Rekonstrukciós eljárások

Orvosi képdiagnosztika

14.-15. előadás 2016 ősz

Előadások témája

- Röntgen tomográfia fizikai és matematikai alapjai – 2D Radon transzformáció, szűrt visszavetítés:
  - Fan – beam / Cone – beam felvételi elrendezések esete
- Általánosított (3D) röntgen tomográfia alapjai – ART rekonstrukciós eljárások
- Pozitron emissziós tomográfia alapjai – ML-EM statisztikai rekonstrukciós eljárás
- Modell alapú / CS rekonstrukciós eljárások
- Tomoszintézis felvételi elrendezés – MITS rekonstrukció
- Rekonstrukciós eljárások minősítése

Röntgen tomográfia alapjai

- Általánosított Beer-Lambert törvény:

$$\mathbf{I}_{(x0,y0)} = \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} I_0(E) \cdot \exp\left\{ -\int_{P(x0,y0)} \mu(E,\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \right\} dE \; :$$

  - $I_0(E)$: röntgencsövet elhagyó E energiájú fotonok intenzitása (üres térfogat esetén a detektor által érzékelt fotonok száma)
  - $P(x,y)$: pontszerű sugárforrást a detektor (x,y) koordinátájú pontjával összekötő szakasza a *3d térnek*
  - $\mu(E,\mathbf{x})$: a vizsgált térfogat $\mathbf{x}$ koordinátájú pontjának lineáris csillapítási együtthatója E energián
  - Egyszerűsített Beer-Lambert törvény: $I_0(E) \cdot \exp\left\{ -\int_{P(x0,y0)} \mu(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \right\}$ (monokróm spektrum esete)

Röntgen tomográfia alapjai

- Monokróm spektrumú sugárzás esete:
  - Általánosan alkalmazott feltételezés
  - Rekonstrukció célja a lin. csillapítási együtthatók meghatározása az alábbi összefüggés invertálásával:

$$-\ln\left(\mathbf{I}_{(x,y)}/I_0\right) = \int\limits_{P(x0,y0)} \mu(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

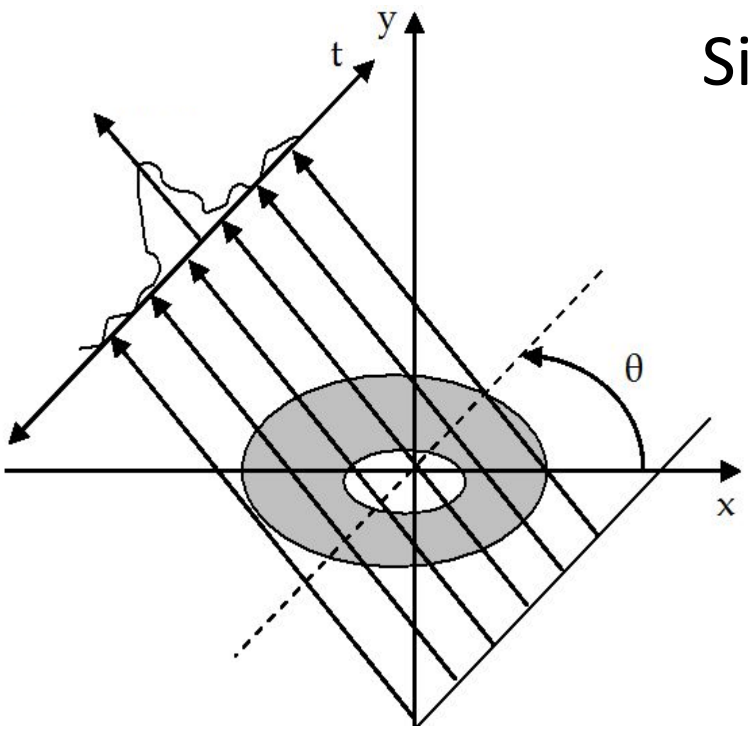
- Valódi röntgensugarak ezzel szemben:
  - Polikromatikusak → sugárkeményedés problémája
  - Szóródnak: nem igaz, hogy csak a vetítősugár mentén elhelyezkedő képletek számítanak.
  - Projekciók egyéb zajjal is terheltek : kis intenzitásnál rossz SNR

Röntgen alapú képalkotás

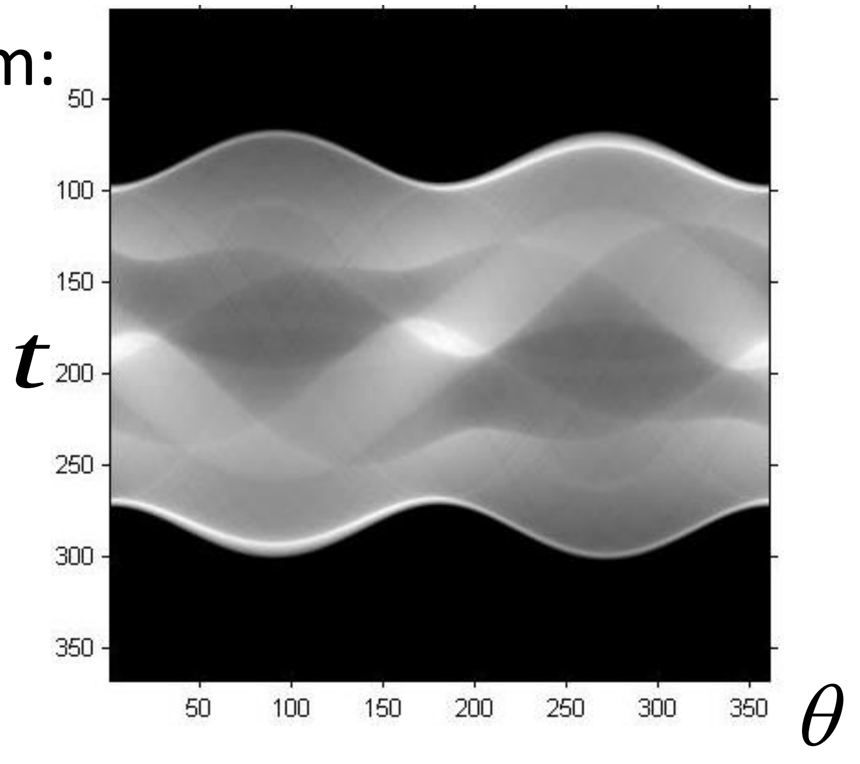
- Konvencionális P-A röntgen:
  - Nincs rekonstrukció
- Számítógépes tomográfia (CT):
  - Párhuzamos vetítősugarakon alapuló eljárások (kevés ilyen eszköz van csak forgalomban), cserébe egyszerű elmélet
  - Legyező (Fan-beam) helikális CT – leggyakoribb típus
  - Cone-beam CT, ennek speciális változata a Tomoszintézis
- Orvosi képdiagnosztika alapvető eszköze:
  - Mivel a röntgen sugárzás ionizál, illetve maga a vizsgálat itthon mércével drága, ezért csak indokolt esetben végzik

2D Radon transzformáció:

- Radon transzformáció (2D szelet 1D projekciók):
  - Input: 2D Descartes - koordinátarendszerbeli kép
  - Output: sinogram – 2D polár-koordinátarendszerbeli kép



Sinogram:



Radon transzformáció – Fourier vetítősík tétel

- Radon transzformáció (2D szelet 1D projekciók):
  - Vetítősugarak merőlegesek az x tengellyel θ szöget bezáró egyenesre: $t = x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta)$
  - Vetítősugarak mentén integráljuk a szelet elemeit:

$$P_\theta(t) = \iint_{x,y} f(x,y) \cdot \delta\left(x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta) - t\right) dxdy$$

  - Legyen $S_\theta(\rho) = FT_\rho\left\{P_\theta(t)\right\} = \int P_\theta(t) \cdot \exp(-2\pi j \cdot t\rho)\, dt$
- Fourier vetítősík tétel származtatása:

$$S_\theta(\rho) = \iiint_{x,y,t} f(x,y) \cdot \delta\left(x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta) - t\right) \cdot \exp(-2\pi j \cdot \rho t)\, dtdydx$$

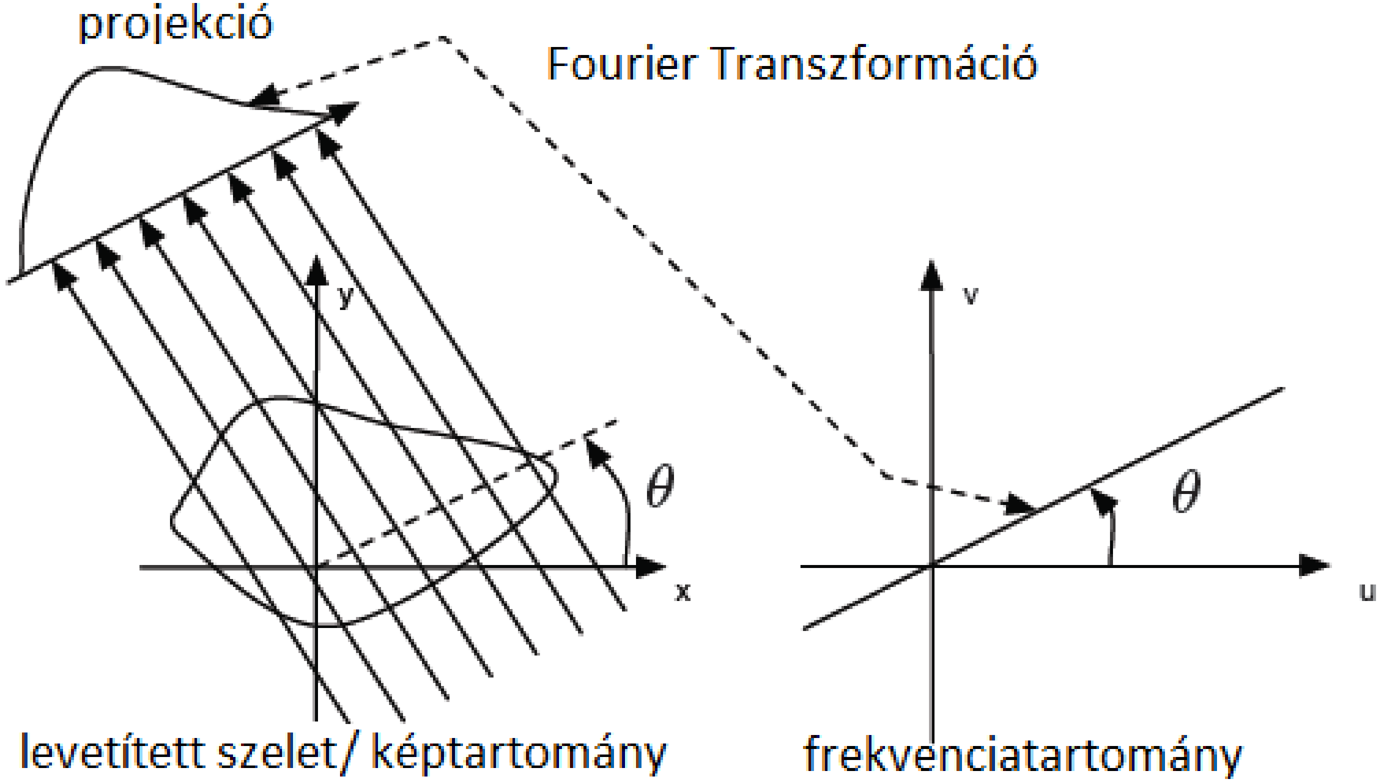
$$S_\theta(\rho) = \iint_{x,y} f(x,y) \cdot \exp\left(-2\pi j \cdot \rho \cdot \left(x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta)\right)\right) dydx$$

Fourier vetítősík tétel

– Lényegében f spektrumának egy szakaszát kaptuk meg:

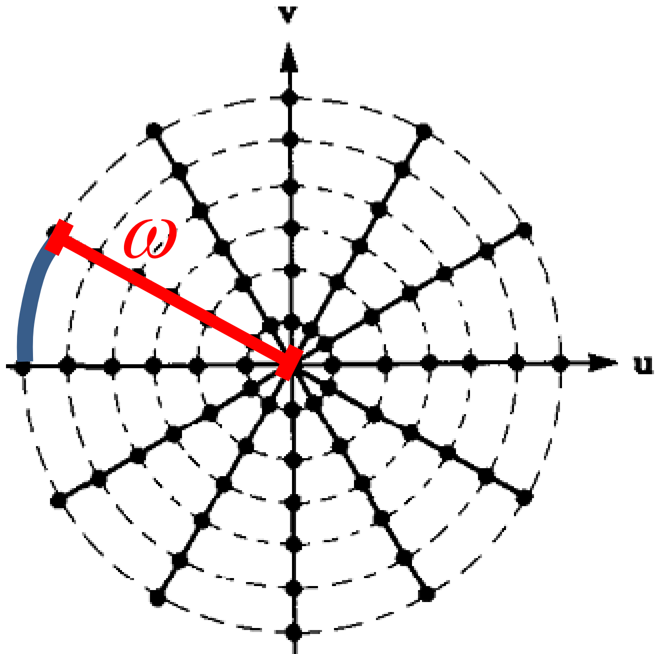
$$S_\theta(\rho) = F\left(\rho \cdot \cos(\theta), \rho \cdot \sin(\theta)\right)$$

- Vizuális interpretáció:



Rekonstrukció – FBP alapötlete

- Rekonstrukció célja: Radon Transzf. invertálása
- Fourier vetítősík tétel értelmében a vizsgált szelet spektrumainak bizonyos részeit ismerjük:
  - Az ismert részeket „illesszük” egy üres spektrumba
  - Polár koordinátás frekvencia sugarának függvényében a spektrum mintavételi helyeinek eltérő a távolsága: $K(\omega) = 2 \cdot |\omega| \cdot \pi \cdot (2\pi/\Delta\theta)$
  - Korrekció: spektrumba illesztés előtt $|\omega|$ -val súlyozzunk frekvenciatérben (ez az ún. rámpaszűrés).



Szűrt visszavetítés (FBP) származtatása

- FT inverze: $f(x,y)=\iint\limits_{u,v} F(u,v)\cdot\exp\left(j2\pi(ux+vy)\right)dvdu$
- Fourier vetítősík miatt a spektrumot polárkoordináta-rendszerben ismerjük: $u=\omega\cdot\cos(\theta);\ v=\omega\cdot\sin(\theta)$

$$f(x,y)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} F(\omega,\theta)\cdot\exp\left(j2\pi\cdot\omega\left(x\cos(\theta)+y\sin(\theta)\right)\right)\cdot J\,d\omega\,d\theta$$

  - $J=\begin{vmatrix}\partial u/\partial\omega & \partial u/\partial\theta\\ \partial v/\partial\omega & \partial v/\partial\theta\end{vmatrix}=\ldots=\omega$, $du\,dv=J\,d\omega\,d\theta$
  - Továbbiakban $k:=x\cos(\theta)+y\sin(\theta)$
- $f(x,y)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} F(\omega,\theta)\cdot\exp\left(j2\pi\cdot\omega k\right)\cdot\omega\,d\omega\,d\theta$

Szűrt visszavetítés (FBP) származtatása

- Vágjuk szét a külső integrált:

$$f\left(x,y\right)=\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}F\left(\omega,\theta\right)\cdot\mathrm{e}^{j2\pi\cdot\omega k}\;\omega\,d\omega\,d\theta+\int_{\pi}^{2\pi}\int_0^{\infty}F\left(\omega,\theta\right)\cdot\mathrm{e}^{j2\pi\cdot\omega k}\;\omega\,d\omega\,d\theta$$

  - $f\left(\cdot,\theta\right)$ a sinogram egy oszlopa, melynek definíciójából (Radon transzf.) következik, hogy $F\left(\omega,\theta\right)=F\left(-\omega,\theta+\pi\right)$, hiszen:

$$F\left(\omega,\theta+\pi\right)=\int_{t=-\infty}^{\infty}P_{\theta+\pi}\left(t\right)\cdot\exp\left(-j2\pi\omega t\right)dt=\int_{t=-\infty}^{\infty}P_{\theta}\left(-t\right)\cdot\exp\left(-j2\pi\omega t\right)dt$$

$$F\left(\omega,\theta+\pi\right)=\int_{l=\infty}^{-\infty}P_{\theta}\left(l\right)\cdot\exp\left(-j2\pi\left(-\omega\right)l\right)\frac{\partial t}{\partial l}dl=F\left(-\omega,\theta\right)\qquad l=-t$$

