

Képalkotás modellezése, metrikái

Orvosi képdiagnosztika

2022 ősz

Jelölésjegyzék

- Rendszer válasza f gerjesztésre: $S\{f\}$
- Dirac-delta: $\delta(x)$; egységugrás: $1(x)$
- x_0 idejű Dirac-delta gerjesztése a rendszer válasza: $h(x, x_0)$
 - LTI esetben: $h(x - x_0) := h(x, x_0)$
- Konvolúció: $*$
- g Fourier transzformáltja: $G = FT\{g\}$
 - g spektruma: G
- g sávszélessége: $bw\{g\}$
- X eloszlás várható értéke: $\mu(X)$, szórása: $\text{std}(X)$
- Szürkeárnyaltos képet leíró leképezés: $I : R^2 \rightarrow R$
- Elemenkénti átlagolás: $\left\langle I^{(1:M)} \right\rangle(x, y) = (1/M) \sum_i I^{(i)}(x, y)$

Tartalom

- Elméleti áttekintés – lineáris rendszerek:
 - LTI rendszerek leírása – konvolúciós integrál
 - Rendszer identifikáció
 - Folytonos idejű Fourier transzformáció
- Képalkotás mérése lineáris rendszerekkel:
 - Point Spread Function, Modulation Transfer Function, Noise Power Spectra, SNR, CNR
 - NEQ, DQE

Lineáris rendszerek

- Komplex, fizikai rendszerek sosem lineárisak
 - Linearizálás nélkül kezelhetetlenül bonyolultak
 - Leginkább sztochasztikus folyamatok
 - Lin. rendszerként várható értékük jellemezhető
- Lineáris rendszerek jellemzői
 - Rendszer: $S : A \rightarrow B$
 - Lineáris: $S\{a \cdot f + b \cdot g\} = a \cdot S\{f\} + b \cdot S\{g\}$
 $a, b \in R \quad f, g : C \rightarrow A$

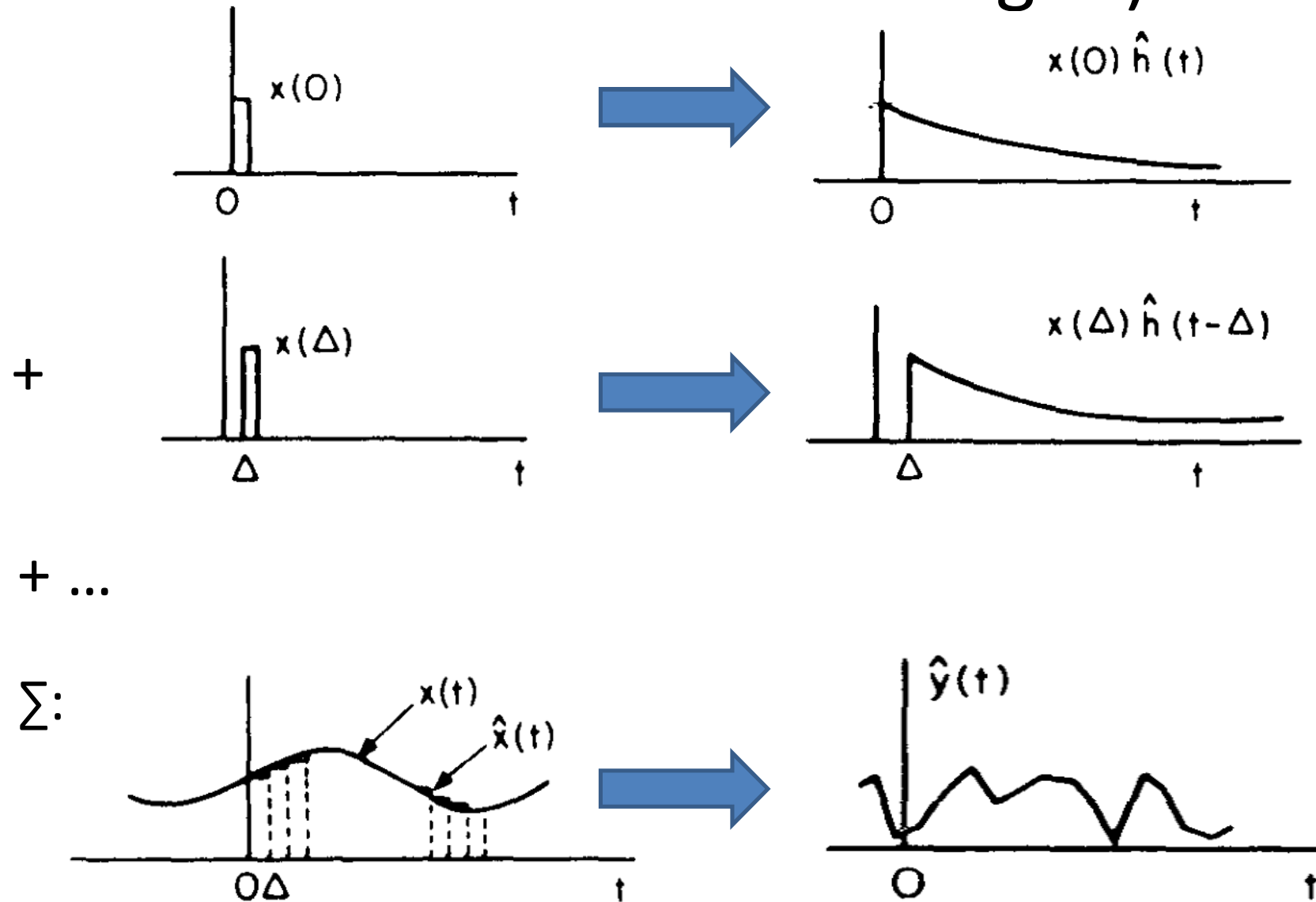
Lineáris rendszerek vizsgálata

- Eltolás-invariáns (idő invariáns) rendszer:
 - $S\{f * \delta(x - x_0)\}(y + x_0) = S\{f\}(y)$
- Dirac impulzus:
 - $\delta(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)$
 - Impulzusválasz: $h(x, x_0) = S\{\delta(y - x_0)\}(x)$
 - Eltolás(idő)-invariáns rendszernél: $h(x, x_0) \equiv h(x - x_0)$
 - LTI rendszereket egyértelműen leírja $h(x)$

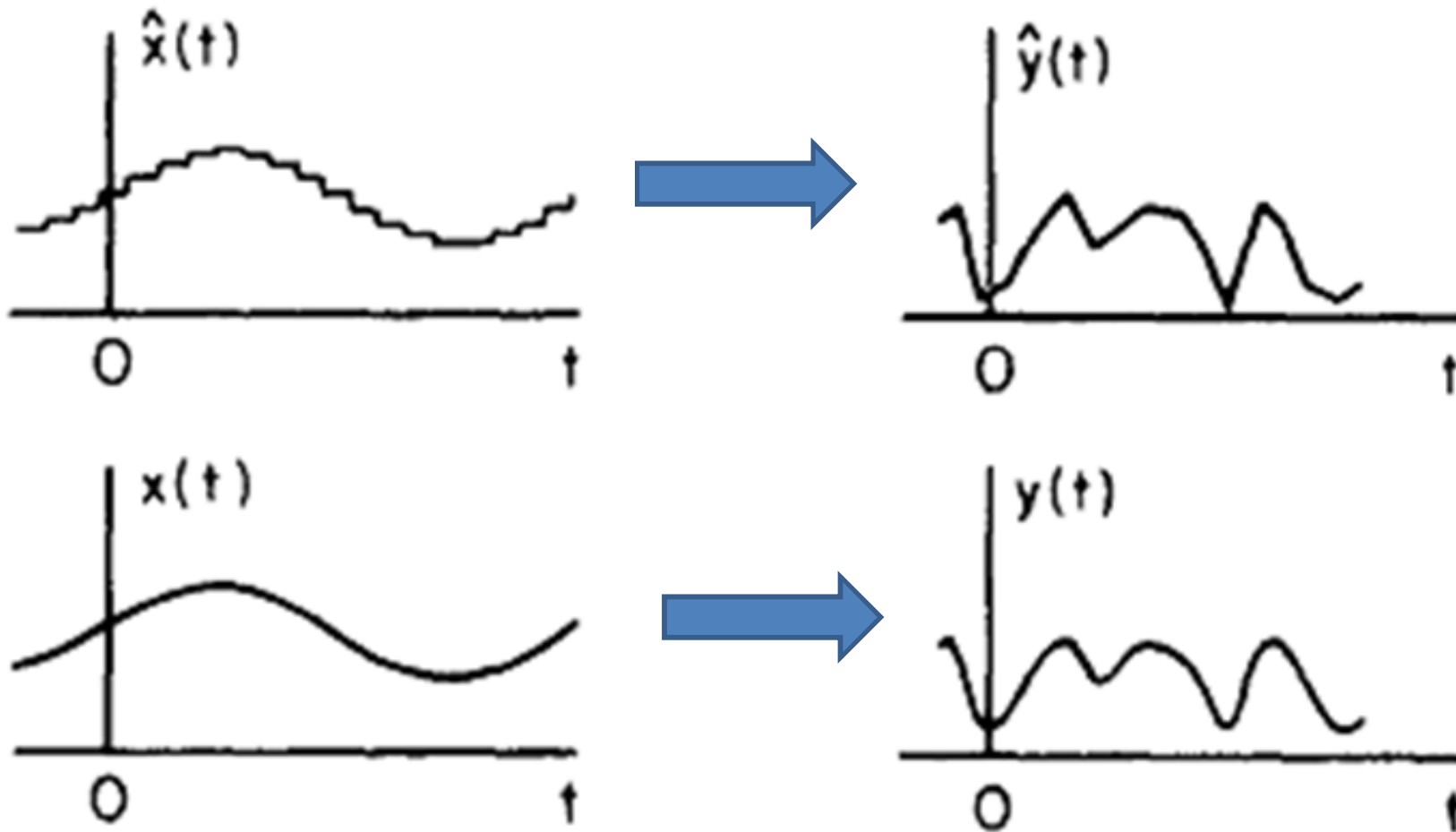
LTI rendszerek válasza (konvolúciós integrál)

