

Inverz problémák

Orvosi képdiagnosztika

2022 ősz

Előadás tartalma

- Inverz probléma – dekonvolúció:
 - Inverz probléma formális felírása
 - Dekonvolúció nehézsége
 - Közismert algoritmusok: Wiener inverz szűrés, RLA/ ML-EM, MAP becslés, és ezek kapcsolataik

Inverz probléma

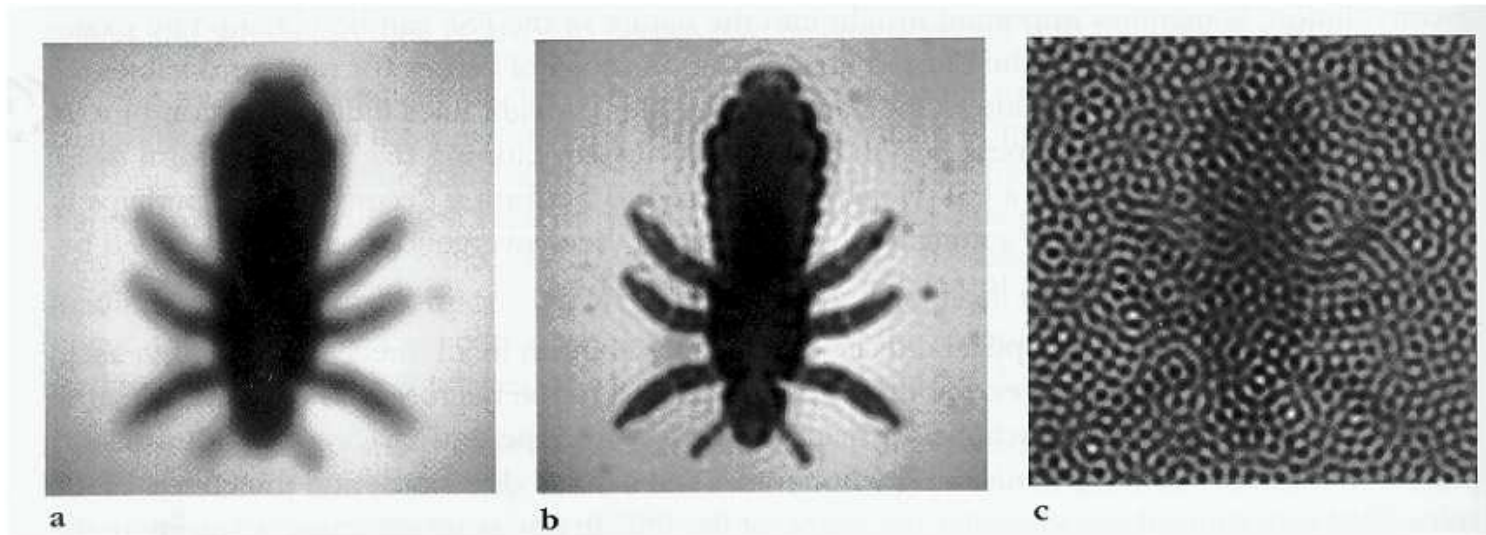
- Megfigyelési modell (zajos LTI): $g = h * f + \eta$
 - h -t (avagy a PSF-t) mi befolyásolhatja?
 - Páciens bemozdulása a felvételek készítése alatt
 - Out-of-focus elrendezés
 - Szóródó fotonok képek rögzítése során
 - Jelen előadás során $f, g \in R_+^2$ és $\eta \in R^2$:
 - f a vizsgált 3D objektum projekciója
- Alapötlet – direkt módszer:
 - Dekonvolúció frekvenciatérben: $F_{(u)} = (G / H)_{(u)}$

Inverz probléma statisztikai interpretációja

- Cél megbecsülni $P\{f\}$ -et:
 - Maximum likelihood módszer:
 - $f_{ML}^* = \arg \max_f \{P\{g|f\}\}$
 - Additív zaj modell esetén: $P\{g|f\} = P_\eta\{g - h * f\}$
és az $f_{ML}^* = \arg \min_f \{-\log\{P\{g|f\}\}\}$ -t szoktuk keresni
 - Maximum a posterior (MAP) becslés:
 - $f_{ML}^* = \arg \max_f \{P\{f|g\}\} = \arg \max_f \{P\{g|f\} \cdot P\{f\}\}$
 - Gyakorlatban ezeket a szélsőérték keresési problémákat is negatív logaritmálás után oldjuk meg.

Direkt dekonvolúció zajérzékenysége

- Problémák a direkt módszerrel:
 - PSF-et nem ismerjük pontosan $\tilde{H} \neq H$
 - $\tilde{F} = G / \tilde{H} = F \circ (H / \tilde{H}) + \textcolor{red}{N} / \textcolor{red}{\tilde{H}} \neq F$
 - a PSF általában alul-áteresztő jellegű
 - magas frekvenciákon $\textcolor{red}{N.} / \textcolor{red}{\tilde{H}}$ dominál (~ 0 -val osztás)



