Rekonstrukciós eljárások

Orvosi képdiagnosztika

2021 ősz

Előadások témája

- Röntgen tomográfia fizikai és matematikai alapjai – 2D Radon transzformáció, szűrt visszavetítés:
  - Fan – beam / Cone – beam felvételi elrendezések esete
- Általánosított (3D) röntgen tomográfia alapjai – ART rekonstrukciós eljárások
- Pozitron emissziós tomográfia alapjai – ML-EM statisztikai rekonstrukciós eljárás
- Modell alapú / CS rekonstrukciós eljárások
- Tomoszintézis felvételi elrendezés – MITS rekonstrukció
- Rekonstrukciós eljárások minősítése

Röntgen tomográfia alapjai

- Általánosított Beer-Lambert törvény:

$$\mathbf{I}_{(x0,y0)} = \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} I_0(E)\cdot \exp\left\{-\int_{P(x0,y0)} \mu(E,\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\right\} dE \, :$$

  - $I_0(E)$: röntgencsövet elhagyó E energiájú fotonok intenzitása (üres térfogat esetén a detektor által érzékelt fotonok száma)
  - $P(x,y)$: pontszerű sugárforrást a detektor (x,y) koordinátájú pontjával összekötő szakasza a *3d térnek*
  - $\mu(E,\mathbf{x})$: a vizsgált térfogat $\mathbf{x}$ koordinátájú pontjának lineáris csillapítási együtthatója E energián
  - Egyszerűsített Beer-Lambert törvény: $I_0(E)\cdot \exp\left\{-\int_{P(x0,y0)} \mu(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\right\}$ (monokróm spektrum esete)

Röntgen tomográfia alapjai

- Monokróm spektrumú sugárzás esete:
  - Általánosan alkalmazott feltételezés
  - Rekonstrukció célja a lin. csillapítási együtthatók meghatározása az alábbi összefüggés invertálásával:

$$-\ln\left(\mathbf{I}_{(x,y)}/I_0\right) = \int_{P(x0,y0)} \mu(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

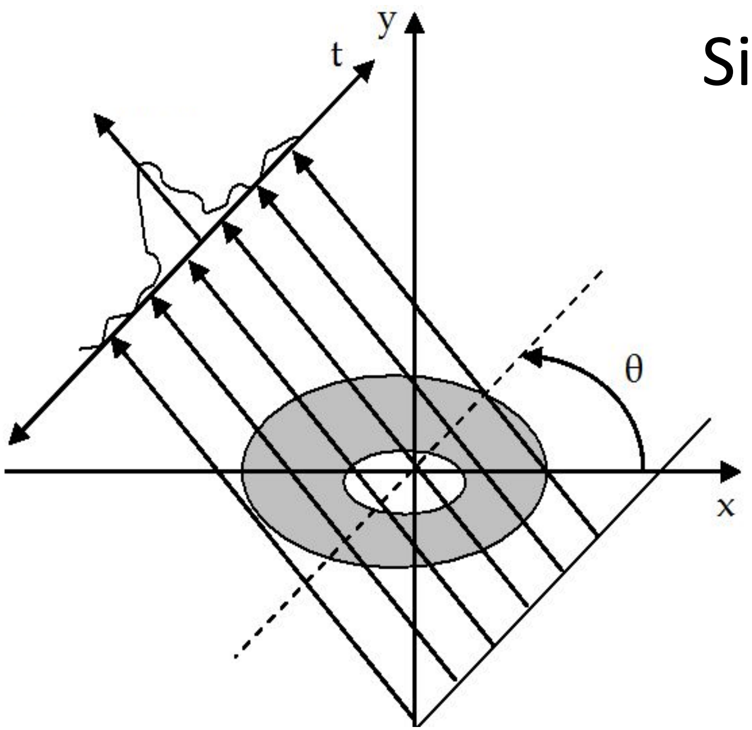
- Valódi röntgensugarak ezzel szemben:
  - Polikromatikusak → sugárkeményedés problémája
  - Szóródnak: nem igaz, hogy csak a vetítősugár mentén elhelyezkedő képletek számítanak.
  - Projekciók egyéb zajjal is terheltek : kis intenzitásnál rossz SNR

Röntgen alapú képalkotás

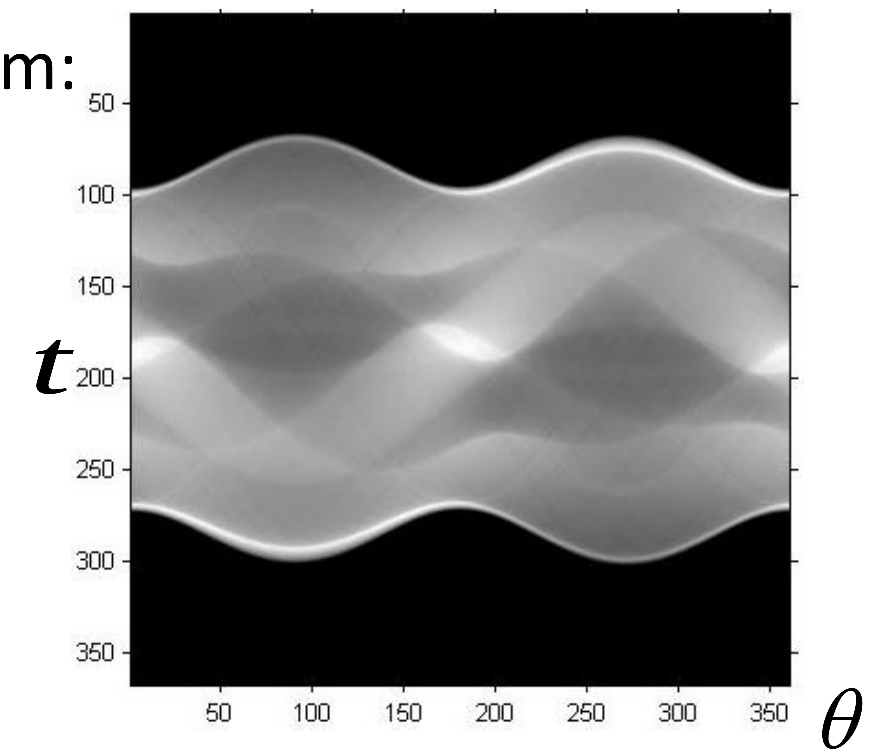
- Konvencionális P-A röntgen:
  - Nincs rekonstrukció
- Számítógépes tomográfia (CT):
  - Párhuzamos vetítősugarakon alapuló eljárások (kevés ilyen eszköz került forgalomba), cserébe egyszerű elmélet
  - Legyező (Fan-beam) helikális CT – leggyakoribb típus
  - Cone-beam CT, ennek speciális változata a Tomoszintézis
- Orvosi képdiagnosztika alapvető eszköze:
  - Mivel a röntgen sugárzás ionizál, illetve maga a vizsgálat itthon mércével drága, ezért csak indokolt esetben végzik

2D Radon transzformáció:

- Radon transzformáció (2D szelet 1D projekciók):
  - Input: 2D Descartes - koordinátarendszerbeli kép
  - Output: sinogram – 2D polár-koordinátarendszerbeli kép



Sinogram:



Radon transzformáció – Fourier vetítősík tétel

- Radon transzformáció (2D szelet 1D projekciók):
  - Vetítősugarak merőlegesek az x tengellyel θ szöget bezáró egyenesre: $t = x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta)$
  - Vetítősugarak mentén integráljuk a szelet elemeit:

$$P_\theta(t) = \iint\limits_{x,y} f(x,y) \cdot \delta\big(x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta) - t\big)\, dxdy$$

  - Legyen $S_\theta(\rho) = FT_\rho\{P_\theta(t)\} = \int P_\theta(t) \cdot \exp(-2\pi j \cdot t\rho)\, dt$
- Fourier vetítősík tétel származtatása:

$$S_\theta(\rho) = \iiint\limits_{x,y,t} f(x,y) \cdot \delta\big(x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta) - t\big) \cdot \exp(-2\pi j \cdot \rho t)\, dtdydx$$

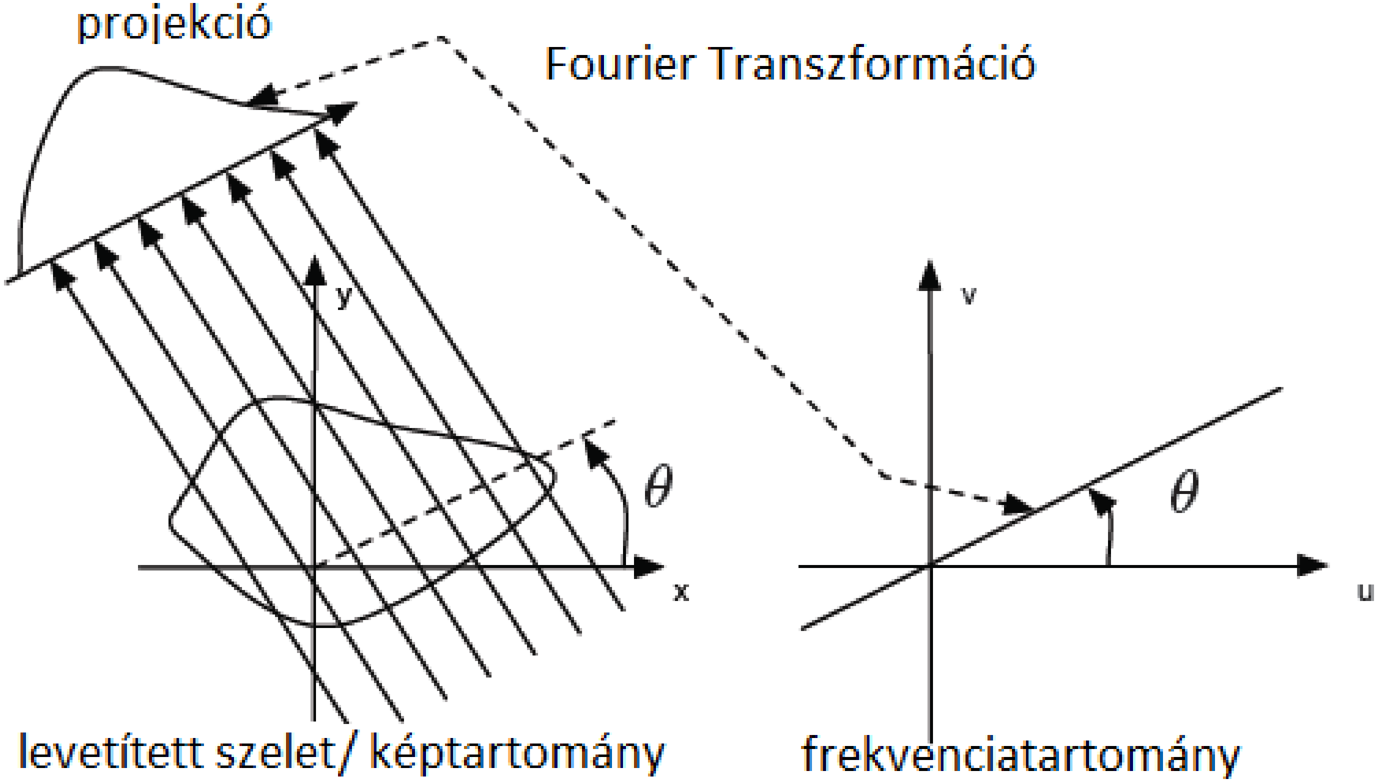
$$S_\theta(\rho) = \iint\limits_{x,y} f(x,y) \cdot \exp\Big(-2\pi j \cdot \rho \cdot \big(x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta)\big)\Big)\, dydx$$

Fourier vetítősík tétel

– Lényegében f spektrumának egy szakaszát kaptuk meg:

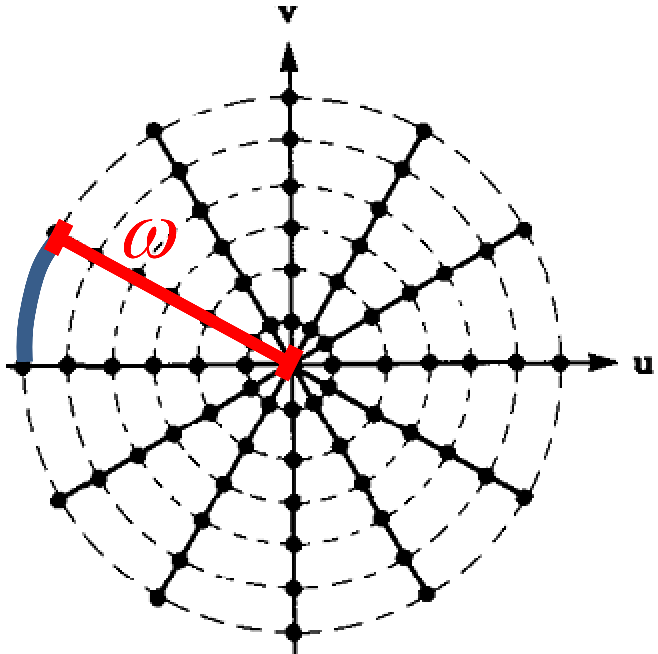
$$S_\theta(\rho) = F\left(\rho \cdot \cos(\theta), \rho \cdot \sin(\theta)\right)$$

- Vizuális interpretáció:



Rekonstrukció – FBP alapötlete

- Rekonstrukció célja: Radon Transzf. invertálása
- Fourier vetítősík tétel értelmében a vizsgált szelet spektrumainak bizonyos részeit ismerjük:
  - Az ismert részeket „illesszük” egy üres spektrumba
  - Polár koordinátás frekvencia sugarának függvényében a spektrum mintavételi helyeinek eltérő a távolsága:
    $K(\omega) = |\omega| \cdot \Delta\theta$
  - Korrekció: spektrumba illesztés előtt $|\omega|$ -val súlyozzunk frekvenciatérben (ez az ún. rámpaszűrés).



Szűrt visszavetítés (FBP) származtatása

- FT inverze: $f(x,y) = \iint\limits_{u,v} F(u,v) \cdot \exp\left(j2\pi(ux+vy)\right) dvdu$
- Fourier vetítősík miatt a spektrumot polárkoordináta-rendszerben ismerjük: $u = \omega \cdot \cos(\theta);\ v = \omega \cdot \sin(\theta)$

  $$f(x,y) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} F(\omega,\theta) \cdot \exp\left(j2\pi \cdot \omega\left(x\cos(\theta) + y\sin(\theta)\right)\right) \cdot J\, d\omega\, d\theta$$

  - $J = \begin{vmatrix} \partial u/\partial\omega & \partial u/\partial\theta \\ \partial v/\partial\omega & \partial v/\partial\theta \end{vmatrix} = \ldots = \omega\ ,\ du\, dv = J\, d\omega\, d\theta$
  - Továbbiakban $k := x\cos(\theta) + y\sin(\theta)$
- $f(x,y) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} F(\omega,\theta) \cdot \exp\left(j2\pi \cdot \omega k\right) \cdot \omega\, d\omega\, d\theta$

Szűrt visszavetítés (FBP) származtatása

- Vágjuk szét a külső integrált:

$$f\left(x, y\right) = \int_0^\pi \int_0^\infty F\left(\omega, \theta\right) \cdot \mathrm{e}^{j2\pi\cdot\omega k}\ \omega\, d\omega\, d\theta + \int_\pi^{2\pi} \int_0^\infty F\left(\omega, \theta\right) \cdot \mathrm{e}^{j2\pi\cdot\omega k}\ \omega\, d\omega\, d\theta$$

  - $f\left(\cdot, \theta\right)$ a sinogram egy oszlopa, melynek definíciójából (Radon transzf.) következik, hogy $F\left(\omega, \theta\right) = F\left(-\omega, \theta + \pi\right)$, hiszen:

$$F\left(\omega, \theta + \pi\right) = \int_{t=-\infty}^{\infty} P_{\theta+\pi}\left(t\right) \cdot \exp\left(-j2\pi\omega t\right) dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} P_{\theta}\left(-t\right) \cdot \exp\left(-j2\pi\omega t\right) dt$$

$$F\left(\omega, \theta + \pi\right) = \int_{l=\infty}^{-\infty} P_{\theta}\left(l\right) \cdot \exp\left(-j2\pi\left(-\omega\right) l\right) \frac{\partial t}{\partial l} dl = F\left(-\omega, \theta\right) \qquad l = -t$$

  - Felhasználtuk, hogy $k = x\cos\left(\theta\right) + y\sin\left(\theta\right)$, illetve $\cos\left(\theta + \pi\right) = -\cos\left(\theta\right)$ és $\sin\left(\theta + \pi\right) = -\sin\left(\theta\right)$

Szűrt visszavetítés (FBP) származtatása

- Vágjuk szét a külső integrált:

$$f(\ldots) = \int^{\pi}\int^{\infty} \ldots(\omega,\theta)\cdot \mathrm{e}^{j2\pi\cdot\omega k}\,\omega\, d\omega\, d\theta + \int^{2\pi}\int^{\infty} F(\omega,\theta)\cdot \mathrm{e}^{j2\pi\cdot\omega k}\,\omega\, d\omega\, d\theta$$

$$P_\theta(l) \triangleq f(l,\theta)$$

$$S_\theta(\omega) \triangleq F(\omega,\theta)$$

  - $f(\cdot,\theta)$ a sinogram egy osz… ciójából (Radon transzf.) következik, hogy $F(\omega,\theta) = F(-\omega,\theta+\pi)$, hiszen:

$$F(\omega,\theta+\pi) = \int_{t=-\infty}^{\infty} P_{\theta+\pi}(t)\cdot\exp(-j2\pi\omega t)\,dt = \int_{t=\ldots}^{\infty} \ldots\exp(-j2\pi\omega t)\,dt$$

$$\partial t/\partial l = -1$$

$$F(\omega,\theta+\pi) = \int_{l=\infty}^{-\infty} P_\theta(l)\cdot\exp(-j2\pi(-\omega)l)\frac{\partial t}{\partial l}\,dl = F(-\omega,\theta) \qquad l=-t$$

  - Felhasználtuk, hogy $k = x\cos(\theta) + y\sin(\theta)$, illetve $\cos(\theta+\pi) = -\cos(\theta)$ és $\sin(\theta+\pi) = -\sin(\theta)$

Szűrt visszavetítés (FBP) származtatása

- Alakítsuk át egyszerű behelyettesítésekkel a második integrált:

$$\int_{\pi}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} F\left(\omega,\theta\right)\cdot \mathrm{e}^{j2\pi\cdot\omega k}\,\omega\, d\omega\, d\theta\Bigg|_{\theta=-\Theta} = \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\infty} F\left(-\omega,\Theta\right)\cdot \mathrm{e}^{-j2\pi\cdot\omega k}\,\omega\, d\omega\, d\Theta$$

$$\boxed{k = \cos\left(\theta\right)x + \sin\left(\theta\right)y}$$

$$\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\infty} F\left(-\omega,\Theta\right)\cdot \mathrm{e}^{-j2\pi\cdot\omega k}\,\omega\, d\omega\, d\Theta\Bigg|_{\omega=-\Omega} = \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{-\infty} F\left(\Omega,\Theta\right)\cdot \mathrm{e}^{j2\pi\cdot\Omega k}\left(-\Omega\right)\cdot\left(-1\right) d\Omega\, d\Theta$$

$$\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{-\infty} F\left(\Omega,\Theta\right)\cdot \mathrm{e}^{j2\pi\cdot\Omega k}\left(-\Omega\right)\cdot\left(-1\right) d\Omega\, d\Theta = \int_{0}^{\pi}\int_{-\infty}^{0} F\left(\Omega,\Theta\right)\cdot \mathrm{e}^{j2\pi\cdot\Omega k}\left(-\Omega\right) d\Omega\, d\Theta$$

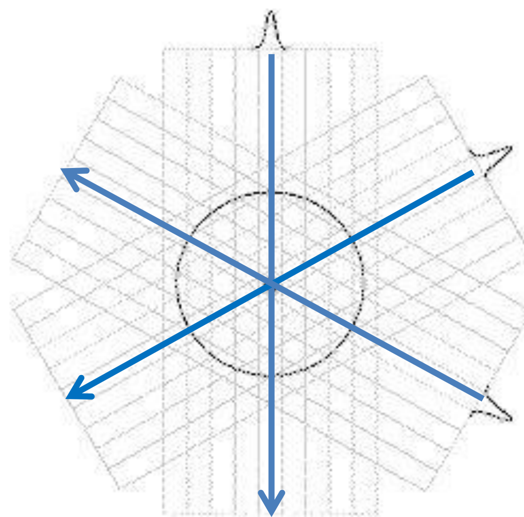
Szűrt visszavetítés (FBP) származtatása

- Lássuk mit sikerült kifőznünk:

$$f(x,y)=\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}F(\omega,\theta)\cdot \mathrm{e}^{j2\pi\cdot\omega k}\,\omega\,d\omega\,d\theta+\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{0}F(\omega,\theta)\cdot \mathrm{e}^{j2\pi\cdot\omega k}(-\omega)\,d\omega\,d\theta$$