- Közelítsük infinitezimális téglákkal f -et:
 - $S\{f\}(x) \approx \hat{y}(x) := \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(j \cdot \Delta x) \cdot h(x, j \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$
 - Közelítő modell helyességének feltételei:
 - f folytonos
 - $h(x, y)$ is folytonos függvénye y -nak
 - $\Delta x \ll 1$
- Ha S eltolás invariáns:
 - $S\{f\}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \hat{y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \cdot h(x - x') \cdot dx'$
 - Tömörebben: $y(x) := S\{f\}(x) = (f * h)(x)$

LTI rendszerek válasza (konvolúciós integrál)



LTI rendszerek válasza (konvolúciós integrál)

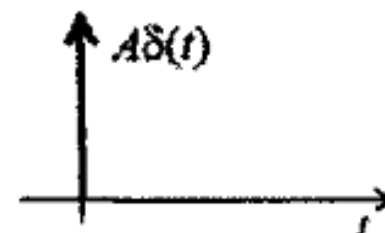
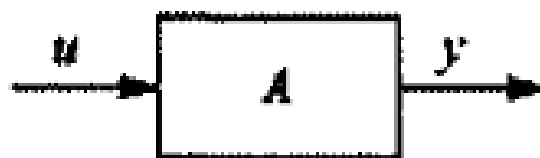


LTI rendszerek

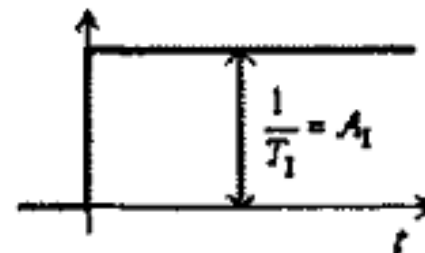
- Impulzusválasz (h) egyéb elnevezései:
 - Súlyfüggvény
 - Gerjesztés Válasz függvény
 - Képkötő rendszereknél: Point Spread Function
- Fizikai képkötő rendszerek sajátosságai:
 - Rögzített képek (projekciók, stb.): $y \approx h * x + \eta$
 - Általában $x : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 - η a képkötés, és a fizikai foton interakciók függvénye

Egyszerű rendszerek impulzusválasza (szemléltetés)

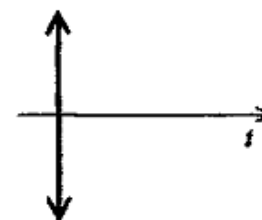
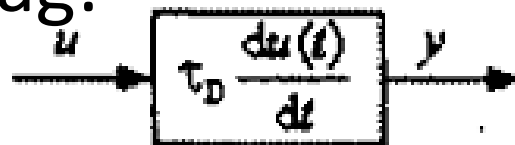
- Arányos tag:



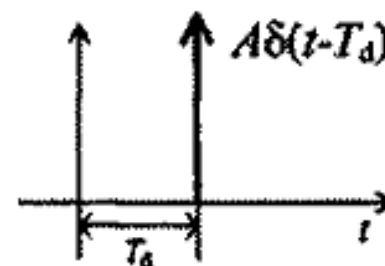
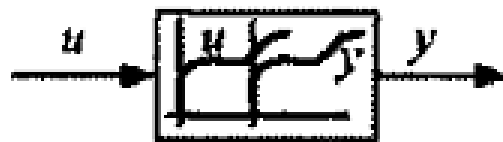
- Integráló tag:



- Differenciáló tag:



- Holtidős tag:

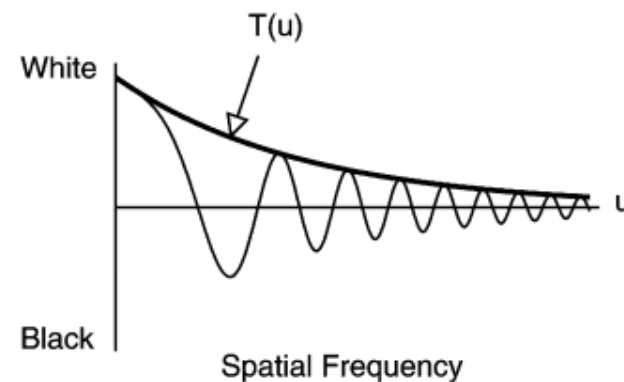
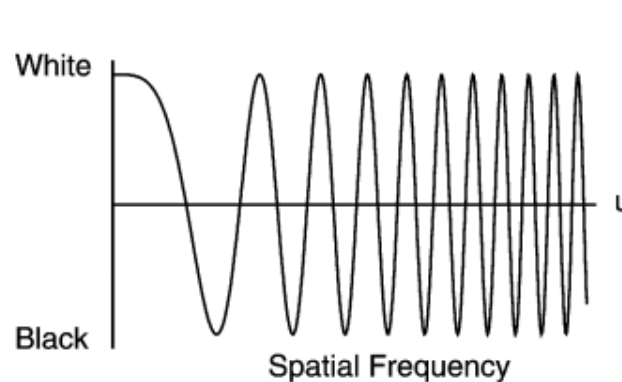
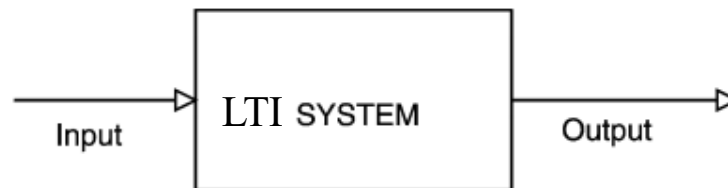


Fourier Transzformáció

- Folytonos függvények lineáris transzformációja:
 - $F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{(-j \cdot 2\pi \cdot \xi \cdot x)} \cdot dx; \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \cdot e^{(j \cdot 2\pi \cdot \xi \cdot x)} \cdot d\xi$
 - Euler formula: $\exp(j \cdot 2\pi \cdot \xi \cdot x) = \cos(2\pi \cdot \xi \cdot x) + j \cdot \sin(2\pi \cdot \xi \cdot x)$
- LTI rendszerek vizsgálata Fourier tartományban:
 - $y(x) = \int_{x'=-\infty}^{\infty} h(x') \int_{\xi=-\infty}^{\infty} F(\xi) \cdot e^{(j \cdot 2\pi \cdot \xi \cdot (x-x'))} \cdot d\xi \cdot dx'$
 - $y(x) = \int_{\xi=-\infty}^{\infty} F(\xi) \cdot \left(\int_{x'=-\infty}^{\infty} h(x') \cdot e^{(-j \cdot 2\pi \cdot \xi \cdot x')} \cdot dx' \right) \cdot e^{(j \cdot 2\pi \cdot \xi \cdot x)} \cdot d\xi$
 - Konvolúció tétel: $Y(\xi) = F(\xi) \cdot H(\xi)$

LTI rendszerek – konvolúció tétel

- LTI rendszer sajátfüggvényei az FT bázisfüggvényei (komplex exponenciálisak):
 - ξ frekvenciájú szinuszos jelre adott válasz is ξ frekvenciájú szinuszos jel:



LTI rendszerek átviteli függvény

- Átviteli függvény: $H = FT \{h\}$
- $H(\xi) = |H(\xi)| \cdot \exp(j \cdot \varphi(H(\xi)))$ értelmezése:
 - $|H(\xi)|$ rendszer erősítése (1/ tehetetlensége):
 - $\xi \sim$ jel változásának sebessége
 - Fizikailag realizálható rendszerek sávkorlátozottak:
 $|H(\xi)| \ll 1$, ha $\xi > bw(h)$
 - Általában monoton csökkenő függvény (ellenpéldák:
kondenzátor – áram, emberi test - fotonok)
 - $\varphi(H(\xi))$ rendszer fázis tolása (késleltetése):
 - $FT \{f(x - x_0)\} = F(\xi) \cdot \exp(-j \cdot 2\pi \cdot x_0 \cdot \xi)$

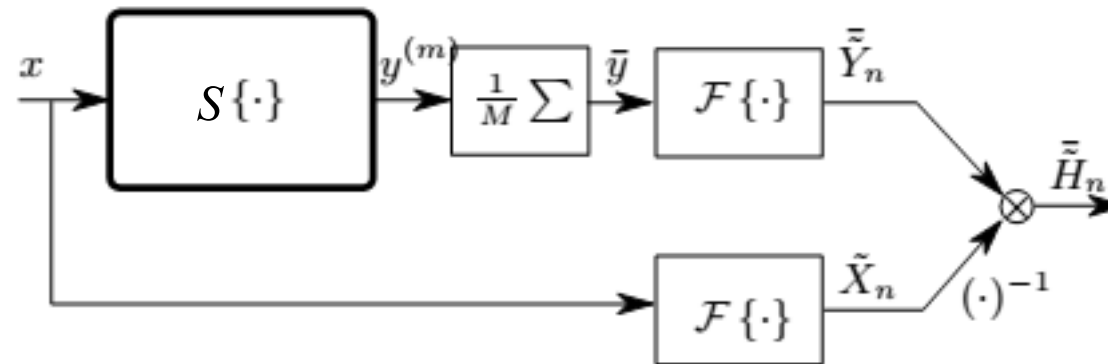
LTI rendszerek identifikációja

- $H(\xi)$ meghatározása:
 - Egységimpulzus ($\delta(x)$) gerjesztés
 - Egységugrás gerjesztés: $1(x) = \int_{-\infty}^x \delta(x') \cdot dx'$
 - $h(x) = dS\{1\}(x)/dx$
 - Szinuszos vizsgálójellel (LTV-hez is jó lehet):
 - $f(x) = A_0 \cdot \cos(2\pi \cdot \xi \cdot x + \varphi_0)$
 $y(x) = A_0 \cdot A \cdot \cos(2\pi \cdot \xi \cdot x + \varphi_0 + \varphi)$ esetén
- $$H(\xi') = \begin{cases} A \cdot \exp(j \cdot \varphi \cdot \text{sign}(\xi')) & | \xi' = \pm \xi \\ ? & | \xi' \neq \pm \xi \end{cases}$$

LTI rendszerek identifikációja

– Multiszinuszos vizsgálójel (LTV rendszerekhez is):

- $f(x) = \sum_i A_i \cdot \cos(2\pi \cdot (i \cdot \omega) \cdot x + \varphi_i)$
- $y(x)$ Fourier Sorfejtése megadja $H(\pm i \cdot \omega)$ értékeit

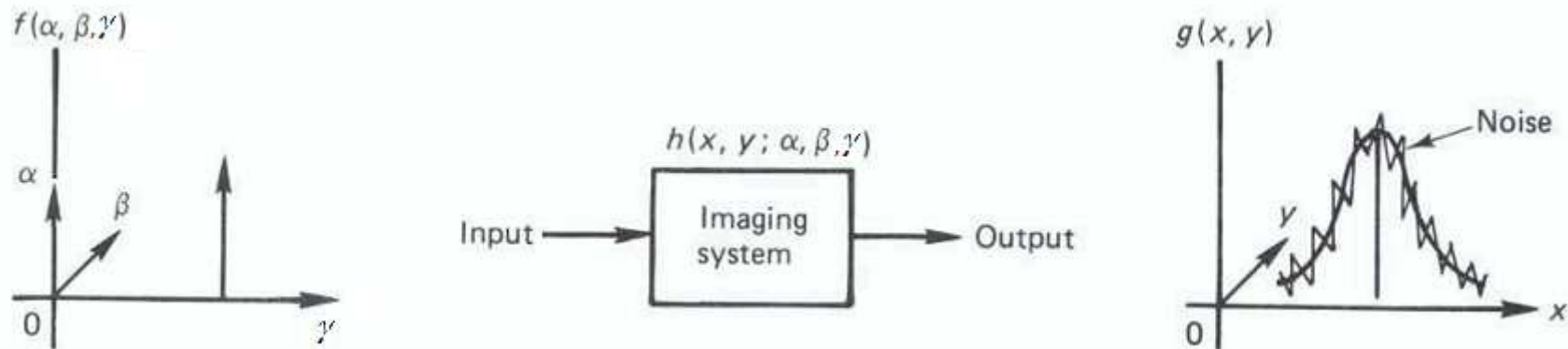


– Fehér zajjal:

- Bemeneti zaj: teljesítménysűrűség spektruma egyenletes
- Kimeneti zaj: teljesítménysűrűség spektruma $\propto |H(\xi)|^2$

Képképző rendszerek jellemzése

- Képképzés általános modellje: Lineáris rendszer:



- Lineáris rendszerek – GV vizsgálat
 - Ideális gerjesztés: dirac-delta
 - Közelítése: pontszerű gerjesztés
 - A gerjesztés is GV válasza egy lineáris rendszernek ($l(\alpha, \beta, \gamma)$)
 - Közvetlenül a $(h * l)$ rendszert vizsgáljuk

Point Spread Function 3D - 2D

- Általános modell (konv. integrál)- a gerjesztés képe lineáris rendszermodell és zaj esetén:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} h(x, y; \alpha, \beta, \gamma) \cdot f(\alpha, \beta, \gamma) d\gamma d\alpha d\beta + \eta(x, y)$$

- $f(\alpha, \beta, \gamma)$: gerjesztés (vizsgált objektum)
 - $\eta(x, y)$: additív zaj
 - $h(x, y; \alpha, \beta, \gamma)$: rendszer súlyfüggvénye – PSF-je
- Inverz probléma – később részletesen tárgyaljuk

Point Spread Function 2D - 2D

- Detektált kép abban az esetben, ha impulzust detektálnánk ideális esetben:

$$g(x, y) = \sum_{\alpha, \beta} h(x, y; \alpha, \beta) \cdot f(\alpha, \beta) + \eta(x, y)$$

- $f(\alpha, \beta)$: ideális esetben az imp. gerjesztés képe
 - $\eta(x, y)$: additív zaj
 - $h(x, y; \alpha, \beta)$: torzító rendszer PSF-je
- Inverz probléma – később részletesen tárgyaljuk

Point Spread Function (2D – 2D eset)

- Nem szükségszerűen izotropikus:
 - Fényképezőgépek / mikroszkópok – inhomogén lencsék okozzák az anizotróp PSF-et
 - PA röntgen, CT, DTS esetén tipikusan anizotróp
 - MRI esetén felvételi paraméterek függvénye
- Nem szükségszerűen shift invariáns:
 - Jelentősen nagyobb probléma
 - Közelítés shift invariáns rendszerekkel:
 - Alapelv: PSF folytonos függvény
 - Isoplanatic régiók

Point Spread Function (2D – 2D eset)