  - Felhasználtuk, hogy $k=x\cos\left(\theta\right)+y\sin\left(\theta\right)$, illetve $\cos\left(\theta+\pi\right)=-\cos\left(\theta\right)$ és $\sin\left(\theta+\pi\right)=-\sin\left(\theta\right)$

Szűrt visszavetítés (FBP) származtatása

- Vágjuk szét a külső integrált:

$$P_\theta(l) \triangleq f(l,\theta)$$

$$\int^{\pi}\int^{\infty} (\omega,\theta)\cdot \mathrm{e}^{j2\pi\cdot\omega k}\,\omega\, d\omega\, d\theta + \int^{2\pi}\int^{\infty} F(\omega,\theta)\cdot \mathrm{e}^{j2\pi\cdot\omega k}\,\omega\, d\omega\, d\theta$$

$$S_\theta(\omega) \triangleq F(\omega,\theta)$$

  – $f(\cdot,\theta)$ a sinogram egy osz ciójából (Radon transzf.) következik, hogy $F(\omega,\theta) = F(-\omega,\theta+\pi)$, hiszen:

$$F(\omega,\theta+\pi) = \int_{t=-\infty}^{\infty} P_{\theta+\pi}(t)\cdot\exp(-j2\pi\omega t)\,dt = \int_{t=}^{\infty} \quad \mathrm{xp}(-j2\pi\omega t)\,dt$$

$$\partial t/\partial l = -1$$

$$F(\omega,\theta+\pi) = \int_{l=\infty}^{-\infty} P_\theta(l)\cdot\exp\left(-j2\pi(-\omega)l\right)\frac{\partial t}{\partial l}\,dl = F(-\omega,\theta) \qquad l=-t$$

  – Felhasználtuk, hogy $k = x\cos(\theta) + y\sin(\theta)$, illetve $\cos(\theta+\pi) = -\cos(\theta)$ és $\sin(\theta+\pi) = -\sin(\theta)$

Szűrt visszavetítés (FBP) származtatása

- Alakítsuk át egyszerű behelyettesítésekkel a második integrált:

$$\int_{\pi}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} F(\omega,\theta)\cdot \mathrm{e}^{j2\pi\cdot\omega k}\,\omega\, d\omega\, d\theta\Bigg|_{\theta=-\Theta} = \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\infty} F(-\omega,\Theta)\cdot \mathrm{e}^{-j2\pi\cdot\omega k}\,\omega\, d\omega\, d\Theta$$

$$\boxed{k = \cos(\theta)\,x + \sin(\theta)\,y}$$

$$\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\infty} F(-\omega,\Theta)\cdot \mathrm{e}^{-j2\pi\cdot\omega k}\,\omega\, d\omega\, d\Theta\Bigg|_{\omega=-\Omega} = \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{-\infty} F(\Omega,\Theta)\cdot \mathrm{e}^{j2\pi\cdot\Omega k}(-\Omega)\cdot(-1)\, d\Omega\, d\Theta$$

$$\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{-\infty} F(\Omega,\Theta)\cdot \mathrm{e}^{j2\pi\cdot\Omega k}(-\Omega)\cdot(-1)\, d\Omega\, d\Theta = \int_{0}^{\pi}\int_{-\infty}^{0} F(\Omega,\Theta)\cdot \mathrm{e}^{j2\pi\cdot\Omega k}(-\Omega)\, d\Omega\, d\Theta$$

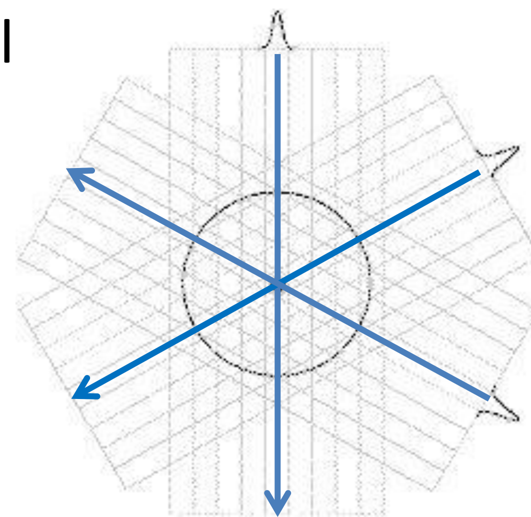
Szűrt visszavetítés (FBP) származtatása

- Lássuk mit sikerült kifőznünk:

$$f(x,y)=\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}F(\omega,\theta)\cdot \mathrm{e}^{j2\pi\cdot\omega k}\,\omega\,d\omega\,d\theta+\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{0}F(\omega,\theta)\cdot \mathrm{e}^{j2\pi\cdot\omega k}\,(-\omega)\,d\omega\,d\theta$$

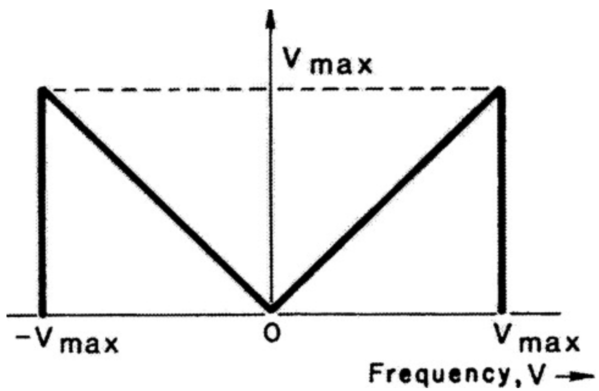
$$f(x,y)=\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega,\theta)\cdot|\omega|\cdot\exp(j2\pi k\omega)\,d\omega\,d\theta=\int_0^{\pi}Q_\theta(k)\,d\theta:$$

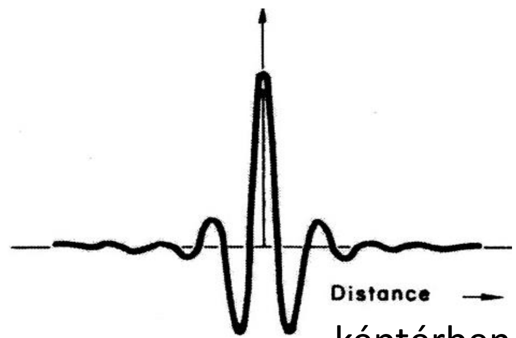
  - $Q_\theta(k)=\int_{\omega=-\infty}^{\infty}S_\theta(\omega)\cdot|\omega|\cdot\exp(j2\pi k\omega)\,d\omega$ ekvivalens a projekciók projekciók (sinogram oszlopai) rámpa szűrővel történő szűrésével
  - $f(x,y)=\int_0^{\pi}Q_\theta\left(x\cos(\theta)+y\sin(\theta)\right)d\theta:$ az ú.n. visszavetítés



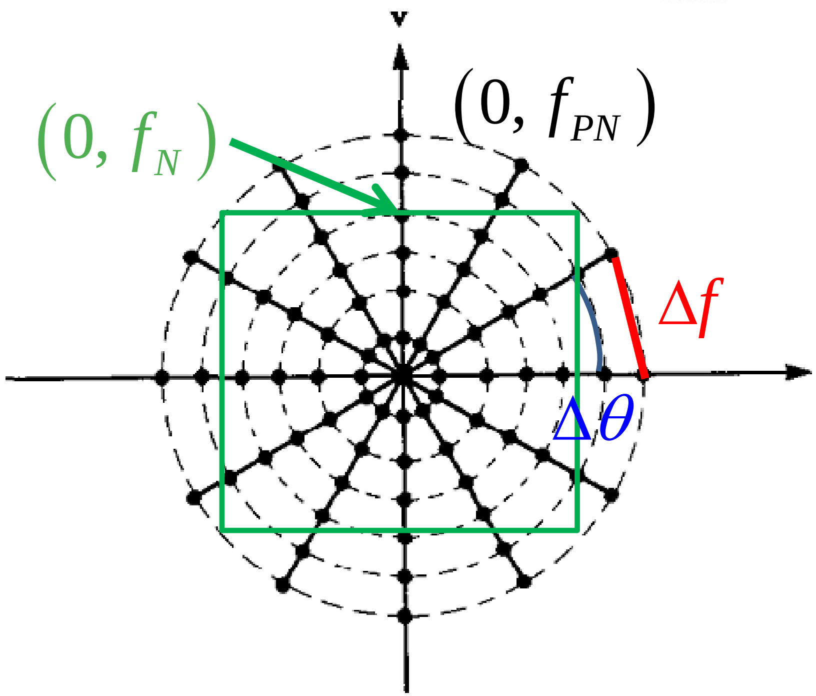
Szűrt visszavetítés értékelése

- Rámpaszűrő:





képtérben



„Ideális” rekonstrukció feltételei:

- 180°-ból rögzített projekciók
- $\Delta\theta \le \arcsin\left(\Delta f / f_{PN}\right)$
- Projekciók felbontása elegendően nagy: $f_{PN} \ge \sqrt{2}\, f_N$ tipikus az 1cyc/mm
- Zajt az eljárás expliciten nem kezeli, ez jelentős problémaforrás.

Szűrt visszavetítés implementációja

- Rámpaszűrés frekvenciatérben történik:
  - 5×5-ös szűrő esetén már a frekvenciatartománybeli szűrés a gyorsabb (ennek főleg régebbben volt jelentősége).
- Visszavetítés kép / időtartományban:
  - Frekvenciatartományban interpolálnunk kellene a spektrum ismert egyeneseiből a DFT által mintavett frekvenciák értékét (mely messze nem triviális).
- Szűrések, projekciók visszavetítése egyenként (sugaranként) jól párhuzamosítható

Szűrt visszavetítés zajérzékenysége

- Detektorok DQE-je a frekvencia függvényében monoton csökken $\Rightarrow$ zajos magas frekvencia (PET esetén a röntgenes esetnél jóval rosszabb).
- Ráadásul magas frekvencián „távolabb vannak” a spektrum ismert értékei (ezért kell a rámpa szűrés is).
- Legegyszerűbb megoldás az alul-áteresztés:
  - Az alul-áteresztés és a visszavetítés sorrendje tetszőleges
  - Erőforrásigény miatt érdemes a rámpa szűrőt megszűrni:

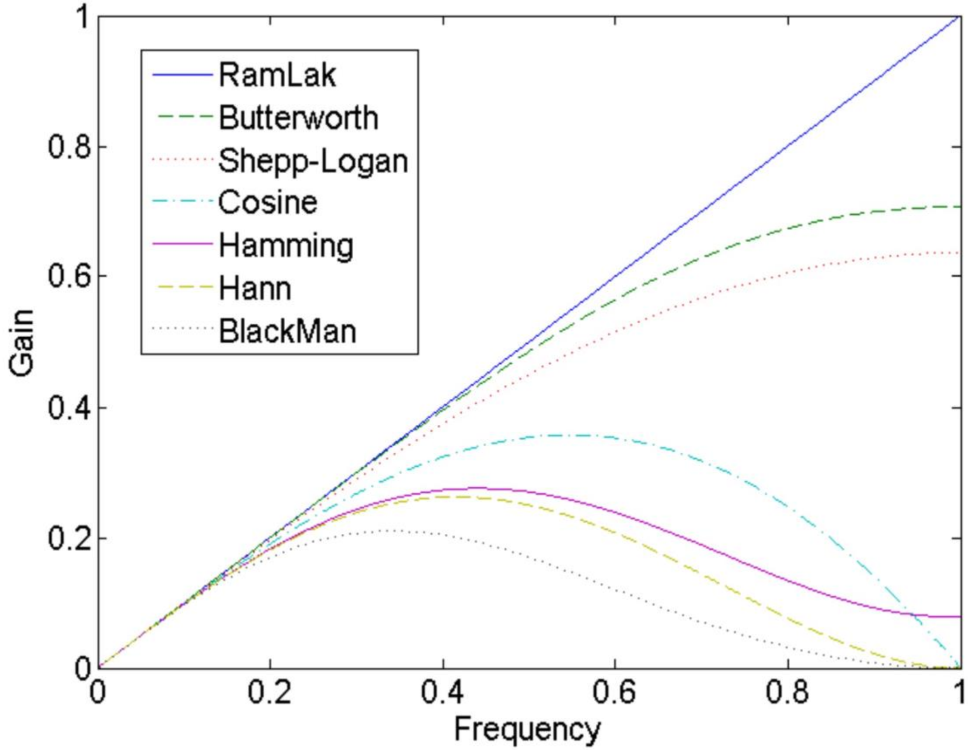
$$\left(P_\theta * h_{Ramp}\right) * h_{Lowpass} = P_\theta * \left(h_{Ramp} * h_{Lowpass}\right)$$

Klasszikus inverz problémák mely algoritmusaira hasonlít az eljárás?

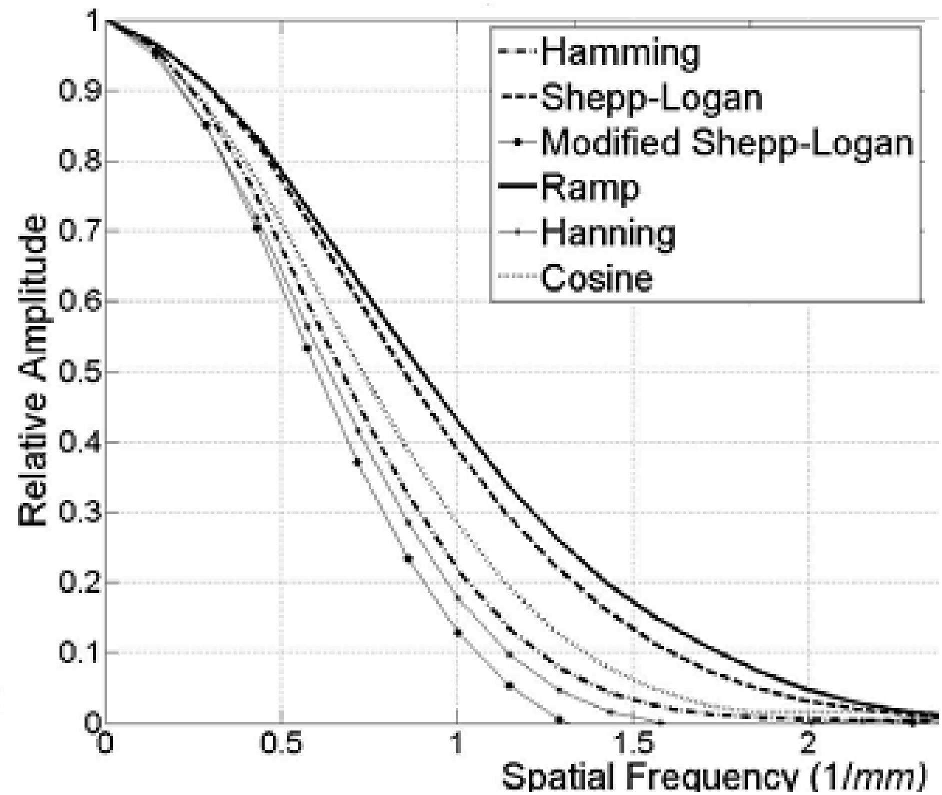
Szűrt visszavetítés zajérzékenysége

- Rámpa szűrő módosítottjaival szűrünk:

Szűrők átviteli függvényének abszolút értéke:



Egy CAT MTF-je a szűrők függvényében (példa):

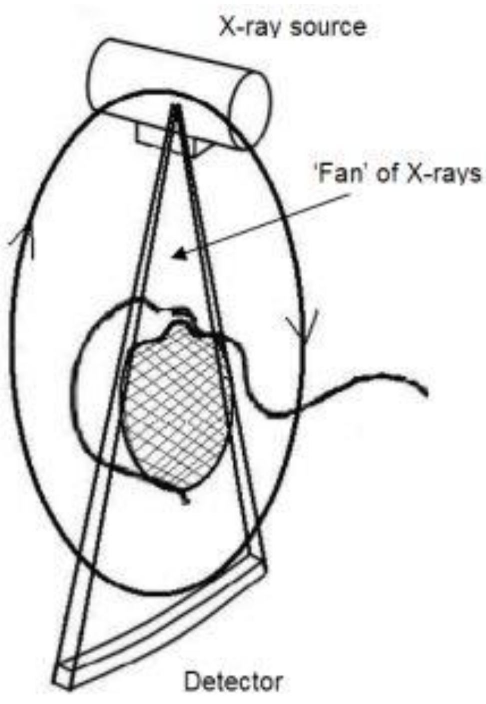


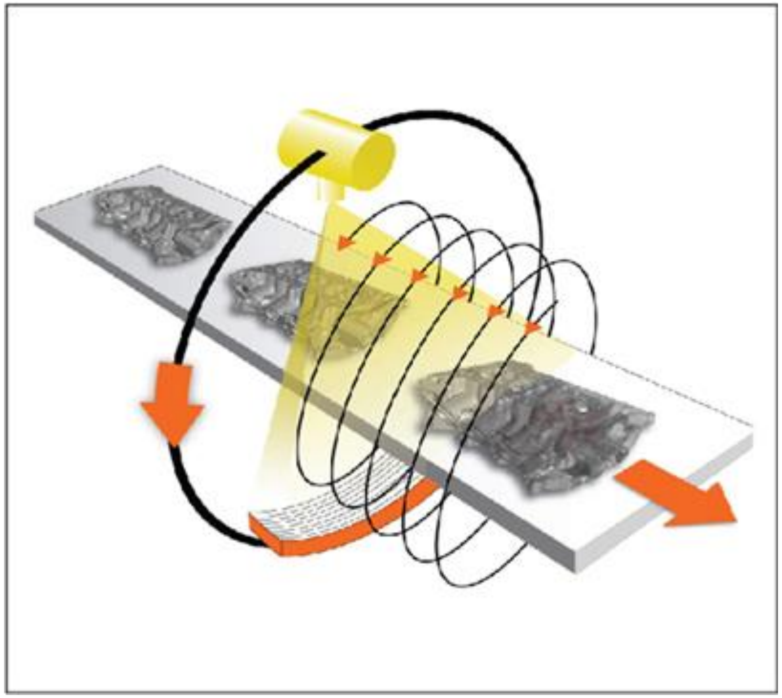
Szűrt visszavetítés működése

- Demo videó az FBP rekonstrukciójáról: https://www.youtube.com/watch?v=ddZeLNh9aac
  - A szinogramban oszlop-folytonosan helyezkednek az 1D projekciók.
- A videón jól követhető a limitált szögtartomány által okozott artifakt:
  - Magas frekvenciás komponensek (pl. fantom széle) kis szögtartományból is jól rekonstruálódik.
  - Alacsony frekvenciás komponensek viszont erősen szétmosódottak (jellegzetesen „V” alakban) .
  - Vetítősugarakra merőleges élek rekonstruálhatóak jól.

