

# Fourier térbeli analízis

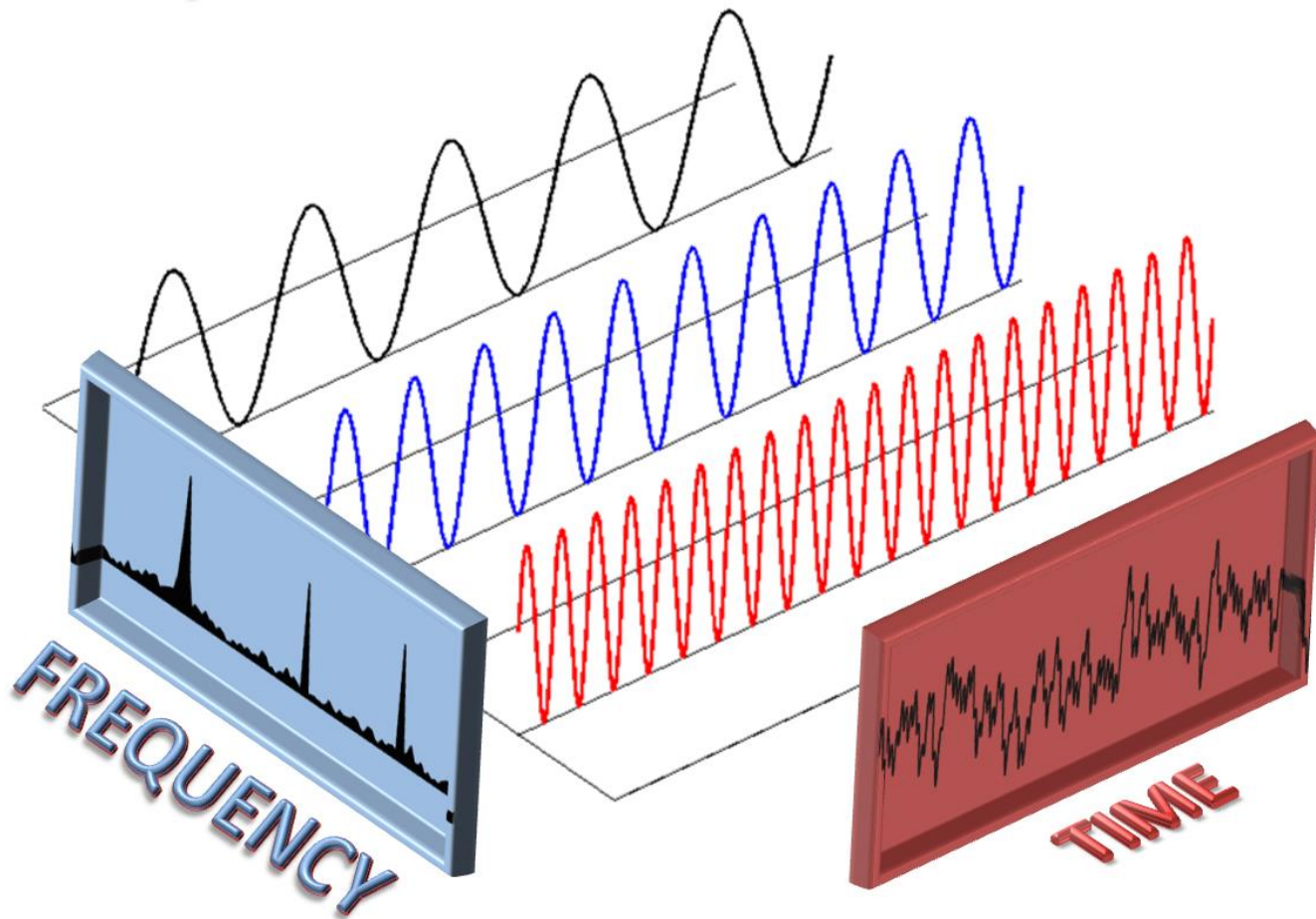
Orvosi képdiagnosztika

2023 ősz

# Előadás témái

- Fourier transzformációk és kapcsolataik:
  - FS, FT, DTFT, DFT, DFS
  - Mintavételezés, interpoláció

# Folytonos Fourier Transzformáció



# Folytonos Fourier Transzformáció

- Lineáris transzformáció a véges energiájú, folytonos függvények tere felett:

$$- F(\omega) = FT\{f\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\{-j \cdot x \cdot \omega\} dx$$

$$- f(x) = FT^{-1}\{F\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp\{j \cdot x \cdot \omega\} d\omega$$

- Legfontosabb tulajdonságai:

$$- \text{Konvolúció tétele: } (f * g) = FT^{-1}\{(F \cdot G)(\omega)\}$$

$$- \text{Fordított konvolúció: } ((f \cdot g)(x)) = \frac{1}{2\pi} FT^{-1}\{F * G\}|_x$$

$$- \text{Parseval tétele: } E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

# Folytonos Fourier Transzformáció

– Valós jel spektruma:  $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$

– Páros, valós jel spektruma:

$$F(-\omega) = \operatorname{Re}\{F(-\omega)\} = \operatorname{Re}\{F(\omega)\} = F(\omega)$$

– Páratlan, valós jel spektruma:

$$F(-\omega) = \operatorname{Im}\{F(-\omega)\} \cdot j = \operatorname{Im}\{F(\omega)\} \cdot (-j) = \overline{F(\omega)}$$