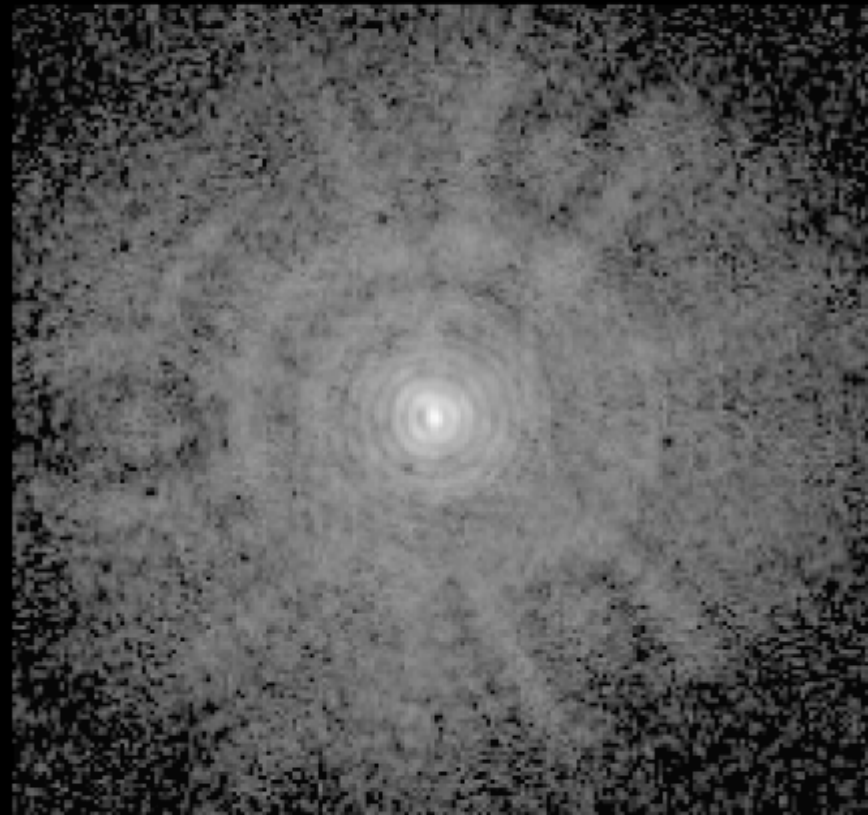
- Nem szükségszerűen izotropikus:
 - Fényképezőgépek / mikroszkópok – inhomogén lencsék okozzák az anizotróp PSF-et
 - PA röntgen, CT, DTS esetén tipikusan anizotróp
 - MRI esetén felvételi paraméterek függvénye
- Nem szükségszerűen shift invariáns:
 - Jelentősen rosszabb problémák
 - Közelítés shift invariáns
 - Alapelv: PSF folytonos függvény
 - Isoplanatic régiók

Az időinvariancia analógiája képeket bemenetként kezelő 2D rendszer esetén.

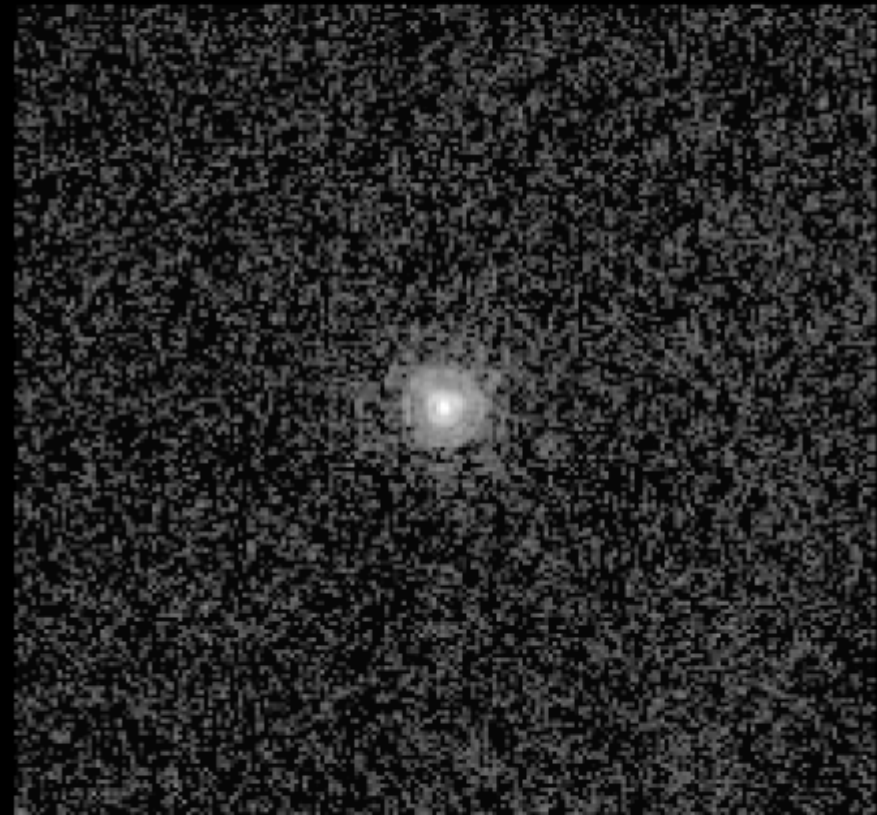
HUBBLE SPACE TELESCOPE

FAINT OBJECT CAMERA

COMPARATIVE VIEWS OF A STAR



BEFORE COSTAR



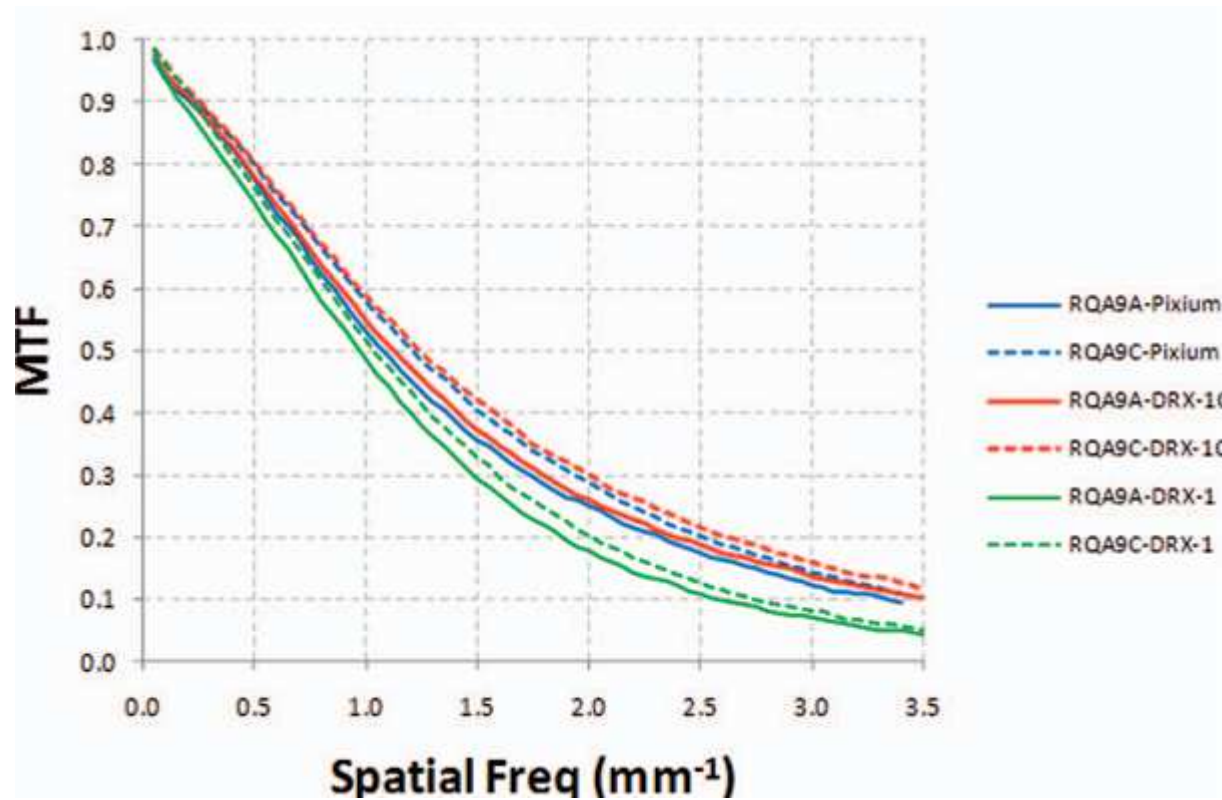
AFTER COSTAR

Modulation Transfer Function

(modulációs átviteli függvény)

- Tételezzük fel, hogy a PSF pozíció független
- Ekkor a PSF spektrumát érdemes vizsgálni:
 - TF (átviteli függvény): $\mathbf{H} = F\{\mathbf{h}\}$
- Elterjedt még az OTF / MTF felbontás is:
 - Optical Transfer Function: $\mathbf{H}/\mathbf{H}(0,0)$
 - Modulation Transfer Function: $|\mathbf{H}/\mathbf{H}(0,0)|$
- Effektív felbontás (zaj nélkül): $bw\{\mathbf{h}\}$
 - Képkotásban 0.5-ös MTF érték határozza meg