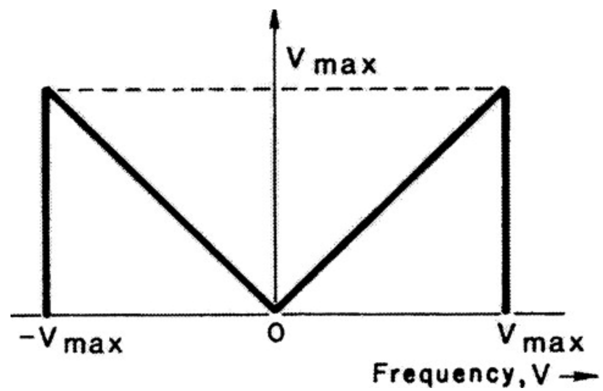
$$f(x,y)=\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega,\theta)\cdot|\omega|\cdot\exp(j2\pi k\omega)\,d\omega\,d\theta=\int_0^{\pi}Q_\theta(k)\,d\theta:$$

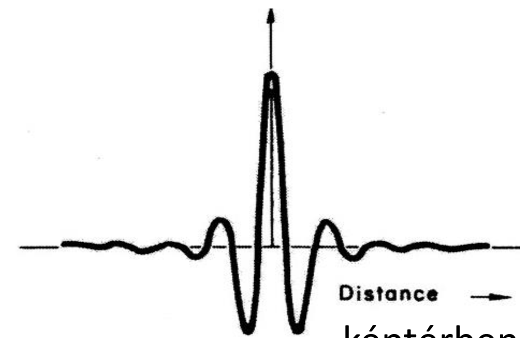
  - $Q_\theta(k)=\int_{\omega=-\infty}^{\infty}S_\theta(\omega)\cdot|\omega|\cdot\exp(j2\pi k\omega)\,d\omega$ ekvivalens a projekciók (sinogram oszlopai) rámpa szűrővel történő szűrésével
  - $f(x,y)=\int_0^{\pi}Q_\theta(x\cos(\theta)+y\sin(\theta))\,d\theta:$ az ú.n. visszavetítés



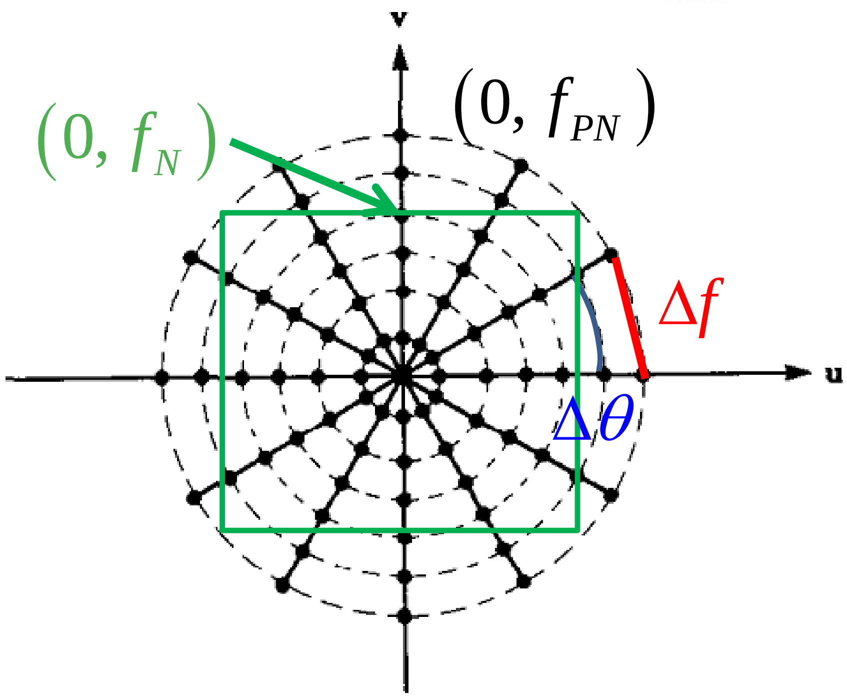
Szűrt visszavetítés értékelése

- Rámpaszűrő:





képtérben



„Ideális" rekonstrukció:

- 180°-ból rögzített projekciók
- $f_{PN} = 1/2\Delta t \qquad \Delta\theta = \pi/M$
- $\Delta f_{rad} = 2 f_{PN}/N = 1/(\Delta t \cdot N)$
- $\Delta f_{az} = f_{PN} \cdot \Delta\theta \approx \Delta f_{rad}$

$$M/N \approx \pi/2$$

Szűrt visszavetítés implementációja

- Rámpaszűrés frekvenciatérben történik:
  - ~20-as szűrő esetén már a frekvenciatartománybeli szűrés a gyorsabb (ennek főleg régebbben volt jelentősége).
- Visszavetítés kép / időtartományban:
  - Frekvenciatartományban interpolálnunk kellene a spektrum ismert egyeneseiből a DFT által mintavett frekvenciák értékét (mely messze nem triviális).
- Szűrések, projekciók visszavetítése egyenként (sugaranként) jól párhuzamosítható

Szűrt visszavetítés zajérzékenysége

- Detektorok DQE-je a frekvencia függvényében monoton csökken $\Rightarrow$ zajos magas frekvencia.
- Ráadásul magas frekvencián „távolabb vannak” a spektrum ismert értékei (ezért kell a rámpa szűrés is).
- Legegyszerűbb megoldás az alul-áteresztés:
  - Az alul-áteresztés és a visszavetítés sorrendje tetszőleges
  - Erőforrásigény miatt érdemes a rámpa szűrőt megszűrni:

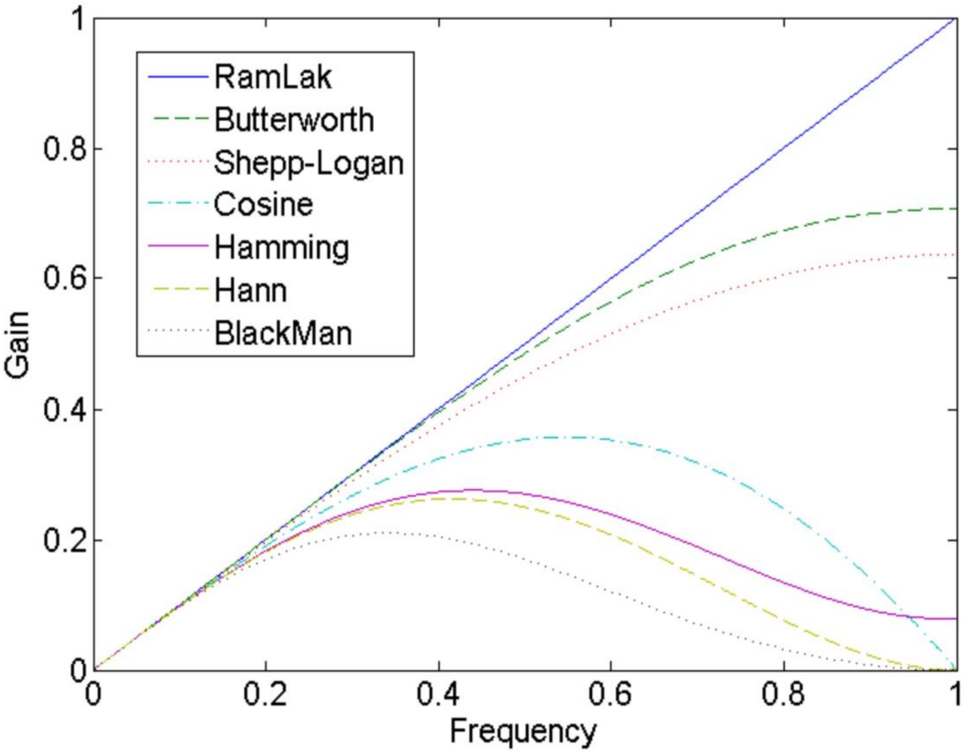
$$\left(P_\theta * h_{Ramp}\right) * h_{Lowpass} = P_\theta * \left(h_{Ramp} * h_{Lowpass}\right)$$

Klasszikus inverz problémák mely algoritmusaira hasonlít az eljárás?

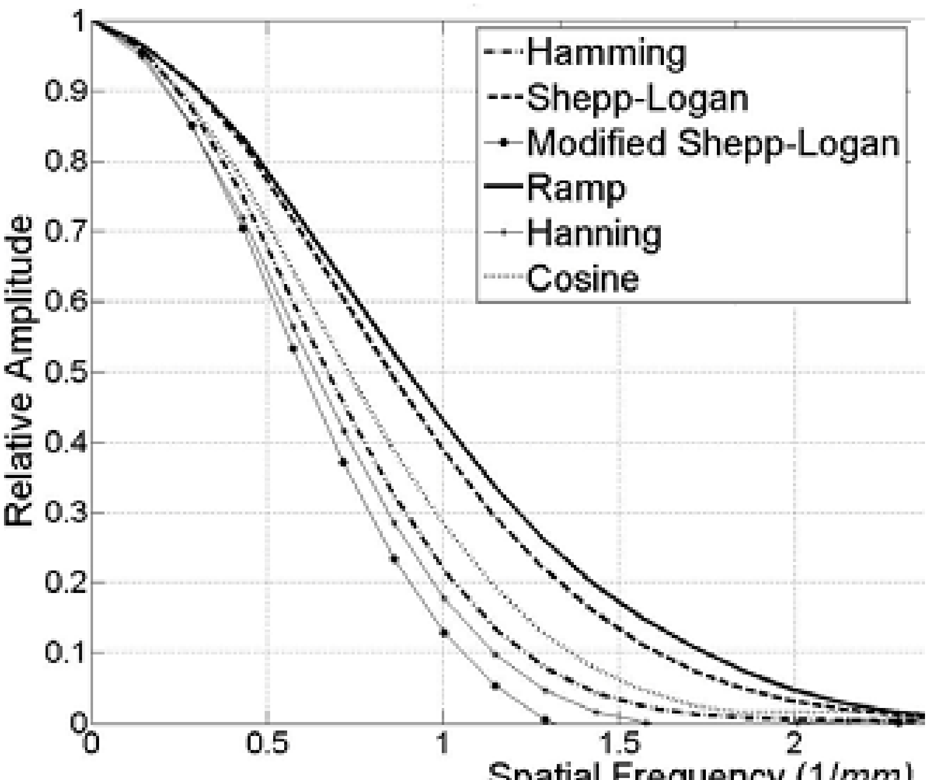
Szűrt visszavetítés zajérzékenysége

- Rámpa szűrő módosítottjaival szűrünk:

Szűrők átviteli függvényének abszolút értéke:



Egy CAT MTF-je a szűrők függvényében (példa):

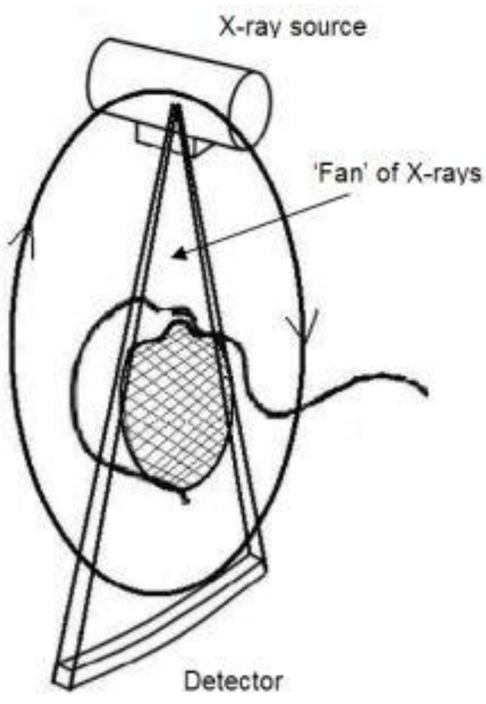


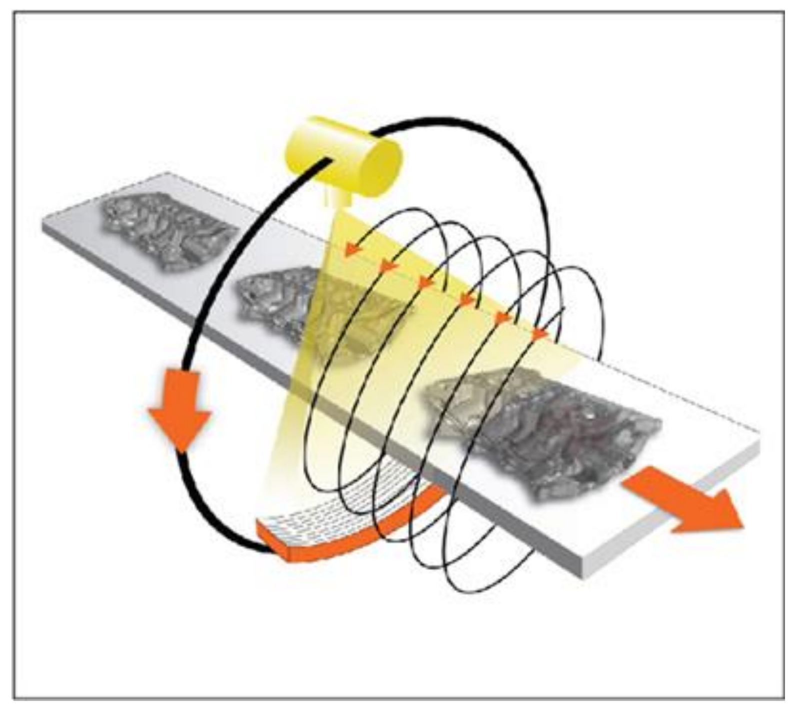
Szűrt visszavetítés működése

- Demo videó az FBP rekonstrukciójáról: https://www.youtube.com/watch?v=ddZeLNh9aac
  - A szinogramban oszlop-folytonosan helyezkednek az 1D projekciók.
- A videón jól követhető a limitált szögtartomány által okozott artifakt:
  - Magas frekvenciás komponensek (pl. fantom széle) kis szögtartományból is jól rekonstruálódik.
  - Alacsony frekvenciás komponensek viszont erősen szétmosódottak (jellegzetesen „V” alakban) .
  - Vetítősugarakkal párhuzamos élek rekonstruálhatóak jól.

FBP Fan-beam geometria esetén

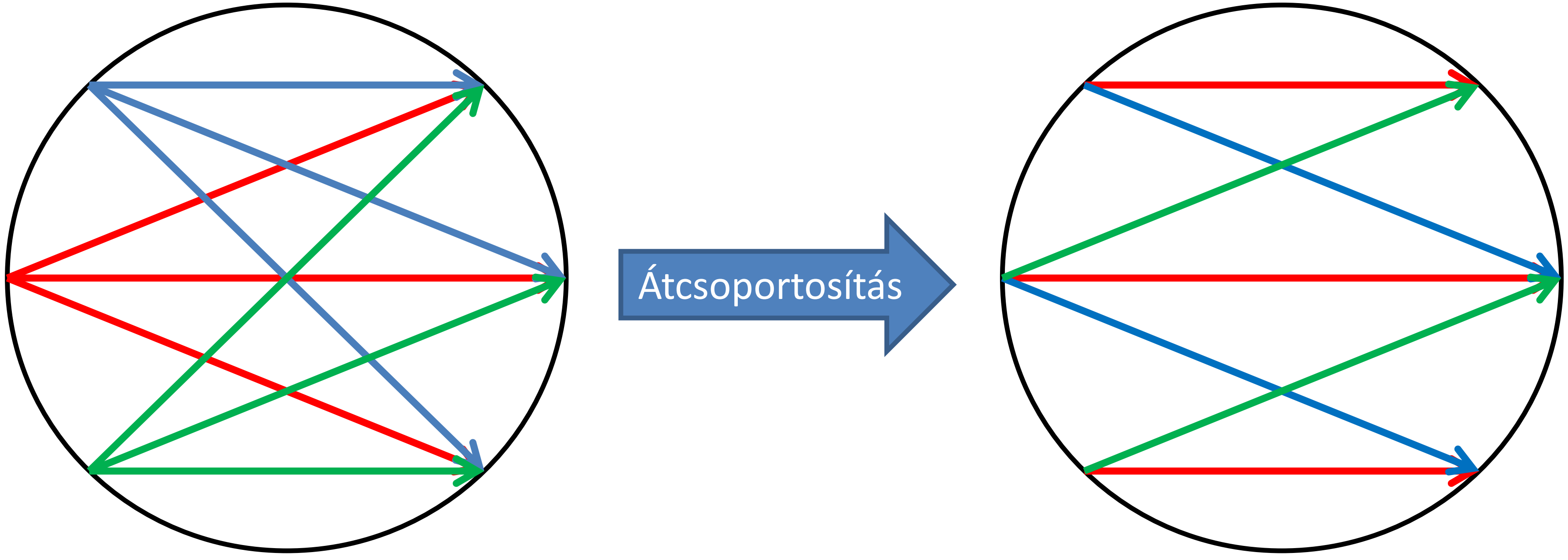
- Eddig párhuzamosak voltak a vetítősugarak:
  - Gyakorlatban egy ilyen CT nem igazán realizálható
- Fan-beam vetítősugaras helikális CT (ú.n. CAT):





FBP Fan-beam geometria esetén

- Alapötlet: a mért intenzitások átcsoportosítása párhuzamos vetítősugár alapú geometria szerint:
  - Lényegében új, párhuzamos vetítősugár szerinti virtuális projekciókat állítunk elő a fan-beam projekciókból.