– Periodikus jel spektruma diszkrét:

$$F(\omega) = 0, \text{ ha } \omega \neq k \cdot (2\pi \cdot f) \Big|_{k \in \mathbb{Z}}$$

– Ekvivalens egy unitér transzformációval:

- Ez pl. maga után vonja a bijektivitást

# Folytonos Fourier Sorfejtés

- Lineáris transzformáció a periodikus folytonos függvények tere felett:

$$- c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cdot \exp(-j \cdot x \cdot 2\pi n/T) dx; \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$- f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \exp\{j \cdot x \cdot 2\pi n/T\}$$

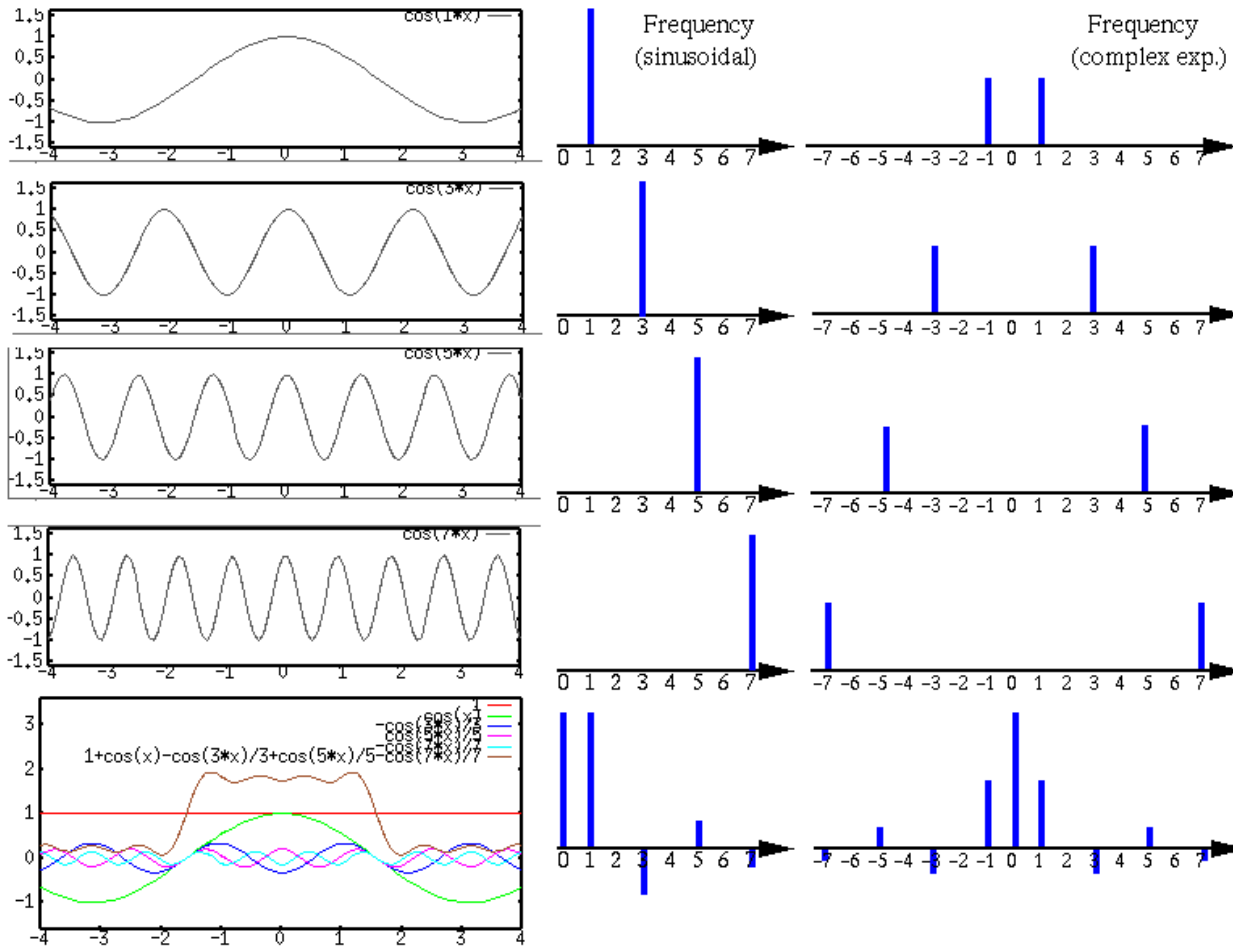
- Kapcsolat a folytonos FT-val:

– Mintavételezi a spektrumot:  $c_n \propto F(2\pi \cdot n/T)$

– Periodikus jel  $\Leftrightarrow$  diszkrét spektrum

– Egyéb tulajdonságokat örökli a folytonos FT-től

# Folytonos Fourier Sorfejtés – 1D



# Diszkrét idejű Fourier Transzformáció (DTFT)

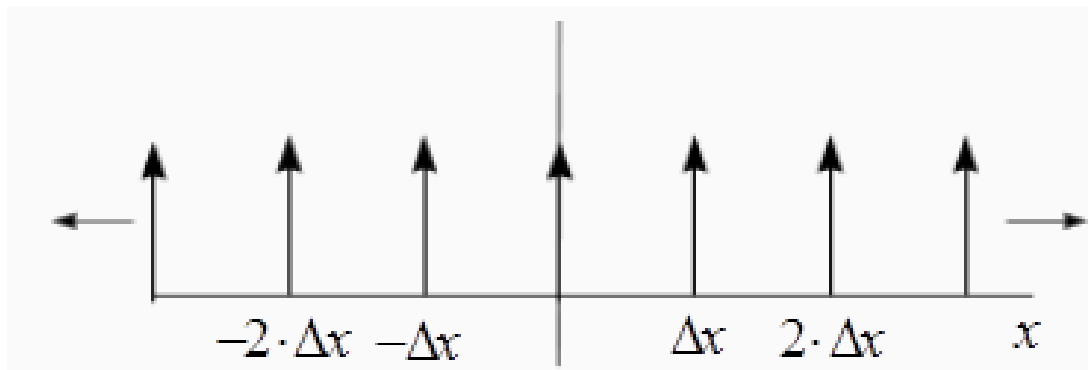
- Adott egy mintavételezéssel előállt végtelen hosszú, abszolút összegezhető jel:  $f[n]$
- Definíció:
  - $X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \exp\{-j \cdot \omega \cdot n\}$
  - $x[n] = 1/2\pi \cdot \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) \exp\{j \cdot \omega \cdot n\} d\omega$
- Alapvető tulajdonságok:
  - $n \in \mathbb{Z}$ , de  $\omega \in \mathbb{R}$
  - $X(\omega + 2 \cdot k \cdot \pi) \Big|_{k \in \mathbb{Z}} = X(\omega)$
  - Egyéb tulajdonságait örökli a folytonos FT-től



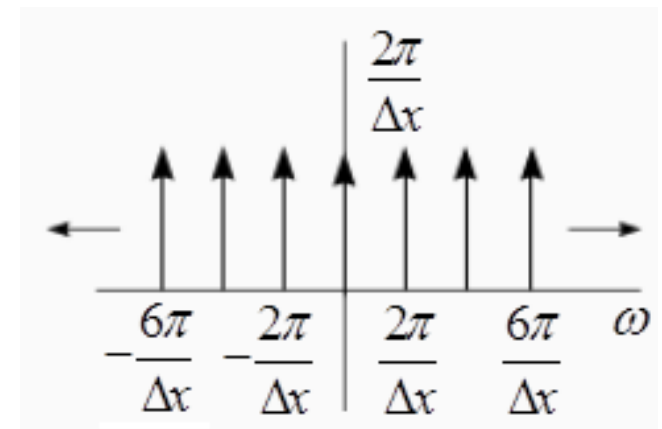
# Matematikai mintavételezés

## Folytonos FT és DTFT kapcsolata

- Végtelen impulzus fésű:
  - Matematikai mintavételezés: folytonos jel elemenkénti szorzata az impulzus fésűvel.
  - Időtartománybeli szorzás  $\Leftrightarrow$  Spektrumok konvolúciója



Impulzusfésű az időtartományban



frekvenciatartományban

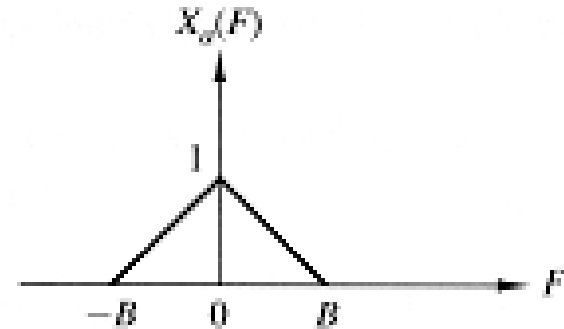
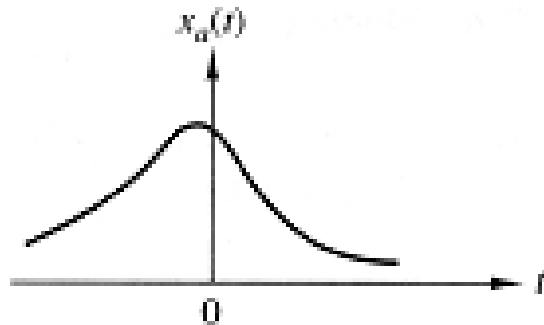
# Mintavett jel spektruma

- Formálisan a mintavett jel spektruma:

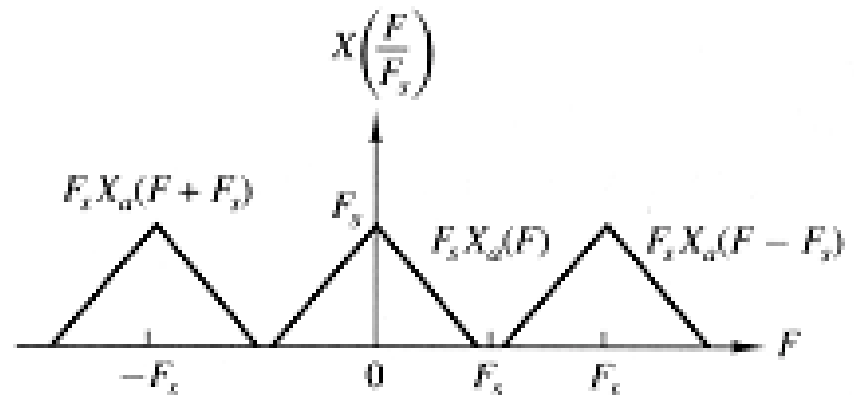
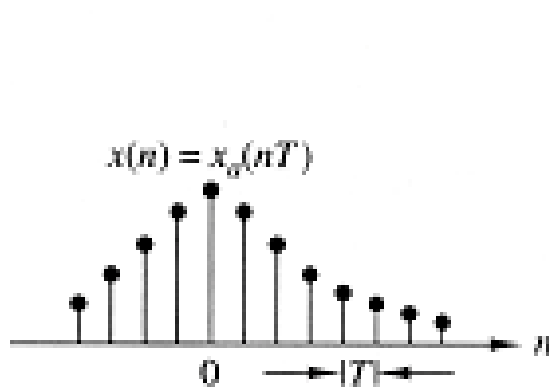
$$X_s(\omega) = \frac{2\pi}{\Delta x} X(\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{\Delta x}\right) = \frac{2\pi}{\Delta x} \sum_k X\left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{\Delta x}\right)$$