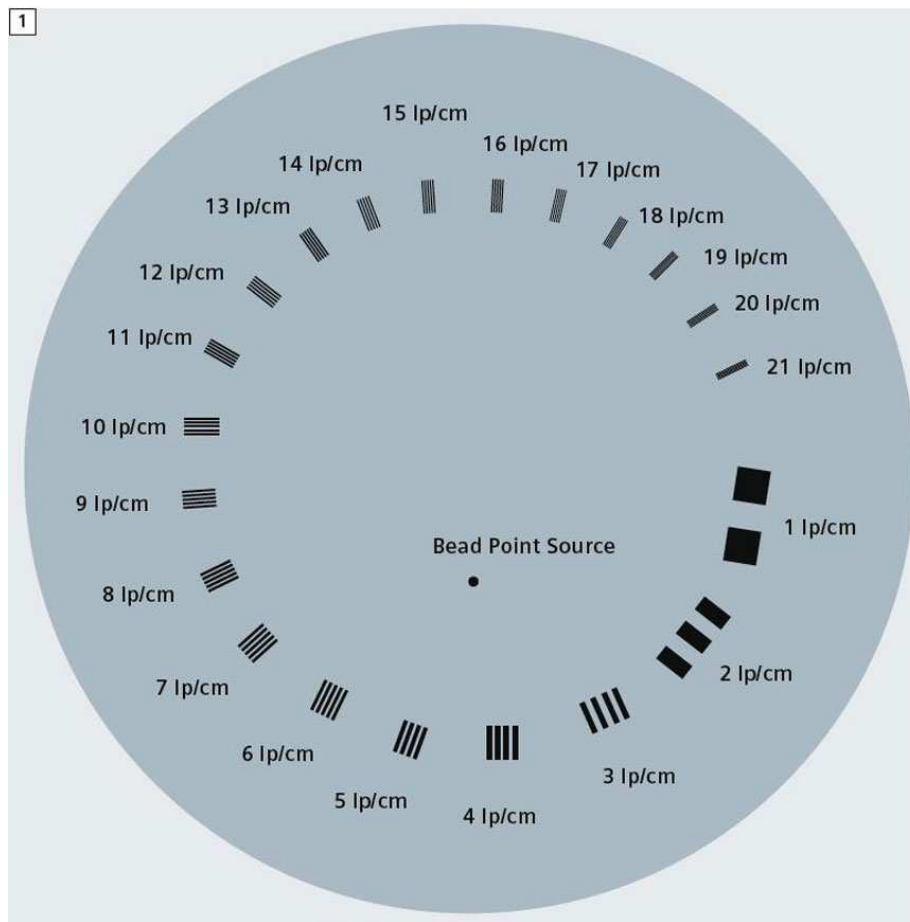
Röntgen detektor MTF példák



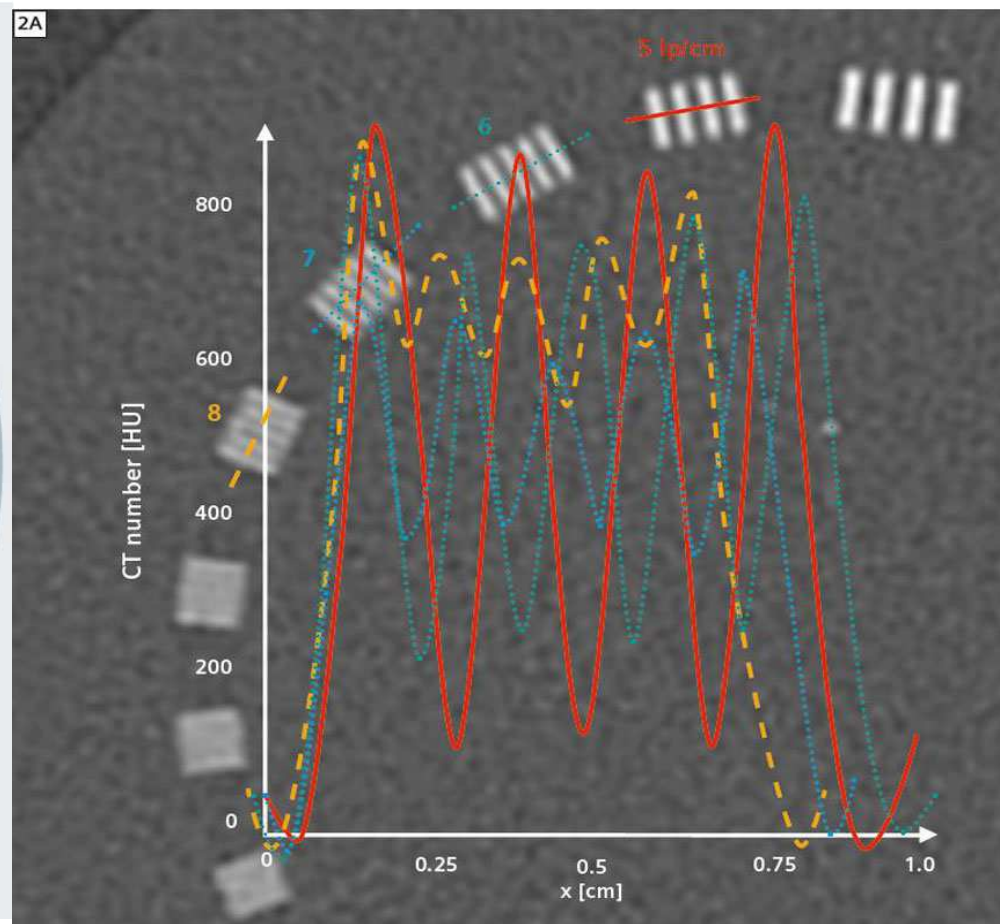
MTF mérése

- MTF definiálásánál LTI modellt használtunk:
 - Expected MTF: célja az alul-mintavételezés hatására keletkező moire hatásait degradálni
- Gyakori megvalósításai:
 - Vonalpár fantom: MTF származtatható belőle
 - Rés módszer: magas frekvencián pontosabb
 - Él módszer: alacsony frekvencián pontosabb
 - Általában egy irány mentén mérhető:
 - Ami a fantom elhelyezésétől függ