a: elmosott kép

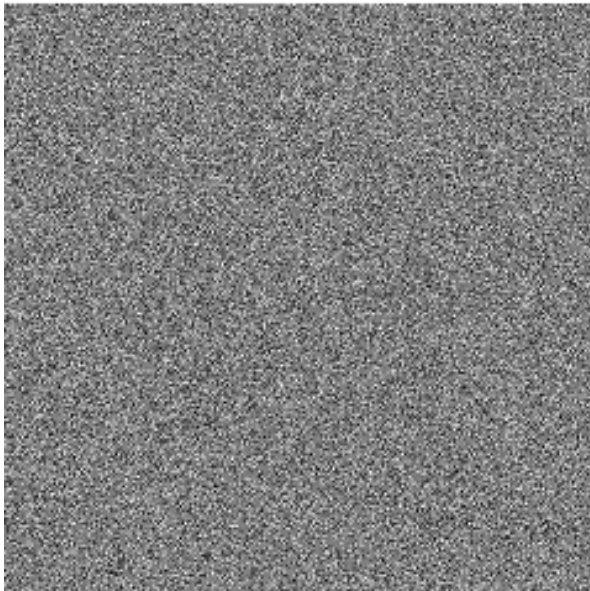
b: direkt
dekonvolúció
eredménye, ha
nincs additív zaj

c: eredmény ha
van additív zaj

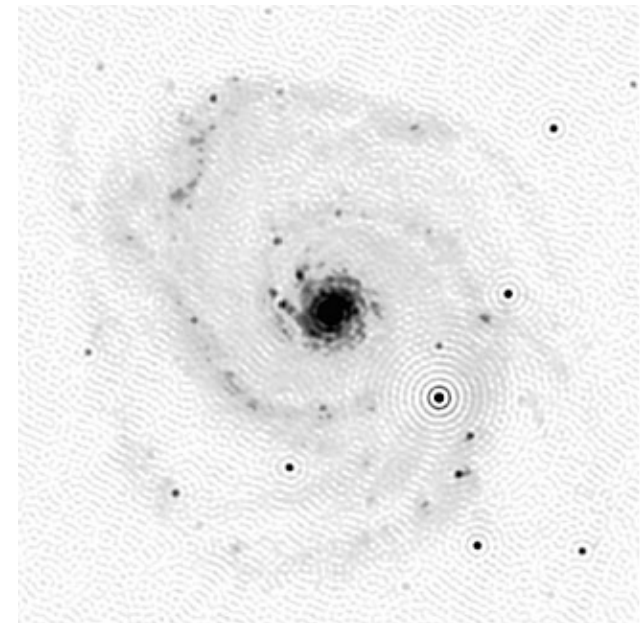
Csonkolt dekonvolúció

- Azon frekvenciákon, melyeken az MTF alacsony 0 legyen az eredmény

$$- \tilde{F}_{(u)} = \begin{cases} G_{(u)} / H_{(u)} & |H_{(u)}| > \varepsilon \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$



Direkt dekonvolúció eredménye



Csonkolt dekonvolúció eredménye

Wiener inverz-szűrés

- Várható értékben legpontosabb szűrő:

- $F_{(u)}^{Wiener} = H_{(u)}^{Wiener} \cdot G_{(u)}$

- $f^{Wiener} = \arg \min \left\{ E \left\{ \left\| f^{Wiener} - f^{valódi} \right\|_2^2 \right\} \right\}$

- A matematikai levezetést hanyagolva:

$$H_{(u)}^{Wiener} = \frac{H_{(u)}^*}{\left| H_{(u)} \right|^2 + E \left\{ \left| N_{(u)} \right|^2 \right\} / E \left\{ \left| F_{(u)} \right|^2 \right\}}$$

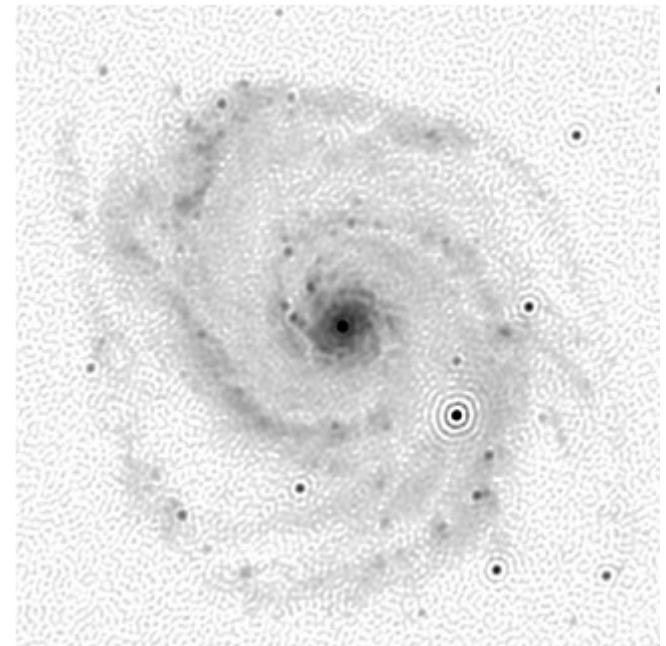
- Interpretáció:

$$H_{(u)}^{Wiener} \approx \begin{cases} 1 / H_{(u)} & |SNR_{(u)} \gg 1 \\ 0 & |SNR_{(u)} \ll 1 \end{cases} \quad SNR_{(u)} = \sqrt{\frac{\left| H_{(u)} \right|^2 E \left\{ \left| F_{(u)} \right|^2 \right\}}{E \left\{ \left| N_{(u)} \right|^2 \right\}}}$$

