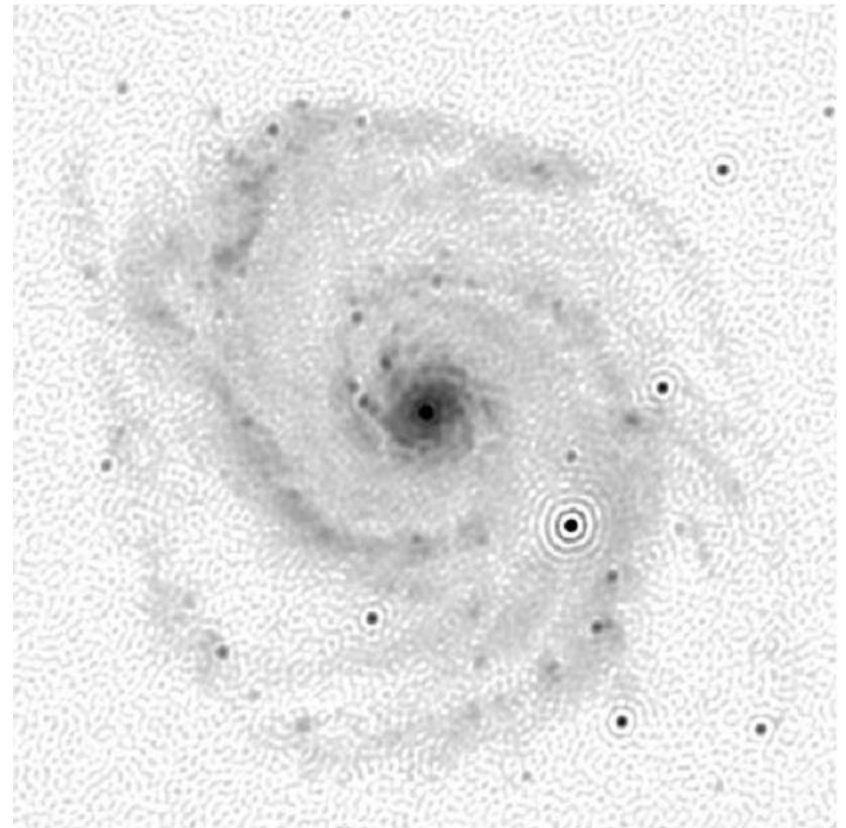
(b) observed image (blurred and noisy)



Eljárások illusztrálása -1-



Csonkolt dekonvolúció



Wiener inverz szűrés

Kényszermentes ML becslés

- Additív Gauss zaj esete ($\eta \in \mathcal{N}(0, W^{-1})$):
 - $f_{ML}^* = \arg \max_f \left\{ K \cdot \exp \left(- (g - H' \cdot f)^T \cdot W / 2 \cdot (g - H' \cdot f) \right) \right\}$
 - H' a rendszer torzításának mátrixa, tehát: $h * f = H' \cdot f$
 - Minimalizáljuk a negatív log likelihood függvényt:
 - $L(f) = (g - H' \cdot f)^T \cdot W / 2 \cdot (g - H' \cdot f)$
 - Mivel $H'^T \cdot W \cdot H$ pozitív szemidefinit, ezért $L(\cdot)$ konvex.
 - Tehát $\nabla L(f_{ML}^*) = 0$ kényszer definiálja az optimum helyet
 - $f_{ML}^* = (H'^T \cdot W \cdot H')^{-1} \cdot H'^T \cdot W \cdot g$ ún. súlyozott LS becslés

Kényszermentes ML becslés példa

- Stacionárius, 0 várható értékű Gauss megfigyelési zaj esete :
 - $\text{Cov}(g) = \sigma^2 \cdot I$, tehát $W = \sigma^{-2} \cdot I$
 - $f_{ML}^* = (H'^T \cdot W \cdot H')^{-1} \cdot H'^T \cdot W \cdot g = (H'^T \cdot H')^{-1} \cdot H'^T \cdot g$
- Vizsgáljuk meg f_{ML}^* spektrumát:
 - $F_{ML(u)}^* = \frac{H_{(u)}^* \cdot G_{(u)}}{H_{(u)}^* \cdot H_{(u)}} = \frac{H_{(u)}^* \cdot G_{(u)}}{|H_{(u)}|^2} = \frac{G_{(u)}}{H_{(u)}} = (G/H)_{(u)}$
 - Konzekvencia: ML eljárással nem lehet a rosszul kondicionált inverz problémát megoldani.