FBP Fan-beam geometria esetén

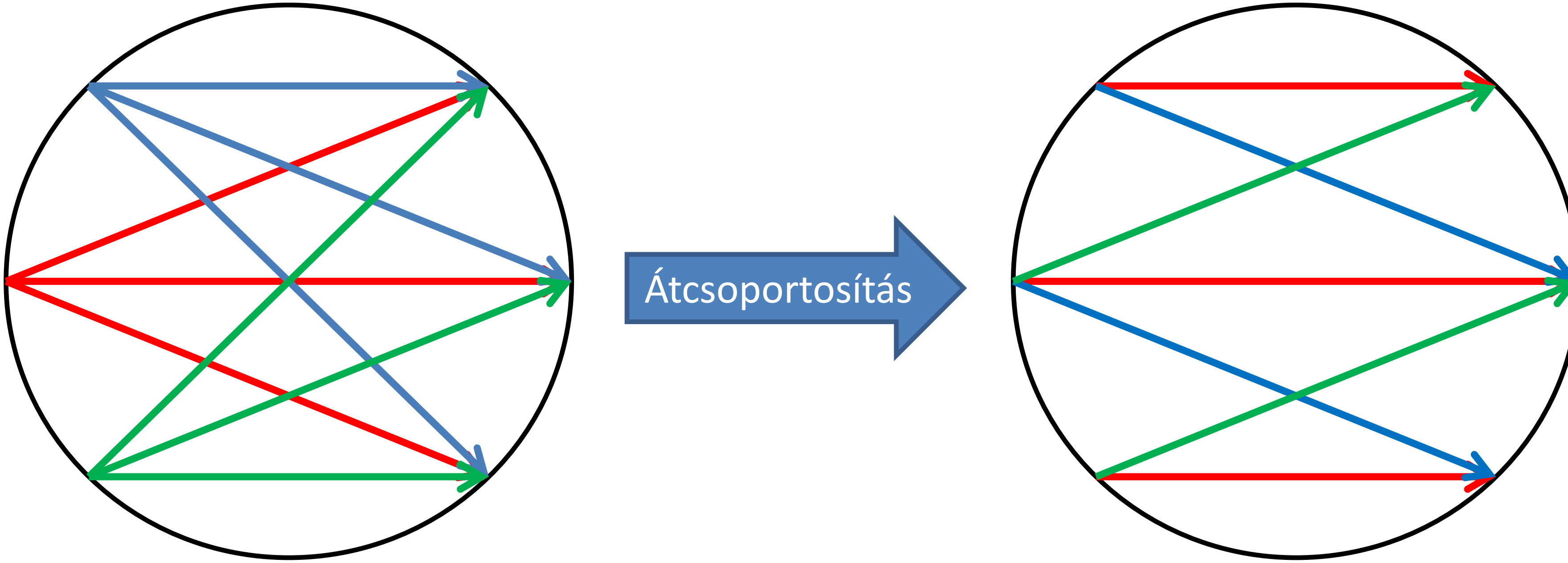
- Eddig párhuzamosak voltak a vetítősugarak:
  – Gyakorlatban egy ilyen CT nem igazán realizálható
- Fan-beam vetítősugaras helikális CT (ú.n. CAT):





FBP Fan-beam geometria esetén

- Alapötlet: a mért intenzitások átcsoportosítása párhuzamos vetítősugár alapú geometria szerint:
  - Lényegében új, párhuzamos vetítősugár szerinti virtuális projekciókat állítunk elő a fan-beam projekciókból.

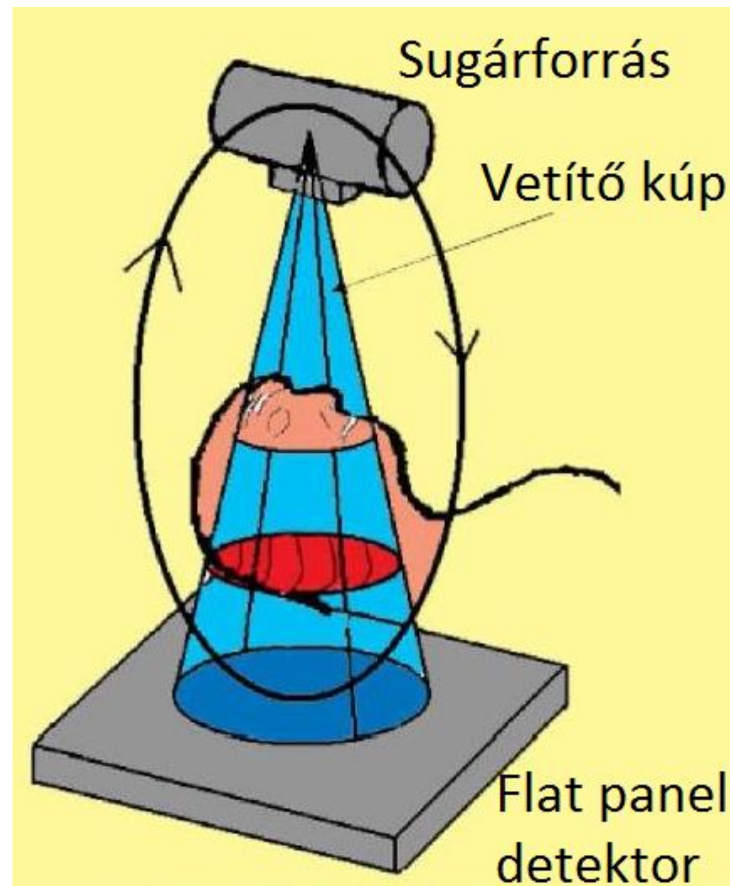


Fan-beam projekciók

Virtuális párhuzamos projekciók

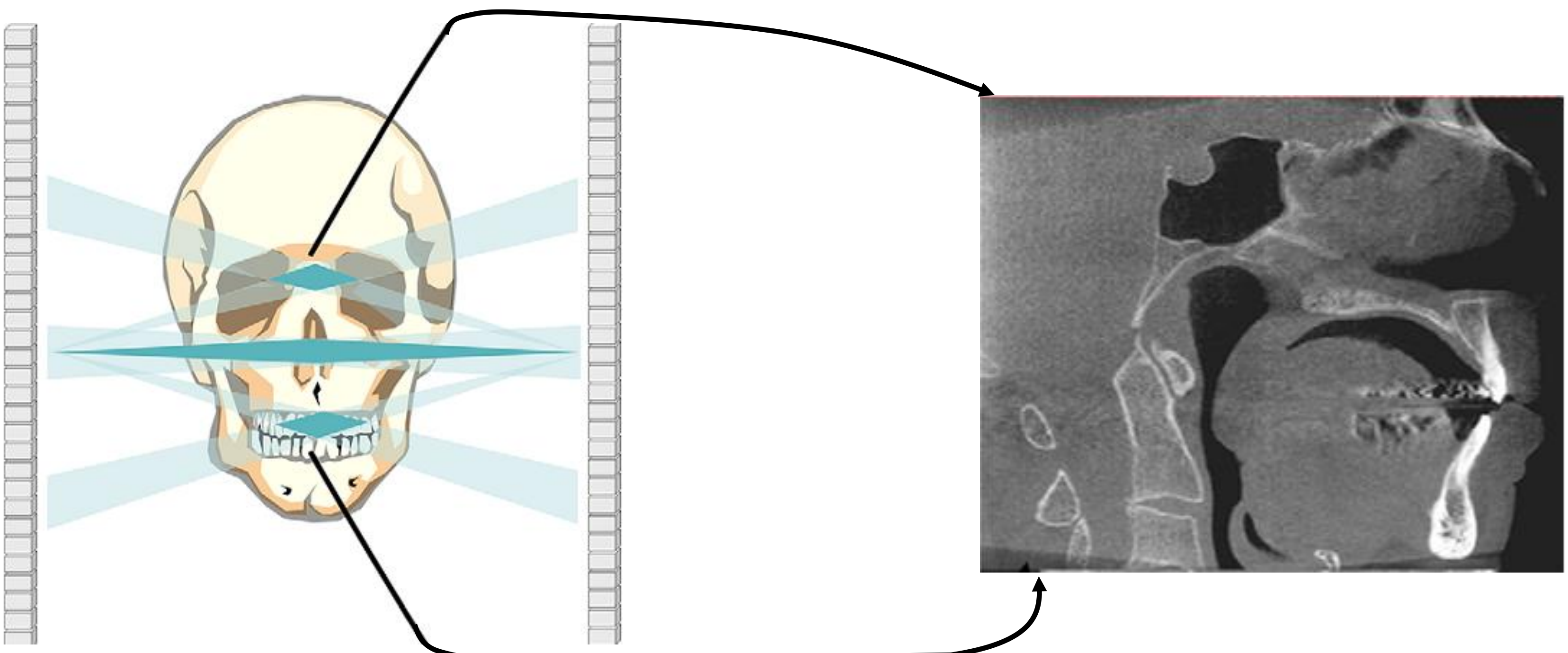
FBP Cone-beam geometria esetén

- CBCT rendszerek - Cone-Beam geometria:
  - Flat-panel detektort használ, a sugarak kúpszerűen (innen az elnevezés) vetülnek a detektorra:



Cone-beam geometria szerinti vetületek FBP rekonstukciója - FDK

- Feldkamp, Davis, Kress CBCT-s algoritmusa:
  - Klasszikus szűrt visszavetítéssel rekonstruál
  - Közelítően helyes algoritmus – ideális esetben sem tökéletes
- Ideális rekonstrukció esetén is Cone-beam artifakt



Projekciók keletkezésének általános 3D modellje

- Általános modellje a (röntgen) képalkotásnak:

$$g(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\gamma=0}^{\infty} h(x,y;\alpha,\beta,\gamma)\cdot f(\alpha,\beta,\gamma)\,d\gamma\, d\alpha\, d\beta+\eta(x,y)$$

  - Mérésekkel rendelkezünk: $g(x,y)$
  - Teoretikusan ismerjük a rendszer PSF-jét: Beer- Lambert törvény szerint, ami nem modellez sem szóródást, sem a foto-elektromos kölcsönhatás során keletkező divergáló sugarakat.
  - Rekonstrukció célja $f(\alpha,\beta,\gamma)$ meghatározása
  - Érdemes megjegyezni, hogy a Beer-Lambert törvénynél ez egy általánosabb modell, de monokróm sugarakat feltételez, gyakorlatban nem tudunk vele dolgozni túl nagy komplexitás.

Projekciók keletkezésének általános 3D modellje

- Megfigyelési modell diszkretizáltja $\mathbf{g} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{f} + \boldsymbol{\eta}$:
  - $\mathbf{g}$ tartalmazza az összes vetítősugár fotodiódákon mért intenzitások negatív logaritmáltját (tehát minden projekció minden pixeléhez tartozó intenzitását tartalmazó vektor).
  - $\mathbf{H}$ a vetítő mátrix, $\mathbf{H}_{(i,j)}$: i-edik pixelbe csapódó fotonok a j-edik voxeltől mennyire csillapodnak (ez anyag független).
  - $\boldsymbol{\eta}$ az additív zaj – nem modellezett hatások determinálják
- Lényegében ez is inverz probléma:
  - Ugyanúgy jelentős a zajérzékenység, mint 2D esetben
  - Ellentétben nagyságrendekkel több változó (akár 1E7)

Projekciók keletkezésének általános 3D modellje

Ez így túl általános, de jobban modellezi a valóságot. Gyakorlatban viszont $\mathbf{H}_{(i,j)}$ az i-edik pixelbe csapódó fotonok által a j-edik voxelben megtett útjának a hossza (csak primer sugárzás). Ezzel a megkötéssel $\mathbf{H}$ egy ritka, ú.n. sávmátrix-á válik.

- – $\mathbf{H}$ a vetítő mátrix, $\mathbf{H}_{(i,j)}$: i-edik pixelbe csapódó fotonok a j-edik voxelben lévő anyagtól mennyire csillapodnak.
- – $\boldsymbol{\eta}$ az additív zaj – nem modellezett hatások determinálják

- Lényegében ez is inverz probléma:
  - – Ugyanúgy jelentős a zajérzékenység, mint 2D esetben
  - – Ellentétben nagyságrendekkel több változó (akár 1E7)

Algebrai rekonstrukciós technika (Gordon ART)

- Kaczmarz iterációval történik $\mathbf{g} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}$ megoldása:
  - Rekonstrukciónál a $\mathbf{f} = \mathbf{H}^{\dagger} \cdot \mathbf{g}$ megoldás lenne az „ideális”, de:
    - Túl nagy $\mathbf{H}$ mérete a ma elérhető számítási teljesítményhez
    - Ráadásul $\mathbf{H}$ nagyon ritka, melyet általános algebrai módszerek nem képesek hatékonyan kihasználni
  - Eljárás alapötlete: $\mathbf{g} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}$ lényegében N db (vetítősugarak száma), M dimenziós hipersík egyenlete
    - Ha létezik egzakt inverz, akkor a hipersíkok az M dimenziós tér ugyanazon pontjában metszik egymást.
    - Ha túlhatározott, akkor nincs metszéspont, ha alulhatározott akkor az M dimenziós teret egy résztartományra szűkítik.