Wiener inverz szűrés

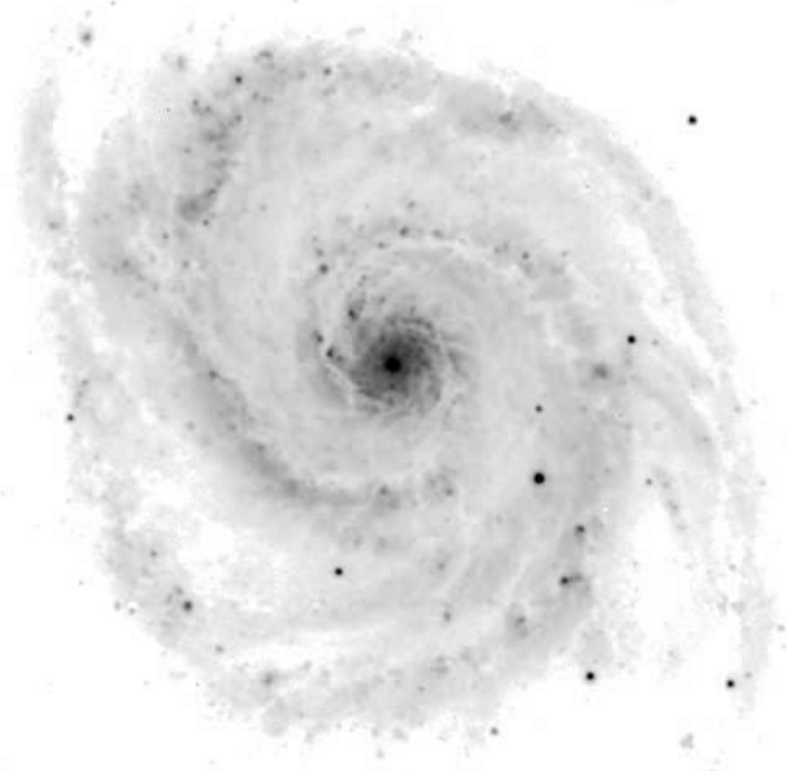
- Az eredmény (f^{Wiener}) gyakran nem realiztikus:
 - Negatív intenzitások is előfordulnak (negatív fluxus?)
 - Nagyfrekvencián a hirtelen romló SNR Gibbs artefektet generál
- SNR gyakran nem mérhető ki