MTF mérése vonalpár fantomok



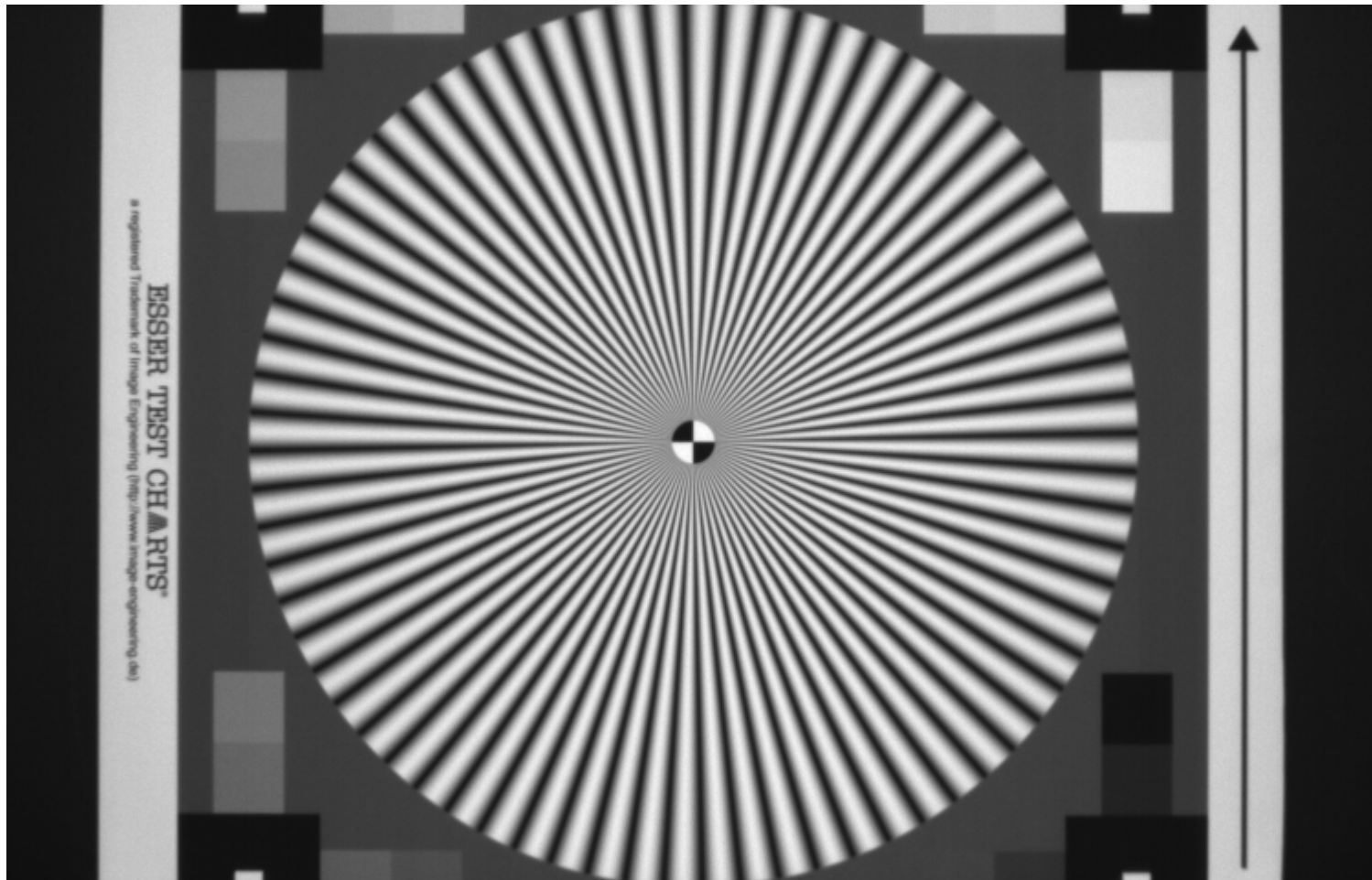
Catphan[®] 500



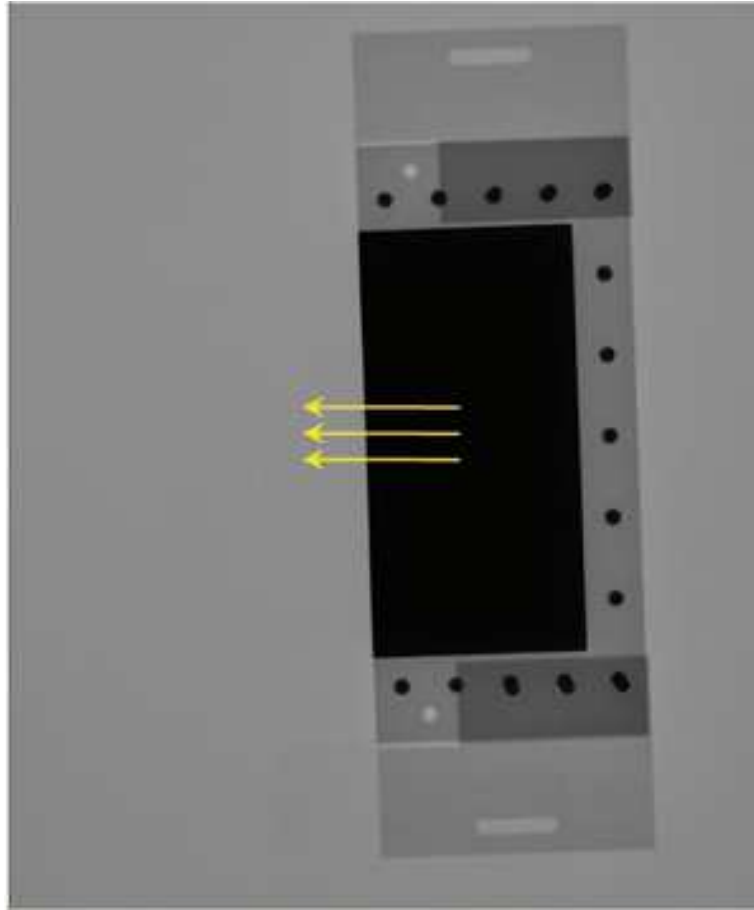
FBP-vel rekonstruált axiális szelet

MTF mérése vonalpár fantom

- Digitális fényképezőgépekhez készült fantom:

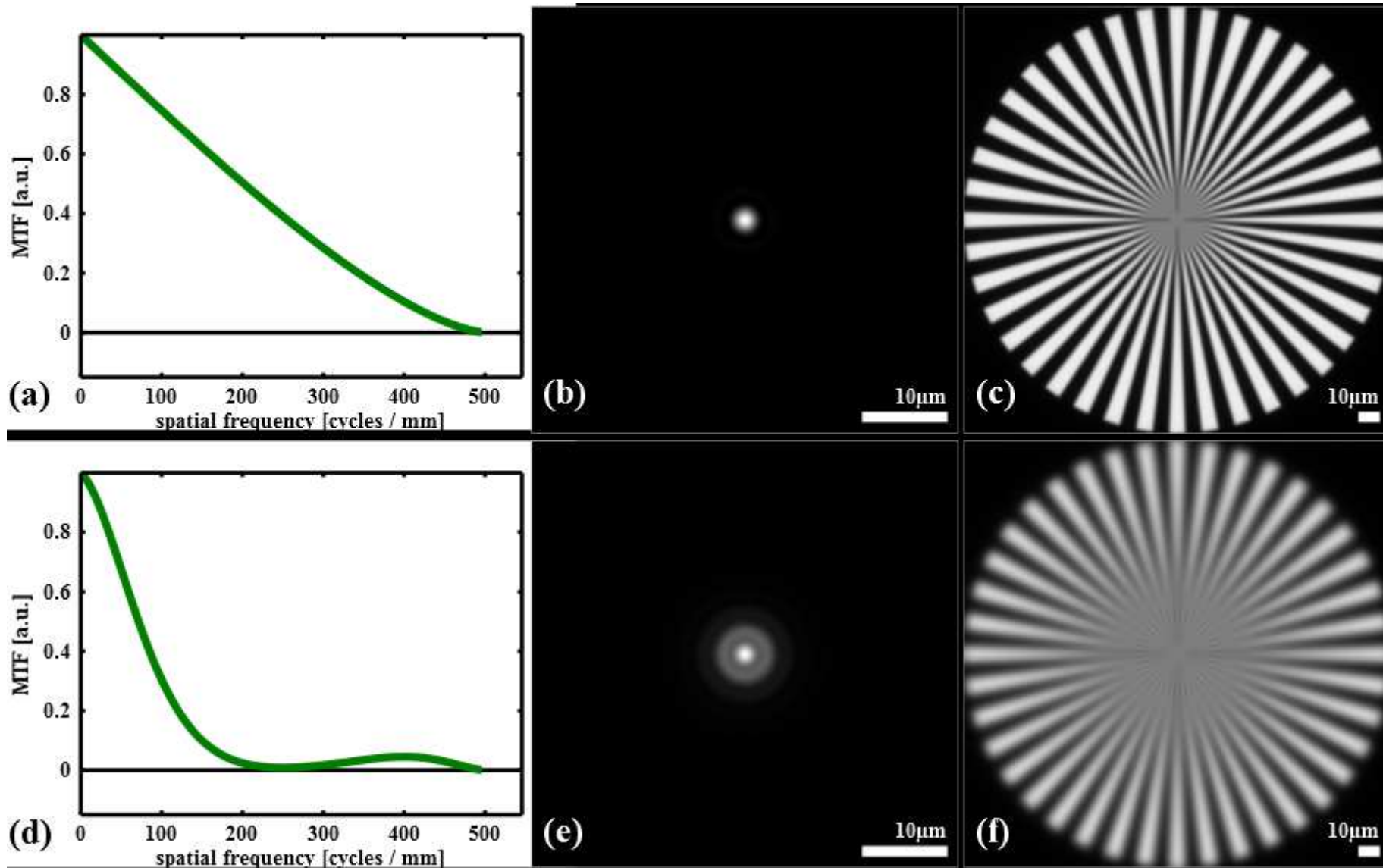


MTF mérése: él módszer

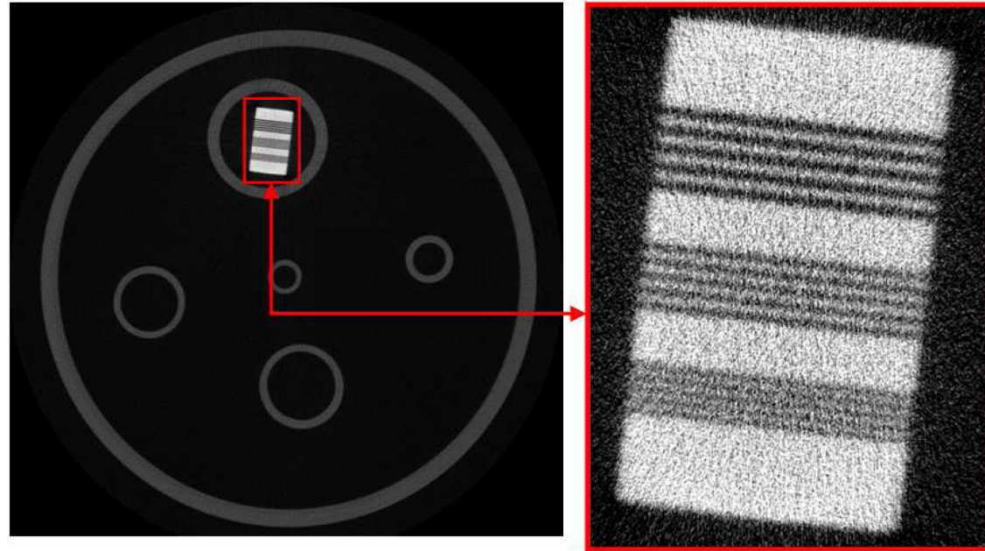


- A fantom éle a pixelek oszlopaival kis, de >0 szöget zár be.
- Így lehetőség nyílik az él „felül-mintavételezésére”, korrigálható az alul-mintavételezési probléma.
- Az élre merőleges derivált adja meg a PSF-et.