Algebrai rekonstrukciós technika (Gordon ART)

– Az eljárás k+1. iterációban merőlegesen vetíti az aktuális $\mathbf{f}$ -et $\mathbf{g}_{(i)} = \mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{f}$ hipersíkra ($i \equiv k(\bmod N)$):

- $\mathbf{f}$ a $\mathbf{H}_{(i,:)}$-re merőleges azon síkon helyezkedik el, mely távolsága az origótól $\mathbf{g}_{(i)} \Big/ \left\| \mathbf{H}_{(i,:)} \right\|_2$
- Tehát $\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} - \alpha \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}{}^T$, a merőleges vetítés után $\mathbf{g}_{(i)} = \mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \left(\mathbf{f}^{(k)} - \alpha \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}{}^T \right)$ teljesül, amiből kifejezve: $\alpha = \left(\mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{g}_{(i)} \right) \Big/ \left(\mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}{}^T \right)$, behelyettesítve:

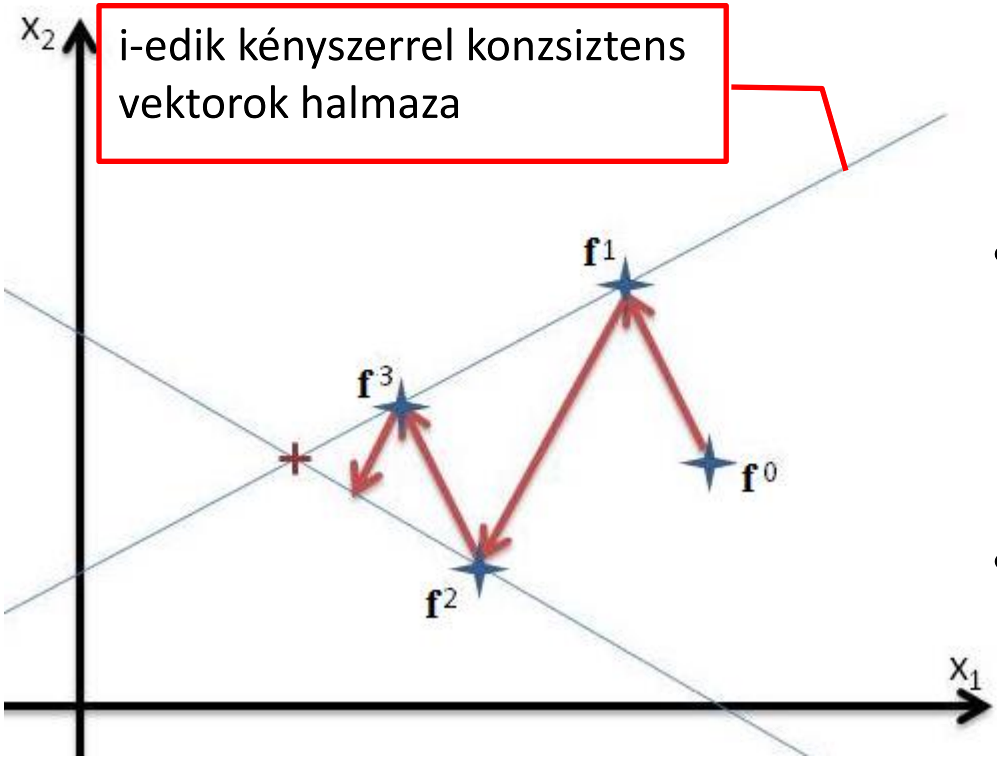
$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} - \left(\mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{g}_{(i)} \right) \cdot \frac{\mathbf{H}_{(i,:)}{}^T}{\mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}{}^T}$$

Algebrai rekonstrukciós technika (Gordon ART)

- $$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \left(\mathbf{g}_{(i)} - \mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)}\right) \frac{\mathbf{H}_{(i,:)}{}^{T}}{\mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}{}^{T}}$$ interpretációja:
  - $\mathbf{g} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}^{(k)}$ a rögzített projekciók és az aktuális ($\mathbf{f}^{(k)}$) rekonstrukció modell szerinti vetületének a különbsége (vetületi hiba)
  - $\mathbf{H}_{(i,:)}{}^{T} \Big/ \left(\mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}{}^{T}\right)$: a vetületi hibát vetíti vissza
- Eljárás tulajdonságai:
  - Sok, könnyen számolható iteráció, melyek nem párhuzamosíthatóak
  - Konvergál, ha megfigyeléseink konzisztensek, ellentétben limit hurokba szorul, mely belsejében helyezkedik el az $\mathbf{f}^{*} = \mathbf{H}^{\dagger} \cdot \mathbf{g}$.
  - Hátránya, hogy nem kezeli a projekciók zaját, ezért túlilleszkedésre hajlamos (lényegében egy ML becslés Gauss eloszlású likelihood-dal)
  - Szükség van egy $\mathbf{f}^{(0)}$-ra: gyakran FBP / BP eredménye

Kaczmarz iteráció példa

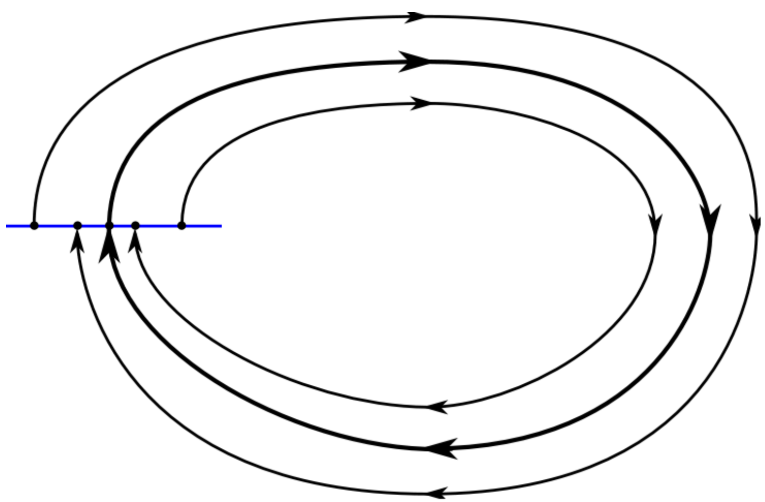
- N=2, M=2 esete:

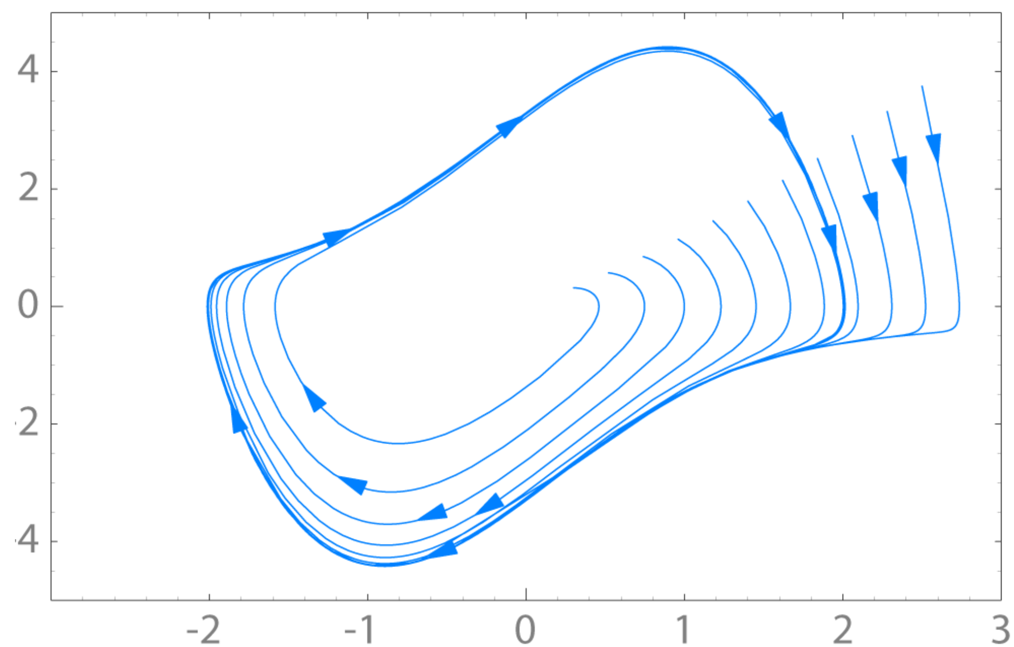


- Ha a két merőleges hipersík egymásra merőleges, akkor két iteráció alatt megvan a metszéspont
- Ha a hipersíkok párhuzamosak, akkor az iteráció nem áll le (limit hurokba kerül)
- Minél nagyobb a két egyenes által bezárt szög, annál gyorsabb a konvergencia.

Limit hurok viselkedés

- Gordon ART inkonzisztens projekciók esetén limit hurokba lép:





Stabil limit hurkok viselkedés: a rendszer állapotváltozója hurok trajektóriába ragad

Algebrai rekonstrukciós technika (Simultaneous ART)

- Egyidejű ART (SART):
  - Hibaképzés nem vetítősugaranként, hanem projekciónként:

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \lambda \cdot \sum_{j \in S_i} \left(\mathbf{g}_{(j)} - \mathbf{H}_{(\mathrm{j},:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)} \right) \frac{{\mathbf{H}_{(\mathrm{j},:)}}^T}{\mathbf{H}_{(\mathrm{j},:)} \cdot {\mathbf{H}_{(\mathrm{j},:)}}^T}$$

    - S_i: i-edik projekció pixeleit előállító vetítősugarak halmaza
  - Tetszőleges $\mathbf{f}^{(0)}$ esetén is konvergál egy LS becslőhöz:
    - Ha több LS becslő van, akkor az $\mathbf{f}^{(0)}$-hoz L2 szerinti legközelebbihez
  - Jól párhuzamosítható:
    - Azonos projekcióhoz tartozó vetítősugarak menti levetítés és visszavetítés egymástól független
  - Zajra túlilleszkedés tulajdonsága változatlanul megmaradt
    - Ez az eljárás is ekvivalens egy ML becsléssel

Algebrai rekonstrukciós technika
(Simultaneous Iterative Reconstructive Technique)

- Egyidejű Iteratív Rekonstrukciós eljárás:
  - Összes projekció, összes pixele szerint egyszerre képez hibát:

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \lambda \cdot \sum_j \left(\mathbf{g}_{(j)} - \mathbf{H}_{(\mathrm{j},:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)} \right) \frac{\mathbf{H}_{(\mathrm{j},:)}{}^T}{\mathbf{H}_{(\mathrm{j},:)} \cdot \mathbf{H}_{(\mathrm{j},:)}{}^T}$$

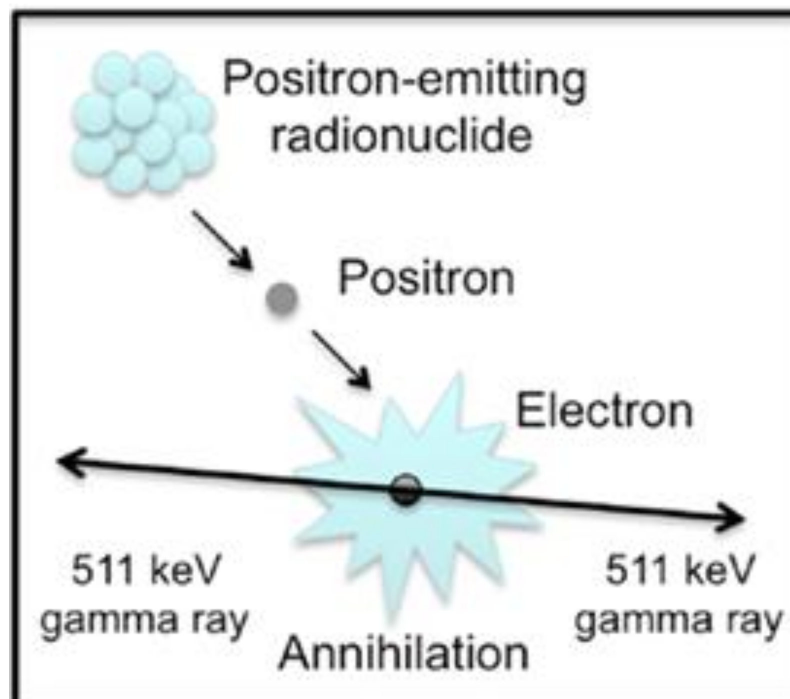
  - Hasonló konvergencia tulajdonságok, mint az SART-nél:
    - Pontosan ugyanazon becsléshez konvergál
  - Jól párhuzamosítható, de:
    - Egyszerre csak egy projekció le / visszavetítése nem módosítja többször u.a. voxelt (egyébként versenyhelyzet).
    - Gyakorlatban több számolás szükséges a konvergenciához, mint a másik két ART-nél
  - Létezik olyan változat, mely kezeli a polikróm energia spektrum miatt kialakuló sugárkeményedés artifaktumot.

Algebrai rekonstrukciós technika (Multiplikatív ART)

- Eddig Additív ART-ket néztünk:
  - Kezdeti iterációk során lassabban haladnak
  - Pozitivitási kényszert nem lehet kikényszeríteni
- Multiplikatív ART-k:
  - Hibát multiplikatív módon származtatják
  - pl.: $\mathbf{f}_{(i)}^{(k)} = \mathbf{f}_{(i)}^{(k-1)} \cdot \mu \cdot \left(1 - \frac{\mathbf{g}_{(j)}}{\mathbf{H}_{(\mathrm{j},:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)}} \right)^{H_{(\mathrm{j},\mathrm{i})}}$
    - A hibát $1 - \mathbf{g}_{(j)} \big/ \mathbf{H}_{(\mathrm{j},:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)}$ értéke méri
  - Kezdeti iterációk hatékonyabbak, de gyakran divergál, vagy a végén túlságosan lelassul.

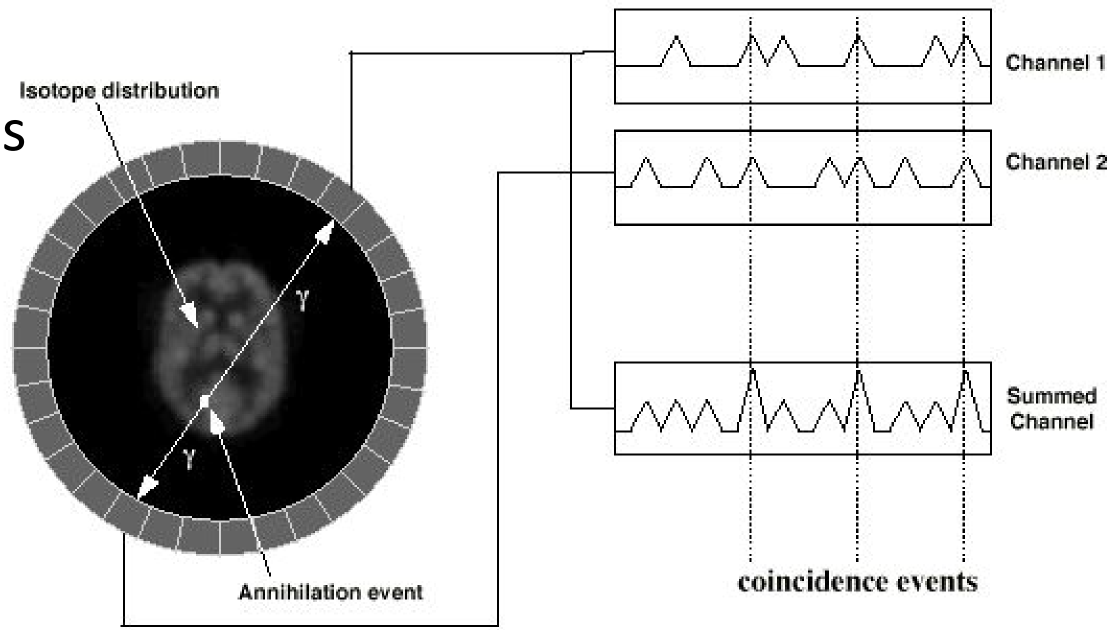
Pozitron emissziós tomográfia alapelve

– Szervezetbe pozitron kibocsátására képes radioaktív izotópot tartalmazó anyagot visznek cukoroldatban.
– Sejtek tápanyagfelvétele miatt nagyobb energiaigényű (pl. gyulladt / daganatos) sejtek helyén több pozitron emisszió.
– Pozitron elektronnal ütközik:
  - Két db, egymással ellentétes irányú γ foton emittálódik.
  - Detektor ezeknek a beütését méri.