ML becslés pozitívítási kényszerrel

- Nem negativitási kényszer: $f \in R_+$
- Jó esetben konvex optimalizálási probléma:

$$\begin{array}{ll} \max. & P\{g|f\} \\ \text{s.t.} & f \geq 0 \end{array} \xrightarrow{-\log} \begin{array}{ll} \min. & L_g(f) \\ \text{s.t.} & f \geq 0 \end{array}$$

- Konvex a probléma, ha $\Pr\{g|f\}$ log-konkáv.
- Nem adható rá analitikus megoldás
- Milyen eloszlású lehet valójában az additív zaj:
 - Poisson: fotonok inherens zaja
 - Gauss: termikus zaj
 - Uniform: kvantálási zaj (A/D átalakítás)

Richardson Lucy algoritmus (+)

- Interpretáljuk a képpontok intenzitását fotonok becsapódási valószínűségeivel:
 - $P\{f_{(i)}\}$: P („egy fotonon a detektor i -edik érzékelő-elemébe csapódik, ha nincs zaj és torzítás”)
 - $P\{g_{(k)}\}$: P („egy fotonon a detektor k -adik érzékelő-elemébe csapódott a megfigyelt kép rögzítése során”)
 - $P\{g_{(k)} \mid f_{(i)}\}$: P („ideális esetben az i -edik érzékelőelembe csapódó foton a k -adik érzékelőelembe csapódik bele
– a képképző LTI rendszer torzítása miatt”)

Richardson Lucy algoritmus

- Lényegében egy Bayes-i becslés:

- Bayes szabály:
$$P\left\{f_{(i)} \mid g_{(k)}\right\} = \frac{P\left\{g_{(k)} \mid f_{(i)}\right\} \cdot P\left\{f_{(i)}\right\}}{\sum_j P\left\{g_{(k)} \mid f_{(j)}\right\} \cdot P\left\{f_{(j)}\right\}}$$

- Dekomponálás:
$$P\left\{f_{(i)}\right\} = \sum_k P\left\{f_{(i)} \mid g_{(k)}\right\} \cdot P\left\{g_{(k)}\right\}$$

- Tehát:
$$P\left\{f_{(i)}\right\} = \sum_k \frac{P\left\{g_{(k)} \mid f_{(i)}\right\} \cdot P\left\{f_{(i)}\right\} \cdot P\left\{g_{(k)}\right\}}{\sum_j P\left\{g_{(k)} \mid f_{(j)}\right\} \cdot P\left\{f_{(j)}\right\}}$$

Richardson Lucy algoritmus

- Bevett gyakorlat: iteráljunk a célváltozó felett:

$$P_{(r+1)} \{ f_{(i)} \} = \sum_k \frac{P \{ g_{(k)} | f_{(i)} \} \cdot P \{ g_{(k)} \}}{\sum_j P \{ g_{(k)} | f_{(j)} \} \cdot P_{(r)} \{ f_{(j)} \}} \cdot P_{(r)} \{ f_{(i)} \}$$

- Oldjuk fel a valószínűségi értelmezést:

- $P \{ f_{(i)} \} = f_{(i)} / (f^T \cdot 1)$; $P \{ g_{(i)} \} = g_{(i)} / (g^T \cdot 1)$
- $P \{ g_{(k)} | f_{(i)} \} = h_{(i-k)}$
- T.f.h $h^T \cdot 1 = 1$; $h \geq 0$ ezekből következik: $g^T \cdot 1 \leftrightarrow f^T \cdot 1$

Richardson Lucy algoritmus (+)