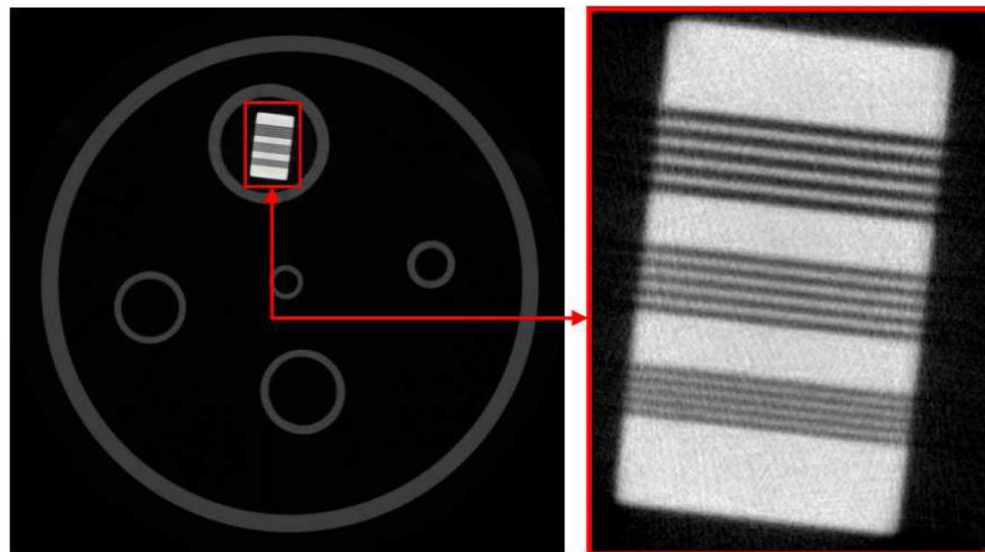
MTF – PSF közötti kapcsolat



MTF szerinti minősítés



(a)



(b)

Signal to Noise Ratio

(jel / zaj viszony)

- Általános jelfeldolgozásban:

$$SNR = 10 \cdot \log_{10} \left(P_{signal} / P_{noise} \right) = 20 \cdot \log_{10} \left(A_{signal} / A_{noise} \right) [dB]$$

- Általában additív zaj

- Képképző rendszerek esete:

- f homogén objektum legyen

- $SNR = \frac{\mu_{(x,y) \in N} \{I(x, y)\}}{std_{(x,y) \in N} \{I(x, y)\}}$

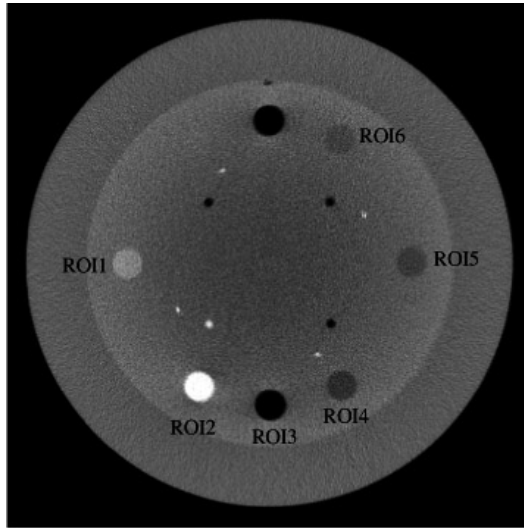
- N a homogén objektum képének kiterjedése, fontos, hogy elegendően nagy legyen
- Több felvételtől is mérhető

Contrast to Noise Ratio

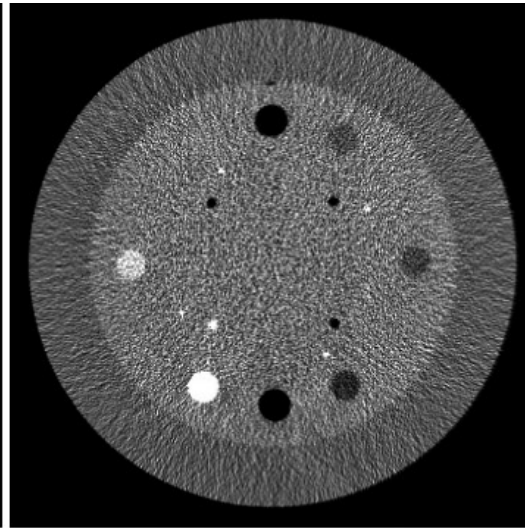
(kontraszt / zaj viszony)

- Kontraszt önmagában nem jó minősítő:
 - Gyakran főleg a zaj generálja
 - Objektumok elkülönítését javítja a jobb kontraszt, de degradálja a nagyobb zaj
- $CNR_{A,B} = C_{A,B} / \sigma_N = \left| \mu_{(x,y) \in A} \{I(x,y)\} - \mu_{(x,y) \in B} \{I(x,y)\} \right| / \text{std}_{(x,y) \in N} \{I(x,y)\}$
 - A, B a két elkülöníteni kívánt objektum képe
 - N azon régió, melyből becsülhető a képzaj:
 - Ennek konkrét megválasztása esetfüggő
 - Alkalmazása (mint metrika) főleg orvosi körben elterjedt

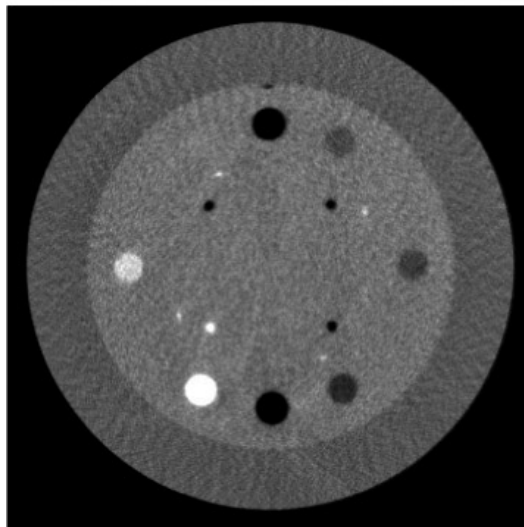
CNR mérése CT esetén



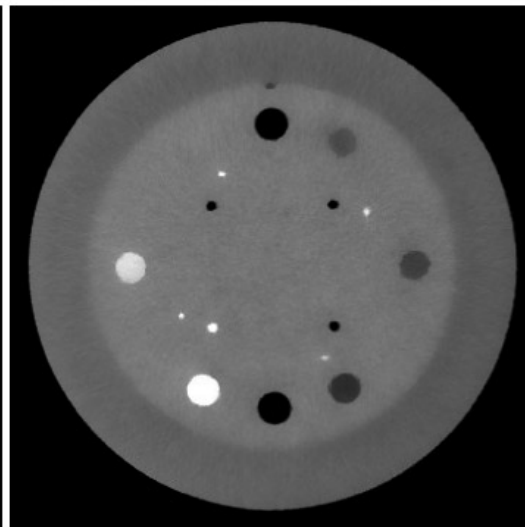
(a)



(b)



(c)



(d)

- Fontos, hogy nem tételez fel lineáris képkotást!
- Szeleten belüli felbontás vs. sugárdózis optimalizáció
- Nemlineáris rekonstrukciók minősítése

Catphan[®] 600

Röntgen kvantum jellemzői

- Kvantum: fotonok száma
- Fotonok eloszlása:
 - Érzékelő felületén/ időben nem egyenletes
 - Sugárzás inherens zaját ez a jelenség generálja
 - Ergodikus eloszlással írható le
 - Véletlen Poisson Folyamat: $p(k) = \frac{\lambda^k \exp(-\lambda)}{k!}$
 - λ várható érték esetén $\sqrt{\lambda}$ szórás
- Ideális képalkotó rendszer:
 - Plusz zajt nem generál ($SNR_{out} = SNR_{in}$)

Noise Power Spectrum

(zaj teljesítmény spektrum)

- A képzaj energiája frekvenciafüggő:

- NPS definíciója folytonos jel esetén:

$$NPS = \lim_{Nx, Ny, M \rightarrow \infty} \frac{1}{X \cdot Y} \left\langle \left| F \left\{ I^{(1:M)} - \bar{I} \right\} \right|^2 \right\rangle$$