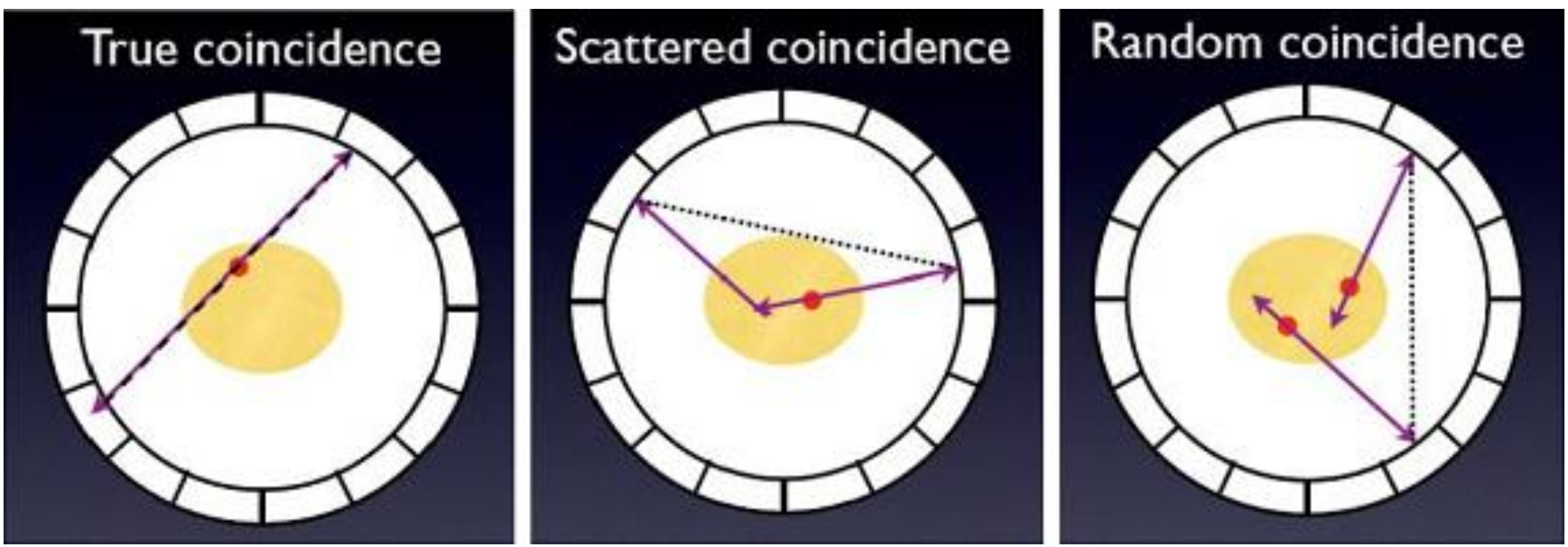
Pozitron emissziós tomográfia rekonstrukciója

- Line of Response : ugyanazon bomló izotóp által kibocsátott γ fotonok beütési helyét összekötő szakasz
  - Érdemes szem előtt tartani, hogy előre nem határozható meg, hogy egy-egy foton milyen irányba fog haladni
  - Elegendően sok kisugárzás esetén viszont hasonlóan viselkedik, mint akármilyen sugárforrás (Poisson folyamat).



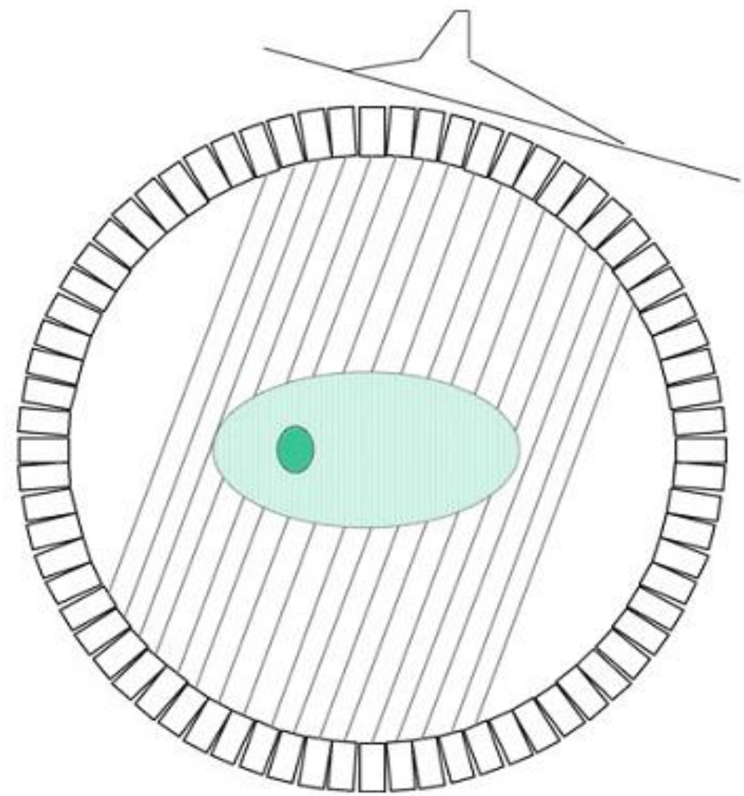
Pozitron emissziós tomográfia projekciók zajának értelmezése

- Sokszor téves LOR-t mérünk:
  - Szóródás (rugalmas ütközés) miatt a térfogaton belül megváltoztatja irányát a γ foton.
  - Két, hozzávetőlegesen egy időben történő bomlás is fals látszólagos LOR-t eredményez.



Pozitron emissziós tomográfia rekonstrukciója

- Rekonstrukció során a LOR-ok interpretálhatóak vetítősugaraknak is (intenzitás meg az adott LOR menti gyakorisága a γ beütéseknek).
- Elegendően sok beütés szükséges az eloszlás becsléséhez:
  - Egy scan kb. 20 perc
  - Nagyságrenddel rosszabb SNR, mint CT esetén



ML-EM rekonstrukció (Emissziós tomográfiai értelmezés)

- EM eljárások alapelve:
  - Vannak megfigyelt adataink (méréseink), esetünkben a PET LOR-ok mentén érzékelt gamma beütési szám ($y(d)$)
  - Vannak becsülni kívánt adataink ($x(b)$), jelenleg ez a vizsgált szövet pozitron emissziójának a gyakorisága
  - Létezik olyan v.v., mely ha ismert lenne leegyszerűsödne az egész feladat: a PET esetén $p(b|d)$: annak a valószínűsége, hogy a *d* LOR mentén beütő gamma részecskét a *b* képlet emittálta.
- Megoldás iteratív, iterációnként két lépés:
  - Expectation lépés: $p(b|d)$ frissítése
  - Maximization lépés: $x(b)$ ML becslése

ML-EM rekonstrukció (Emissziós tomográfiai értelmezés)

- E lépés formálisan - Bayes tétel alkalmazása:

$$p^{(k+1)}(b|d) = \frac{p(d|b)\cdot x^{(k)}(b)}{\sum_{b'} p(d|b')\cdot x^{(k)}(b')}$$

  - $p(b|d)$: annak a valószínűsége, hogy a d LOR mentén érzékelt fotonok a b pozíciójú képletből származnak.
  - $p(d|b)$: annak a valószínűsége, hogy a b pozíciójú képlet által emittált fotonok a d LOR mentén ütnek be a detektorba. Ennek a tagnak a meghatározása előzetesen történik (nem a becslés feladata). Általában Monte-Carlo szimulációkkal becslik, pontos meghatározása fontos.

ML-EM rekonstrukció (Emissziós tomográfiai értelmezés)

- M lépés célja a sűrűségbecslés frissítése:

$$x^{(k+1)}(b) = \arg\max_{x} \left\{ p^{(k+1)}(y|x) \right\}(b) = \frac{\sum_{d} y(d) \cdot p^{(k+1)}(b|d)}{\sum_{d} p(d|b)}$$

  – Elvégezve $p^{(k+1)}(b|d)$ behelyettesítését:

$$x^{(k+1)}(b) = x^{(k)}(b) \cdot \sum_{d} \frac{y(d) \cdot p(d|b)}{\sum_{b'} x^{(k)}(b') \cdot p(d|b')} \cdot \frac{1}{\sum_{d} p(d|b)}$$

- Eljárás előnye, hogy expliciten modellezi a zajt

ML-EM rekonstrukció (Emissziós tomográfiai értelmezés)

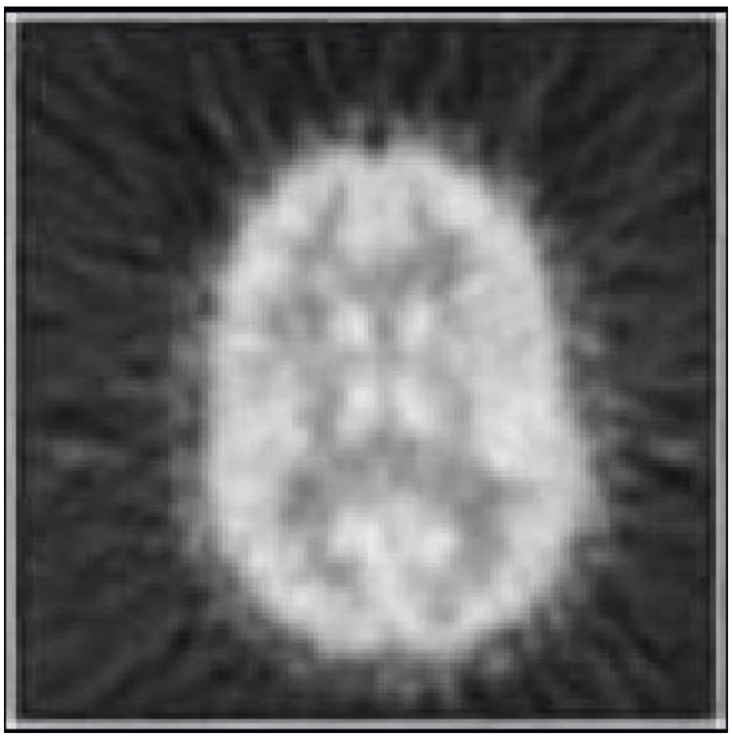
- Módosító összefüggés interpretációja:

$$x^{(k+1)}(b) = x^{(k)}(b) \cdot \sum_{d} \frac{y(d) \cdot p(d|b)}{\sum_{b'} x^{(k)}(b') \cdot p(d|b')} \cdot \frac{1}{\sum_{d} p(d|b)}$$

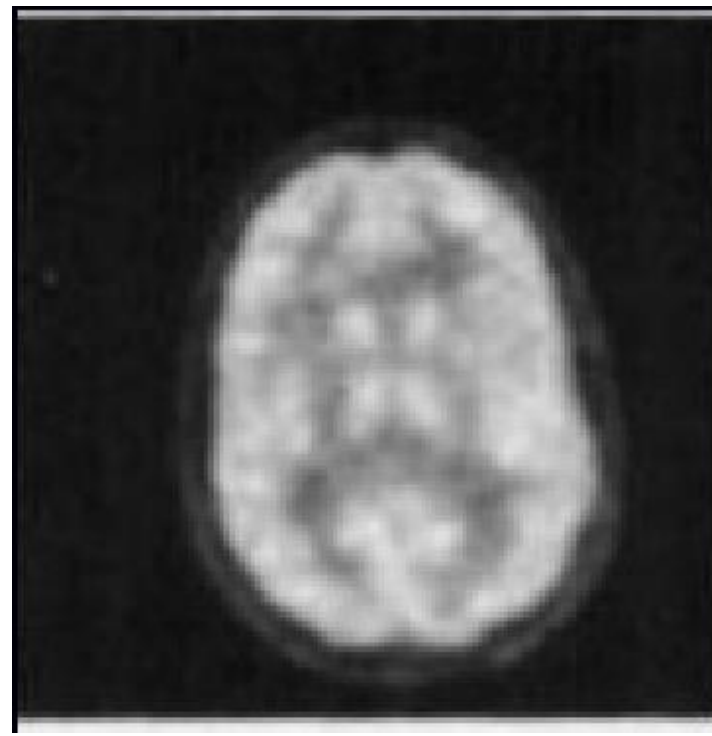
- $\sum_{b'} x^{(k)}(b') \cdot p(d|b')$: aktuális rekonstrukció alapján becsült LOR beütések
- $y(d) \Big/ \sum_{b'} x^{(k)}(b') \cdot p(d|b')$: d LOR menti beütések becslésének a hibája
- $\sum_{d} \frac{y(d) \cdot p(d|b)}{\sum_{b'} x^{(k)}(b') \cdot p(d|b')} \cdot \frac{1}{\sum_{d} p(d|b)}$: hiba visszavetítése

ML-EM és FBP öszehasonlítása (Emissziós tomográfia – PET)

- Kis beütésszám miatt alacsony effektív felbontás
- Ráadásul jelentős nem Gauss-i zaj



FBP rekonstrukció



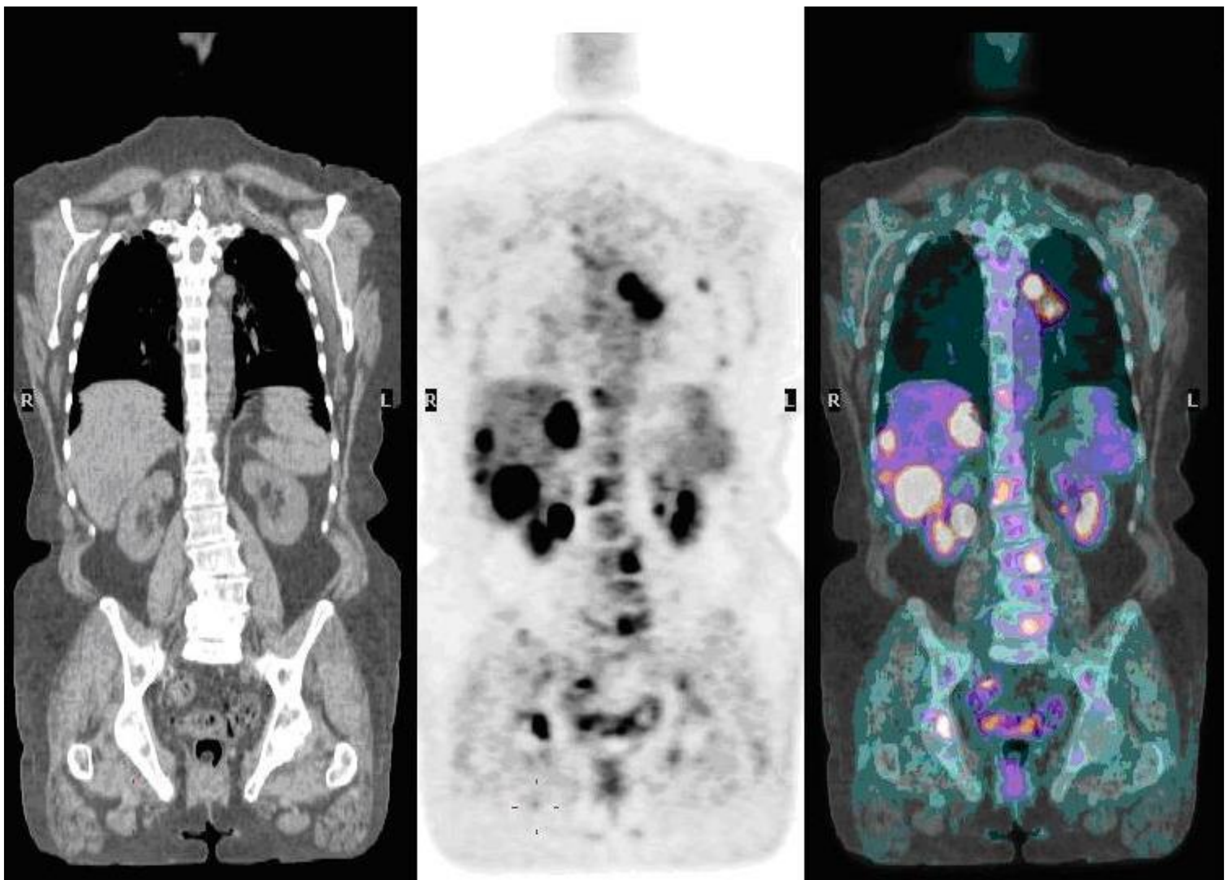
ML-EM rekonstrukció

PET/CT modalitás

- PET funkcionális képet állít elő:
  - Lokalizálhatóak a nagy energiaigényű szövetek
  - Cserébe erősen zajos, rossz minőségű rekonstrukciók
  - Megfelelő zajmodell nélkül lehetetlen értelmezhető rekonstrukciót előállítatni vele
- CT rekonstrukciók - morfológiai információ:
  - Kisméretű (korai stádiumú, ezért jó hatásfokkal kezelhető) tumorok nehezen különböztethetőek meg más képletektől.
  - Cserébe kevésbé zajos, felbontását tekintve részletgazdagabb felvételek

PET/CT modalitás

- Rekonstrukció lényegében a PET, illetve a CT rekonstrukciók regisztrálását jelenti



Balról jobbra: CT, PET, regisztrátum

Modell alapú rekonstrukciós eljárások (Röntgen alapú képalkotás)