- $P\{f_{(i)}\} = f_{(i)} / (f^T \cdot 1)$: dekonvolvált kép i-edik pixelének normált intenzitása
- $P\{g_{(i)}\} = g_{(i)} / (g^T \cdot 1)$: képalkotó rendszer (LTI + zaj) által torzított kép i-edik pixelének relatív intenzitása
- $P\{g_{(k)} | f_{(i)}\} = h_{(i-k)}$: csak az LTI rendszerrel leírható torzítást modellezzük
- $h^T \cdot 1 = 1$: minden olyan foton, mely a torzítatlan rendszer esetén a detektorba csapódna be a torzított rendszer esetén is a detektorba csapódik be (maximum más érzékelőelembe)
- Végig monokróm spektrumú fotonokat feltételezve a detektált intenzitás (fluxus) egyenesen arányos a becsapódó fotonok számával

Richardson Lucy algoritmus

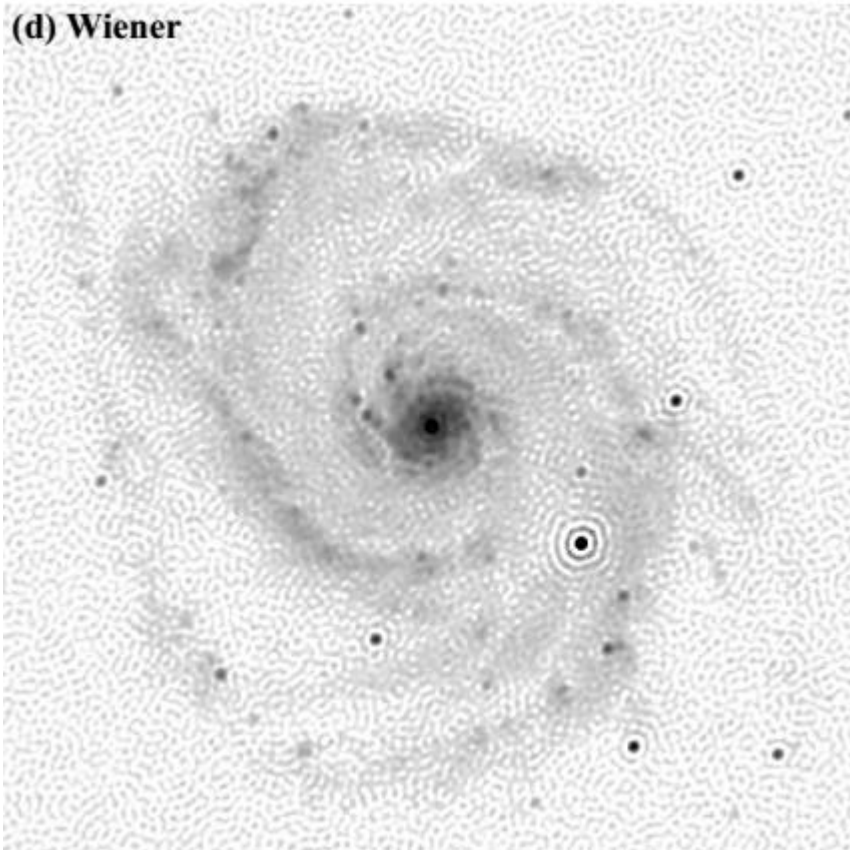
- Végezzük el a behelyettesítést:

$$- f_{(i)}^{(r+1)} = \sum_k \frac{h_{(i-k)} \cdot g_{(k)}}{\sum_j h_{(j-k)} \cdot f_{(j)}^{(r)}} \cdot f_{(i)}^{(r)} = \sum_k \frac{h_{(i-k)} \cdot g_{(k)}}{\left(h * f^{(r)}\right)_{(k)}} \cdot f_{(i)}^{(r)}$$