Wiener szűrés eredménye: jobb részletgazdagság, de a gyűrűk egy része megmaradt

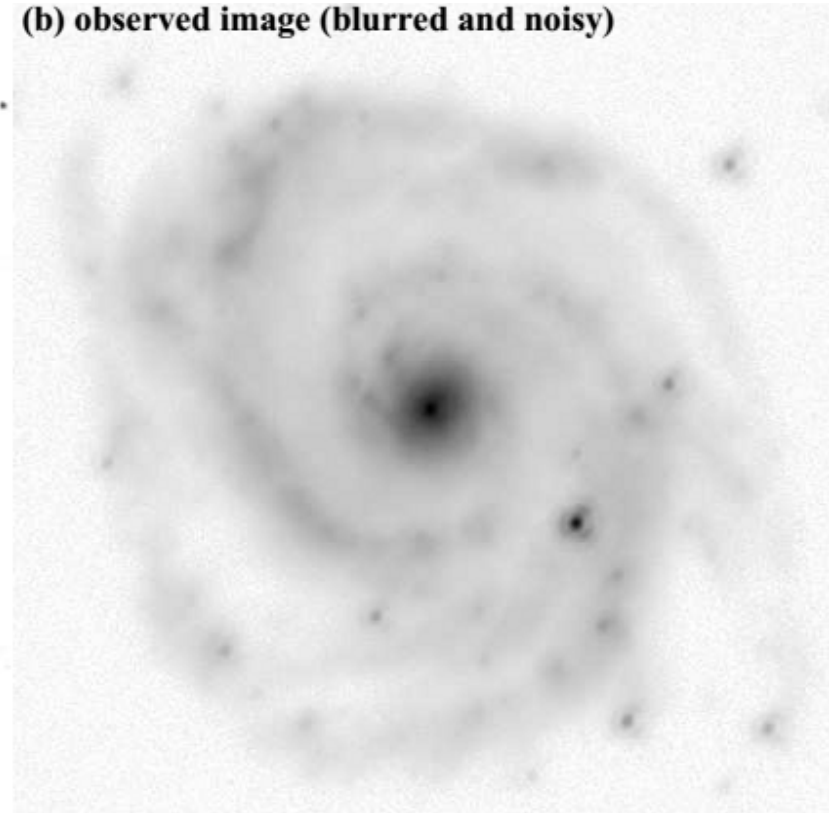


Eljárások illusztrálása -0-

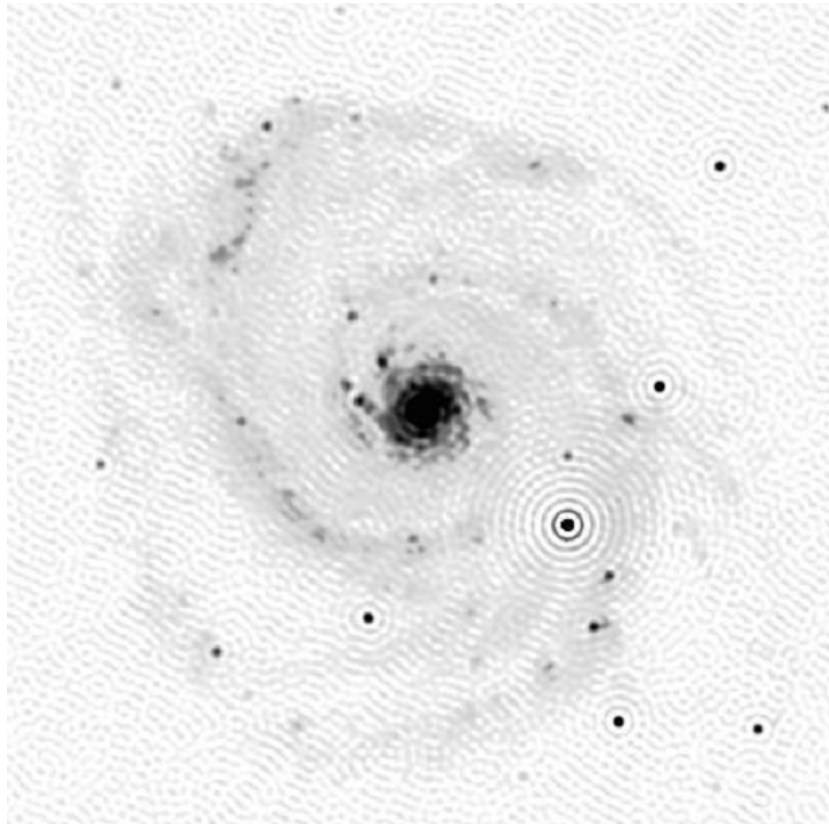
(a) true brightness distribution



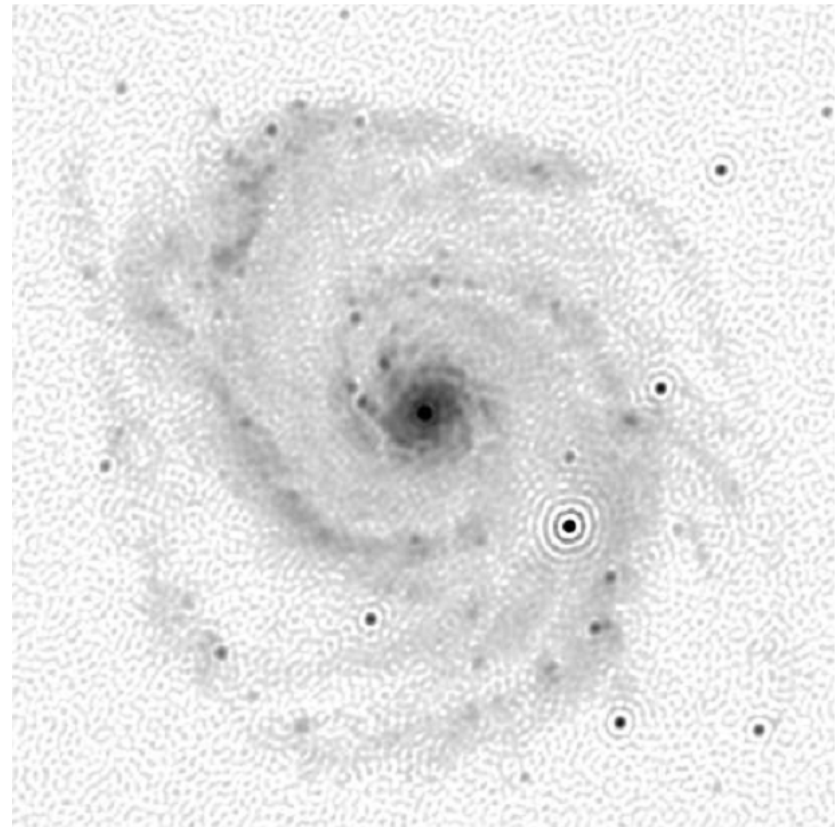
(b) observed image (blurred and noisy)



Eljárások illusztrálása -1-



Csonkolt dekonvolúció



Wiener inverz szűrés

Kényszermentes ML becslés

- Additív Gauss zaj esete ($\eta \in \mathcal{N}(0, W^{-1})$):
 - $f_{ML}^* = \arg \max_f \left\{ K \cdot \exp \left(- (g - H' \cdot f)^T \cdot W / 2 \cdot (g - H' \cdot f) \right) \right\}$
 - H' a rendszer torzításának mátrixa, tehát: $h * f = H' \cdot f$
 - Minimalizáljuk a negatív log likelihood függvényt:
 - $L(f) = (g - H' \cdot f)^T \cdot W / 2 \cdot (g - H' \cdot f)$
 - Mivel $H'^T \cdot W \cdot H$ pozitív szemidefinit, ezért $L(\cdot)$ konvex.
 - Tehát $\nabla L(f_{ML}^*) = 0$ kényszer definiálja az optimum helyet
 - $f_{ML}^* = (H'^T \cdot W \cdot H')^{-1} \cdot H'^T \cdot W \cdot g$ ún. súlyozott LS becslés

Kényszermentes ML becslés példa

- I.i.d., 0 várható értékű Gauss megfigyelési zaj esete :

- $Cov(g) = \sigma^2 \cdot I$, tehát $W = \sigma^{-2} \cdot I$

- $f_{ML}^* = (H'^T \cdot W \cdot H')^{-1} \cdot H'^T \cdot W \cdot g = (H'^T \cdot H')^{-1} \cdot H'^T \cdot g$

- Vizsgáljuk meg f_{ML}^* spektrumát:

- $F_{ML(u)}^* = \frac{H_{(u)}^* \cdot G_{(u)}}{H_{(u)}^* \cdot H_{(u)}} = \frac{H_{(u)}^* \cdot G_{(u)}}{|H_{(u)}|^2} = \frac{G_{(u)}}{H_{(u)}} = (G/H)_{(u)}$

- Konzekvencia: ML eljárással nem lehet a rosszul kondicionált inverz problémát megoldani.