- Cél a pácienst érő sugárterhelés minimalizálása:
  - Viszont kisebb dózis zajosabb projekciókat eredményez
  - Limitált szögtartomány problémája jelentősen alul-határozottá teszi a z inverz problémát ($\mathbf{g} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}$)
- MAP becslés alkalmazása szükséges:
  - Emlékeztetőül $\mathbf{f}^* = \arg\max_{\mathbf{f}} \left\{ \mathrm{P}\left\{ \mathbf{f} \middle| \mathbf{g} \right\} \right\} \propto \arg\max_{\mathbf{f}} \left\{ \left(\mathrm{P}\left\{ g \middle| f \right\} \cdot \mathrm{P}\left\{ f \right\} \right) \right\}$
  - $-\log\left(\mathrm{P}\left\{ \mathbf{g} \middle| \mathbf{f} \right\} \right) = \Phi_{Likelihood}\left(\mathbf{f} \right)$ bünteti az eltérést
  - $-\log\left(\mathrm{P}\left\{ \mathbf{f} \right\} \right) = \Phi_{\mathrm{Prior}}\left(\mathbf{f} \right)$ apriori ismeretek alapján regularizál

Modell alapú rekonstrukciós eljárások (Röntgen alapú képalkotás)

- Likelihood tag megválasztása:
  - PET-nél Poisson modellt alkalmazzuk (ritka esemény törvény)
  - Röntgen esetén negatív logaritmálást követően Gauss modell

$$\Phi_{Likelihood}\left(\mathbf{f}\right) = 1/2 \cdot \left(\mathbf{g} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}\right)^T \cdot \mathbf{\Sigma}^{\mathbf{-1}} \cdot \left(\mathbf{g} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}\right)$$

  - $\mathbf{\Sigma}$ gyakran diagonális, ekkor $\mathbf{\Sigma}_{(i,i)} = \sigma_{(i)}^2$:
    - Lényegében az i-edik vetítősugár NSR-jének a négyzete
    - Megfelelő megválasztása nehéz, aktívan kutatott feladat
  - Kvadratikus függvény, minimalizációja analitikus

Modell alapú rekonstrukciós eljárások (Röntgen alapú képalkotás)

- Regularizációs tag megválasztása:
  - Logikusnak tűnik a gradiens energiáját büntetni:
    $\Phi_{\mathrm{Prior}}\left(\mathbf{f}\right)=\alpha\cdot\mathbf{f}^{T}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{f}$, $\mathbf{S}=\mathbf{D}^{T}\cdot\mathbf{D}$, ahol $\mathbf{D}$ a deriválás mtx.-ja
    - Belátható, hogy ekvivalens egy regularizáció nélküli rekonstrukció alul-áteresztettjével.
    - Tehát ez a regularizáció csökkenti az effektív felbontást (mind a rekosntruált szeleteken belül, mind azok között a modalitástól függetlenül).
  - Inkább él őrző regularizációk alkalmazása javallott pl. Teljes Variancia minimalizáció, Huber büntetőfüggvény …

Compressive Sensing

- Nyquist mintavételnek megfelelő interpoláció:
  - Régebben láttuk a kernelét
  - De ez csak egy interpolációs lehetőség
- Compressive Sensing alapú megközelítés:
  - Nem szükséges Nyquist tétel szerint mintavételezni
  - Két általános megvalósítása létezik:
    - Megszorítjuk a rekonstruálni kívánt jel bázisát (erre lesz példa a Mátrix Inverziós Tomoszintézis)
    - Keresünk egy olyan bázist, ami felett koordinátázva ritka a térfogatbecslés (pl. TV minimalizációs)

Teljes variancia minimalizáció

- Rekonstrukció, mint optimalizálási feladat:

$$\mathbf{f}^* = \arg\min_{\mathbf{f}} \left\{ \left\| \mathbf{g} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{f} \right\|_2^2 + \lambda \cdot \left\| \mathbf{D} \cdot \mathbf{f} \right\|_2 \right\}$$

  - $\mathbf{D}$ diszkrét differencia / wavelet transzformációk mátrxia
  - Lényegi változás, hogy a regularizáció L2 norma szerinti

- Könnyebben számítható $\mathbf{z} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{f}$ változókkal:

$$\Phi\left(\mathbf{f}, \mathbf{z}\right) \triangleq \left\| \mathbf{g} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{f} \right\|_2^2 + \lambda \cdot \left\| \mathbf{z} \right\|_2 + \beta \cdot \left\| \mathbf{z} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{f} \right\|_2^2$$

  - Alternálva minimalizáljuk $\mathbf{f}$-et és $\mathbf{z}$-t iterációnként:

$$\mathbf{f}^{(n+1)} = \arg\min_{\mathbf{f}} \left\{ \Phi\left(\mathbf{f}, \mathbf{z}^{(n)}\right) \right\} = \arg\min_{\mathbf{f}} \left\{ \left\| \mathbf{g} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{f} \right\|_2^2 + \beta \cdot \left\| \mathbf{z}^{(n)} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{f} \right\|_2^2 \right\}$$

$$\mathbf{z}^{(n+1)} = \arg\min_{\mathbf{z}} \left\{ \Phi\left(\mathbf{f}^{(n+1)}, \mathbf{z}\right) \right\} = \arg\min_{\mathbf{z}} \left\{ \lambda \cdot \left\| \mathbf{z} \right\|_1 + \beta \cdot \left\| \mathbf{z} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{f}^{(n+1)} \right\|_2^2 \right\}$$

Teljes variancia minimalizáció

– Az iterációk első lépése kicsit átalakítva:

$$\min_{\mathbf{f}} . \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{g}^T & \sqrt{\beta} \cdot \mathbf{z}^{(n)\,T} \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T & \sqrt{\beta} \cdot \mathbf{D}^T \end{bmatrix}^T \cdot \mathbf{f} \right\|_2^2$$

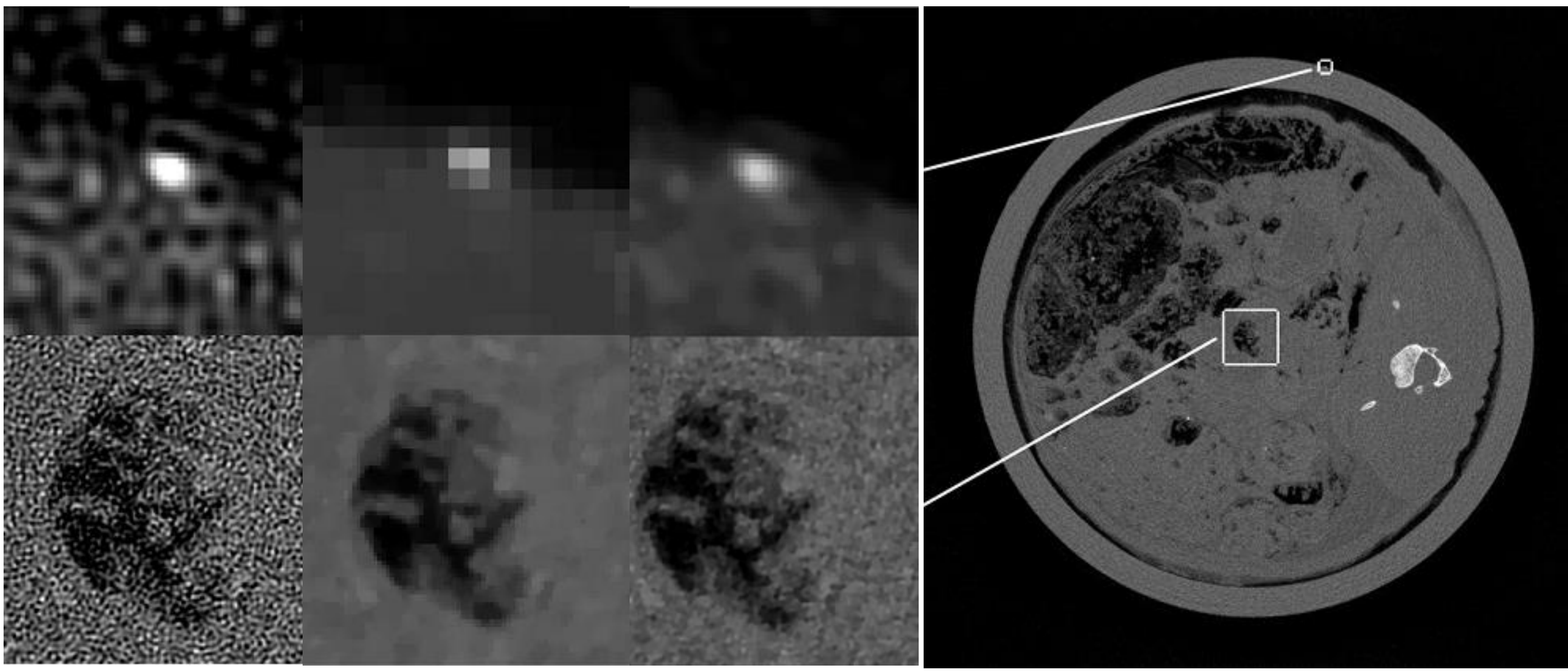
- Formálisan visszajutottunk az alapproblémához, csak most már biztosan túl-határozott (additív ART probléma)
- Minimalizálása erőforrásigény miatt sokszor SART-vel

– Iterációk második lépésének optimuma egy lépésben, analitikusan meghatározható: $\arg\min_{\mathbf{z}} \left\{ \lambda \cdot \|\mathbf{z}\|_2 + \beta \cdot \left\| \mathbf{z} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{f}^{(n+1)} \right\|_2^2 \right\}$

- Az úgynevezett lágy küszöb operátor használatával
- A minimalizálás voxelenként történik

Teljes variancia minimalizáció

- Jobb SNR az ML-EM és az FBP-hez képest:
  - FBP-nél kevésbé zajos, de hasonló kontrasztú kép
  - ML-EM-nél jelentősen jobb kontraszt

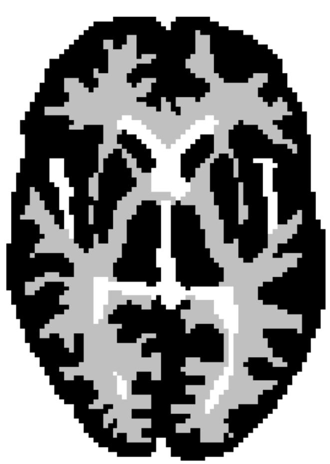


FBP ML-EM TV-ART

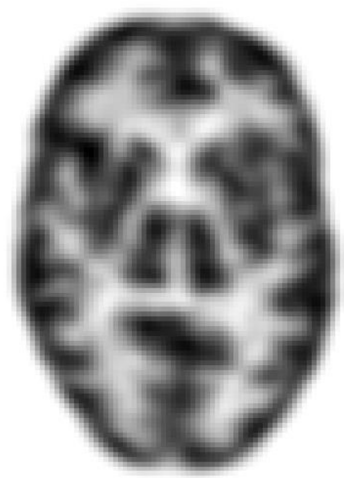
Huber büntetőfüggvény

- Huber büntetőfüggvénnyel regularizálunk:

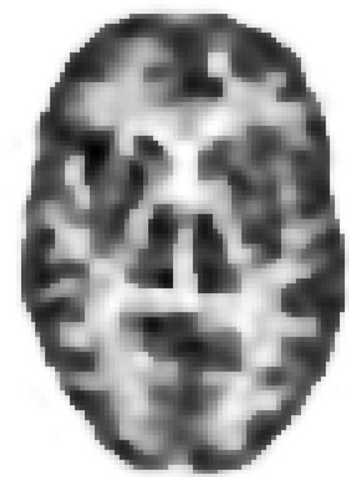
$$\Phi_{\mathrm{Prior}}\left(\mathbf{f}\right)=\alpha\cdot L_{Huber}\left\{\mathbf{D}\cdot\mathbf{f}\right\}\qquad L_{Huber}\left(\mathbf{x}\right)=\begin{cases}\left\|\mathbf{x}\right\|_2^2/2 & \left\|\mathbf{x}\right\|_2\le\varepsilon\\ \varepsilon\cdot\left\|\mathbf{x}\right\|_2-\varepsilon^2/2 & \left\|\mathbf{x}\right\|_2>\varepsilon\end{cases}$$



Pet fantom



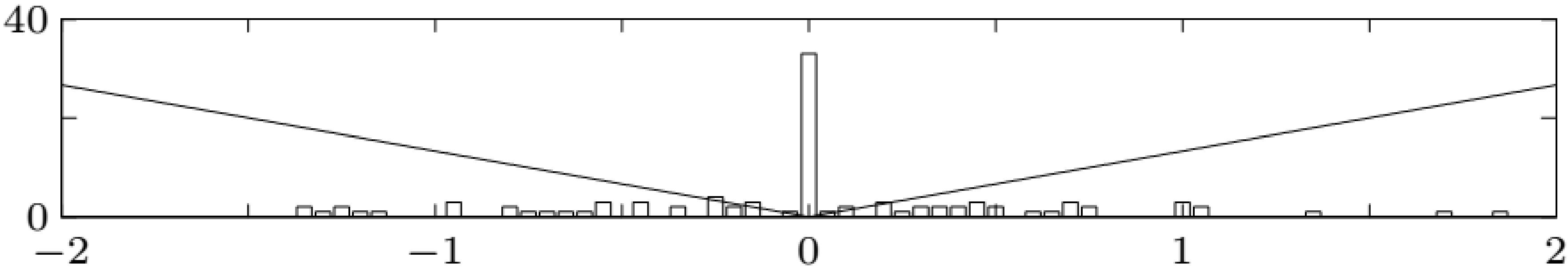
MAP L2 prior



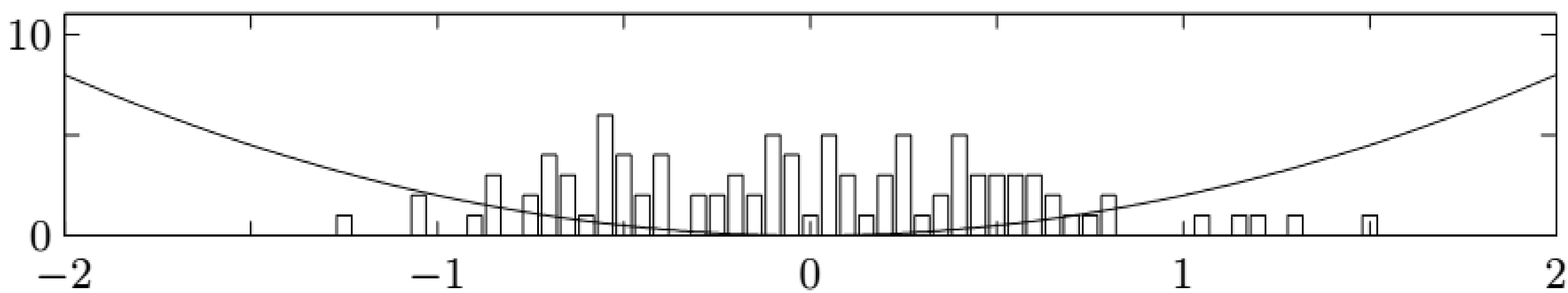
MAP Huber prior

Kvadratikus és abszolútérték hiba/büntetőfüggvény

- Két hibafüggvény jelentősen eltérő eloszlást kényszerít ki:



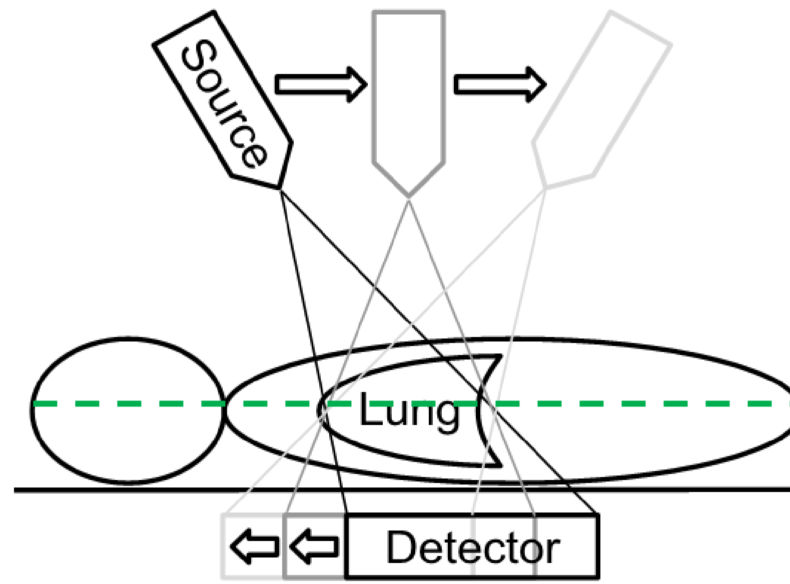
Abszolútérték büntetőfüggvény



Kvadratikus büntetőfüggvény

Lineáris tomoszintézis

- Speciális CBCT változatnak tekinthető:
  - Detektor és a sugárforrás egymással és a flat-panel detektor oszlopaival párhuzamosan mozog.
  - Projekciók limitált szögtartományból (±10°-30°)
- Irányfüggő felbontás / képminőség:
  - Detektorral párhuzamos szeletek felbontása megegyezik a detektor felbontásával
  - Detektorra merőleges irányban nagyon rossz felbontás : limitált szögtartomány ára …