- $\Delta x$ : mintavételezések távolsága
  - $X(\omega)$ : folytonos idejű jel spektruma
  - $X_s(\omega)$ : mintavételezett jel spektruma
- Nyquist mintavételi törvény:
    - $bw\{x\} < (1/2) \cdot f_s; f_s = (1/\Delta x)$
    - Ha nem tartjuk be alul mintavételezés:  $K \cdot X_s(\omega) \neq X(\omega)$

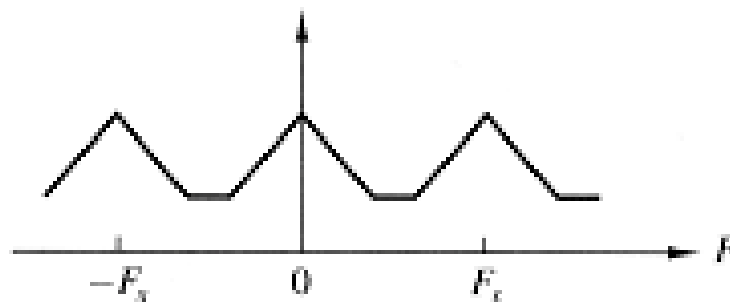
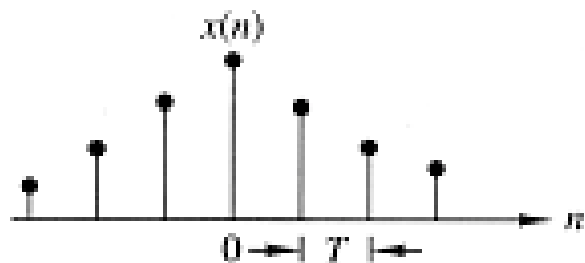
# Helyesen mintavételezés interpretációja



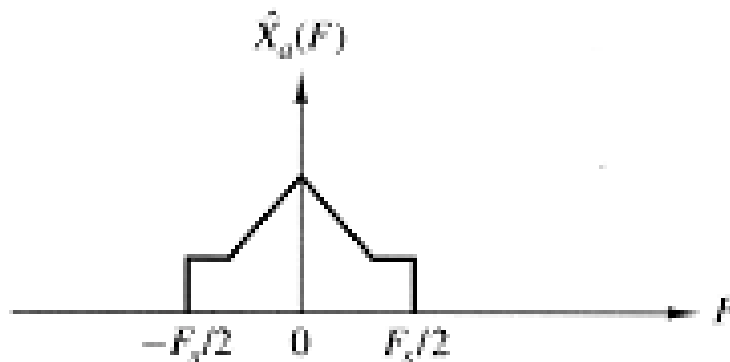
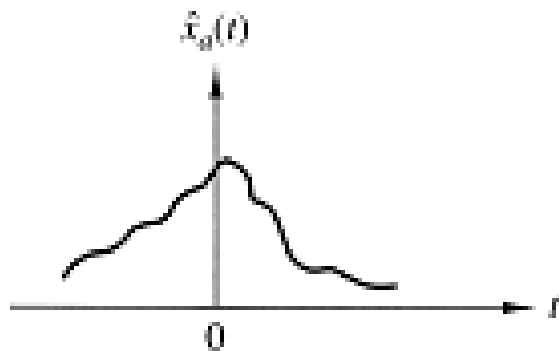
(a)



# Alul mintavételezés interpretációja spektrum átlapolódása



(d)



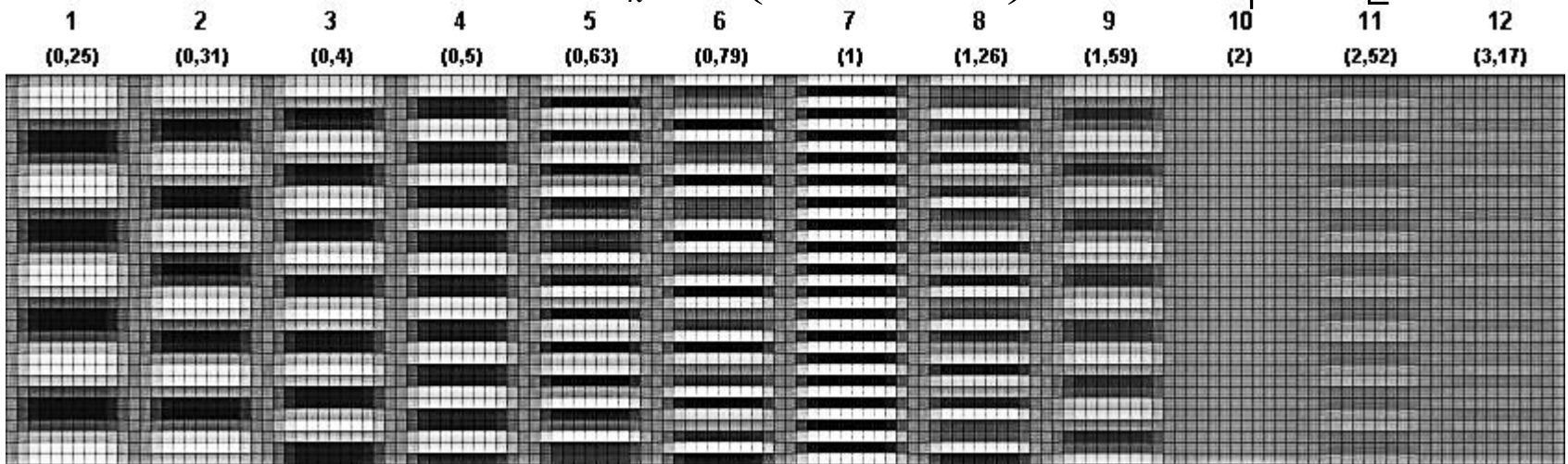
# Spektrum átlapolódása moire / aliasing