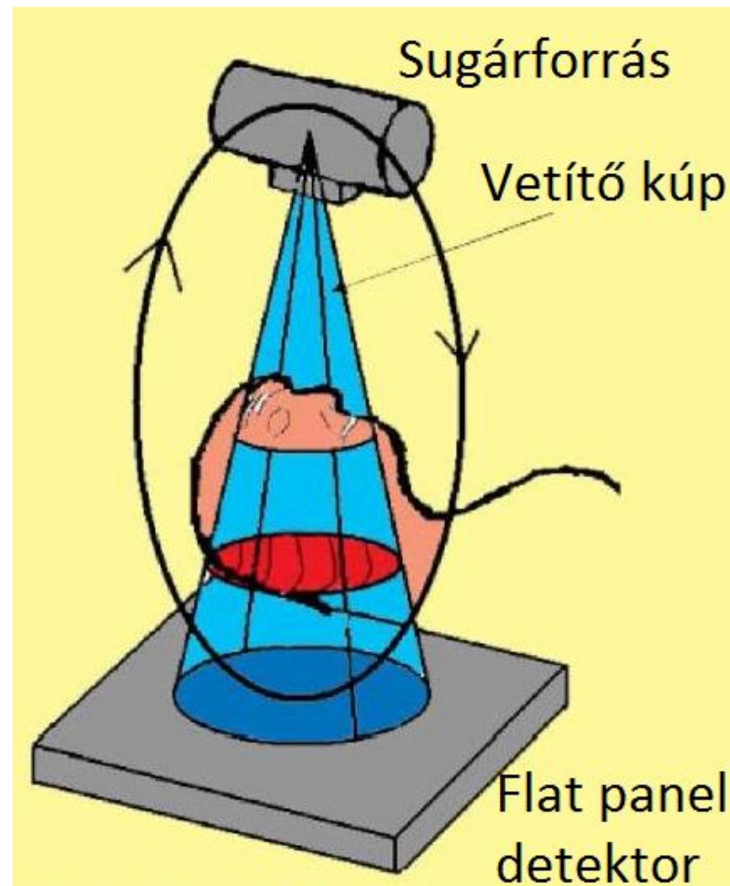


Fan-beam projekciók

Virtuális párhuzamos projekciók

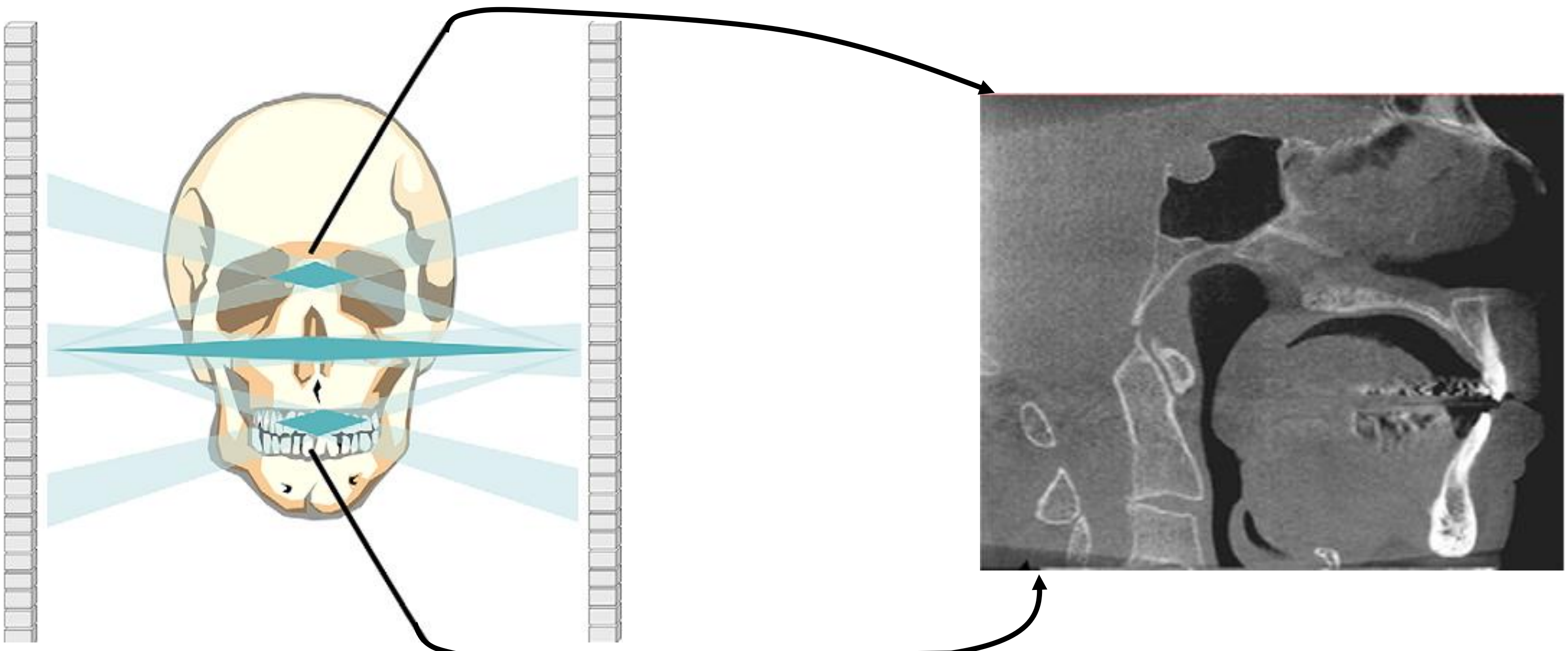
FBP Cone-beam geometria esetén

- CBCT rendszerek - Cone-Beam geometria:
  - Flat-panel detektort használ, a sugarak kúpszerűen (innen az elnevezés) vetülnek a detektorra:



Cone-beam geometria szerinti vetületek FBP rekonstukciója - FDK

- Feldkamp, Davis, Kress CBCT-s algoritmusa:
  - Klasszikus szűrt visszavetítéssel rekonstruál
  - Közelítően helyes algoritmus – ideális esetben sem tökéletes
- Ideális rekonstrukció esetén is Cone-beam artifakt



Projekciók keletkezésének általános 3D modellje

- Általános modellje a (röntgen) képalkotásnak:

$$g(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\gamma=0}^{\infty} h(x,y;\alpha,\beta,\gamma)\cdot f(\alpha,\beta,\gamma)\,d\gamma\,d\alpha\,d\beta+\eta(x,y)$$

  - Mérésekkel rendelkezünk: $g(x,y)$
  - Teoretikusan ismerjük a rendszer PSF-jét: Beer- Lambert törvény szerint, ami nem modellezi a nem a primer sugár-trajektória mentén haladó fotonokat.
  - Rekonstrukció célja $f(\alpha,\beta,\gamma)$ meghatározása
  - Érdemes megjegyezni, hogy a Beer-Lambert törvénynél ez egy általánosabb modell, de monokróm sugarakat feltételez, gyakorlatban nem tudunk vele dolgozni túl nagy komplexitás.

Projekciók keletkezésének általános 3D modellje

- Megfigyelési modell diszkretizáltja $\mathbf{g} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{f} + \boldsymbol{\eta}$:
  - $\mathbf{g}$ tartalmazza az összes vetítősugár fotodiódákon mért intenzitások negatív logaritmáltját (tehát minden projekció minden pixeléhez tartozó intenzitását tartalmazó vektor).
  - $\mathbf{H}$ a vetítő mátrix, $\mathbf{H}_{(i,j)}$: i-edik pixelbe csapódó fotonok a j-edik voxeltől mennyire csillapodnak (ez anyag független).
  - $\boldsymbol{\eta}$ az additív zaj – nem modellezett hatások determinálják
- Lényegében ez is inverz probléma:
  - Ugyanúgy jelentős a zajérzékenység, mint 2D esetben
  - Ellentétben nagyságrendekkel több változó (akár 1E7)

Projekciók keletkezésének általános 3D modellje

Ezzel a definícióval ritkán élünk – túl számításigényes. Gyakorlatban sokszor $\mathbf{H}_{(i,j)}$ az i-edik pixelbe csapódó fotonok által a j-edik voxelben megtett útnak a hossza (csak primer sugárzás) / kúpnak a térfogata. Ezzel a megkötéssel $\mathbf{H}$ egy ritka, ú.n. sávmátrixá válik.

-
  - $\mathbf{H}$ a vetítő mátrix, $\mathbf{H}_{(i,j)}$: i-edik pixelbe csapódó fotonok a j-edik voxelben lévő anyagtól mennyire csillapodnak.
  - $\boldsymbol{\eta}$ az additív zaj – nem modellezett hatások determinálják
- Lényegében ez is inverz probléma:
  - Ugyanúgy jelentős a zajérzékenység, mint 2D esetben
  - Ellentétben nagyságrendekkel több változó (akár 1E7)

Algebrai rekonstrukciós technika (Gordon ART)

- Kaczmarz iterációval $\mathbf{g} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}$ megoldása:
  - Rekonstrukciónál a $\mathbf{f} = \mathbf{H}^{\dagger} \cdot \mathbf{g}$ megoldás lenne az „ideális”, de:
    - Túl nagy $\mathbf{H}$ mérete a ma elérhető számítási teljesítményhez
    - Ráadásul $\mathbf{H}$ nagyon ritka, melyet általános algebrai módszerek nem képesek hatékonyan kihasználni
  - Eljárás alapötlete: $\mathbf{g} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}$ lényegében N db (vetítősugarak száma), M dimenziós hipersík egyenlete
    - Ha létezik egzakt inverz, akkor a hipersíkok az M dimenziós tér ugyanazon pontjában metszik egymást.
    - Ha túlhatározott, akkor nincs metszéspont, ha alulhatározott akkor az M dimenziós teret egy résztartományra szűkítik.

Algebrai rekonstrukciós technika (Gordon ART)

– Az eljárás k+1. iterációban merőlegesen vetíti az aktuális $\mathbf{f}$ -et $\mathbf{g}_{(i)} = \mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{f}$ hipersíkra ($i \equiv k(\mathrm{mod}\, N)$):

- $\mathbf{f}$ a $\mathbf{H}_{(i,:)}$-re merőleges azon síkon helyezkedik el, mely távolsága az origótól $\mathbf{g}_{(i)} \Big/ \left\| \mathbf{H}_{(i,:)} \right\|_2$
- Tehát $\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} - \alpha \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}{}^T$, a merőleges vetítés után $\mathbf{g}_{(i)} = \mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \left(\mathbf{f}^{(k)} - \alpha \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}{}^T \right)$ teljesül, amiből kifejezve:

  $\alpha = \left(\mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{g}_{(i)} \right) \Big/ \left(\mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}{}^T \right)$, behelyettesítve:

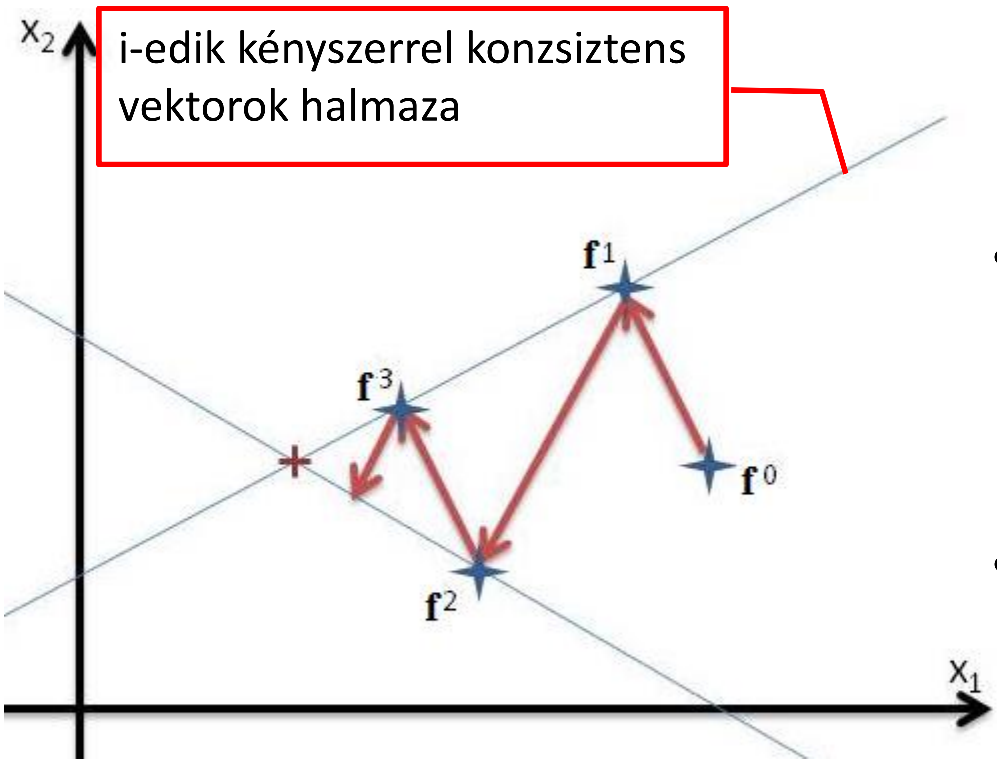
$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} - \left(\mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{g}_{(i)} \right) \cdot \frac{\mathbf{H}_{(i,:)}{}^T}{\mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}{}^T}$$

Algebrai rekonstrukciós technika (Gordon ART)

– $\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \left(\mathbf{g}_{(i)} - \mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)}\right) \frac{\mathbf{H}_{(i,:)}{}^{T}}{\mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}{}^{T}}$ interpretációja:
  - $\mathbf{g} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}^{(k)}$ a rögzített projekciók és az aktuális ($\mathbf{f}^{(k)}$) rekonstrukció modell szerinti vetületének a különbsége (vetületi hiba)
  - $\mathbf{H}_{(i,:)}{}^{T} \Big/ \left(\mathbf{H}_{(i,:)} \cdot \mathbf{H}_{(i,:)}{}^{T}\right)$: a vetületi hibát vetíti vissza
- Eljárás tulajdonságai:
  - Sok, könnyen számolható iteráció, melyek nem párhuzamosíthatóak
  - Konvergál, ha megfigyeléseink konzisztensek, ellentétben limit hurokba szorul, mely belsejében helyezkedik el az $\mathbf{f}^{*} = \mathbf{H}^{\dagger} \cdot \mathbf{g}$.
  - Hátránya, hogy nincs prior, ezért túlilleszkedésre hajlamos (lényegében egy ML becslés Gauss eloszlású likelihood-dal, ha konzisztens)
  - Szükség van egy $\mathbf{f}^{(0)}$-ra: gyakran FBP / BP eredménye

Kaczmarz iteráció példa

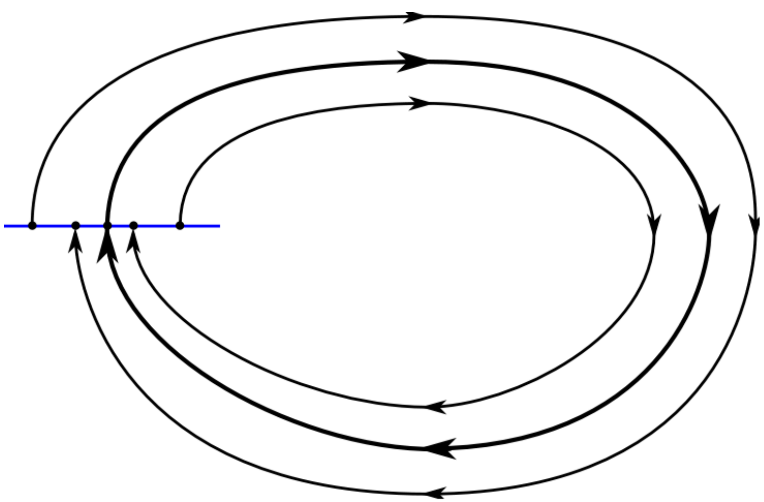
- N=2, M=2 esete:

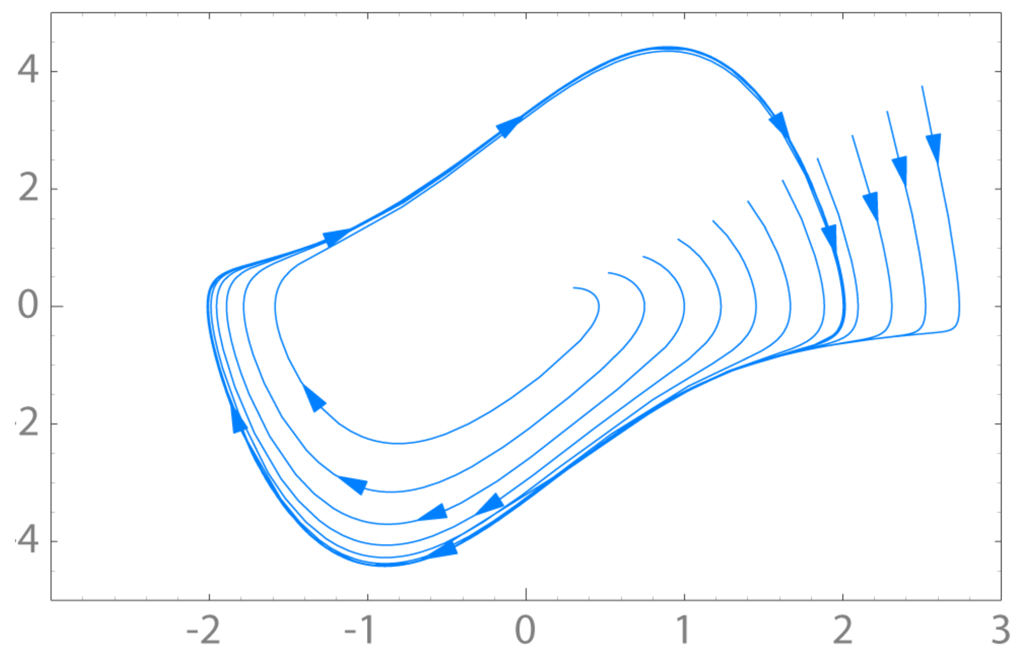


- Ha a két merőleges hipersík egymásra merőleges, akkor két iteráció alatt megvan a metszéspont
- Ha a hipersíkok párhuzamosak, akkor az iteráció nem áll le (limit hurokba kerül)
- Minél nagyobb a két egyenes által bezárt szög, annál gyorsabb a konvergencia.

Limit hurok viselkedés

- Gordon ART inkonzisztens projekciók esetén limit hurokba lép:





Stabil limit hurkok viselkedés: a rendszer állapotváltozója hurok trajektóriába ragad

Algebrai rekonstrukciós technika (Simultaneous ART)

- Egyidejű ART (SART):
  - Hibaképzés nem vetítősugaranként, hanem projekciónként:

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \lambda \cdot \underset{\{i\}}{diag}\left\{\frac{1}{\sum_{j \in S^{(k)}} \mathbf{H}_{(j,i)}}\right\} \mathbf{H}^{T}_{\left(S^{(k)},:\right)} \cdot \underset{\left\{j \in S^{(k)}\right\}}{diag}\left\{\frac{1}{\sum_{i} \mathbf{H}_{(j,i)}}\right\}\left(\mathbf{g}_{\left(j \in S^{(k)}\right)} - \mathbf{H}_{\left(S^{(k)},:\right)} \cdot \mathbf{f}^{(k)}\right)$$

    - $S^{(k)}$: k-adik projekció pixeleit előállító vetítősugarak halmaza
  - Konvergál egy súlyozott LS becslőhöz:
    - Ha több optimum van, akkor az $\mathbf{f}^{(0)}$-hoz L2 szerinti legközelebbihez
  - Jól párhuzamosítható:
    - Azonos projekcióhoz tartozó vetítősugarak menti levetítés és visszavetítés egymástól független
  - Zajra túlilleszkedés tulajdonsága változatlanul megmaradt
    - Ez az eljárás is ekvivalens egy ML becsléssel

Algebrai rekonstrukciós technika
(Simultaneous Iterative Reconstructive Technique)

- Cimmino iteráción alapuló eljárás:
  - Összes projekció, összes pixele szerint egyszerre képez hibát:

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \lambda \cdot \sum_j \left(\mathbf{g}_{(j)} - \mathbf{H}_{(\mathrm{j},:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)} \right) \frac{\mathbf{H}_{(\mathrm{j},:)}{}^T}{\mathbf{H}_{(\mathrm{j},:)} \cdot \mathbf{H}_{(\mathrm{j},:)}{}^T}$$

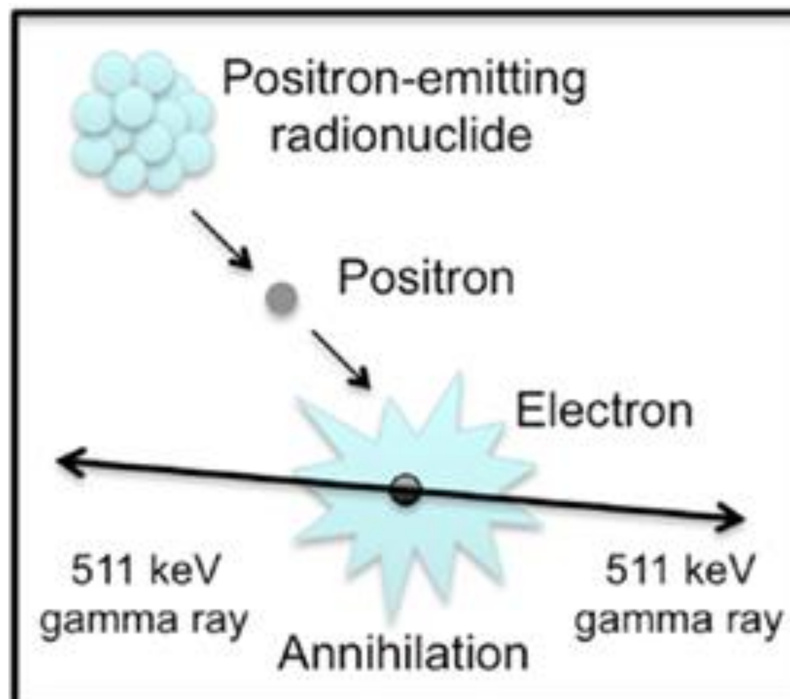
  - Hasonló konvergencia tulajdonságok, mint az SART-nél:
    - De más megoldáshoz konvergál – súlyozott Landweber iteráció
  - Jól párhuzamosítható, de:
    - Egyszerre csak egy projekció le / visszavetítése nem módosítja többször u.a. voxelt (egyébként versenyhelyzet).
    - Gyakorlatban több számolás szükséges a konvergenciához, mint a másik két ART-nél
  - Érdemes még észrevenni, hogy a vetítés magterében nem módosítja az eljárás a becslést

Algebrai rekonstrukciós technika (Multiplikatív ART)

- Eddig Additív ART-ket néztünk:
  - Kezdeti iterációk során lassabban haladnak
  - Pozitivitási kényszert nem lehet kikényszeríteni
- Multiplikatív ART-k:
  - Hibát multiplikatív módon származtatják
  - pl.: $\mathbf{f}_{(i)}^{(k)} = \mathbf{f}_{(i)}^{(k-1)} \cdot \mu \cdot \left(1 - \frac{\mathbf{g}_{(j)}}{\mathbf{H}_{(\mathrm{j},:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)}}\right)^{H_{(\mathrm{j,i})}}$
    - A hibát $1 - \mathbf{g}_{(j)} \big/ \mathbf{H}_{(\mathrm{j},:)} \cdot \mathbf{f}^{(k)}$ értéke méri
  - Kezdeti iterációk hatékonyabbak, de gyakran divergál, vagy a végén túlságosan lelassul.