ML becslés pozitívítási kényszerrel

- Nem negativitási kényszer: $f \in R_+$
- Jó esetben konvex optimalizálási probléma:

$$\begin{array}{ll} \max. & P\{g|f\} \\ \text{s.t.} & f \geq 0 \end{array} \xrightarrow{-\log} \begin{array}{ll} \min. & L_g(f) \\ \text{s.t.} & f \geq 0 \end{array}$$

- Konvex a probléma, ha $P\{g|f\}$ log-konkáv.
- Nem adható rá analitikus megoldás
- Milyen eloszlású lehet valójában a terhelő zaj:
 - Poisson: fotonok inherens zaja
 - Gauss: termikus zaj
 - Uniform: kvantálási zaj (A/D átalakítás)

Richardson Lucy algoritmus (+)

- Interpretáljuk a képpontok intenzitását fotonok becsapódási valószínűségeivel:
 - $P\{f_{(i)}\}$: P („egy fotonon a detektor i -edik érzékelő-elemébe csapódik, ha nincs zaj és torzítás”)
 - $P\{g_{(k)}\}$: P („egy fotonon a detektor k -adik érzékelő-elemébe csapódott a megfigyelt kép rögzítése során”)
 - $P\{g_{(k)} | f_{(i)}\}$: P („ideális esetben az i -edik érzékelőelembe csapódó foton a k -adik érzékelőelembe csapódik bele
– a képkötő LTI rendszer torzítása miatt”)

Richardson Lucy algoritmus

- Lényegében egy Bayes-i becslés:

- Bayes szabály:
$$P\{f_{(i)} | g_{(k)}\} = \frac{P\{g_{(k)} | f_{(i)}\} \cdot P\{f_{(i)}\}}{\sum_j P\{g_{(k)} | f_{(j)}\} \cdot P\{f_{(j)}\}}$$

- Dekomponálás:
$$P\{f_{(i)}\} = \sum_k P\{f_{(i)} | g_{(k)}\} \cdot P\{g_{(k)}\}$$

- Tehát:
$$\mathbf{P}\{f_{(i)}\} = \sum_k \frac{P\{g_{(k)} | f_{(i)}\} \cdot \mathbf{P}\{f_{(i)}\} \cdot P\{g_{(k)}\}}{\sum_j P\{g_{(k)} | f_{(j)}\} \cdot \mathbf{P}\{f_{(j)}\}}$$

Richardson Lucy algoritmus

- Bevett gyakorlat: iteráljunk a célváltozó felett:

$$P_{(r+1)} \{f_{(i)}\} = \sum_k \frac{P \{g_{(k)} | f_{(i)}\} \cdot P \{g_{(k)}\}}{\sum_j P \{g_{(k)} | f_{(j)}\} \cdot P_{(r)} \{f_{(j)}\}} \cdot P_{(r)} \{f_{(i)}\}$$

- Oldjuk fel a valószínűségi értelmezést:

- $P \{f_{(i)}\} = f_{(i)} / (f^T \cdot 1)$; $P \{g_{(i)}\} = g_{(i)} / (g^T \cdot 1)$
- $P \{g_{(k)} | f_{(i)}\} = h_{(k-i)}$
- T.f.h $h^T \cdot 1 = 1$; $h \geq 0$ ezekből következik: $g^T \cdot 1 \leftrightarrow f^T \cdot 1$

Richardson Lucy algoritmus (+)

- $P\{f_{(i)}\} = f_{(i)} / (f^T \cdot 1)$: dekonvolvált kép i-edik pixelének normált intenzitása
- $P\{g_{(i)}\} = g_{(i)} / (g^T \cdot 1)$: képalkotó rendszer (LTI + zaj) által torzított kép i-edik pixelének relatív intenzitása
- $P\{g_{(k)} | f_{(i)}\} = h_{(k-i)}$: csak az LTI rendszerrel leírható torzítást modellezzük
- $h^T \cdot 1 = 1$: minden olyan foton, mely a torzítatlan rendszer esetén a detektorba csapódna be a torzított rendszer esetén is a detektorba csapódik be (maximum más érzékelőelembe)
- Végig monokróm spektrumú fotonokat feltételezve a detektált intenzitás (fluxus) egyenesen arányos a becsapódó fotonok számával