- Spektrum átlapolódása által generált jeltorzulás



# Spektrum átlapolódása - aliasing

- Aliasing :  $X_s(\omega) \propto \sum_k X\left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{\Delta x}\right) \neq X(\omega) \Big| \omega \in \left[-\frac{\pi}{\Delta x}, \frac{\pi}{\Delta x}\right]$



- Anti-aliasing filter – mintavételezés előtti alul-áteresztő szűrés:
  - Pl. Bayer szűrős fényképezőgépeknél optikai szűrő
  - Radiológiában az elkent PSF-ek miatt elhagyható

# Mintavett jel rekonstrukciója

- Rekonstrukció (interpoláció):
  - Cél: a mintavételezett jel értékének előállítása két mintavételezési pont között
  - Ha sérült a mintavételezési törvény, akkor lehetetlen
  - LTI rendszerrel:  $x_R = x_S * h_R$
  - Ideális interpolációs kernel:
    - $H_R(\omega) = \begin{cases} K & |-\omega_L \leq \omega \leq \omega_L \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad \omega_L = 2\pi \cdot f_S / 2$
    - $h_R \propto \text{sinc}(\omega_L \cdot x)$

# Interpoláció hibái

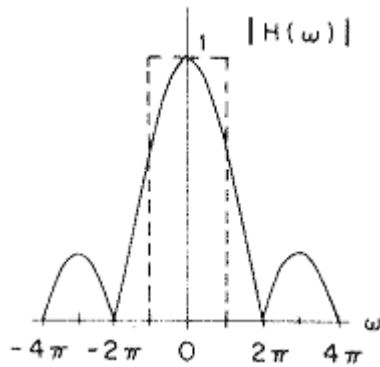
- Megfigyelt tartomány széle:
  - Súlyfüggvény „kilóg” a megfigyelt tartományból
- $|H_R(\omega)| \neq 0$   $|\omega| > 2\pi f_s/2$  esete:
  - Lényegesen jelentősebb hibaforrás
  - Mintavett jel rekonstrukciója:
    - $X_R(\omega) = H_R(\omega) \cdot X_S(\omega) \propto \sum_k H_R(\omega) \cdot X\left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{\Delta x}\right)$
    - $X_R(\omega) \neq X(\omega)$ , ha  $|\omega| > 2\pi f_s/2$
  - Példa rá a Nearest Neighbour interpoláció (ZOH)



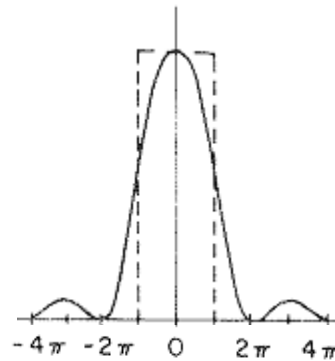
# Interpolációk összehasonlítása

- Átviteli/súlyfüggvényük analízisével:

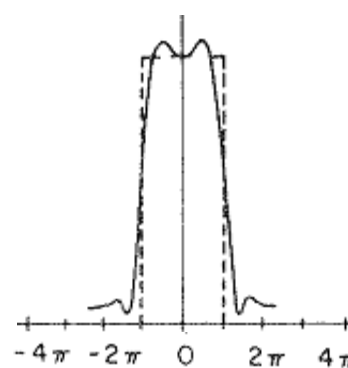
Nearest Neighbour



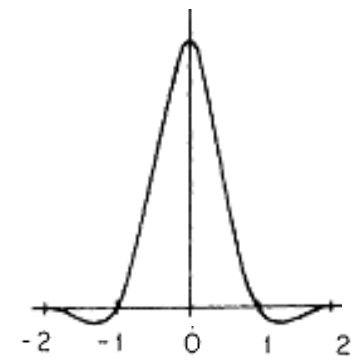
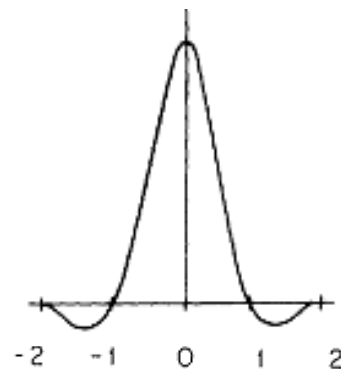
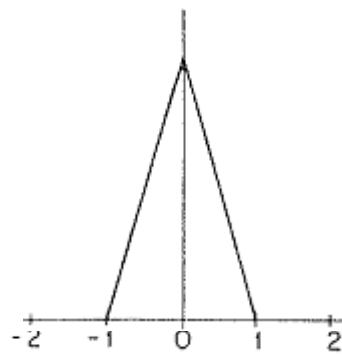
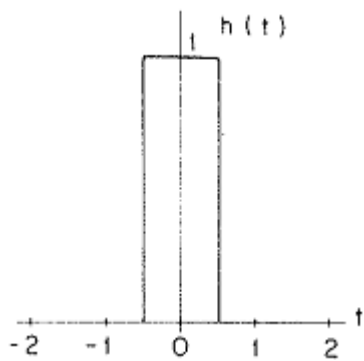
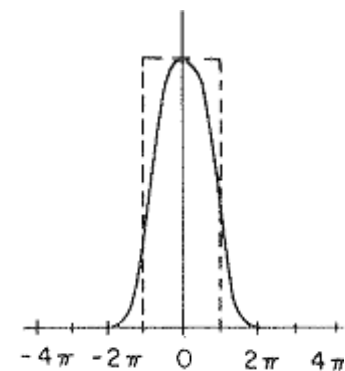
Lineáris