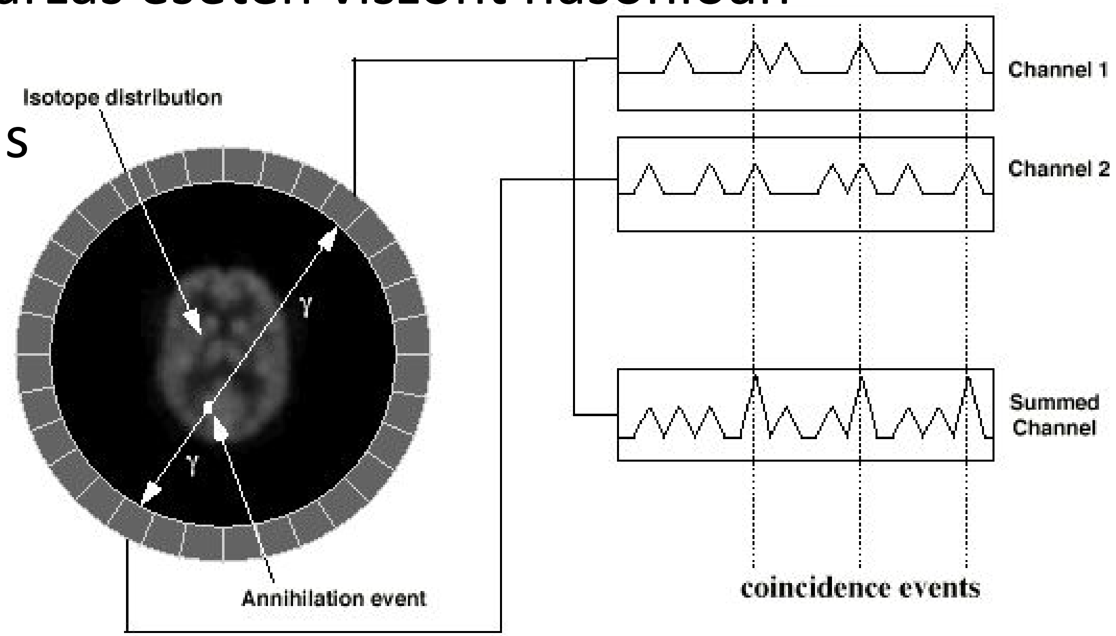
Pozitron emissziós tomográfia alapelve

- Szervezetbe pozitron kibocsátására képes radioaktív izotópot tartalmazó anyagot visznek cukoroldatban.
- Sejtek tápanyagfelvétele miatt nagyobb energiaigényű (pl. gyulladt / daganatos) sejtek helyén több pozitron emisszió.
- Pozitron elektronnal ütközik:
  - Két db, egymással ellentétes irányú γ foton emittálódik.
  - Detektor ezeknek a beütését méri.



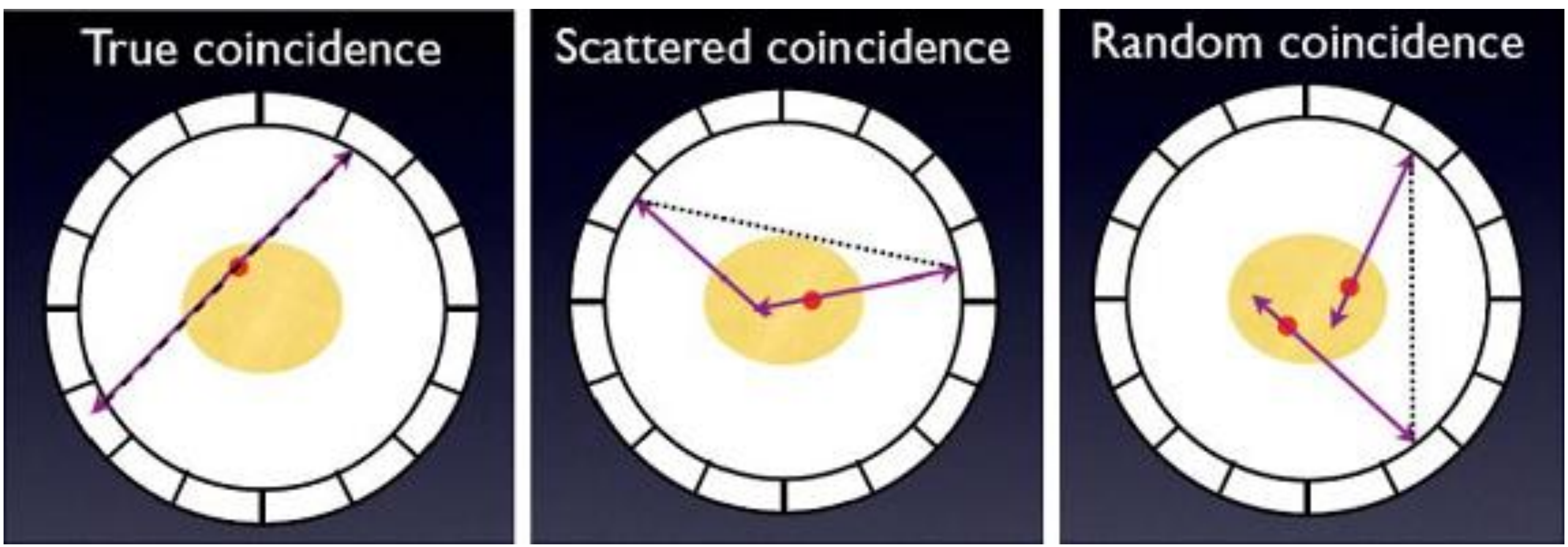
Pozitron emissziós tomográfia rekonstrukciója

- Line of Response : ugyanazon bomló izotóp által kibocsátott γ fotonok beütési helyét összekötő szakasz
  - Érdemes szem előtt tartani, hogy előre nem határozható meg, hogy egy-egy foton milyen irányba fog haladni
  - Elegendően sok kisugárzás esetén viszont hasonlóan viselkedik, mint akármilyen sugárforrás (Poisson folyamat).



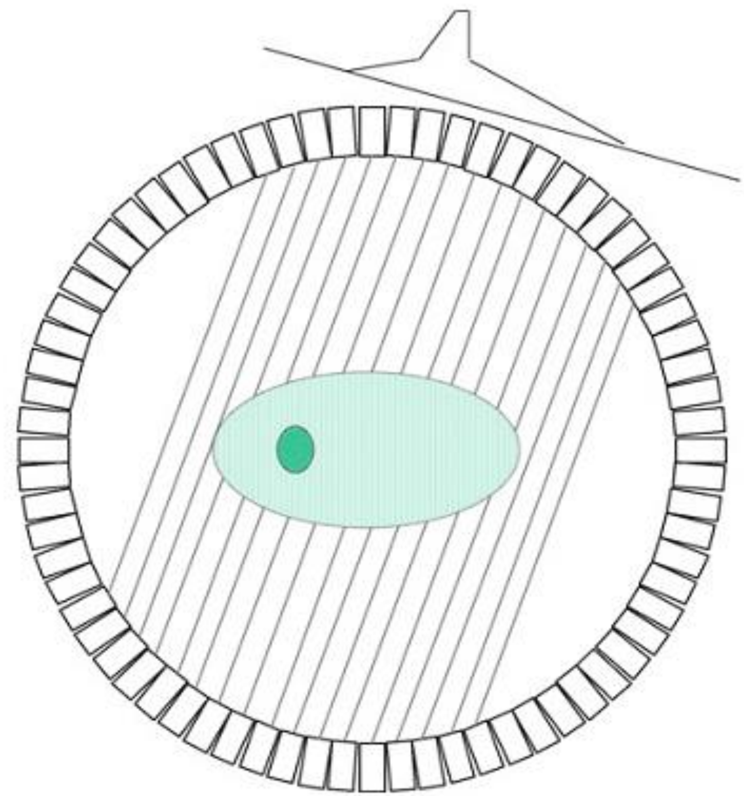
Pozitron emissziós tomográfia projekciók zajának értelmezése

- Sokszor téves LOR-t mérünk:
  - Szóródás (rugalmas ütközés) miatt a térfogaton belül megváltoztatja irányát a γ foton.
  - Két, hozzávetőlegesen egy időben történő bomlás is fals látszólagos LOR-t eredményez.



Pozitron emissziós tomográfia rekonstrukciója

- Rekonstrukció során a LOR-ok interpretálhatóak vetítősugaraknak is (intenzitás meg az adott LOR menti gyakorisága a γ beütéseknek).
- Elegendően sok beütés szükséges az eloszlás becsléséhez:
  - Egy scan akár több perc
  - Nagyságrenddel rosszabb SNR, mint CT esetén



ML-EM rekonstrukció (Emissziós tomográfiai értelmezés)

- EM eljárások alapelve:
  - Vannak megfigyelt adataink (méréseink), esetünkben a PET LOR-ok mentén érzékelt gamma beütési szám (y_j)
  - Vannak becsülni kívánt változók (x_m), jelenleg ez a vizsgált szövetbeli annihiláció száma
  - Létezik olyan változó, melyet ha ismernénk leegyszerű-södne az egész feladat: a PET esetén $s_{i,m}$: azon fotonok száma, melyek $m.$ voxelben keletkeztek $i.$ LOR mentén haladnak.
- Megoldás iteratív, iterációnként két lépés:
  - Expectation lépés: $p\left(m|i\right)$ frissítése
  - Maximization lépés: x_m ML becslése

ML-EM rekonstrukció (Emissziós tomográfiai értelmezés)

- $p\left(y_j\right) = \dfrac{E\left\{y_j\right\}^{y_j} \cdot \exp\left(-E\left\{y_j\right\}\right)}{y_j!}$
- $y_j = \sum_m s_{j,m}$
- $p\left(s|x\right) = \prod \prod \dfrac{E\left\{s_{j,m}\right\}^{s_{j,m}} \cdot \exp\left(-E\left\{s_{j,m}\right\}\right)}{s_{j,m}!}$
- $\ln\left(p\left(s|x\right)\right) = \sum_i \sum_m s_{i,m} \cdot \ln\left(A_{i,m} \cdot x_m\right) - A_{i,m} \cdot x_m - \ldots$
  - Cél $\arg\max_x \left\{\ln\left(p\left(s|x\right)\right)\right\}$ becslése, hiba: s nem ismert

ML-EM rekonstrukció (Emissziós tomográfia)

- Expectation: $s_{j,m} = A_{j,m} \cdot x_m \cdot y_j \Big/ \sum_{m'} A_{j,m'} \cdot x_{m'}$
- $\ln\left(p\left(s|x\right)\right) = \sum_i \sum_m s_{j,m} \cdot \ln\left(A_{i,m} \cdot x_m\right) - A_{i,m} \cdot x_m - \ldots$
- $\dfrac{\partial \ln\left(p\left(s|x\right)\right)}{\partial x_j} = \sum_i \sum_m s_{i,m} \cdot \left(1 \big/ \left(A_{i,m} \cdot x_m\right)\right) \cdot A_{i,m} \cdot \delta_{j=m} - A_{i,m} \cdot \delta_{j=m}$
- $\dfrac{\partial \ln\left(p\left(s|x\right)\right)}{\partial x_j} = \sum_i s_{i,j} \big/ x_j - A_{i,j} = 0$

$$x_j{}' = x_j \sum_i \frac{y_i}{\sum_{m'} A_{i,m'} \cdot x_{m'}} \cdot \frac{A_{i,j}}{\sum_{i'} A_{i',j}}$$

ML-EM rekonstrukció (Emissziós tomográfiai értelmezés)

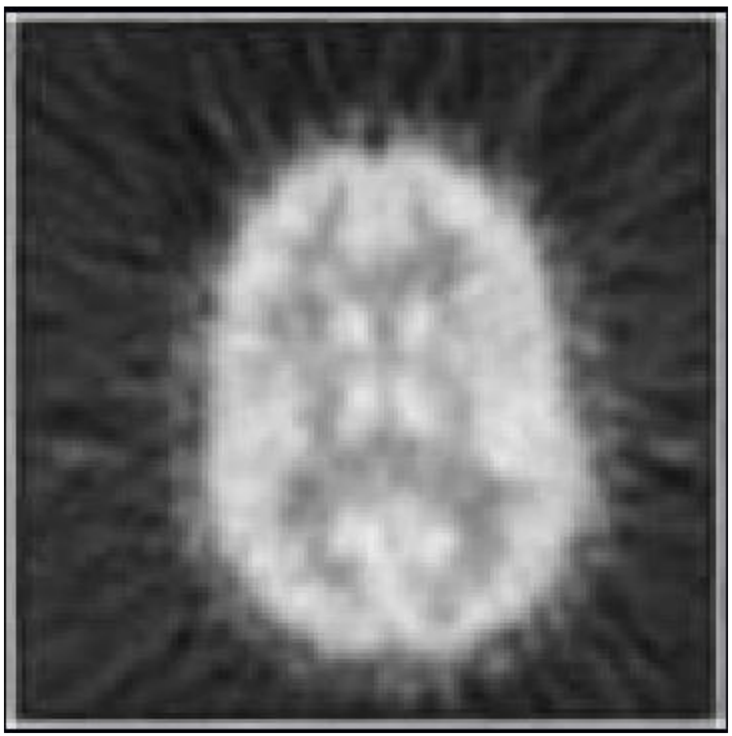
- Módosító összefüggés interpretációja:

$$x_j' = x_j \sum_i \frac{y_i}{\sum_{m'} A_{i,m'} \cdot x_{m'}} \cdot \frac{A_{i,j}}{\sum_{i'} A_{i',j}}$$

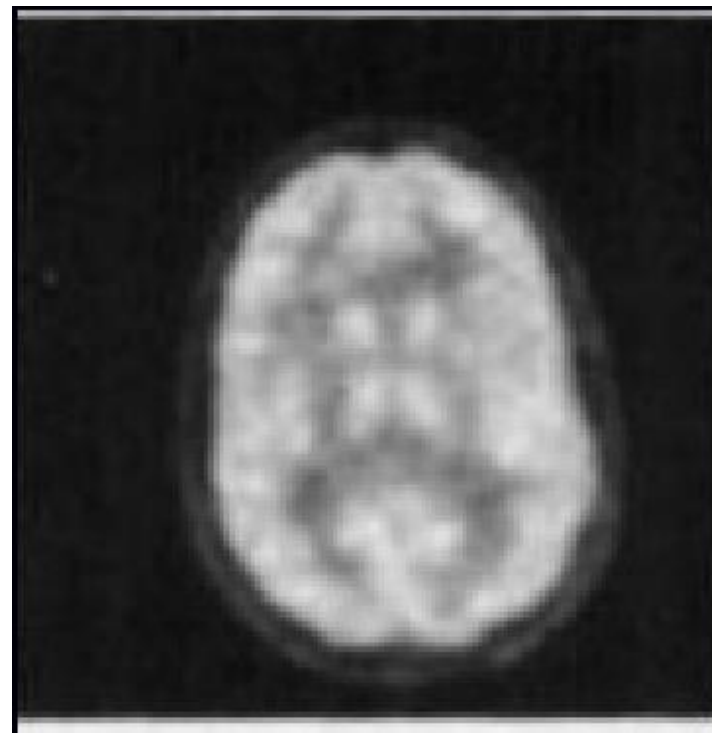
  - $\dfrac{y_i}{\sum_{m'} A_{i,m'} \cdot x_{m'}}$: i. LOR menti beütésszám szerinti multiplikatív hiba
  - $\sum_i \dfrac{y_i}{\sum_{m'} A_{i,m'} \cdot x_{m'}} \cdot \dfrac{A_{i,j}}{\sum_{i'} A_{i',j}}$: aktuális becslés multip. hibájának visszavetítése a j. voxelbe

ML-EM és FBP öszehasonlítása (Emissziós tomográfia – PET)

- Kis beütésszám miatt alacsony effektív felbontás
- Ráadásul jelentős nem Gauss-i zaj



FBP rekonstrukció



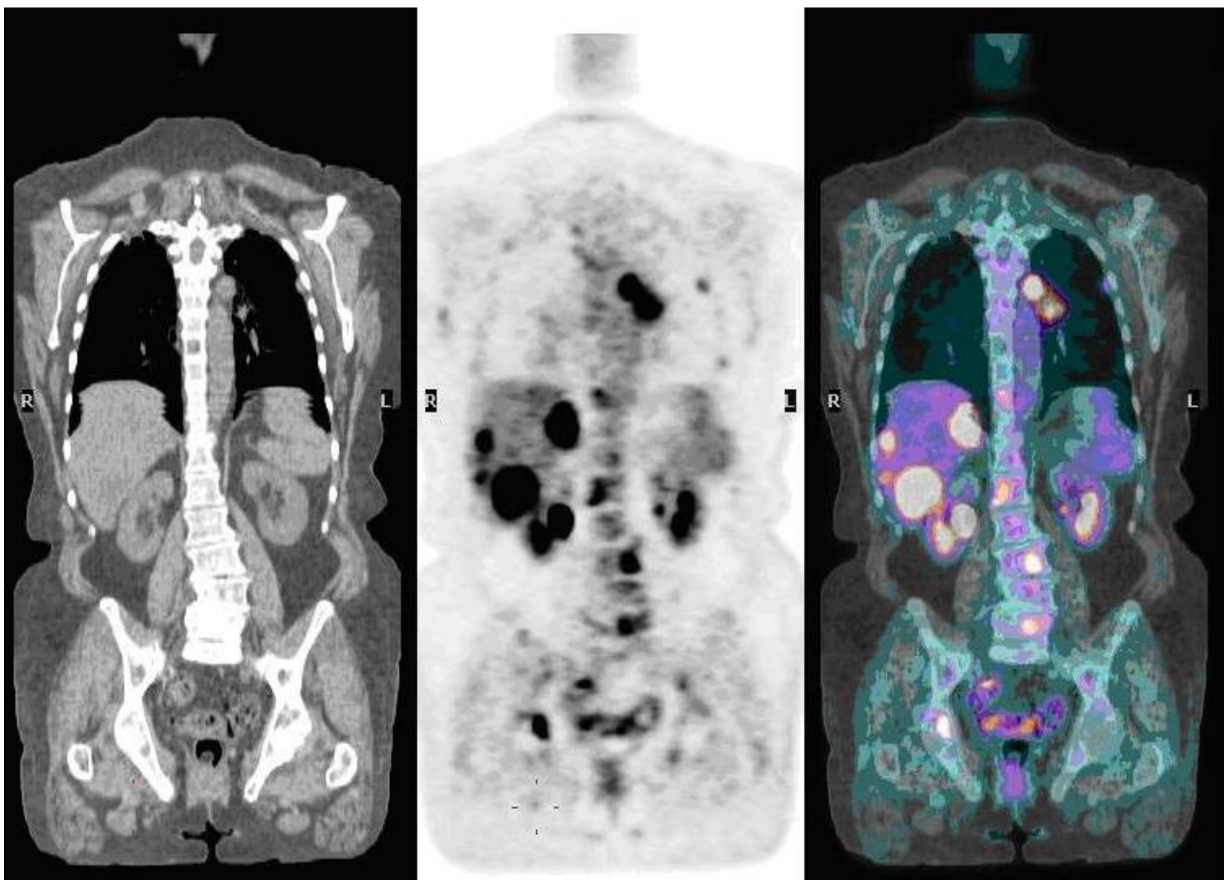
ML-EM rekonstrukció

PET/CT modalitás

- PET funkcionális képet állít elő:
  - Lokalizálhatóak a nagy energiaigényű szövetek
  - Cserébe erősen zajos, rossz minőségű rekonstrukciók
  - Megfelelő zajmodell nélkül lehetetlen értelmezhető rekonstrukciót előállítatni vele
- CT rekonstrukciók - morfológiai információ:
  - Kisméretű (korai stádiumú, ezért jó hatásfokkal kezelhető) tumorok nehezen különböztethetőek meg más képletektől.
  - Cserébe kevésbé zajos, felbontását tekintve részletgazdagabb felvételek

PET/CT modalitás

- Rekonstrukció lényegében a PET, illetve a CT rekonstrukciók regisztrálását jelenti