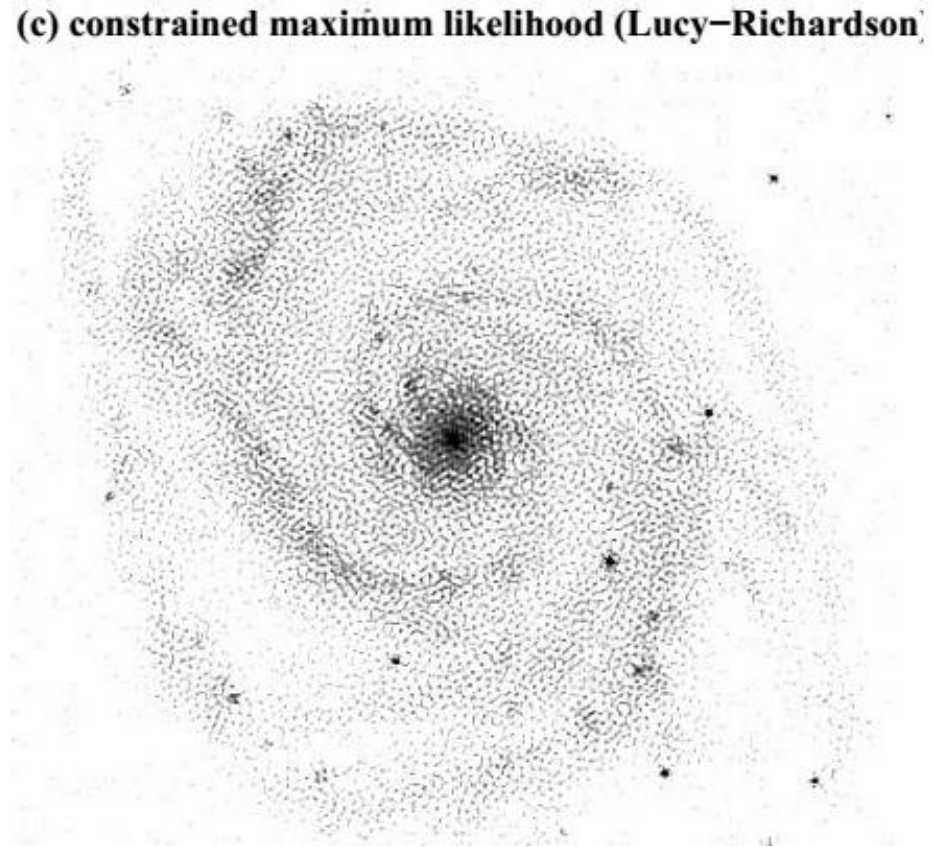
- Érdeemes észrevenni, hogy ha $f^{(0)} \geq 0$, akkor minden iterációban $f^{(r)} \geq 0$, tehát teljesül a nem-negativitási kényszer
 - Eljárás konvergenciája bizonyítható.
- Ekvivalens a pozitivitási kényszeres ML becsléssel, Poisson zaj modell esetén.

Eljárások illusztrálása -2-

(d) Wiener



(c) constrained maximum likelihood (Lucy–Richardson)



ML becslések összegzése

- Jelentősen felerősítik a zajt:
 - A probléma rosszul kondicionált jellegét nem képesek megfelelően kezelni.
 - Kivétel az iteratív algoritmusok köre, ha $f^{(0)}$ elegendően sima, és konvergencia előtt leállunk!
- Explicit regularizáció szükséges:
 - Definiáljuk $f^{(0)}$ a-priori eloszlását, és azt rögzítsük a minimalizálandó célfüggvényünkben
 - Megj.: RLA-nál szerepelt prior, de annak más a szerepe, értelmezése...

MAP becslések

- Bayes becsléselmélet:

- max. $P\{f|g\} \propto (P\{g|f\} \cdot P\{f\})$

- Másképpen : min. $-\log(P\{f|g\}) = \Phi_{ML}(f) + \Phi_{prior}(f) + K$

- $\Phi_{ML}(f) = -\log(P\{g|f\})$: bünteti a mérések és a zaj nélkül becsült, torzított kép eltérését: $\|g - \tilde{g}\| = \|g - h * f\|$

- $\Phi_{prior}(f) = -\log(P\{f\})$: meghatározza, hogy milyen dekonvolvált képet preferálunk (pl. zajmentesség, pozitivitás, simaság, stb.).