Shift And Add
(Lineáris tomoszintézis esetén)

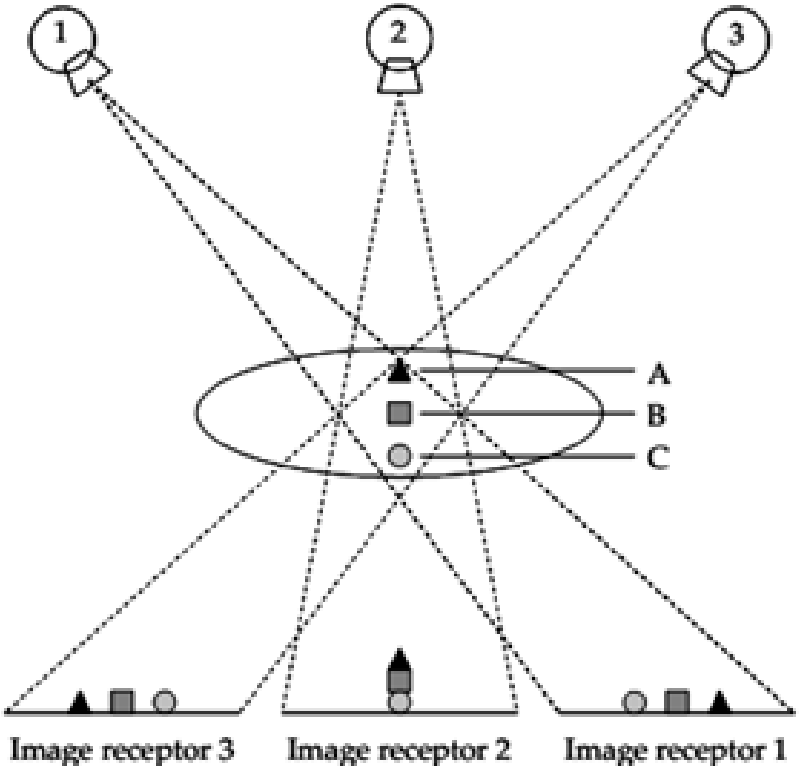
- A térfogat 0 vastagságú szeleteinek vetületei a felvételi geometria és a szelet magasságának függvényében eltolódnak.
- SAA rekonstrukciója egy adott szeletnek:

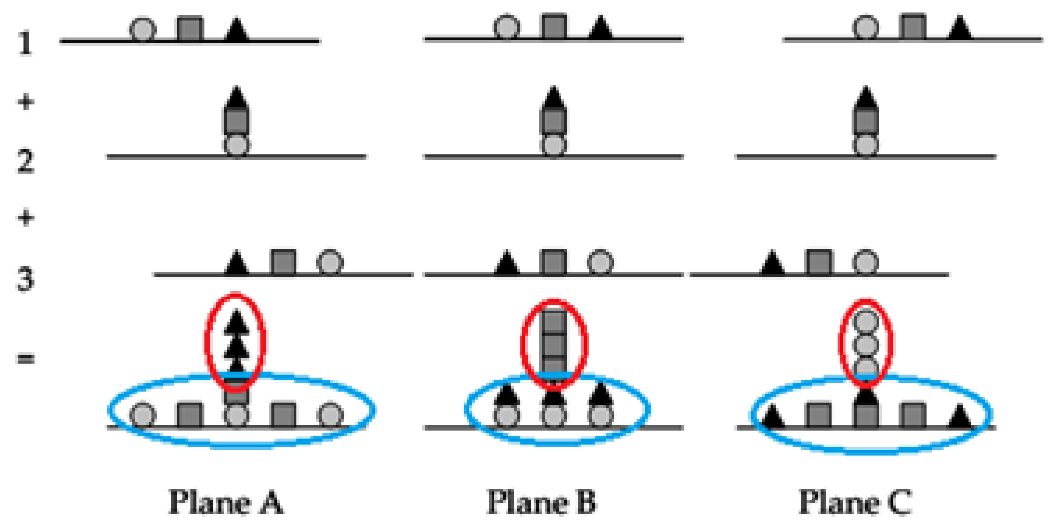
1. Projekciók eltolása úgy, hogy a rekonstruálni kívánt sík vetülete minden projekción azonos legyen
2. Eltolt projekciók összegzése

- Mind az összegzés, mind az eltolás LTI művelet:
  - Soros kaszkádjuk, tehát a rekonstrukció egy MIMO LTI rendszer (bemenetek a projekciók, kimenetek a szeletek)
  - Létezik PSF/MTF-je, mellyel analitikusan minősíthető

Shift And Add
(Lineáris tomoszintézis esetén)

- SAA szeleteken fókuszba kerülnek a rekonstruálni kívánt sík képleteinek vetületei
  - De jelentős átmosódás marad a térfogat többi síkjáról





Piros ellipszis: szelten belüli képlet vetülete
Kék ellipszis: szeleten kívüli képletek bemosódása

Mátrix Inverziós Tomoszintézis

- Alapötletet ugyanaz a megfigyelés adja, mint ami az SAA algoritmusét:

$$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(1)} = \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \mathbf{t}_{(1,1)} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(1,2)} + \ldots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(1,n)}$$

$$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(2)} = \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \mathbf{t}_{(2,1)} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(2,2)} + \ldots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(2,n)}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(m)} = \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \mathbf{t}_{(m,1)} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(m,2)} + \ldots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(m,n)}$$

$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(j)}$ j-edik projekció i-edik oszlopának intenzitásaiból képzett vektor

Mátrix Inverziós Tomoszintézis

- Alapötletet ugyanaz a megfigyelés adja, mint ami az SAA algoritmusét:

$$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(1)} = \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \mathbf{t}_{(1,1)} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(1,2)} + \ldots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(1,n)}$$

$$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(2)} = \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \mathbf{t}_{(2,1)} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(2,2)} + \ldots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(2,n)}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(m)} = \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \mathbf{t}_{(m,1)} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(m,2)} + \ldots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(m,n)}$$

$\mathbf{f}_{(:,i)}^{(j)}$ j-edik modellezett és rekonstruálni kívánt 0 vastagságú szelet projekciójának i-edik oszlopának intenzitásaiból képzett vektor

Mátrix Inverziós Tomoszintézis

- Alapötletet ugyanaz a megfigyelés adja, mint ami az SAA algoritmusét:

$$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(1)} = \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \mathbf{t}_{(1,1)} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(1,2)} + \ldots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(1,n)}$$

$$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(2)} = \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \mathbf{t}_{(2,1)} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(2,2)} + \ldots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(2,n)}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(m)} = \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \mathbf{t}_{(m,1)} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(m,2)} + \ldots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(m,n)}$$

$\mathbf{t}_{(j,i)}$ i-edik rekonstruálandó szelet vetületének j-edik projekcióbeli impulzusválaszát leíró vektor, mivel csak eltolást modellez, ezért egy dirac-delta diszkretizáltja.

Mátrix Inverziós Tomoszintézis

- Jelentősen egyszerűsödik a feladat, ha a vektor egyenletrendszert frekvenciatérben vizsgáljuk:

$$\mathbf{g}_{(j)}(\omega) = \mathbf{T}(\omega) \cdot \mathbf{f}_{(j)}(\omega) \Rightarrow \mathbf{f}_{(j)}(\omega) = \mathbf{T}(\omega)^{\dagger} \cdot \mathbf{g}_{(j)}(\omega)$$

  - $\mathbf{g}_{(j)}(\omega) = \left[FT_{\omega}\left\{\mathbf{g}_{(:,j)}^{(1)}\right\} \quad FT_{\omega}\left\{\mathbf{g}_{(:,j)}^{(2)}\right\} \quad \cdots \quad FT_{\omega}\left\{\mathbf{g}_{(:,j)}^{(m)}\right\} \right]^{T}$
  - $\mathbf{f}_{(j)}(\omega) = \left[FT_{\omega}\left\{\mathbf{f}_{(:,j)}^{(1)}\right\} \quad FT_{\omega}\left\{\mathbf{f}_{(:,j)}^{(2)}\right\} \quad \cdots \quad FT_{\omega}\left\{\mathbf{f}_{(:,j)}^{(n)}\right\} \right]^{T}$
  - $\mathbf{T}(\omega) = \left\{ FT_{(\omega)}\left\{\mathbf{t}_{(\mathrm{j,i})}\right\}\right\}$

- Összegezve a MITS alapötlete, hogy lineáris tomo esetén a frekvenciatérbeli felírás jelentősen kompaktabb az inverz probléma képtérbeli felírásánál.

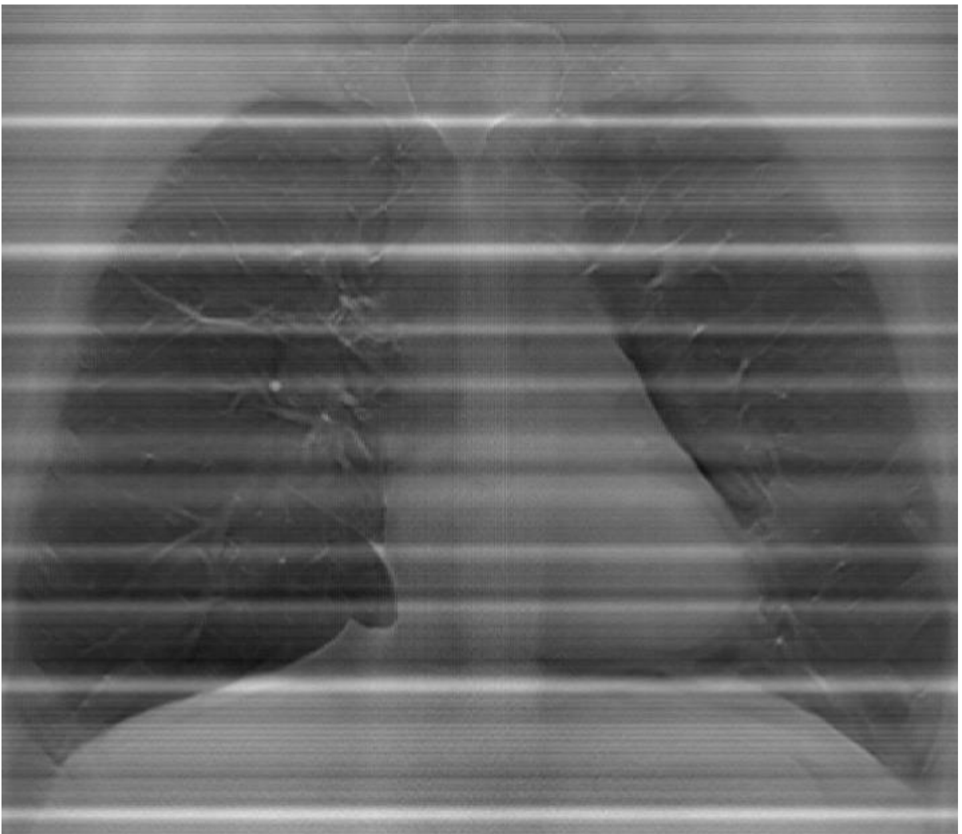
Mátrix Inverziós Tomoszintézis gyakorlati megvalósítása

- Diszkretizálás és a DFT okozta problémák:
  - Mintavételezés: $\mathbf{t}_{(i,j)}$ mintavételezése az egész rendszer viselkedését jelentősen befolyásolja:
    - Energiája nem változhat a mintavételezés hatására, ellentétben jelentősen torzítunk…
    - Figyelembe véve a frekvenciatérbeli műveletvégzést, a mintavételezés frekvenciatartományban történik (ideális - sinc interpolációval ekvivalens képtérben).
  - DFT által okozott spektrumszivárgás is jelentős probléma:
    - Klasszikus megoldás, az ablakozás natívan nem adekvát.

Mátrix Inverziós Tomoszintézis spektrumszivárgás

- Felvételi elrendezés miatt oszloponként történik az inverz szűrés, elegendő a függőleges cirkularitás:
  - Az projekciók extrapolációja nem úszható meg, ellenkező esetben a „csavarodás artefekt történik”.
  - Extrapoláció szükséges mértéke $\mathbf{t}_{(j,i)}$ tartóinak a maximuma, ezzel elérhető, hogy csak extrapolált terület csavarodhat be.
- Probléma projekciók extrapolálásával kezelhető:
  - Extrapoláció olyan képterülettel terjeszti ki a projekciókat, mely a „legsimább” átmenetet és cirkuláris projekciót generál.

Mátrix Inverziós Tomoszintézis spektrumszivárgás



Extrapoláció nélkül

Extrapoláció alkalmazásával

Mátrix Inverziós Tomoszintézis Dekonvolúció numerikus problémái

- $\mathbf{T}(\omega)^{\dagger}$ zajérzékenysége jelentős problémaforrás
  - Kondíciós szám $cond\left(\mathbf{T}(\omega)\right)=\sigma_{\max}/\sigma_{\min}$ származtatása:

$$cond\left(\mathbf{T}\right)=\max_{\mathbf{e},\mathbf{b}}\left\{\frac{\left\|\mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{e}\right\|_2\Big/\left\|\mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{b}\right\|_2}{\left\|\mathbf{e}\right\|_2\Big/\left\|\mathbf{b}\right\|_2}=\frac{\left\|\mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{e}\right\|_2\Big/\left\|\mathbf{e}\right\|_2}{\left\|\mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{b}\right\|_2\Big/\left\|\mathbf{b}\right\|_2}\right\}$$

    - Legyen $\mathbf{T}=\mathbf{U}\cdot\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{V}^*$ SVD felbontás, ekkor $\mathbf{T}^{\dagger}=\mathbf{V}\cdot\mathbf{\Sigma}^{\dagger}\cdot\mathbf{U}^*$
    - Mivel $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ oszlopvektorai ortonormált bázisok, ezért

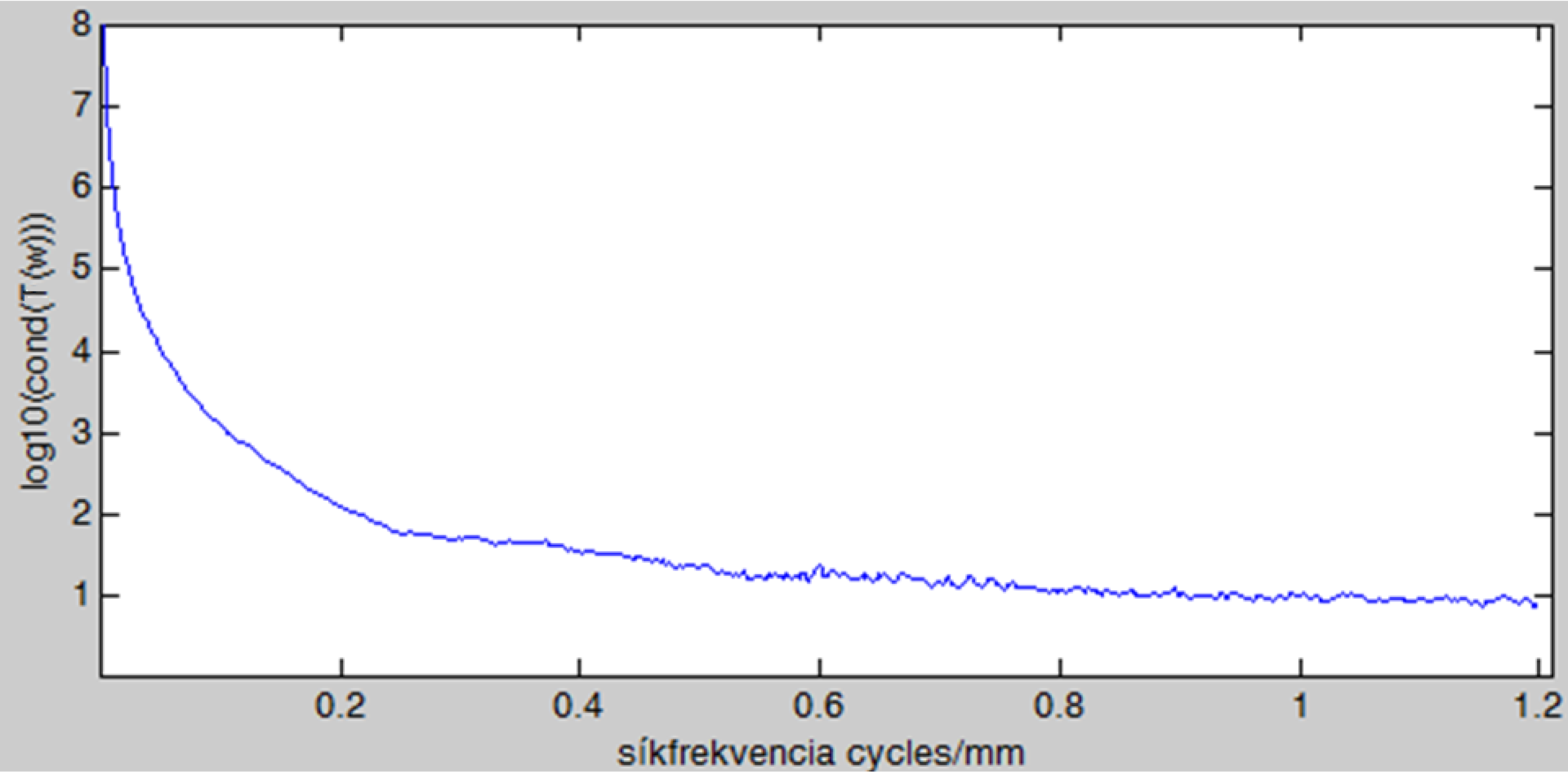
$$\max_{\mathbf{e}}\left\{\left\|\mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{e}\right\|_2\Big/\left\|\mathbf{e}\right\|_2\right\}=1/\sigma_{\min} \text{ és } \min_{\mathbf{b}}\left\{\left\|\mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{b}\right\|_2\Big/\left\|\mathbf{b}\right\|_2\right\}=1/\sigma_{\max}$$