Balról jobbra: CT, PET, regisztrátum

Compressive Sensing

- Nyquist mintavételnek megfelelő interpoláció:
  - Régebben láttuk a kernelét
  - De ez csak egy interpolációs lehetőség
- Compressive Sensing alapú megközelítés:
  - Nem szükséges Nyquist tétel szerint mintavételezni
  - Két általános megvalósítása létezik:
    - Megszorítjuk a rekonstruálni kívánt jel bázisát (erre lesz példa a Mátrix Inverziós Tomoszintézis)
    - Keresünk egy olyan operátort / ábrázolást ami felett ritka a rekonstruálni kívánt jel (pl. TV minimalizáció)

Compressed Sensing

- Hány minta szükséges egy jel rekonstrukciójához?
  - Shannon Nyquist tétel – $f_s > 2 \cdot bw$
    - Túl általános – nem veszi figyelembe, hogy a tipikus jelek egy alacsonyabb dimenziós sokasággal (manifolddal) leírhatóak.
  - Ha ismert lenne egy jó prior, akkor kevesebb is elég lenne
    - Pl. $\mathrm{P}\left\{ f \right\} = \delta\left\{ f - f^* \right\}$ (na jó, ehhez már mérni sem kell ☺)
- Keressünk olyan ábrázolást, ahol ritka a jelünk:
  - $\mathbf{f} = \sum \boldsymbol{\psi}_\mathbf{i} x_i$, ahol $\left\{ \boldsymbol{\psi}_1, \ldots, \boldsymbol{\psi}_n \right\}$ egy ortonormált bázis, e felett ritka az ábrázolás, azaz $\left| x_i \right| \approx 0$ sok *i*-re
  - $y_k = \mathbf{f}^T \cdot \boldsymbol{\varphi}_\mathbf{k}$ - mérések

Compressed Sensing

- *m* db $\mathbf{\Phi}$ szerinti mérésből visszaállítható $\mathbf{f}$, ha:

  $m \geq C \cdot \mu^2\left(\mathbf{\Phi},\mathbf{\Psi}\right) \cdot S \cdot \log\left(n\right)$

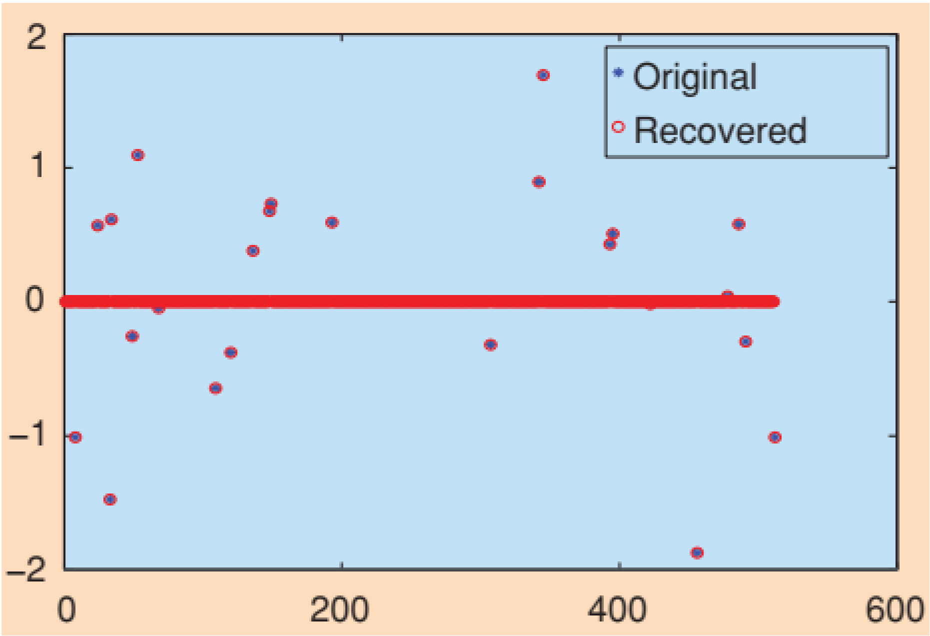
  - $\mu\ \left(\mathbf{\Phi},\mathbf{\Psi}\right) = \sqrt{n} \max_{k,j}\left\{\left|\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{k}}{}^{T}\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{j}}\right|\right\}$: a ritka ábrázoláshoz tartozó bázis, illetve az érzékelési bázis koherenciája (max. korreláció)
  - m : input mérések száma
  - n : visszaállítandó jel ($\mathbf{f}$) dimenziója
  - S : nem 0 $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{j}}^{T} \cdot \mathbf{f}$ -ek száma (mért jel *ritkasága*)
  - C : pozitív konstans

- Visszaállítás:

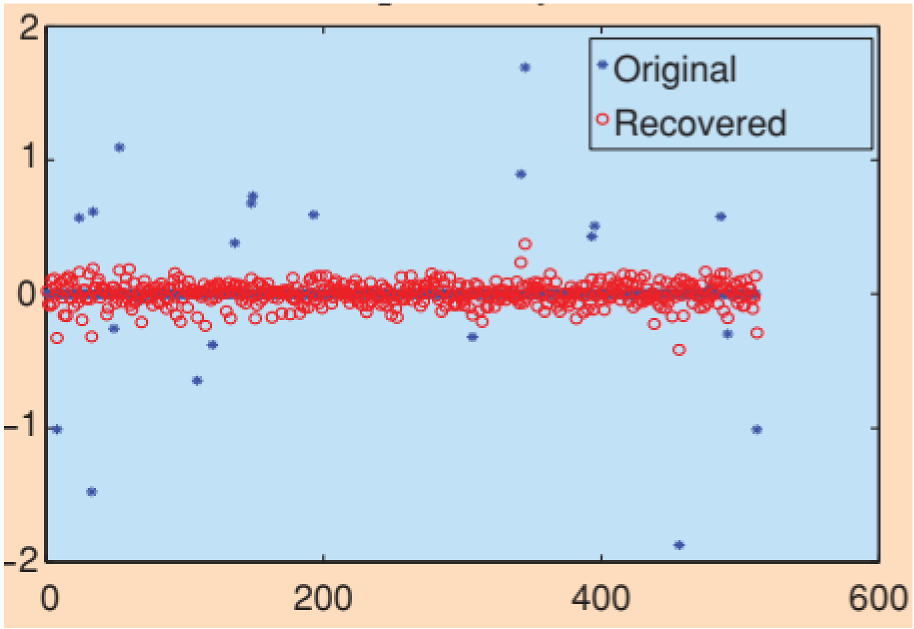
$$\begin{array}{ll} \min. & \|\mathbf{x}\|_1 \\ s.t. & \mathbf{y} = \mathbf{\Phi}^{T} \cdot \mathbf{\Psi} \cdot \mathbf{x} \end{array}$$

Példa – 1d jelek leírása

- Célfüggvénynek fontos szerepe van a történetben:
  - L2 normával pl. szinte alkalmazhatatlan



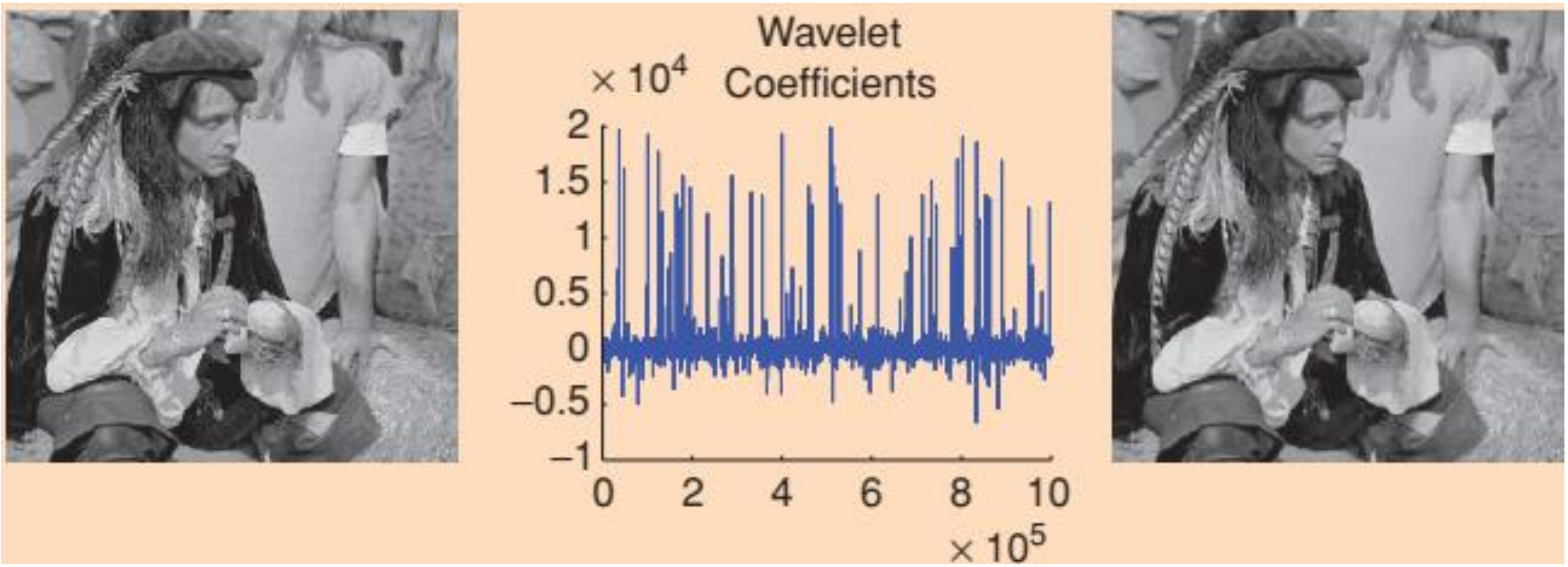
$$\min. \quad \|\mathbf{x}\|_1$$
$$s.t. \quad \mathbf{y} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}$$



$$\min. \quad \|\mathbf{x}\|_2$$
$$s.t. \quad \mathbf{y} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}$$

Példa – képek tömörítése

- JPEG 2000-es Wavelet alapú koordinátázás:
  - Együtthatók 2,5%-át megtartva szinte minimális rekonstrukciós hiba



Compressed Sensing

- Keressünk az érzékelési bázistól eltérő (inhomogén), ritka bázist:
  - Képek általában homogén konstans intenzitású területek sokaságaira bonthatóak (kivéve a textúra, stb. részeket)
  - Wavelet trafók is ilyen bázisnak tekinthetőek
    - Kevésbé ritkák, mint a TV bázis
- TV-L1 / L0 dekonvolúció:

$$\begin{aligned} \min. \quad & \|\mathbf{x}\|_2 = \sum \|\mathbf{x}_i\|_2 \\ s.t. \quad & \mathbf{y} = \mathbf{\Phi}^T \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min. \quad & \|\mathbf{x}\|_0 = \sum 1 - \delta\left(\|\mathbf{x}_i\|\right) \\ s.t. \quad & \mathbf{y} = \mathbf{\Phi}^T \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{x} \end{aligned}$$

  - $\mathbf{x}$: rekonstruált kép gradiens vektormezője
  - $\mathbf{I}$: gradiens vektormezőből az eredeti kép integráló mátrixa

Teljes variancia minimalizáció

- Rekonstrukció, mint optimalizálási feladat:

$$\mathbf{f}^* = \arg\min_{\mathbf{f}} \left\{ \left\| \mathbf{g} - \mathbf{H}\cdot\mathbf{f} \right\|_2^2 + \lambda \cdot \left\| \mathbf{D}\cdot\mathbf{f} \right\|_1 \right\}$$

  - $\mathbf{D}$ diszkrét differencia / wavelet transzformációk mátrxia
  - Lényegi változás, hogy a regularizáció L2 norma szerinti
- Alternating Direction Methode: $\mathbf{z} = \mathbf{D}\cdot\mathbf{f}$ változóval

$$\Phi\left(\mathbf{f},\mathbf{z}\right) \triangleq \left\| \mathbf{g} - \mathbf{H}\cdot\mathbf{f} \right\|_2^2 + \lambda \cdot \left\| \mathbf{z} \right\|_1 + \beta \cdot \left\| \mathbf{z} - \mathbf{D}\cdot\mathbf{f} \right\|_2^2$$

  - Alternálva minimalizáljuk $\mathbf{f}$-et és $\mathbf{z}$-t iterációnként:

$$\mathbf{f}^{(n+1)} = \arg\min_{\mathbf{f}} \left\{ \Phi\left(\mathbf{f}, \mathbf{z}^{(n)}\right) \right\} = \arg\min_{\mathbf{f}} \left\{ \left\| \mathbf{g} - \mathbf{H}\cdot\mathbf{f} \right\|_2^2 + \beta \cdot \left\| \mathbf{z}^{(n)} - \mathbf{D}\cdot\mathbf{f} \right\|_2^2 \right\}$$

$$\mathbf{z}^{(n+1)} = \arg\min_{\mathbf{z}} \left\{ \Phi\left(\mathbf{f}^{(n+1)}, \mathbf{z}\right) \right\} = \arg\min_{\mathbf{z}} \left\{ \lambda \cdot \left\| \mathbf{z} \right\|_1 + \beta \cdot \left\| \mathbf{z} - \mathbf{D}\cdot\mathbf{f}^{(n+1)} \right\|_2^2 \right\}$$

Teljes variancia minimalizáció

– Az iterációk első lépése kicsit átalakítva:

$$\min_{\mathbf{f}} . \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{g}^T & \sqrt{\beta} \cdot \mathbf{z}^{(n)\,T} \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T & \sqrt{\beta} \cdot \mathbf{D}^T \end{bmatrix}^T \cdot \mathbf{f} \right\|_2^2$$

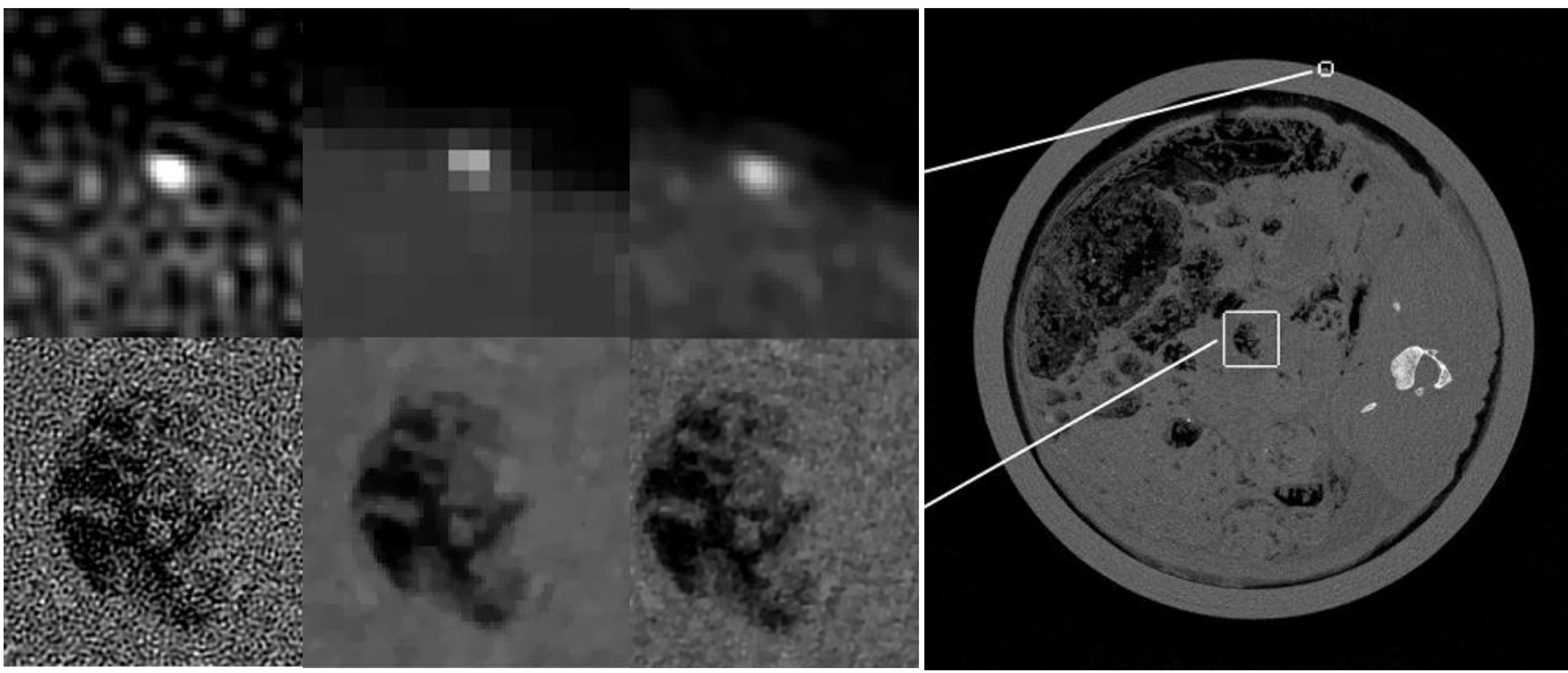
- Formálisan visszajutottunk az alapproblémához, csak most már biztosan túl-határozott (additív ART probléma)
- Minimalizálása erőforrásigény miatt sokszor SART-vel

– Iterációk második lépésének optimuma egy lépésben, analitikusan meghatározható: $\arg\min_{\mathbf{z}} \left\{ \lambda \cdot \|\mathbf{z}\|_1 + \beta \cdot \left\| \mathbf{z} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{f}^{(n+1)} \right\|_2^2 \right\}$

- Az úgynevezett lágy küszöb operátor használatával
- A minimalizálás voxelenként történik

Teljes variancia minimalizáció

- Jobb SNR az ML-EM és az FBP-hez képest:
  - FBP-nél kevésbé zajos, de hasonló kontrasztú kép
  - ML-EM-nél jelentősen jobb kontraszt



FBP ML-EM TV-ART

Huber büntetőfüggvény

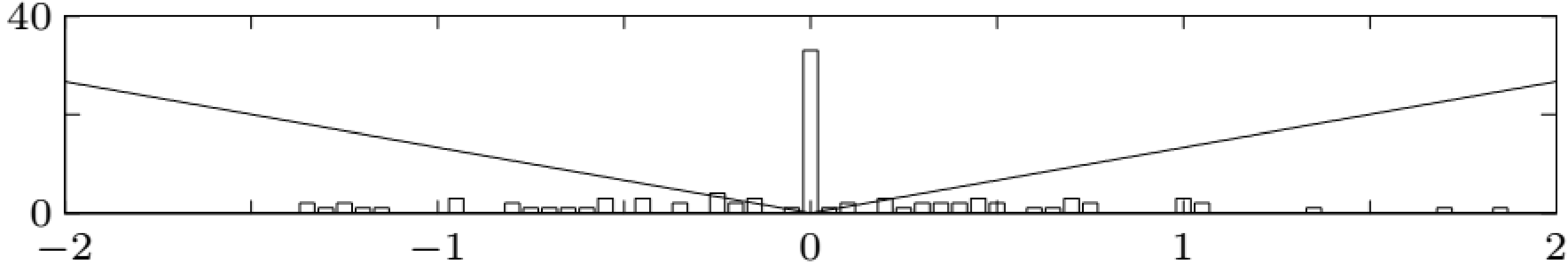
- Huber büntetőfüggvénnyel regularizálunk:

$$\Phi_{\text{Prior}}(\mathbf{f}) = \alpha \cdot L_{Huber}\{\mathbf{D} \cdot \mathbf{f}\} \qquad L_{Huber}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \|\mathbf{x}\|_2^2 / 2 & \|\mathbf{x}\|_2 \le \varepsilon \\ \varepsilon \cdot \|\mathbf{x}\|_2 - \varepsilon^2 / 2 & \|\mathbf{x}\|_2 > \varepsilon \end{cases}$$

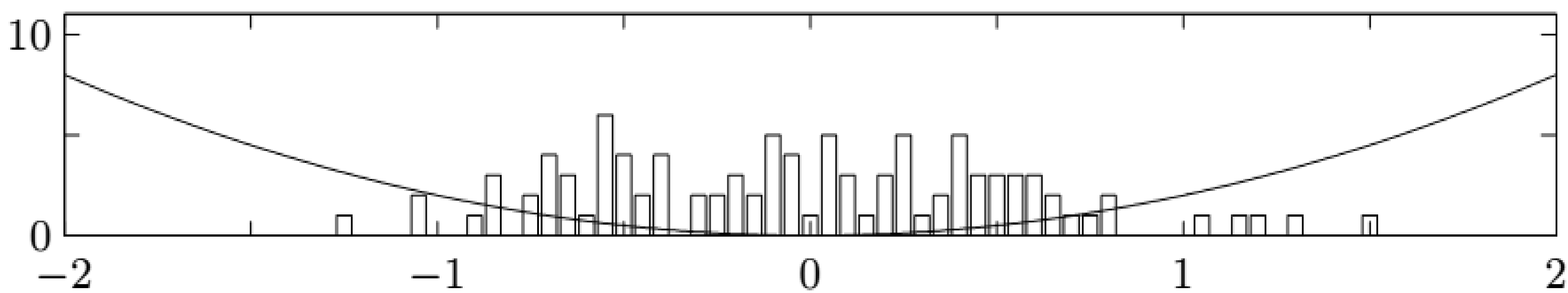
Pet fantom — MAP L2 prior — MAP Huber prior