Köbös Spline



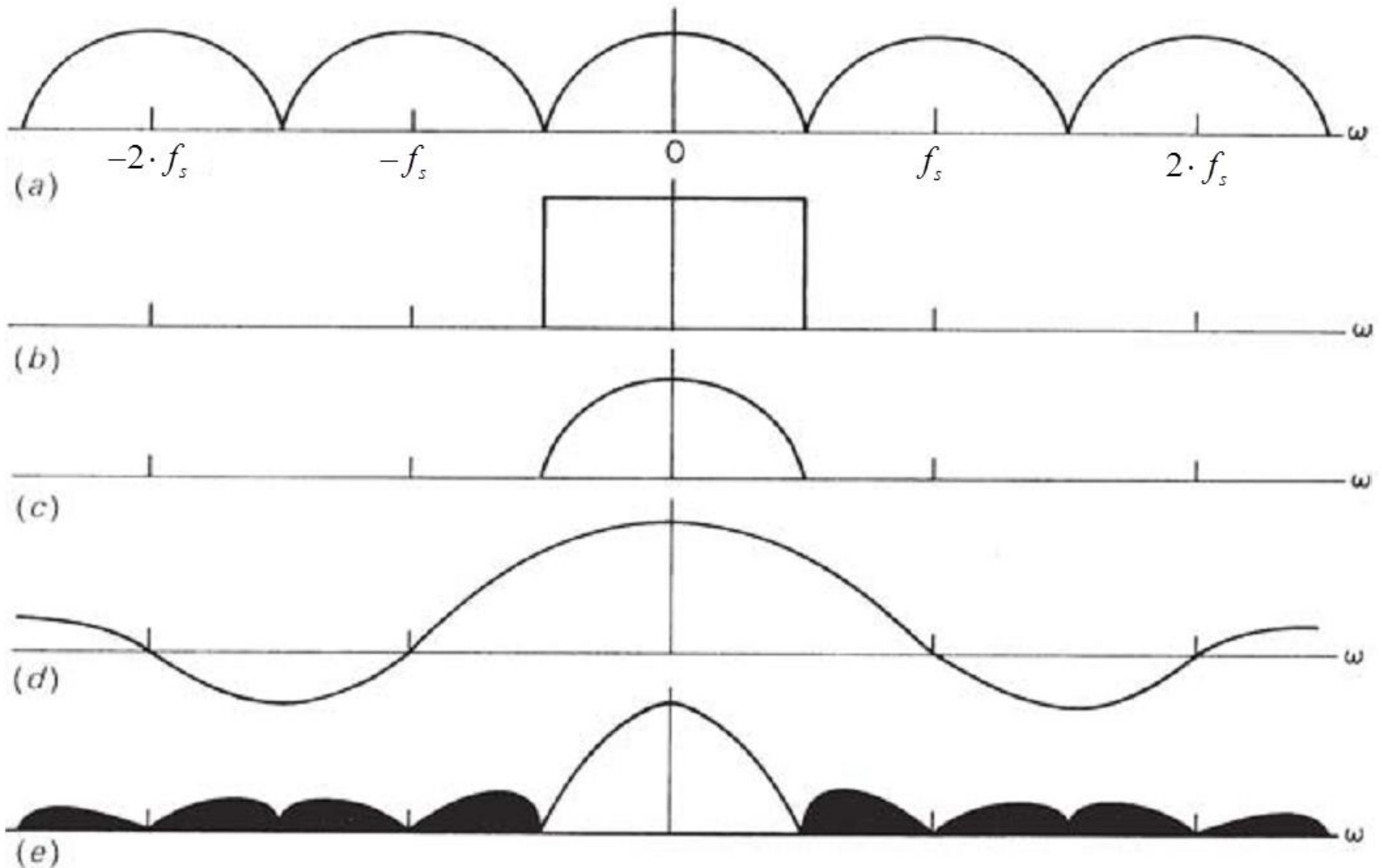
Köbös B-Spline



Átviteli függvény

Súlyfüggvény

# (Hibás) interpoláció vizualizációja



# Integráló mintavételezés

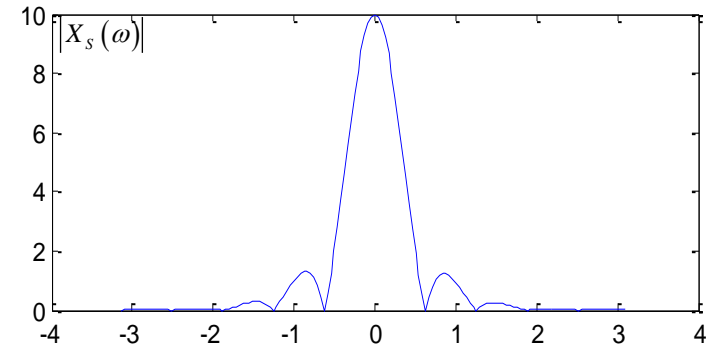
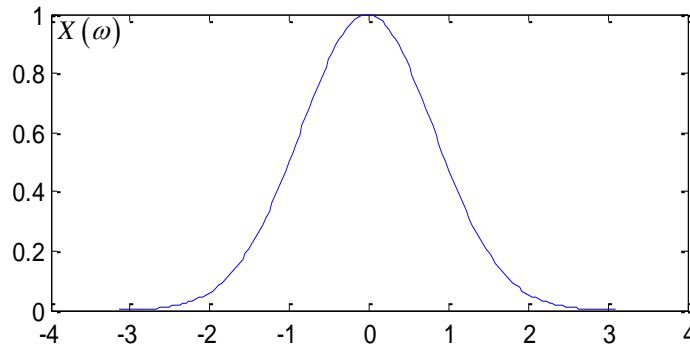
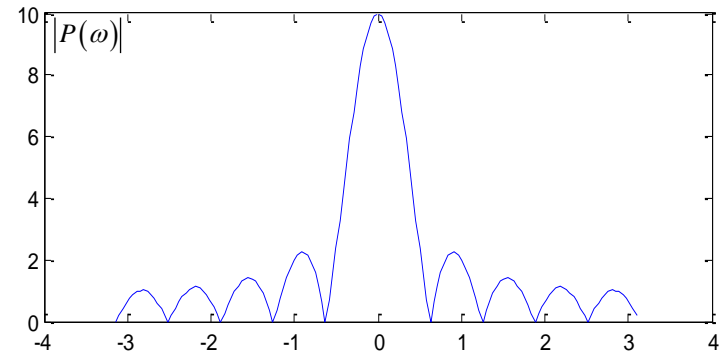
- Érzékelők integrálják a fotonokat:
    - Érzékelőelemek homogén súlyfüggvénye:  $p(x)$
    - Adekvát az alábbi modell:
      1. Megszűrjük a folytonos jelet az érzékelők súlyfüggvényével
      2. Elvégezzük a matematikai mintavételezést
- $$X_s(\omega) \propto (X(\omega) \cdot P(\omega)) * \left( \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{\Delta x}\right) \right)$$
- Ha az érzékelőelemek súlyfüggvénye nem homogén, akkor nem modellezhető LTI rendszerrel

# Integráló mintavételezés - példa

- Ideális, integráló mintavételezés esete:

$$- p(x) = \begin{cases} 1/\Delta_x & ||x| < \Delta_x/2 \\ 0 & ||x| > \Delta_x/2 \end{cases}$$

$$- P(\omega) = \text{sinc}(\Delta x \cdot \omega/2)$$



# Diszkrét Fourier Transzformáció (DFT)

- Diszkrétizált jelet  $N$  pontban ismerjük:

$$- X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\{-j \cdot n \cdot (k \cdot 2\pi/N)\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\{-j \cdot n \cdot k \cdot \Delta\omega\}$$

$$- x[n] = (1/N) \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot \exp\{j \cdot 2\pi kn/N\}$$

- Kapcsolat a DTFT-vel:

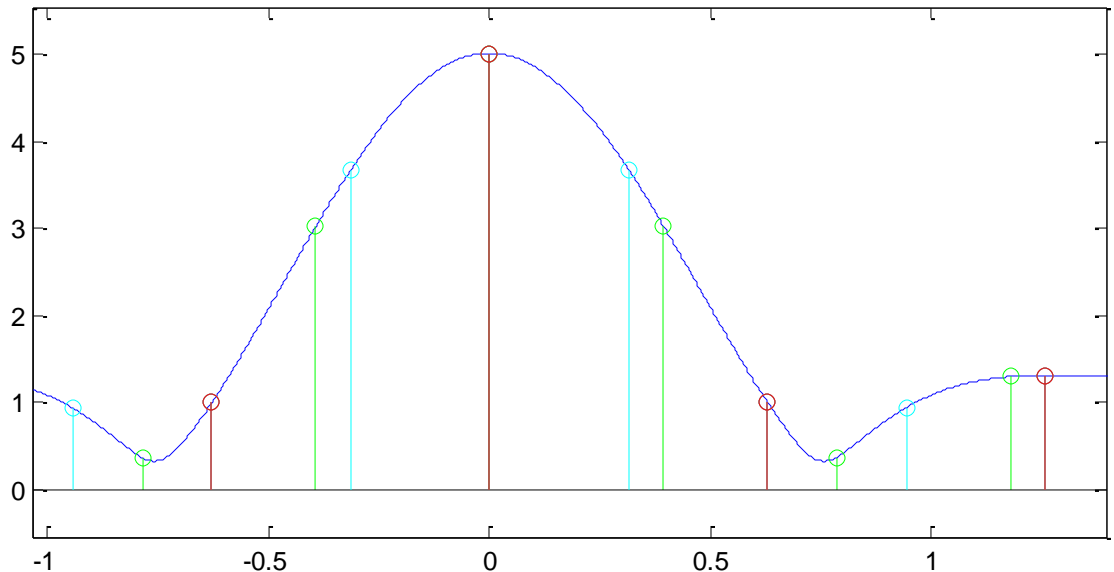
$$- x[n] = \begin{cases} y[n] & n \in [0, 1, \dots, N-1] \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad \text{megfigyelési ekvivalens}$$

- DFT mintavételezi a megfigyelési ekvivalens DTFT spektrumát:  $Y_k = X(k \cdot \Delta\omega)$

- $C^N$  feletti ortogonális transzformáció, mi a mátrixa?