Richardson Lucy algoritmus

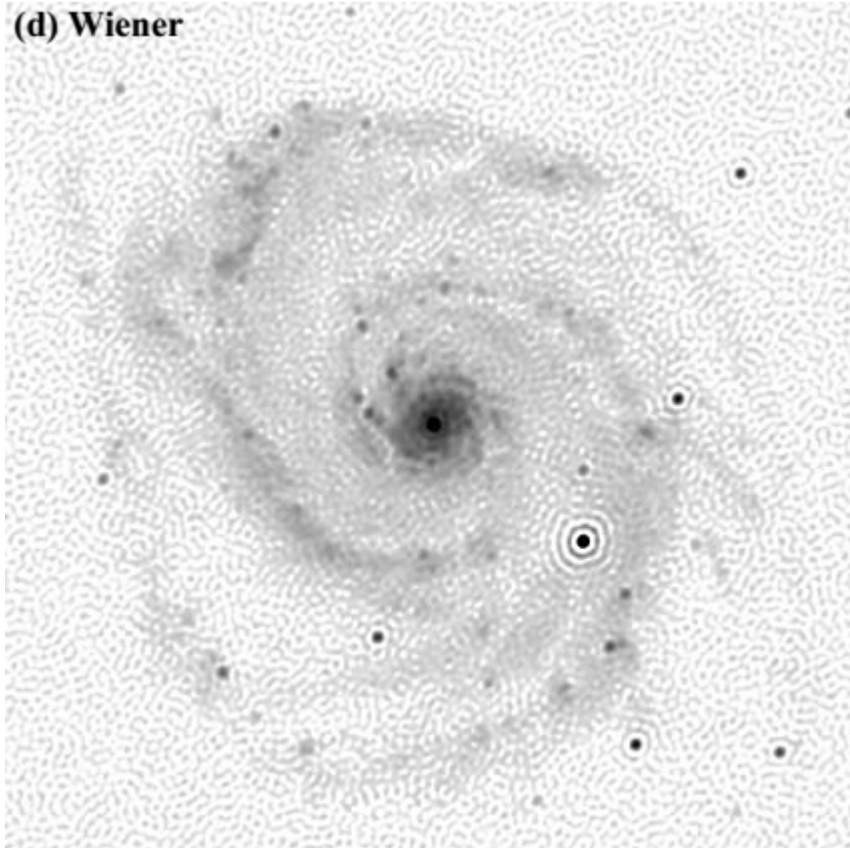
- Végezzük el a behelyettesítést:

$$- f_{(i)}^{(r+1)} = \sum_k \frac{h_{(k-i)} \cdot g_{(k)}}{\sum_j h_{(k-j)} \cdot f_{(j)}^{(r)}} \cdot f_{(i)}^{(r)} = \sum_k \frac{h_{(k-i)} \cdot g_{(k)}}{\left(h * f^{(r)}\right)_{(k)}} \cdot f_{(i)}^{(r)}$$

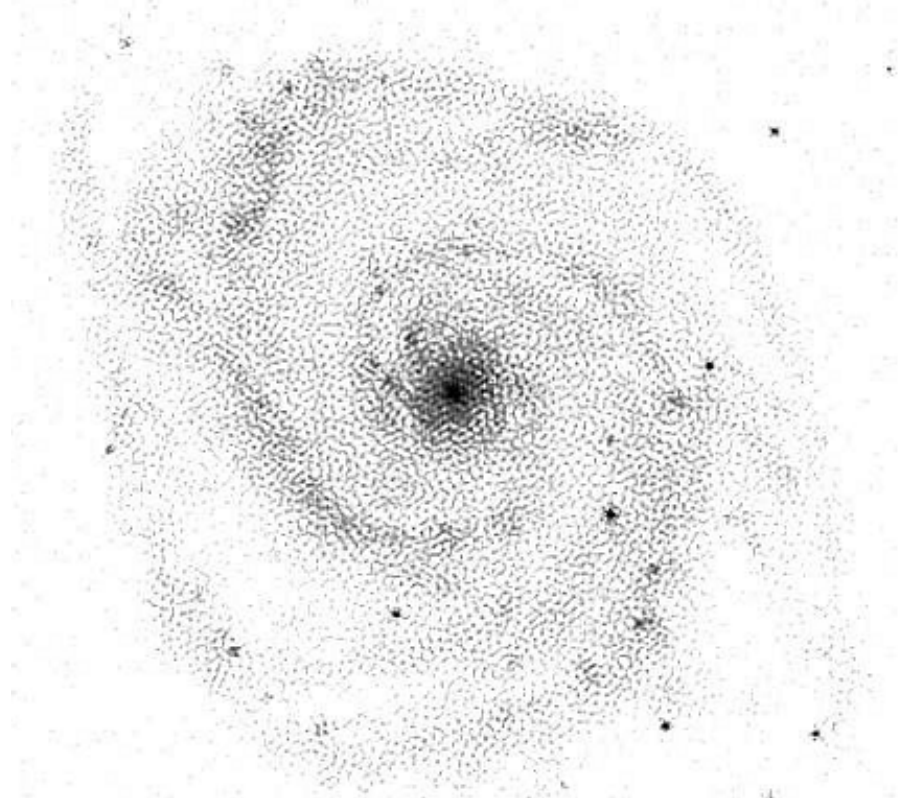
- Érdemes észrevenni, hogy ha $f^{(0)} \geq 0$, akkor minden iterációban $f^{(r)} \geq 0$, tehát teljesül a nem-negativitási kényszer
 - Ha konvergens, akkor optimumhoz konvergál
- Ekvivalens a pozitivitási kényszeres ML becsléssel, Poisson zaj modell esetén.

Eljárások illusztrálása -2-

(d) Wiener



(c) constrained maximum likelihood (Lucy–Richardson)



ML becslések összegzése

- Jelentősen felerősítik a zajt:
 - A probléma rosszul kondicionált jellegét nem képesek megfelelően kezelni.
 - Kivétel az iteratív algoritmusok köre, ha $f^{(0)}$ elegendően sima, és konvergencia előtt leállunk!
- Explicit regularizáció szükséges:
 - Definiáljuk $f^{(0)}$ a-priori eloszlását, és azt rögzítsük a minimalizálandó célfüggvényünkben
 - Megj.: RLA-nál is szerepelt prior, de annak más a szerepe, értelmezése...