- Analitikai értelmezés: regularizált becslés

MAP becslés példa – stacionárius Gauss zaj, frekvenciatérbeli prior

- Prior frekvenciatartományban: $\Phi_{prior}(F) = \mu \cdot \sum_u W_{(u)} \cdot |F_{(u)}|^2$
- Gauss, stacionárius zaj: $\Phi_{ML}(f) = \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum_j \left(g_{(j)} - (H' \cdot f)_{(j)} \right)^2$
 - Parseval tétel szerint: $\Phi_{ML}(F) = \frac{1}{2N \cdot \sigma^2} \sum_u |G_{(u)} - H_{(u)} \cdot F_{(u)}|^2$
- Összegezve: $\Phi(F) = \frac{1/2}{N \cdot \sigma^2} \sum_u |G_{(u)} - H_{(u)} \cdot F_{(u)}|^2 + \mu \cdot \sum_u W_{(u)} \cdot |F_{(u)}|^2$
 - Mivel $\Phi(\cdot)$ konvex, ezért $\nabla \Phi(F^{opt}) = 0$, tehát:

$$F_{(u)}^{opt} = \frac{H_{(u)}^* \cdot G_{(u)}}{|H_{(u)}|^2 + 2 \cdot \mu \cdot N \cdot \sigma^2 \cdot W_{(u)}}$$

MAP becslés példa – stacionárius Gauss zaj, simasági prior

– $W_{(u)} = \left(\mathbb{E} \left\{ |N_{(u)}|^2 \right\} / \mathbb{E} \left\{ |F_{(u)}|^2 \right\} \right) / (2\mu \cdot N \cdot \sigma^2)$ esetén:

$$\bullet F_{(u)}^{opt} = \frac{H_{(u)}^* \cdot G_{(u)}}{|H_{(u)}|^2 + \mathbb{E} \left\{ |N_{(u)}|^2 \right\} / \mathbb{E} \left\{ |F_{(u)}|^2 \right\}}$$

• Tehát a Wiener dekonvolúció is egy MAP becslés

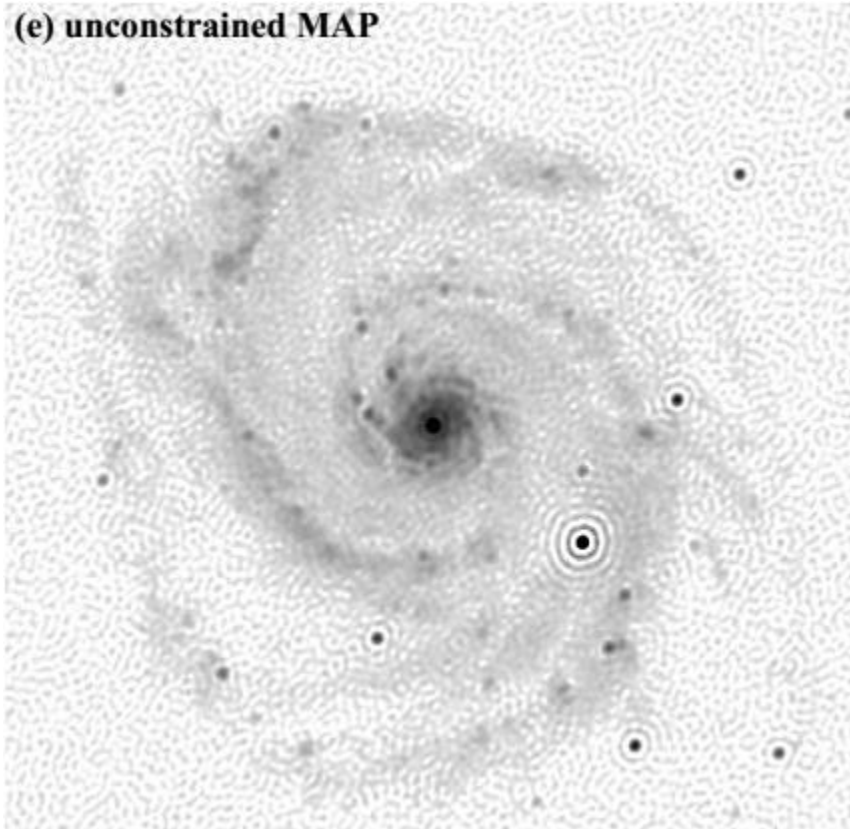
– $\mathbb{E} \left\{ |N_{(u)}|^2 \right\} / \mathbb{E} \left\{ |F_{(u)}|^2 \right\}$ gyakorlatban nem határozható meg