- Zajcsökkentő regularizáció célja $cond\left(\mathbf{T}\right)$ minimalizálása

Mátrix Inverziós Tomoszintézis Dekonvolúció zajérzékenysége

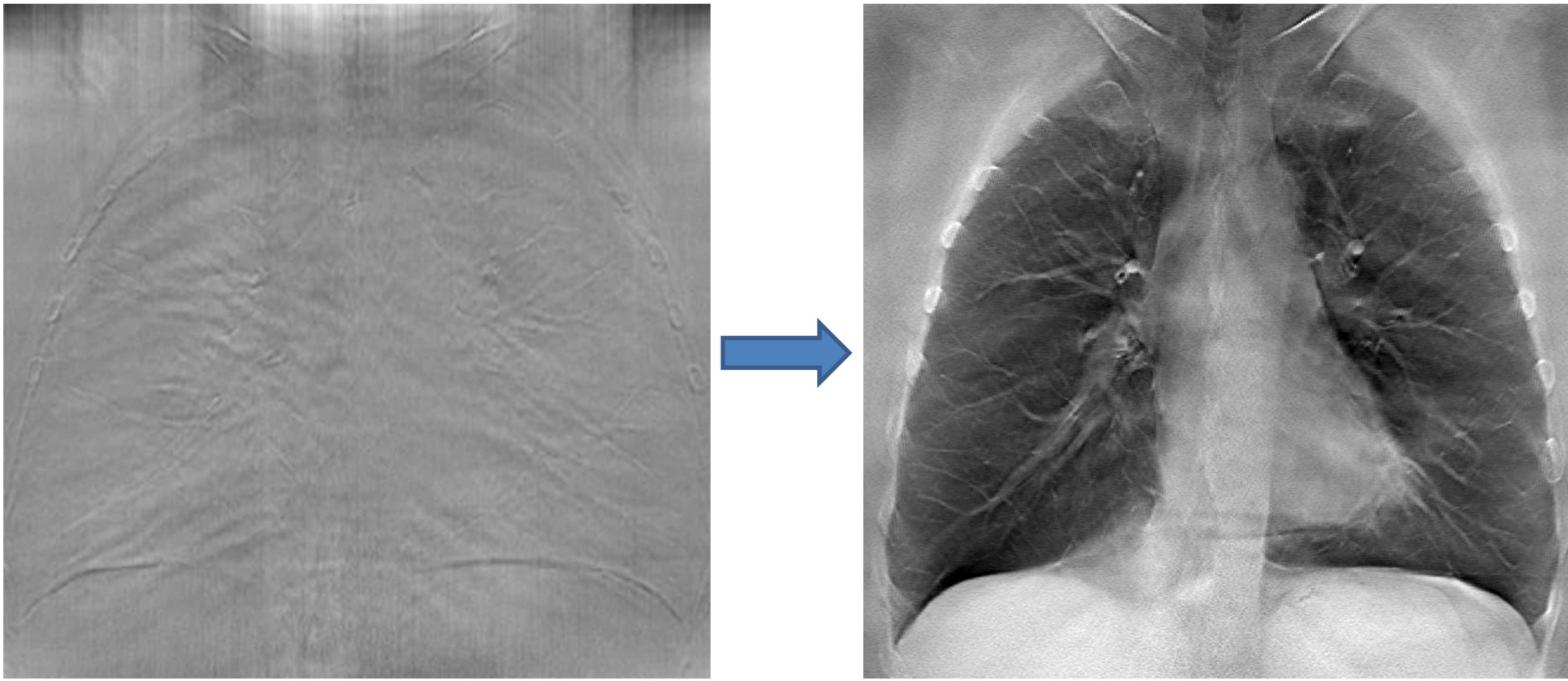
- $\mathbf{T}(\omega)^{\dagger}$ előállítása csonkolt SVD-vel:
  - $\mathbf{T}^{\dagger} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Sigma}^{\dagger} \cdot \mathbf{U}^{*}$, ahol $\mathbf{\Sigma}^{\dagger}{}_{(i,i)} = \begin{cases} 1/\sigma_i & |\sigma_i > \varepsilon \\ 0 & |\sigma_i \le \varepsilon \end{cases}$
  - Kísértetiesen hasonlít a csonkolt dekonvolúcióra:
    - Joggal, a különbség annyi, hogy ott a DFT mátrixával diagonalizálunk, míg SVD esetén a bal, illetve jobboldali sajátérték mtx.-okkal „diagonalizálunk”
- $\mathbf{T}(\omega)$ regularizált Moore- Penrose pszeudoinverze a Wiener dekonvolúció általánosítottja

Mátrix Inverziós Tomoszintézis
Kondíció lineáris tomoszintézis esetén



Korlátolt szögtartomány miatt alacsony frekvencia esetén a projekciókon kisebb a változás, aminek következménye a nagyobb zajérzékenység.

Mátrix inverziós tomoszintézis
Csonkolt SVD hatása



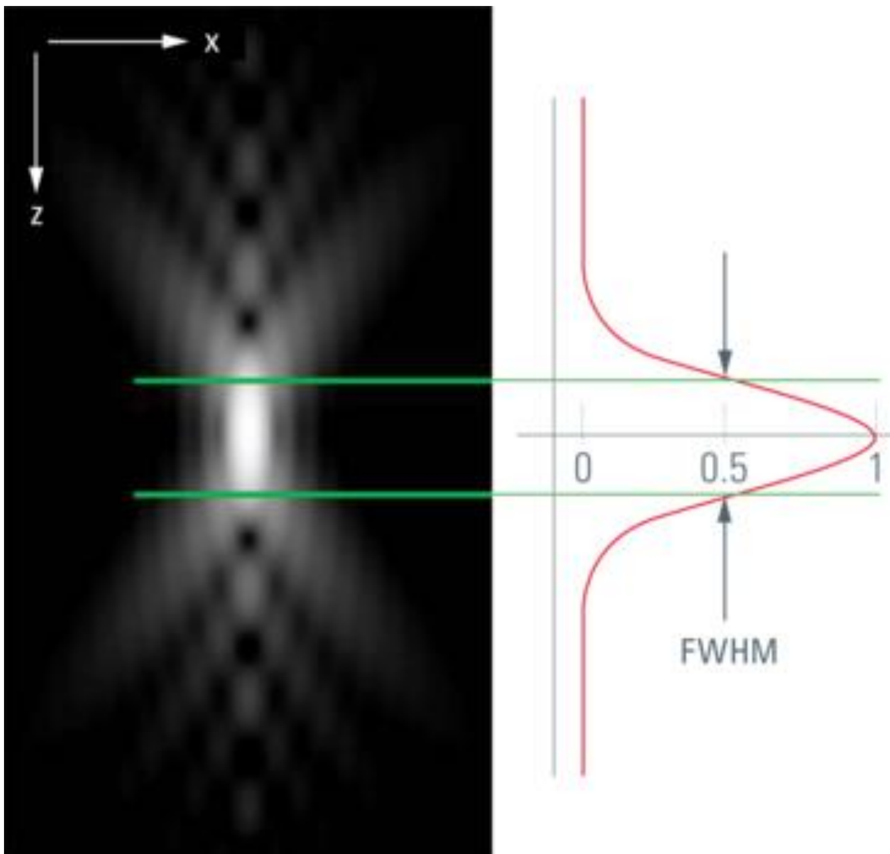
Jól látható, hogy a magasfrekvenciás tartomány zaja dominál a direkt dekonvolúciónál, míg a Csonkolt SVD jelentősen javít a helyzeten.

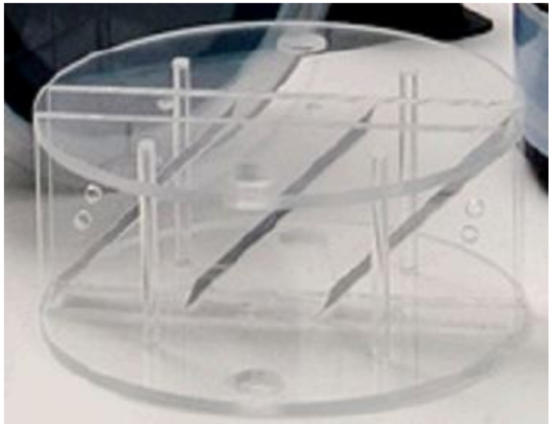
3D Röntgen tomográfia rekonstrukciós eljárásainak minősítése

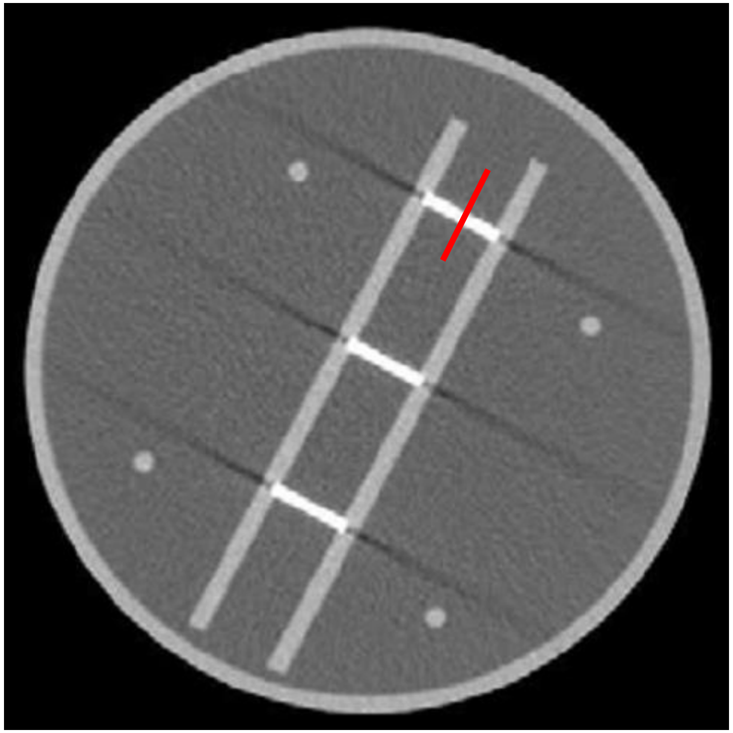
- Rekonstrukció metrikái:
  - Szeleten belüli effektív felbontása (emlékeztetőül $bw\{\mathbf{h}\}$)
    - Irányfüggő átviteli függvény közelíthető az élpár fantom / él fantom rekonstrukciójából.
  - Szeletek effektív vastagsága:
    - Mind CT, mind Tomo esetén a rekonstruált szeletekre merőleges irány menti kiterjedése a szeleteknek.
    - Felhasználási területfüggő optimális értéke.
    - Minél kisebb, annál több szelet kell, hogy minden képlet láthatóvá váljon (legalább egy szeleten).
    - Mérése tipikusan ferde fémlemezzel / fémhuzallal.

CT Szeletvastagság

Slice Sensitivity Profile mérése a lemezek rekonstrukciójára merőlegesen: szeletvastagság FWHM elvvel becsülhető

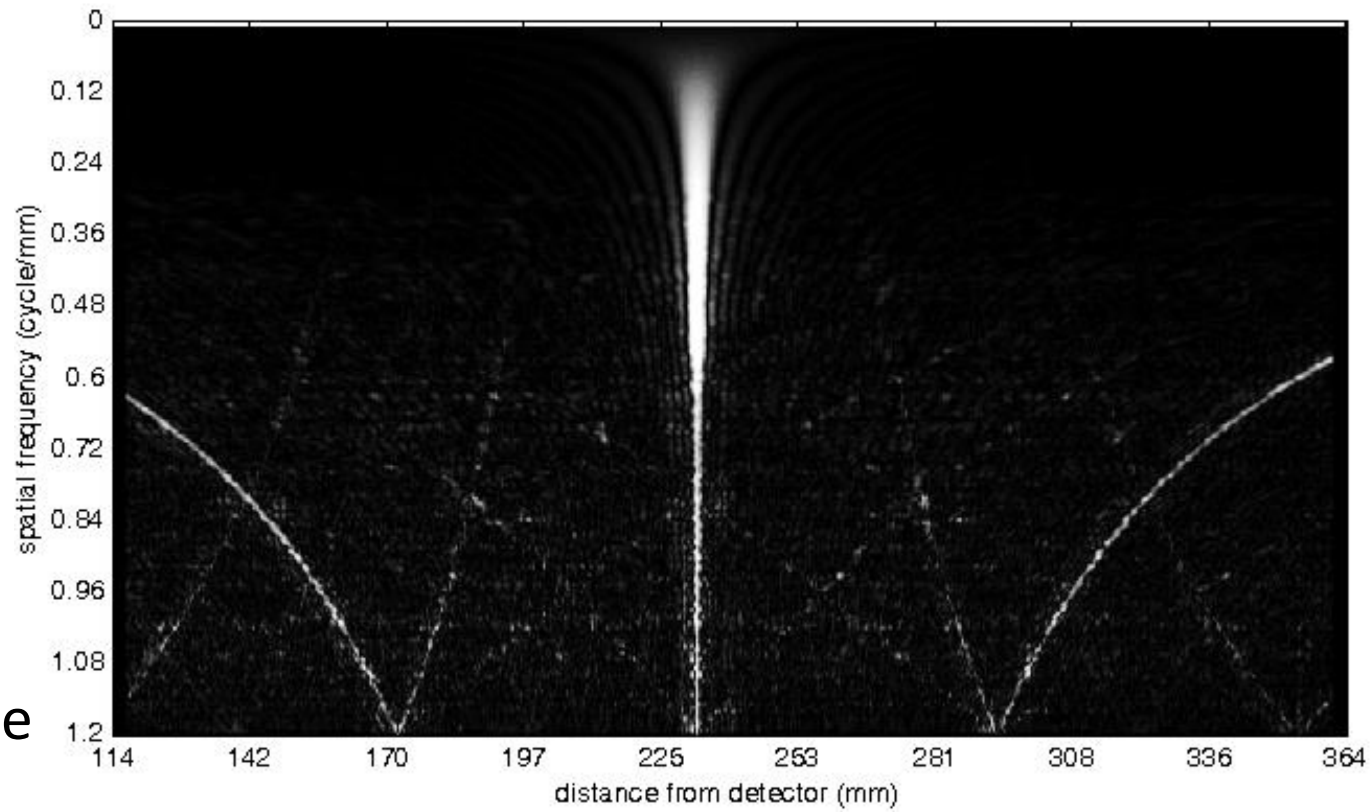






3D Röntgen tomográfia rekonstrukció Modulációs Átviteli Függvénye

- Ferde huzal fantommal (elvben) mérhető:
  - Ha az eljárás az X-Y síkokat rekonstruálja, akkor a huzal ne legyen párhuzamos a Z tengellyel.



Lineáris tomo MITS rekonstrukció MTF-e