Kvadratikus és abszolútérték hiba/büntetőfüggvény

- Két hibafüggvény jelentősen eltérő eloszlást kényszerít ki:



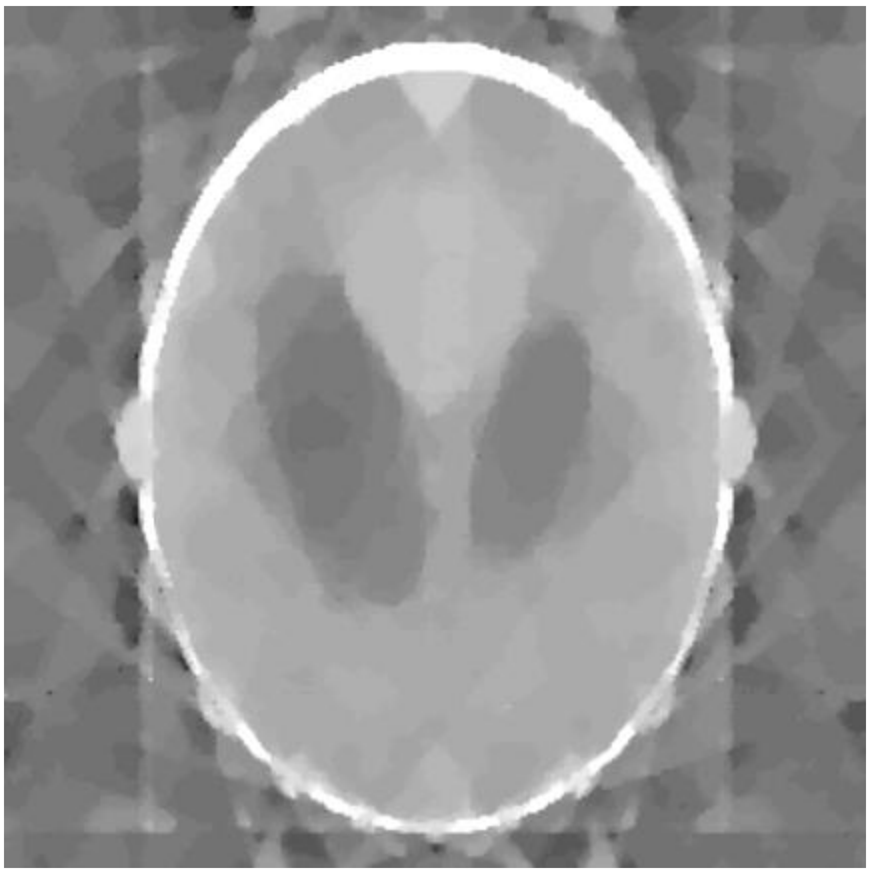
Abszolútérték büntetőfüggvény



Kvadratikus büntetőfüggvény

Élet a konvex optimalizáción túl

- CT-s szimuláció, 10 projekcióból (ΔΘ=18°):

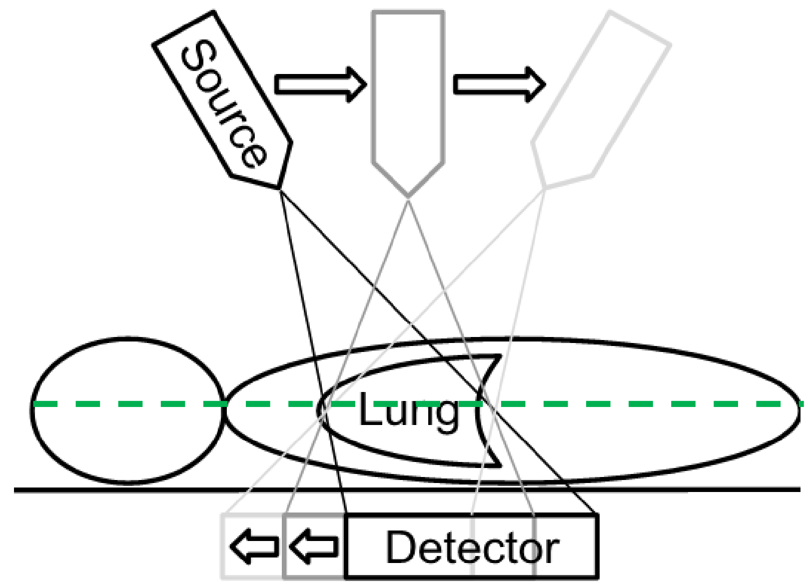


Konvex: L2-TV

Valóban ritkasági priorral

Lineáris tomoszintézis (*)

- Speciális CBCT változatnak tekinthető:
  - Detektor és a sugárforrás egymással és a flat-panel detektor oszlopaival párhuzamosan mozog.
  - Projekciók limitált szögtartományból (±10°-40°)
- Irányfüggő felbontás / képminőség:
  - Detektorral párhuzamos szeletek felbontása megegyezik a detektor felbontásával
  - Detektorra merőleges irányban nagyon rossz felbontás : limitált szögtartomány ára …



Shift And Add
(Lineáris tomoszintézis esetén) (*)

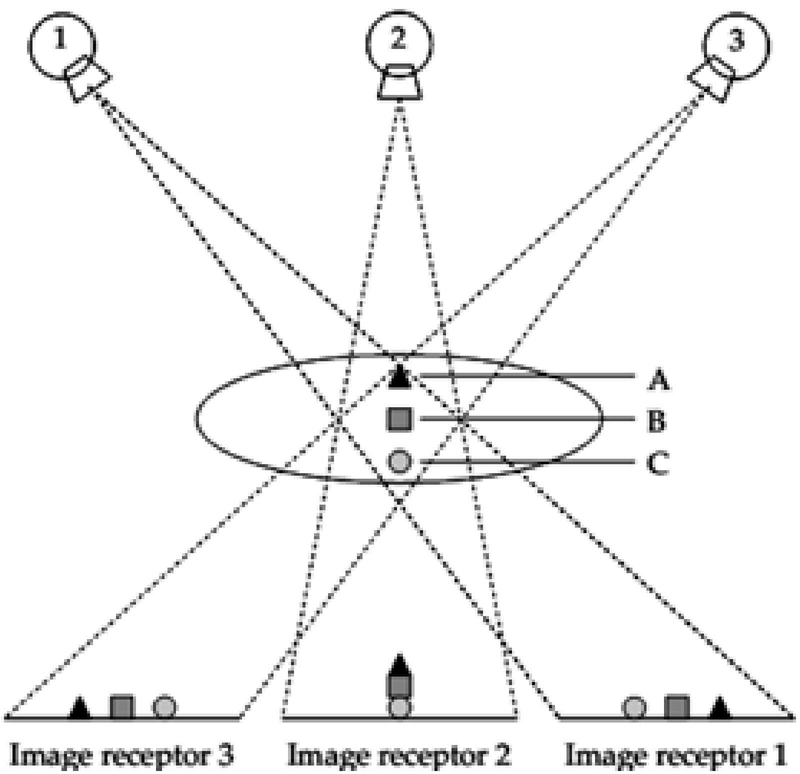
- A térfogat 0 vastagságú szeleteinek vetületei a felvételi geometria és a szelet magasságának függvényében eltolódnak.
- SAA rekonstrukciója egy adott szeletnek:

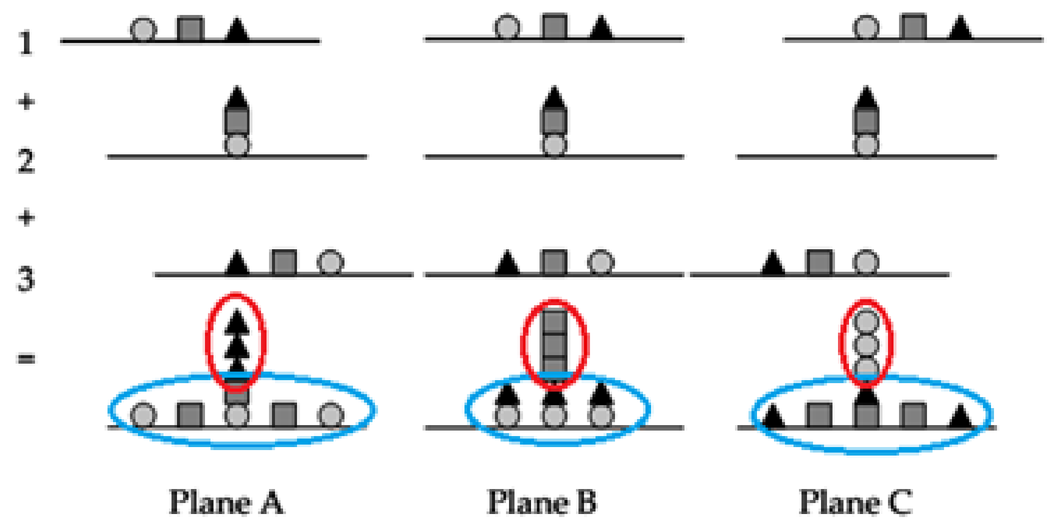
1. Projekciók eltolása úgy, hogy a rekonstruálni kívánt sík vetülete minden projekción azonos legyen
2. Eltolt projekciók összegzése

- Mind az összegzés, mind az eltolás LTI művelet:
  - Soros kaszkádjuk, tehát a rekonstrukció egy MIMO LTI rendszer (bemenetek a projekciók, kimenetek a szeletek)
  - Létezik PSF/MTF-je, mellyel analitikusan minősíthető

Shift And Add
(Lineáris tomoszintézis esetén) (*)

- SAA szeleteken fókuszba kerülnek a rekonstruálni kívánt sík képleteinek vetületei
  - De jelentős átmosódás marad a térfogat többi síkjáról





Piros ellipszis: szelten belüli képlet vetülete
Kék ellipszis: szeleten kívüli képletek bemosódása

Mátrix Inverziós Tomoszintézis (*)

- Alapötletet ugyanaz a megfigyelés adja, mint ami az SAA algoritmusét:

$$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(1)} = \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \mathbf{t}_{(1,1)} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(1,2)} + \ldots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(1,n)}$$

$$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(2)} = \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \mathbf{t}_{(2,1)} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(2,2)} + \ldots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(2,n)}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(m)} = \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \mathbf{t}_{(m,1)} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(m,2)} + \ldots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(m,n)}$$

$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(j)}$ j-edik projekció i-edik oszlopának intenzitásaiból képzett vektor

Mátrix Inverziós Tomoszintézis (*)

- Alapötletet ugyanaz a megfigyelés adja, mint ami az SAA algoritmusét:

$$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(1)} = \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \mathbf{t}_{(1,1)} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(1,2)} + \ldots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(1,n)}$$

$$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(2)} = \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \mathbf{t}_{(2,1)} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(2,2)} + \ldots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(2,n)}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{g}_{(:,i)}^{(m)} = \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \mathbf{t}_{(m,1)} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(m,2)} + \ldots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(m,n)}$$

$\mathbf{f}_{(:,i)}^{(j)}$ j-edik modellezett és rekonstruálni kívánt 0 vastagságú szelet projekciójának i-edik oszlopának intenzitásaiból képzett vektor

Mátrix Inverziós Tomoszintézis (*)

- Alapötletet ugyanaz a megfigyelés adja, mint ami az SAA algoritmusét:

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_{(:,i)}^{(1)} &= \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \color{red}{\mathbf{t}_{(1,1)}} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(1,2)} + \ldots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(1,n)} \\
\mathbf{g}_{(:,i)}^{(2)} &= \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \mathbf{t}_{(2,1)} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(2,2)} + \ldots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(2,n)} \\
&\vdots \\
\mathbf{g}_{(:,i)}^{(m)} &= \mathbf{f}_{(:,i)}^{(1)} * \mathbf{t}_{(m,1)} + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(2)} * \mathbf{t}_{(m,2)} + \ldots + \mathbf{f}_{(:,i)}^{(n)} * \mathbf{t}_{(m,n)}
\end{aligned}$$

$\color{red}{\mathbf{t}_{(j,i)}}$ i-edik rekonstruálandó szelet vetületének j-edik projekcióbeli impulzusválaszát leíró vektor, mivel csak eltolást modellez, ezért egy dirac-delta diszkretizáltja.

Mátrix Inverziós Tomoszintézis (*)

- Jelentősen egyszerűsödik a feladat, ha a vektor egyenletrendszert frekvenciatérben vizsgáljuk:

$$\mathbf{g}_{(j)}(\omega) = \mathbf{T}(\omega) \cdot \mathbf{f}_{(j)}(\omega) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}_{(j)}(\omega) = \mathbf{T}(\omega)^{\dagger} \cdot \mathbf{g}_{(j)}(\omega)$$

  - $\mathbf{g}_{(j)}(\omega) = \left[FT_{\omega}\left\{ \mathbf{g}^{(1)}_{(:,j)} \right\} \quad FT_{\omega}\left\{ \mathbf{g}^{(2)}_{(:,j)} \right\} \quad \cdots \quad FT_{\omega}\left\{ \mathbf{g}^{(m)}_{(:,j)} \right\} \right]^{T}$
  - $\mathbf{f}_{(j)}(\omega) = \left[FT_{\omega}\left\{ \mathbf{f}^{(1)}_{(:,j)} \right\} \quad FT_{\omega}\left\{ \mathbf{f}^{(2)}_{(:,j)} \right\} \quad \cdots \quad FT_{\omega}\left\{ \mathbf{f}^{(n)}_{(:,j)} \right\} \right]^{T}$
  - $\mathbf{T}(\omega) = \left\{ FT_{(\omega)}\left\{ \mathbf{t}_{(\mathrm{j,i})} \right\} \right\}$

- Összegezve a MITS alapötlete, hogy lineáris tomo esetén a frekvenciatérbeli felírás jelentősen kompaktabb az inverz probléma képtérbeli felírásánál.

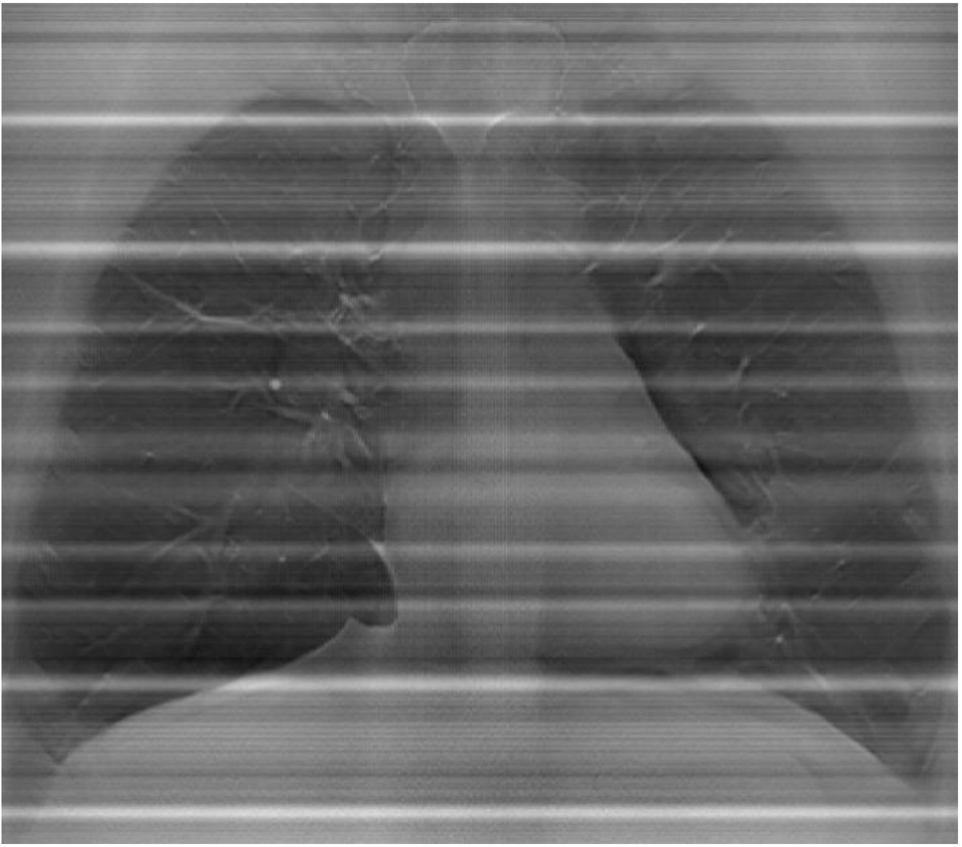
Mátrix Inverziós Tomoszintézis gyakorlati megvalósítása (*)

- Diszkretizálás és a DFT okozta problémák:
  - Mintavételezés: $\mathbf{t}_{(i,j)}$ mintavételezése az egész rendszer viselkedését jelentősen befolyásolja:
    - Energiája nem változhat(na) a mintavételezés hatására, de ez elkerülhetetlen…
    - Hogyan mintavételezzünk?
Legjobb, ha u.ú., ahogyan a detektor is teszi
  - DFT által okozott spektrumszivárgás is jelentős probléma:
    - Klasszikus megoldás, az ablakozás natívan nem adekvát.

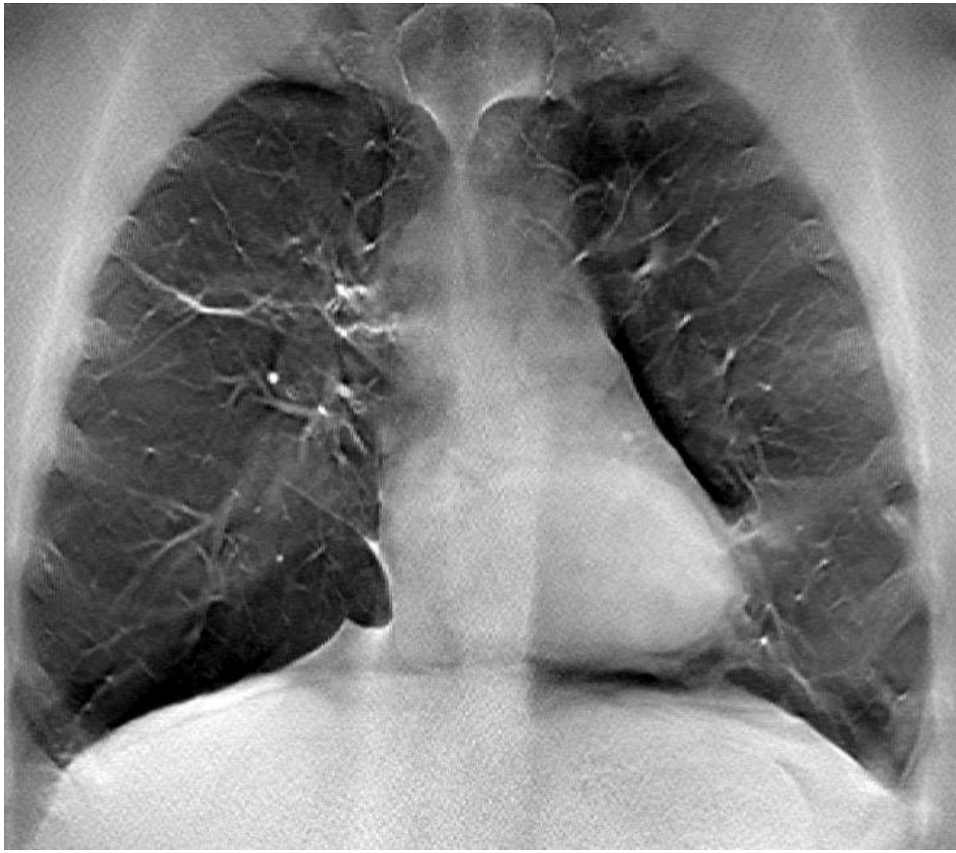
Mátrix Inverziós Tomoszintézis spektrumszivárgás (*)

- Felvételi elrendezés miatt oszloponként történik az inverz szűrés, elegendő a függőleges cirkularitás:
  - A projekciók extrapolációja nem úszható meg, ellenkező esetben a „csavarodás artefekt történik”.
  - Extrapoláció szükséges mértéke $\mathbf{t}_{(j,i)}$ tartóinak a maximuma, ezzel elérhető, hogy csak extrapolált terület csavarodhat be.
- Probléma projekciók extrapolálásával kezelhető:
  - Extrapoláció olyan képterülettel terjeszti ki a projekciókat, mely a „legsimább” átmenetet és cirkuláris projekciót generál.