MAP becslések

- Bayes becsléselemélet:
 - max. $P\{f|g\} \propto (P\{g|f\} \cdot P\{f\})$
 - Másképpen : min. $-\log(P\{f|g\}) = \Phi_{ML}(f) + \Phi_{prior}(f) + K$
 - $\Phi_{ML}(f) = -\log(P\{g|f\})$: bünteti a mérések és a zaj nélkül becsült, torzított kép eltérését: $\|g - \tilde{g}\| = \|g - h * f\|$
 - $\Phi_{prior}(f) = -\log(P\{f\})$: meghatározza, hogy milyen dekonvolvált képet preferálunk (pl. zajmentesség, pozitivitás, simaság, stb.).
 - Analitikai értelmezés: regularizált becslés

MAP becslés példa – stacionárius Gauss zaj, frekvenciatérbeli prior

- Prior frekvenciatartományban: $\Phi_{prior}(F) = \mu \cdot \sum_u W_{(u)} \cdot |F_{(u)}|^2$
- Gauss, stacionárius zaj: $\Phi_{ML}(f) = \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum_j \left(g_{(j)} - (H' \cdot f)_{(j)} \right)^2$
 - Parseval tétel szerint: $\Phi_{ML}(F) = \frac{1}{2N \cdot \sigma^2} \sum_u |G_{(u)} - H_{(u)} \cdot F_{(u)}|^2$
- Összegezve: $\Phi(F) = \frac{1/2}{N \cdot \sigma^2} \sum_u |G_{(u)} - H_{(u)} \cdot F_{(u)}|^2 + \mu \cdot \sum_u W_{(u)} \cdot |F_{(u)}|^2$
 - Mivel $\Phi(\cdot)$ konvex, ezért $\nabla \Phi(F^{opt}) = 0$, tehát:

$$F_{(u)}^{opt} = \frac{H_{(u)}^* \cdot G_{(u)}}{|H_{(u)}|^2 + 2 \cdot \mu \cdot N \cdot \sigma^2 \cdot W_{(u)}}$$

MAP becslés példa – stacionárius Gauss zaj, simasági prior

– $W_{(u)} = \left(\mathbb{E} \left\{ |N_{(u)}|^2 \right\} / \mathbb{E} \left\{ |F_{(u)}|^2 \right\} \right) / (2\mu \cdot N \cdot \sigma^2)$ esetén:

$$\bullet F_{(u)}^{opt} = \frac{H_{(u)}^* \cdot G_{(u)}}{|H_{(u)}|^2 + \mathbb{E} \left\{ |N_{(u)}|^2 \right\} / \mathbb{E} \left\{ |F_{(u)}|^2 \right\}}$$

• Tehát a Wiener dekonvolúció is egy MAP becslés

– $\mathbb{E} \left\{ |N_{(u)}|^2 \right\} / \mathbb{E} \left\{ |F_{(u)}|^2 \right\}$ gyakorlatban nem határozható meg

– Gyakran fehér zaj, és $W_{(u)} = 1 / \mathbb{E} \left\{ |F_{(u)}|^2 \right\} \propto u^\beta$

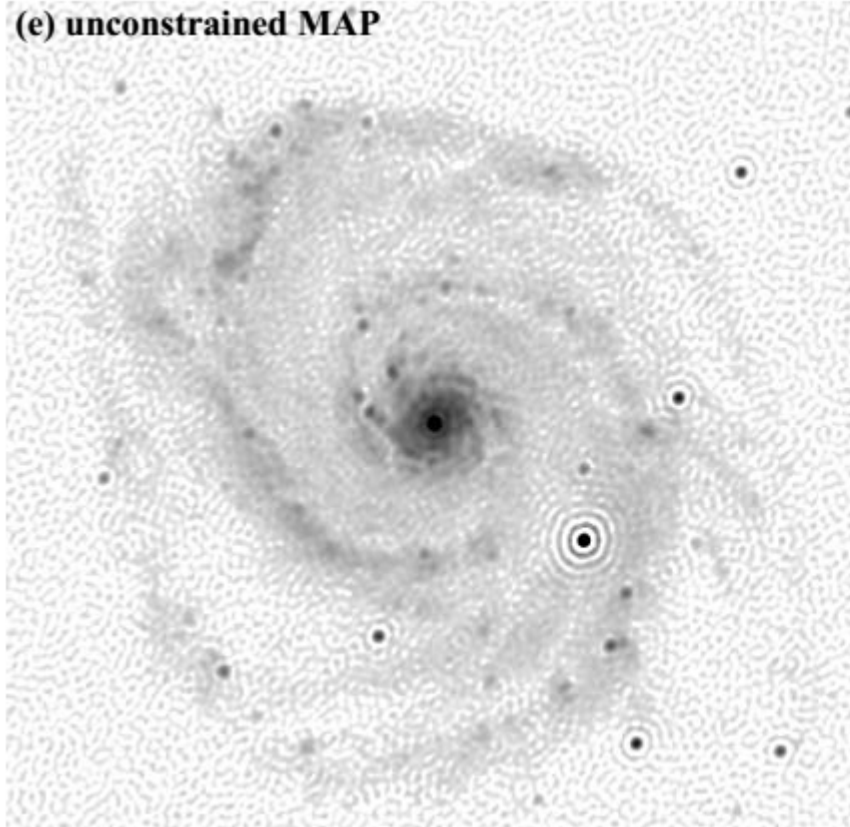
• μ értéke szabályozza, hogy mennyire domináljon a prior (magas frekvenciás komponensekért mennyire büntetünk).