- Diszkrét esetben:

$$NPS = \lim_{Nx, Ny, M \rightarrow \infty} \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{N_x \cdot N_y} \left\langle \left| F \left\{ I^{(1:M)} - \bar{I} \right\} \right|^2 \right\rangle$$

- $\Delta x, \Delta y$: detektor pixeleinek x és y irányú kiterjedése
- N_x, N_y : detektor x és y irányú logikai felbontása (pixeleinek a száma)
- $X = \Delta x \cdot N_x, Y = \Delta y \cdot N_y$ detektor fizikai mérete

Noise Power Spectrum

(zaj teljesítmény spektrum)

- A képzaj erőssége: $\int_{x,y} f(x,y) \cdot \exp(-2\pi j \cdot (ux + vy)) dydx$
- NPS definíciója:
$$NPS = \lim_{Nx, Ny, M \rightarrow \infty} \frac{1}{X \cdot Y} \left\langle \left| F \left\{ I^{(1:M)} - \bar{I} \right\} \right|^2 \right\rangle$$
- Diszkrét esetben:
$$NPS = \lim_{Nx, Ny, M \rightarrow \infty} \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{N_x \cdot N_y} \left\langle \left| F \left\{ I^{(1:M)} - \bar{I} \right\} \right|^2 \right\rangle$$
 - $\Delta x, \Delta y$ képfelbontás
 - N_x, N_y $\sum_{m,n} f[m,n] \exp\{-2\pi j \cdot (u \cdot m/M + v \cdot n/N)\}$ ábrája (pixeleinek a száma)
 - $X = \Delta x \cdot N_x, Y = \Delta y \cdot N_y$ detektor fizikai mérete

Noise Equivalent Quanta

(zaj ekvivalens kvantum)

- Normalized NPS:
 - Kompenzálja a rendszer erősítését
 - $NNPS(u, v) = NPS(u, v) / A^2$
 - $A \sim$ Mi a detektor válasza olyan helyen, melybe Q foton érkezik (kvázi a rendszer erősítése)
- Noise Equivalent Quanta:
 - Mennyi foton lenne szükséges ugyanazon képminőség eléréséhez, ha ideális lenne a képkotás
 - $NEQ(u, v) = MTF^2(u, v) / NNPS(u, v) = SNR^2(u, v)$

Detective Quantum Efficiency

(detektálási kvantumhatékonyság)

- Eddigi metrikáknál nem vizsgáltuk a dózistól / fotonok számától való függést:
 - $DQE(u, v) = NEQ(u, v) / Q(u, v)$
 - Q a vizsgált detektort elérő kvantum (fotonok száma, definiálható így is a dózis)
 - Fontos interpretáció:
$$DQE(u, v) = SNR^2(u, v) / SNR_{in}^2(u, v)$$
 - $SNR_{in}(u, v)$: érzékelőelemre belépő jel (pl. röntgensugár, fotonok) SNR –je
 - A kész rendszer „információ átvitelének” hatékonyságát méri, értéke 0 és 1 között változik.

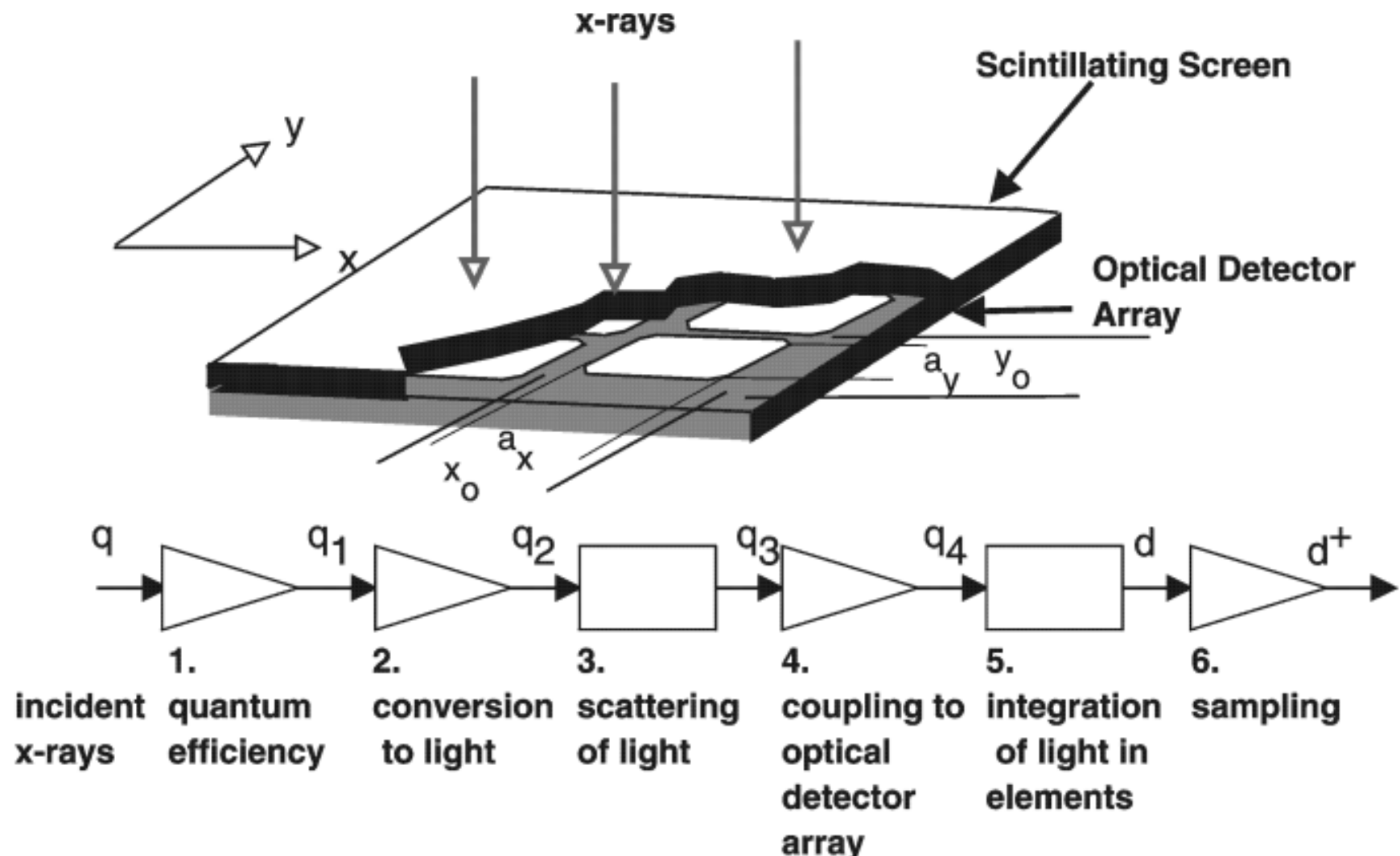
DQE számolási példák -1-

- Adott egy röntgen detektor, melyet az alábbi rendszer ír le:
 - Egy ideális detektor és egy csillapító réteg soros kaszkádja (pl. CsI szcintillátor), a csillapító réteg nem változtatja az átmenő sugárzás eloszlásának típusát.
 - A szcintillátor a felületét elérő röntgen fotonok $\frac{1}{4}$ -éből generál látható fotont, plusz zajt nem generál (nem szórja / keni el a fotonokat).
 - $Q=5000$ röntgen foton/ pixel éri a teljes rendszert.
 - $NEQ=?$ $DQE=?$ $SNR_{in}=?$ $SNR=?$

DQE számolási példák -2-

- Adott egy röntgen detektor, mely:
 - Ideális detektor, és zajos A/D átalakító soros kaszkádja, mely zaja ekvivalens 50 foton/pixel-el a belépő sugárzás fluxusában (inherens zaj).
 - A kiolvasási zaj és a detektort érő fotonok zaja Poisson eloszlású, egymással korrelálatlan.
 - $Q=10000$ foton/pixel éri a detektor felületét.
 - $NEQ=?$ $DQE=?$ $SNR_{in}=?$ $SNR=?$
- Jó közelítéssel ez a két zajforrás aggregálódik (Hf. az aggregát rendszer metrikái).

Röntgen detektor kvantum modellje



És mi a valóság?

- Gyakorlatban integráló típusú detektorok:
 - Detektorok erősen érzékenyek a becsapódó fotonok energiájára:
 - Szcintillátor anyagának a függvénye a történet
 - Gyakorlatban van egy energiafüggő valószínűség
 - Az eddig tárgyalt elmélet erősen egyszerűsít
 - DE nincs ennél jobb általános modell
 - Legalábbis hasonló komplexitású
 - Vagy a nagy számok törvénye – Gauss zaj, de ezt inkább hanyagoljuk.