Mátrix Inverziós Tomoszintézis spektrumszivárgás (*)



Extrapoláció nélkül



Extrapoláció alkalmazásával

Mátrix Inverziós Tomoszintézis Dekonvolúció numerikus problémái (*)

- $\mathbf{T}(\omega)^{\dagger}$ zajérzékenysége jelentős problémaforrás
  - Kondíciós szám $cond\left(\mathbf{T}(\omega)\right) = \sigma_{\max} / \sigma_{\min}$ származtatása:

$$cond\left(\mathbf{T}\right) = \max_{\mathbf{e},\mathbf{b}} \left\{ \frac{\left\|\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{e}\right\|_2 \Big/ \left\|\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{b}\right\|_2}{\left\|\mathbf{e}\right\|_2 \Big/ \left\|\mathbf{b}\right\|_2} = \frac{\left\|\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{e}\right\|_2 \Big/ \left\|\mathbf{e}\right\|_2}{\left\|\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{b}\right\|_2 \Big/ \left\|\mathbf{b}\right\|_2} \right\}$$

    - Legyen $\mathbf{T} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^{*}$ SVD felbontás, ekkor $\mathbf{T}^{\dagger} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Sigma}^{\dagger} \cdot \mathbf{U}^{*}$
    - Mivel $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ oszlopvektorai ortonormált bázisok, ezért

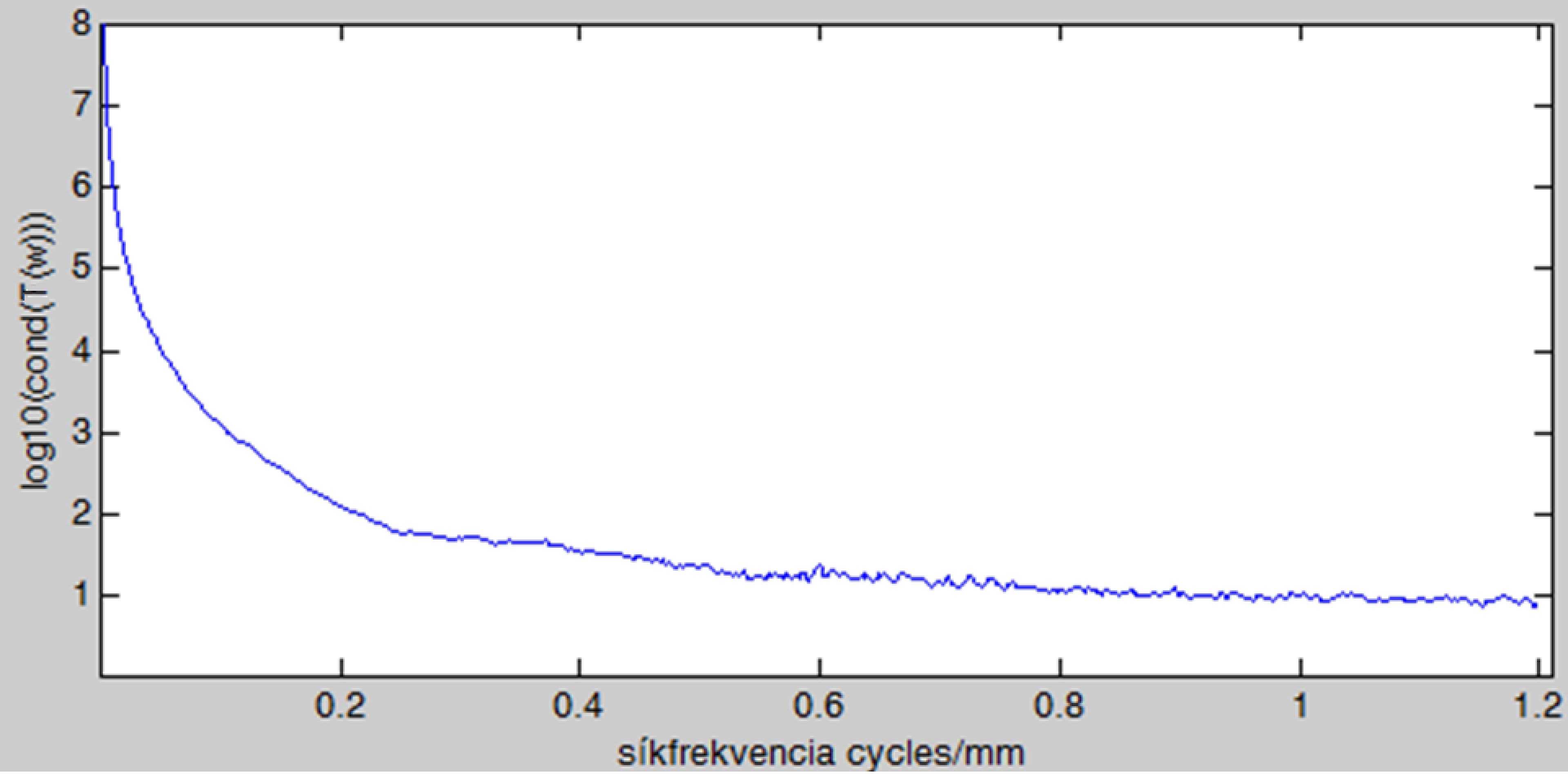
$$\max_{\mathbf{e}} \left\{ \left\|\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{e}\right\|_2 \Big/ \left\|\mathbf{e}\right\|_2 \right\} = 1/\sigma_{\min} \text{ és } \min_{\mathbf{b}} \left\{ \left\|\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{b}\right\|_2 \Big/ \left\|\mathbf{b}\right\|_2 \right\} = 1/\sigma_{\max}$$

- Zajcsökkentő regularizáció célja $cond\left(\mathbf{T}\right)$ minimalizálása

Mátrix Inverziós Tomoszintézis Dekonvolúció zajérzékenysége (*)

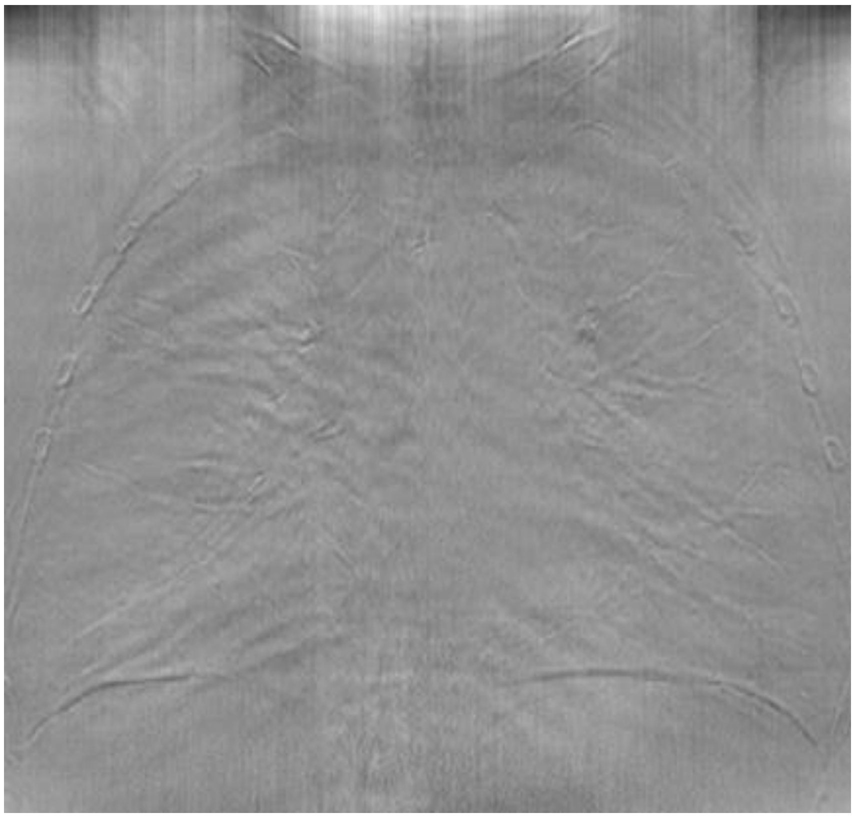
- $\mathbf{T}(\omega)^{\dagger}$ előállítása csonkolt SVD-vel:
  - $\mathbf{T}^{\dagger} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Sigma}^{\dagger} \cdot \mathbf{U}^{*}$, ahol $\mathbf{\Sigma}^{\dagger}{}_{(i,i)} = \begin{cases} 1/\sigma_i & |\sigma_i > \varepsilon \\ 0 & |\sigma_i \le \varepsilon \end{cases}$
  - Kísértetiesen hasonlít a csonkolt dekonvolúcióra:
    - Joggal, a különbség annyi, hogy ott a DFT mátrixával diagonalizálunk, míg SVD esetén a bal, illetve jobboldali sajátvektor mtx.-okkal „diagonalizálunk”
- $\mathbf{T}(\omega)$ regularizált Moore- Penrose pszeudoinverze a Wiener dekonvolúció általánosítottja

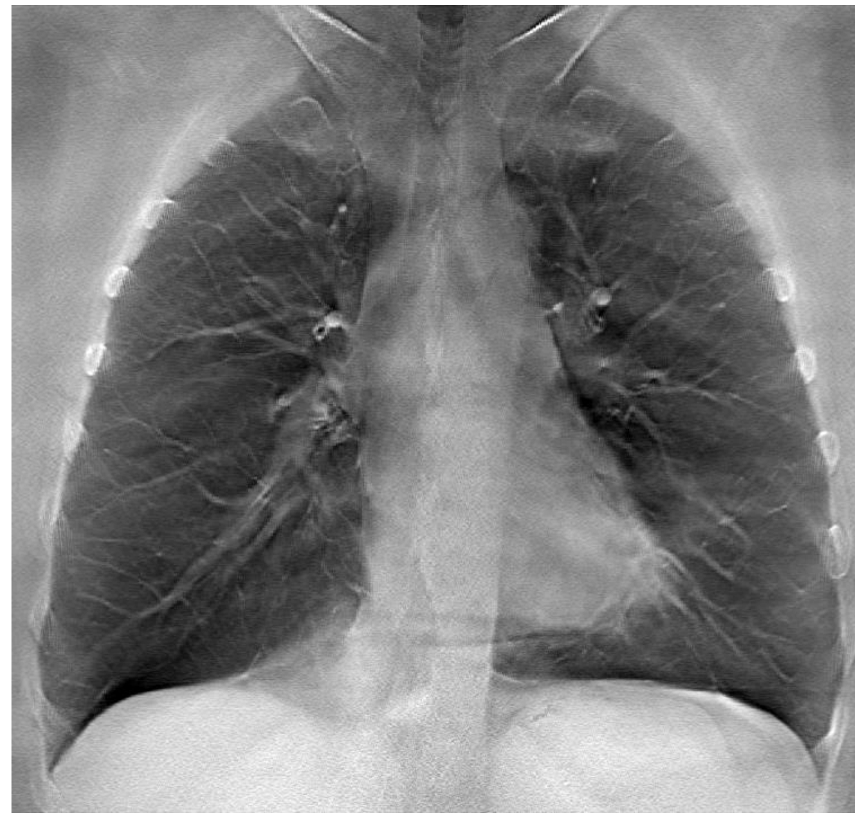
Mátrix Inverziós Tomoszintézis Kondíciós száma lineáris tomoszintézis esetén (*)



Korlátolt szögtartomány miatt alacsony frekvencia esetén a projekciókon kisebb a változás, aminek következménye a nagyobb zajérzékenység.

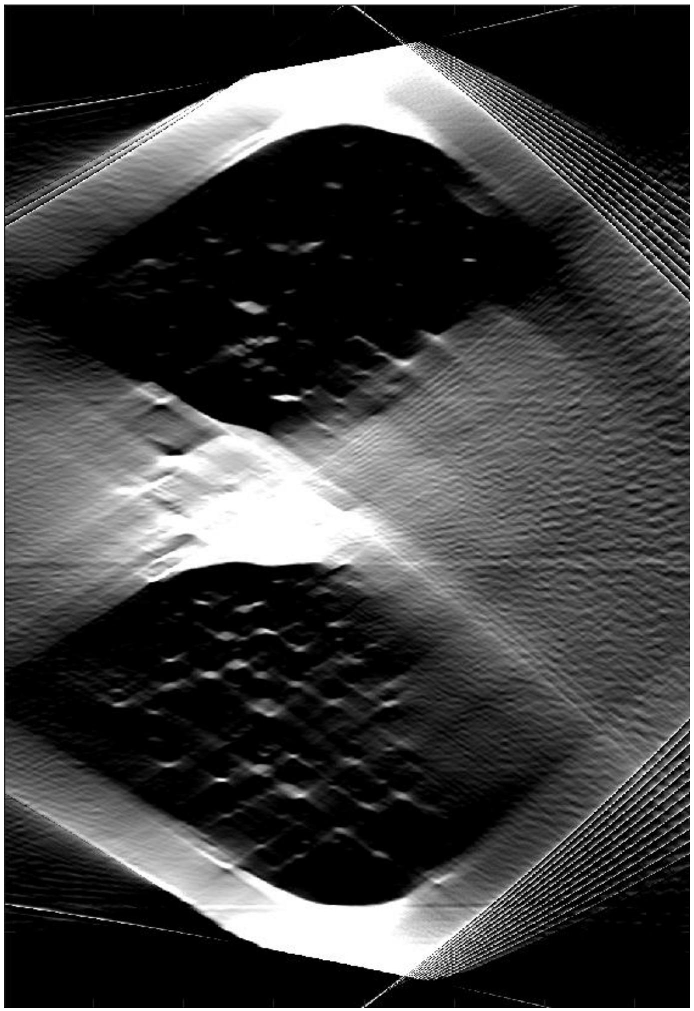
Mátrix inverziós tomoszintézis Csonkolt SVD hatása (*)



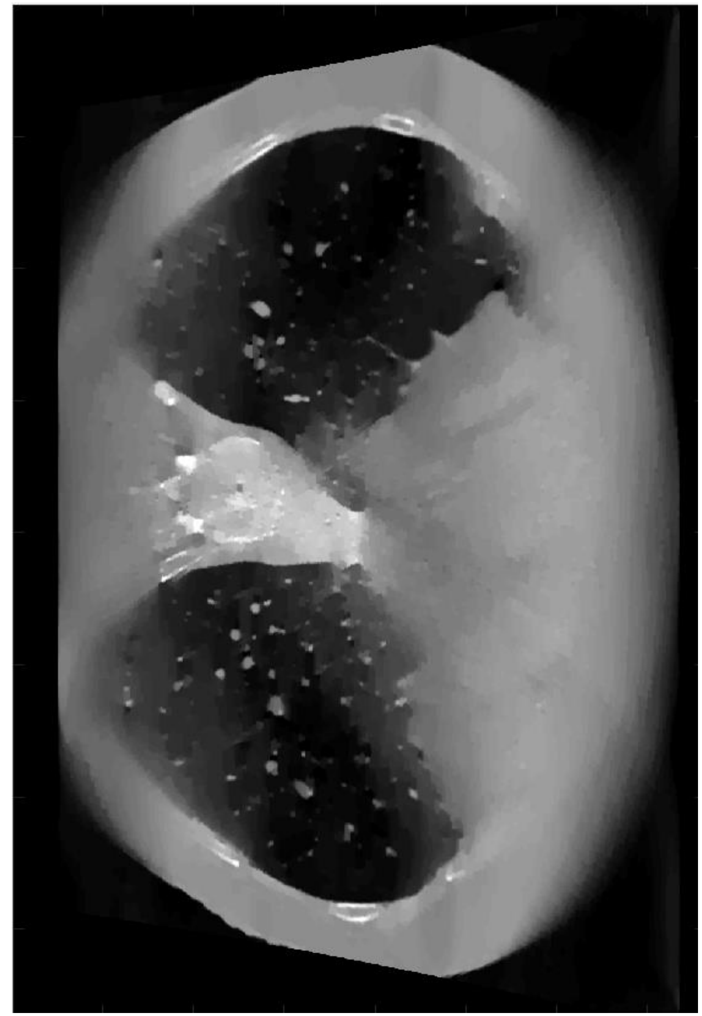


Jól látható, hogy a magasfrekvenciás tartomány zaja dominál a direkt dekonvolúciónál, míg a Csonkolt SVD jelentősen javít a helyzeten.

Limitált szögtartomány (±40°, 50 projekció) - MAP becslés (*)



Analitikus - MITS



Ritkasági regularizáció

Rekonstrukciókkal szembeni elvárások

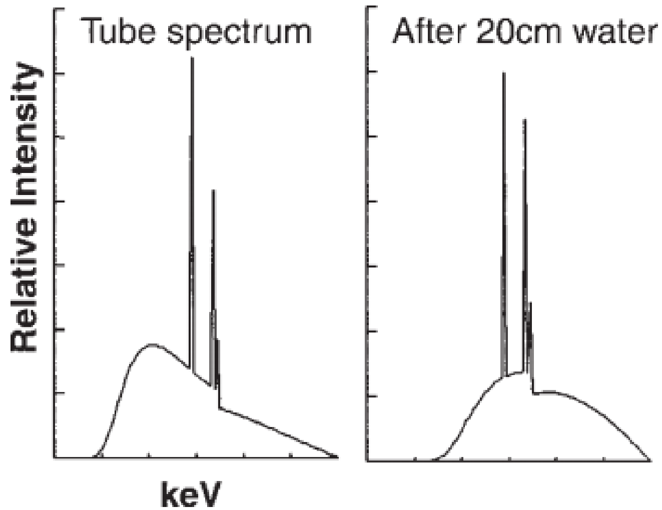
- Kvalitatív képet kapjunk:
  - Adott voxel / pixel intenzitása <u>csak</u> az ott jelenlévő szövet felépítésétől (CT, MRI) / viselkedésétől (PET, SPE(C)T) függjön.
  - Valójában ez sosem teljesül, de ez lenne a cél
- Hounsfield Unit
  - Röntgenes eset abszolút szürkeségi skálája:

$$HU = \frac{\mu - \mu_{víz}}{\mu_{víz} - \mu_{levegő}} \cdot 1000$$

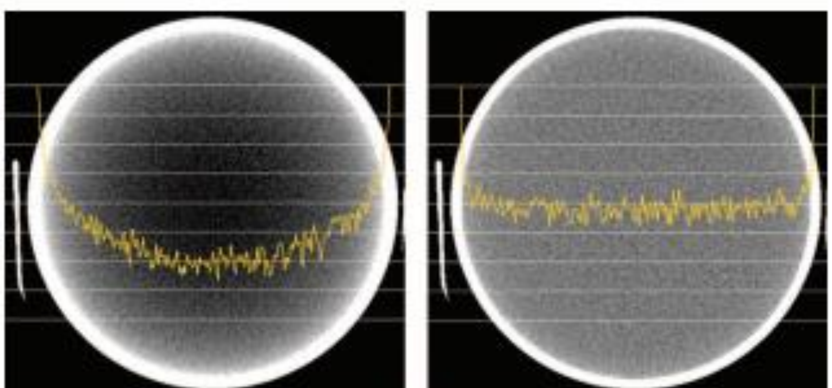
Különböző anyagok lin. csill. Együtthatói HU-ban

Anyag neve	[HU]
Levegő	−1000
Tüdő szövet	−600
Zsír	−100 – −50
Víz	0
Agy-gerincvelői folyadék	15
Vese	30
Vér	+30 – +45
Izom	+10 – +40
Szürke állomány	+37 – +45
Fehér állomány	+20 – +30
Máj	+40 – +60
Lágyrész	+100 – +300
Csont	+700 – +3000

Sugárkeményedés artifakt



Röntgensugár intenzitás spektruma



Csésze artifakt

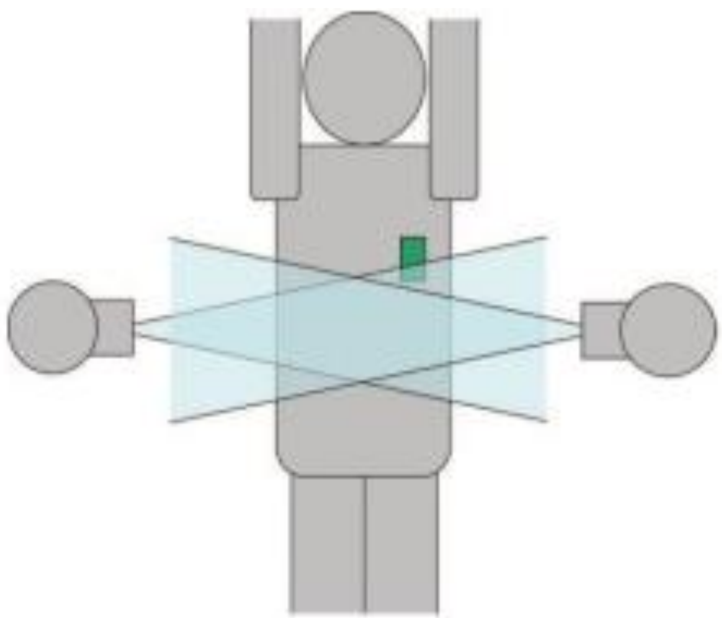
Sugárkeményedés miatti „streaking”