MAP becslés gyakorlat

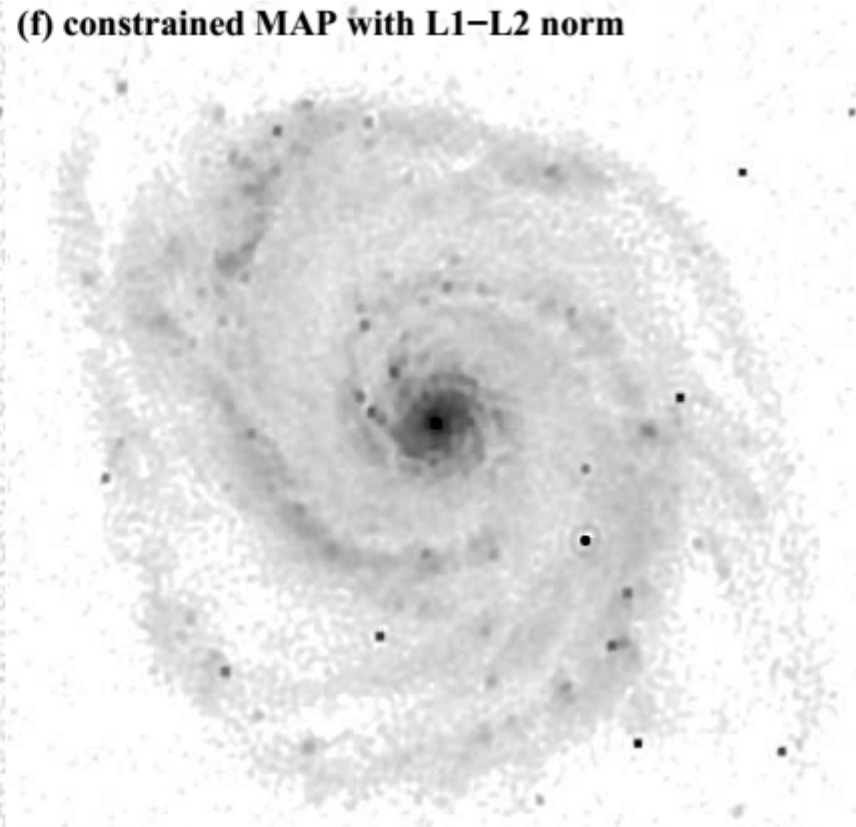
- Általában közvetlenül $\Phi(f)$ -et definiáljuk:
 - $\Phi_{ML}(f) = \|g - h * f\|_{\alpha}^{\beta}$, $\alpha \in \{1, 2, \infty\}$; $\beta \geq 1$
 - $\Phi_{prior}(f) = \|D(f)\|_{\alpha}^{\beta}$, $\alpha \in \{1, 2, \infty\}$; $\beta \geq 1$
 - $D(\cdot)$ tetszőleges, konvexitást nem elrontó (pl. affin) függvény, pl. deriválás, Laplace, felül-áteresztő szűrést.
- Célfüggvény ($\Phi(f)$) minimalizálása:
 - Analitikus megoldás, ha $\alpha = 2$; $\beta = 2$; $D(\cdot)$ affin
 - Egyéb esetben konvex optimalizálás:
 - Jelentős megkötés, pl. gyűrűs artefaktot egy nem konvex prior (L1-L2) hatékonyan elnyomja

Eljárások illusztrálása -3-

(e) unconstrained MAP



(f) constrained MAP with L1-L2 norm



Ismertetett módszerek csoportosítása

ML becslés:

- Csak a megfigyelési zaj osztályát ismerjük
- **Zajérzékenység** jelentős probléma, csak a konzisztenciára figyel

Példák:

- Direkt dekonvolúció (additív Gauss zajos ML becslés)
- Richardson – Lucy (additív Poisson zajos, pozitívítási kényszeres ML becslés)

MAP becslés:

- Explicit módon definiáljuk, hogy milyen jellegű képet akarunk
- Ha jól **regularizálunk**, akkor a zajérzékenység redukálódik, de az eredmény kevésbé konzisztens

Példák:

- Csonkolt dekonvolúció
- Wiener dekonvolúció (additív Gaussz zaj + frekvencia függő energia minimalizáció)
- Egyéb, regularizált dekonvolúciók

MAP és ML becslés összehasonlítása

- Stabilitás:
 - MAP-nál a regularizáció célja ennek kikényszerítése (pl. sima, kevésbé zajos, stb. dekonvolvált kép előállítása)
 - ML becslésnél ez legfeljebb impliciten kényszeríthető ki (pl. iteratív becsléseknél korai leállítás).
- Becslés inkonzisztenciája ($\|g - h * f\|$):
 - Likelihood tag minimalizálásával redukálható
 - ML becsléseknél ennek az értéke kisebb – ez viszont a zajos input képhez (g) a becsült torzítatlan kép **túlilleszkedést** vonja maga után (rosszabb képminőség)