– Gyakran fehér zaj, és $W_{(u)} = 1 / \mathbb{E} \left\{ |F_{(u)}|^2 \right\} \propto u^\beta$

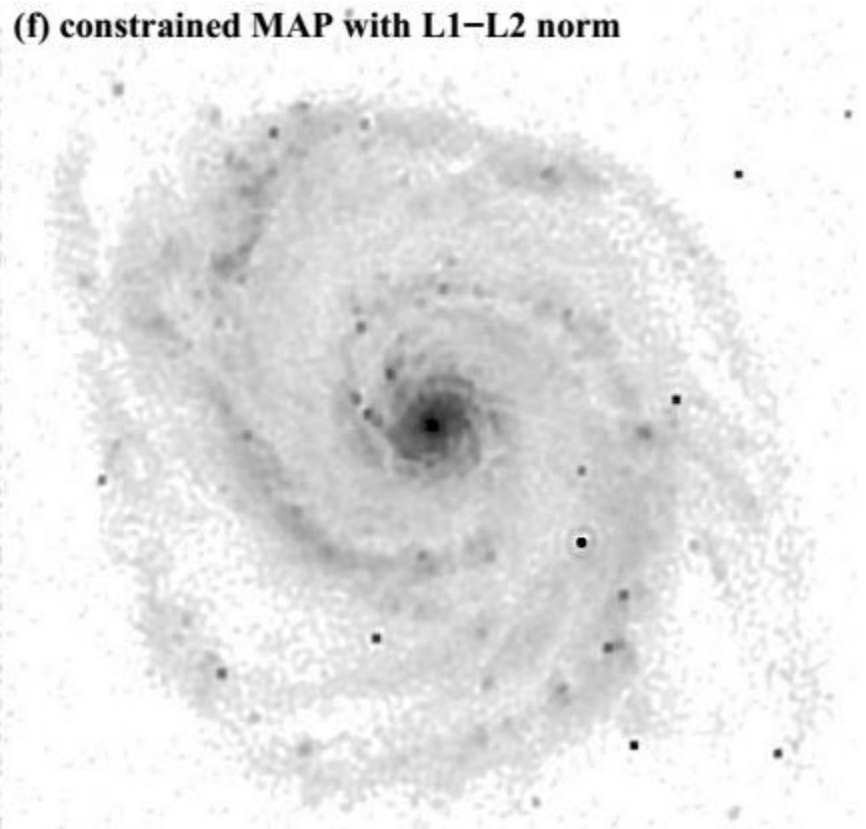
• μ értéke szabályozza, hogy mennyire domináljon a prior (magas frekvenciás komponensekért mennyire büntetünk).

Eljárások illusztrálása -3-

(e) unconstrained MAP



(f) constrained MAP with L1-L2 norm



Ismertetett módszerek csoportosítása

ML becslés:

- Csak a megfigyelési zaj osztályát ismerjük
- **Zajérzékenység** jelentős probléma, csak a konzisztenciára figyel

Példák:

- Direkt dekonvolúció (additív Gauss zajos ML becslés)
- Richardson – Lucy (additív Poisson zajos, pozitívítási kényszeres ML becslés)

MAP becslés:

- Explicit módon definiáljuk, hogy milyen jellegű képet akarunk
- Ha jól **regularizálunk**, akkor a zajérzékenység redukálódik, de az eredmény kevésbé konzisztens

Példák:

- Csonkolt dekonvolúció
- Wiener dekonvolúció (additív Gaussz zaj + frekvencia függő energia minimalizáció)
- Egyéb, regularizált dekonvolúciók

MAP és ML becslés összehasonlítása

- Stabilitás:
 - MAP-nál a regularizáció célja ennek kikényszerítése (pl. sima, kevésbé zajos, stb. dekonvolvált kép előállítása)
 - ML becslésnél ez legfeljebb impliciten kényszeríthető ki (pl. iteratív becsléseknél konvergencia előtti leállás).
- Becslés inkonzisztenciája ($\|g - h * f\|$):
 - Likelihood tag minimalizálásával redukálható
 - ML becsléseknél ennek az értéke kisebb – ez viszont a zajos input képhez (g) a becsült torzítatlan kép **túlilleszkedést** vonja maga után (rosszabb képminőség)