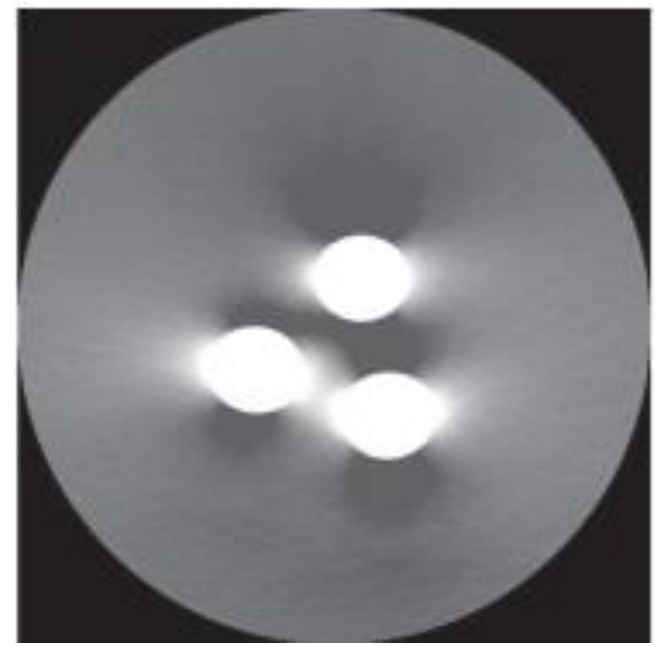
Sugárkeményedés artifakt

- Kompenzációs módszerek:
  – Keményítő szűrő alkalmazása a sugárforráson
    - Tipikusan nagy csillapítású homogén fémekkel (ólom, réz, wolfram, stb.)
  – Kalibrálással
    - Pl. hengeres vízfantommal – valódi páciens sosem hengeres uniform víz…
  – Szoftveresen
    - Pl. csontok sugárkeményítésének modellezése levetítésnél (ez is csak közelítő módszer)

Részleges térfogat artifakt

- Széles kollimálású nyalábnál csak a szelet projekciók egy részére vetül az objektum

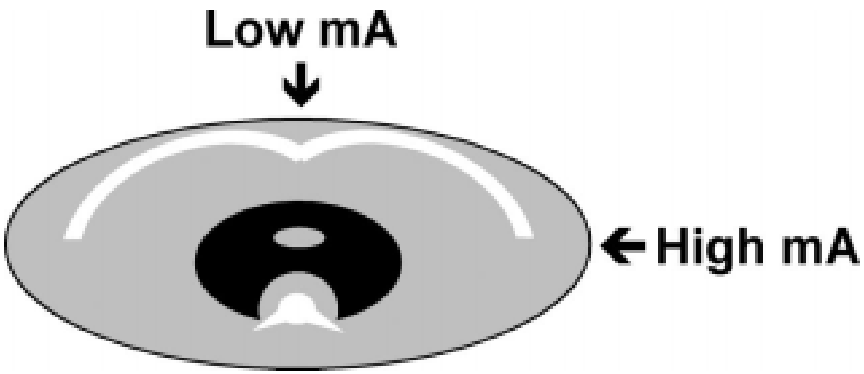




Foton éhezés artifakt

- Vizsgált térfogaton belüli anyagok teljesen elnyelik a röntgen fotonokat (tipikusan fémek, sűrű csontok).

Streaking a rekonstruált szeleteken a kulcscsont miatt



Kompenzálás: problémásabb sugaraknál nagyobb csőáram (nagyobb dózis)

Foton éhezés artifakt

- Szoftveres korrekciók:
  - Adaptív filtráció: alacsony röntgen intenzitású szinogram részek elmosása a logaritmálás és a negálás előtt
  - Lehet multidimenziósan is csinálni

Normál rekonstrukció

Adaptív szűrés

Fém artifakt

- Probléma: fémek teljesen elnyelhetik a sugarat / keményen csillapíthatják / részleges térfogat /…
- Kompenzálása szoftveresen:
  - Pl. projekciókon a fémek szegmentálása, majd az intenzitásaik kiinterpolálása szomszédos intenzitásokból
  - MAP becslés erős regularizációval

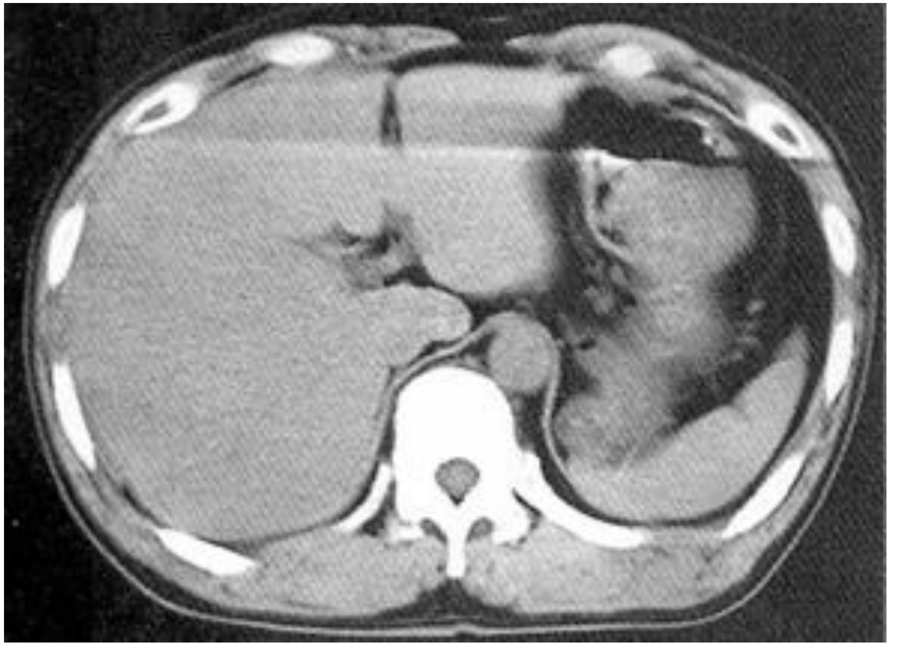
Fém artifakt

Gerinc implantátum és az ART

ART a szinogram kompenzációja után

Páciens bemozdulása

- Szív, mellkas mozgása elkerülhetetlen
  - Létezik EKG kapuzott CT, illetve speciális anyaggal lelassítható maradandó károsodás nélkül a szív
  - Az utóbbi minimalizálható levegő visszatartással



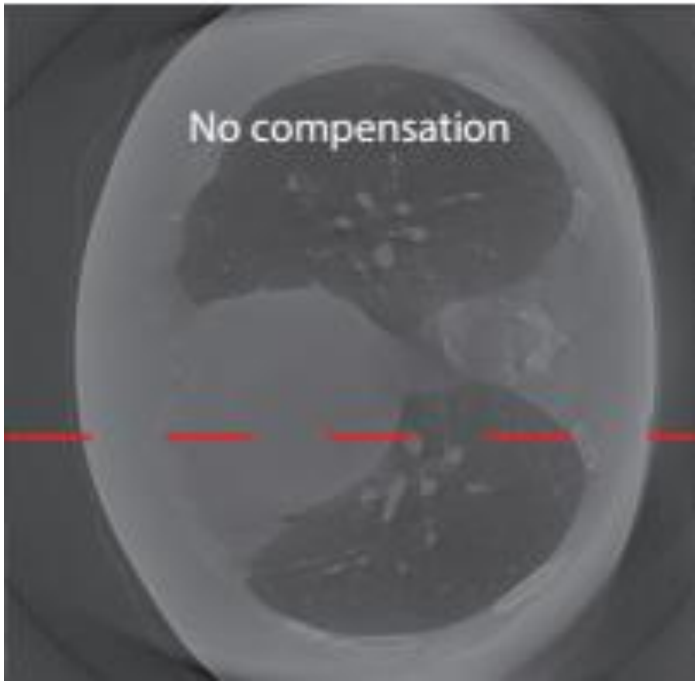
A vízszintes streaking a páciens bemozdulásának a következménye

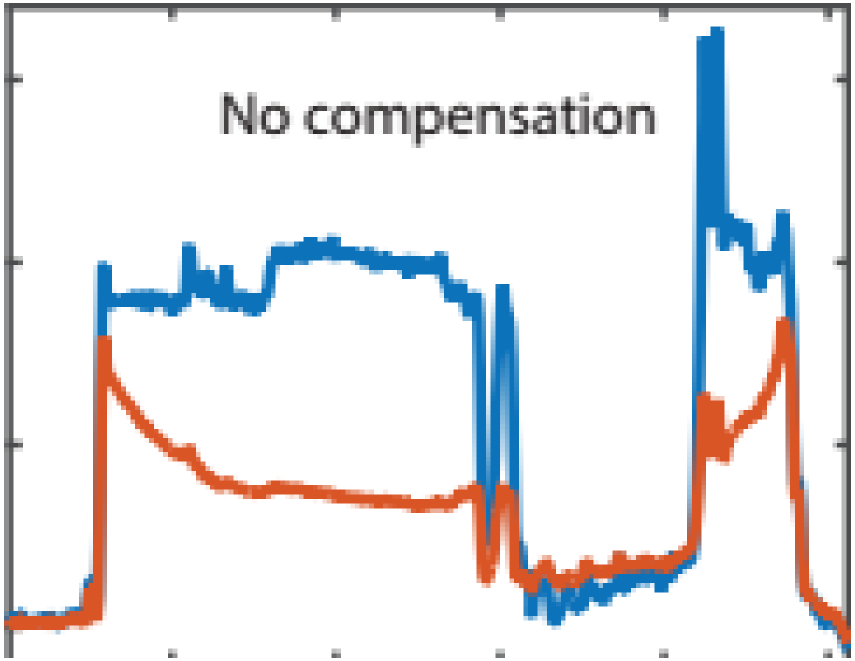
Vizsgálati mezőn kívüli objektum

- A vizsgált páciens egy testrésze olyan területen van, melyet üresnek feltételez a rekonstrukció
  - Erősen inkozisztens projekciók
  - Elkerülhető a beállítások megfelelő módosításával

Compton szóródás

- Flat panel detektornál, több soros detektornál
  - A szóródó fotonok detektorba csapódva kisebb relatív csillapodások érzékelését eredményezik
  - HW (moduláció alapú)/ SW (modell alapú) kompenzáció



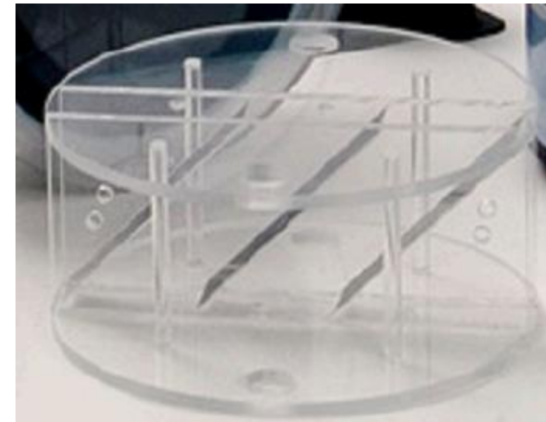


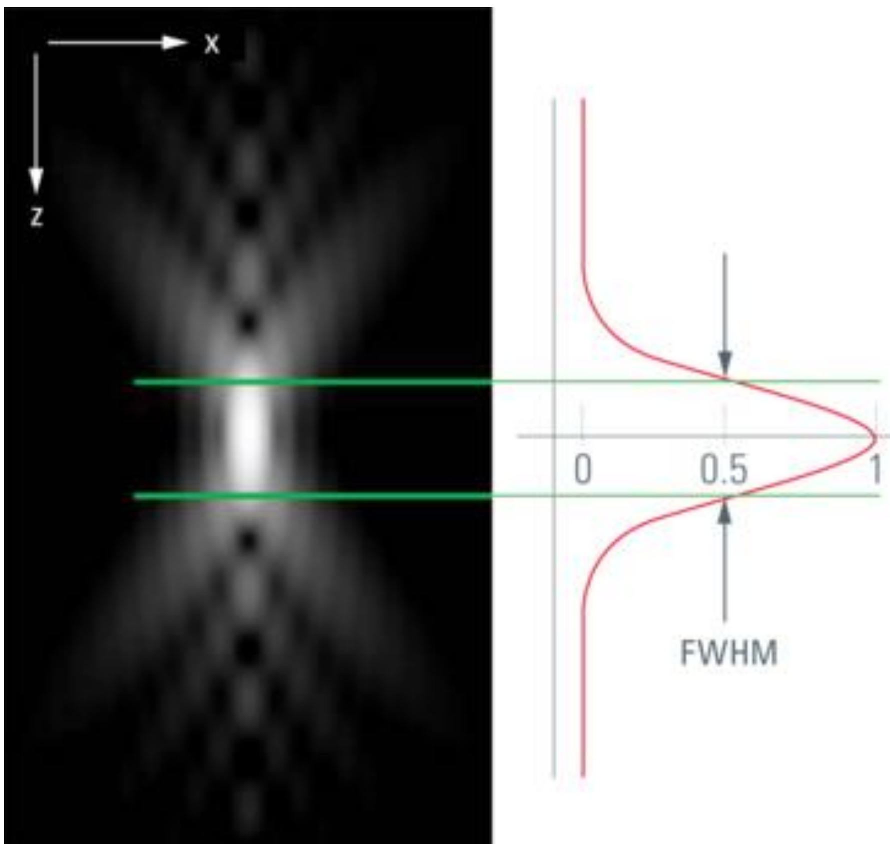
3D Röntgen tomográfia rekonstrukciós eljárásainak minősítése (*)

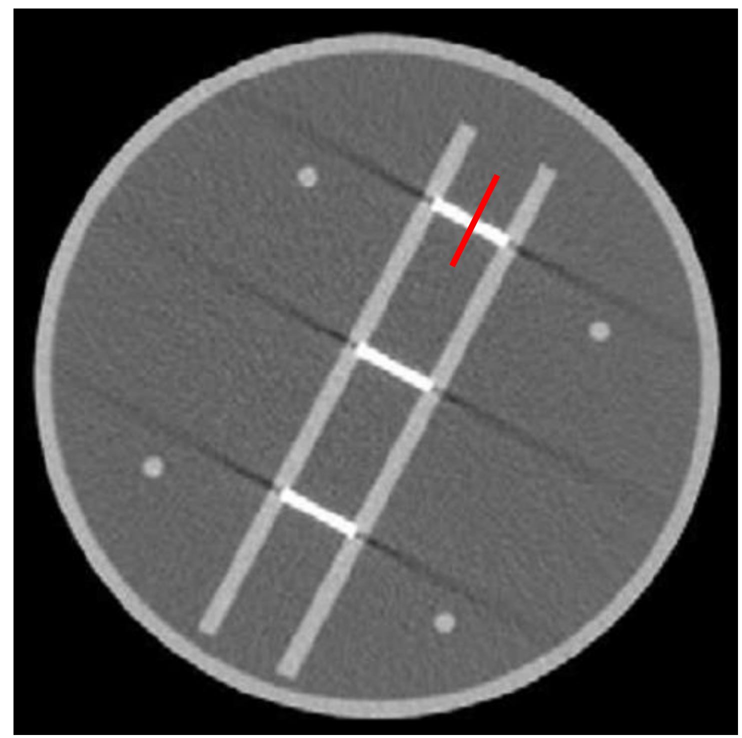
- Rekonstrukció metrikái:
  - Szeleten belüli effektív felbontása (emlékeztetőül $bw\{\mathbf{h}\}$)
    - Irányfüggő átviteli függvény közelíthető az élpár fantom / él fantom rekonstrukciójából.
  - Szeletek effektív vastagsága:
    - Mind CT, mind Tomo esetén a rekonstruált szeletekre merőleges irány menti kiterjedése a szeleteknek.
    - Felhasználási területfüggő optimális értéke.
    - Minél kisebb, annál több szelet kell, hogy minden képlet láthatóvá váljon (legalább egy szeleten).
    - Mérése tipikusan ferde fémlemezzel / fémhuzallal.

CT Szeletvastagság (*)

Slice Sensitivity Profile mérése a lemezek rekonstrukciójára merőlegesen: szeletvastagság FWHM elvvel becsülhető

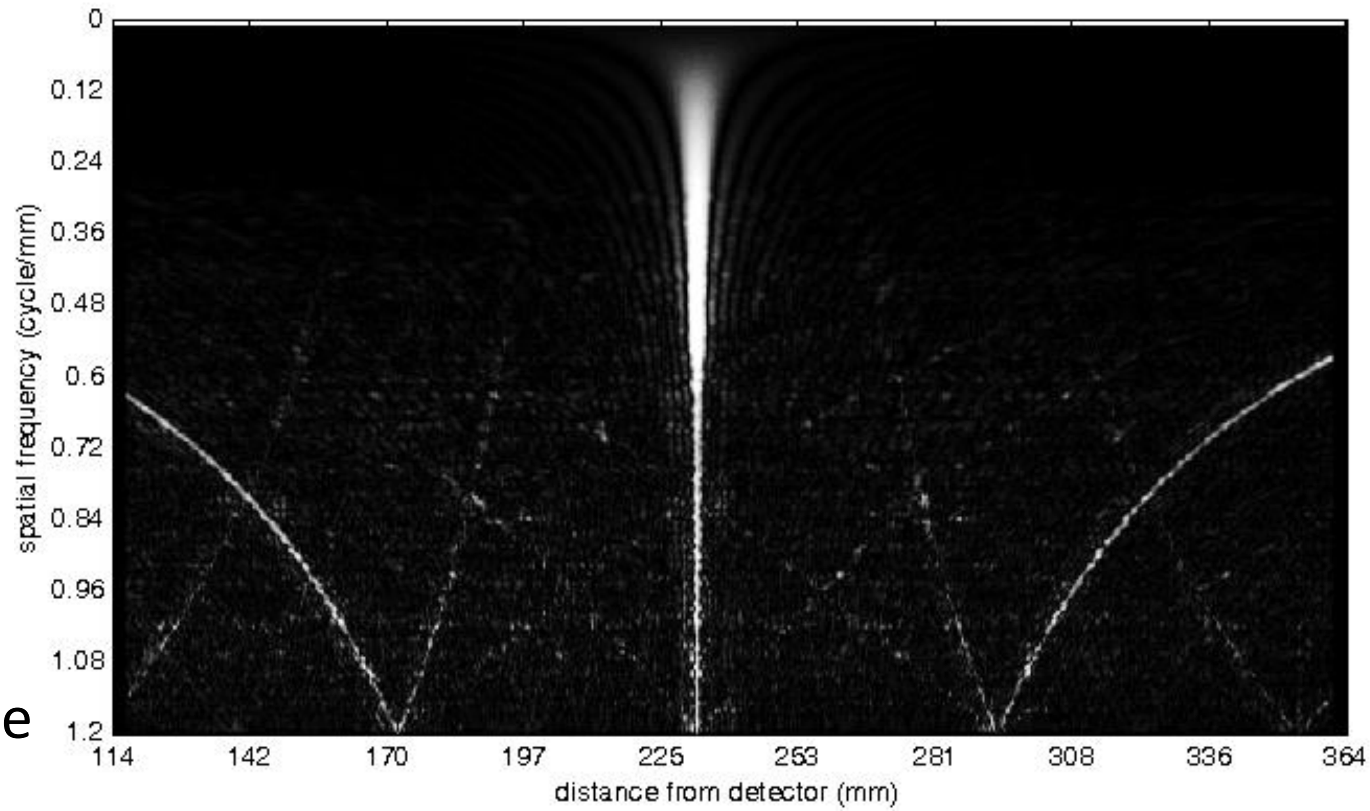






3D Röntgen tomográfia rekonstrukció Modulációs Átviteli Függvénye (*)

- Ferde huzal fantommal (elvben) mérhető:
  - Ha az eljárás az X-Y síkokat rekonstruálja, akkor a huzal ne legyen párhuzamos a Z tengellyel.



Lineáris tomo MITS rekonstrukció MTF-e