# DFT pontszáma

- Megfigyelési ekvivalens DTFT spektrumát tetszőleges felbontással mintavételezhetjük:
  - Ha  $M$  minta érdekel, akkor  $M-N$  db 0-val paddelünk
  - A fizikai (folytonos) jel spektrumáról ezáltal nem tudunk meg többet!
  - 2-Radix FFT



# DFT és a DFS kapcsolata

- A DFT által meghatározott spektrum diszkrét:

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot \exp\{j \cdot 2\pi kn/N\} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot \exp\{j \cdot (2\pi kn/N + 2\pi k)\} = x[n + N] \end{aligned}$$

- Lényegében **Diszkrét Fourier Sorfejtés (DFS)**
- DFT kapcsolata a Diszkrét Fourier Sorfejtéssel:
  - DFT időtartományban véges idejű diszkrét jelet vár
  - DFS periodikus, végtelen idejű diszkrét jelet vár
  - Ezt leszámítva identikusak.

# DFT és FFS kapcsolata

- Vizsgáljuk a mintavételezett jelet folytonos időben:

$$- x_s(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t) \text{ és } x_s(t + N \cdot \Delta t) = x_s(t)$$

$$- c_k = \frac{1}{N \cdot \Delta_t} \int_{0-0}^{N\Delta t-0} x_s(t) \cdot \exp\left\{-j \cdot t \cdot k \cdot \frac{2\pi}{N \cdot \Delta_t}\right\} dt =$$
$$= \frac{1}{N \cdot \Delta_t} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\left\{-j \cdot n \cdot \frac{k \cdot 2\pi}{N}\right\} \propto \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\{-j \cdot n \cdot k \cdot 2\pi/N\}$$

- Mintavételezés hatásai:

- DFT felbontása:  $\Delta f = f_s / N = 1 / (N \cdot \Delta_t)$   $\omega_k = 2\pi \cdot k \cdot \Delta f$
- Aliasing (már volt)



# DFT és FFS kapcsolata

- Vizsgáljuk a mintavételi időben:

A megfigyelt jelrészlet egy periódusa egy folytonos periodikus jelnek.

$$- x_s(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t) \text{ és } x_s(t + N \cdot \Delta t) = x_s(t)$$

FFS

$$- c_k = \frac{1}{N \cdot \Delta_x} \int_{0-0}^{N\Delta_x-0} x_s(t) \cdot \exp\left\{-j \cdot t \cdot k \cdot \frac{2\pi}{N \cdot \Delta_x}\right\} dt =$$

$$= \frac{1}{N \cdot \Delta_x} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\left\{-j \cdot n \cdot \frac{k \cdot 2\pi}{N}\right\} \propto \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\{-j \cdot n \cdot k \cdot 2\pi/N\}$$

DFT

- Mintavételezés hatásai:

- DFT felbontása:  $\Delta f = f_s / N = 1 / (N \cdot \Delta x)$   $\omega_k = 2\pi \cdot k \cdot \Delta f$
- Aliasing (már volt)

# Spektrumszivárgás - ablakozás

- DFT kapcsolata a DTFT-vel és a DFS-el:
  - Impliciten cirkuláris jelet feltételez (DFS)
  - Tegyük fel, hogy az eredeti jelünk (végtelen terjedelmű) véges részét tudtuk mintavételezni:

$$h[n] = \text{rect}_T[n], \quad y[n] = y_\infty[n] \cdot h[n]$$

- Ideális esetben:  $Y_{(k)} = Y_\infty(k \cdot \Delta\omega)$
- A valóságban:  $Y_{(k)} = 1/2\pi \cdot (Y_\infty * H)(k \cdot \Delta\omega)$
- Cél lenne a DTFT spektrumot szivárgás nélkül mintavételezni:  $Y_{(k)} := Y_\infty(k \cdot \Delta\omega)$

# Spektrumszivárgás - ablakozás

- DFT kapcsolata a DTFT-vel és a DFS-el:

- Impliciten cirkuláris jelet feltételez (DFS)

- $\sum_{k=1}^T \delta[n-k]$ , hogy Végtelen kiterjedésű mintavételezett jel (megfigyelési ekvivalens) ni:

$$h[n] = \text{rect}_T[n], \quad y[n] = y_\infty[n] \cdot h[n]$$

- Ideális esetben:  $Y_{(k)} = Y_\infty(k \cdot \Delta\omega)$
- A valóságban:  $Y_{(k)} = 1/2\pi \cdot (Y_\infty * H)(k \cdot \Delta\omega)$
- Cél lenne a DTFT spektrumot szivárgás nélkül mintavételezni:  $Y_{(k)} := Y_\infty(k \cdot \Delta\omega)$

# Spektrumszivárgás - ablakozás

– Tehát a megfigyelt jel DFT spektruma:

$$Y_k = 1/2\pi \cdot (Y * H)(k \cdot \Delta\omega)$$

–  $h[n]$  az úgynevezett ablak függvény

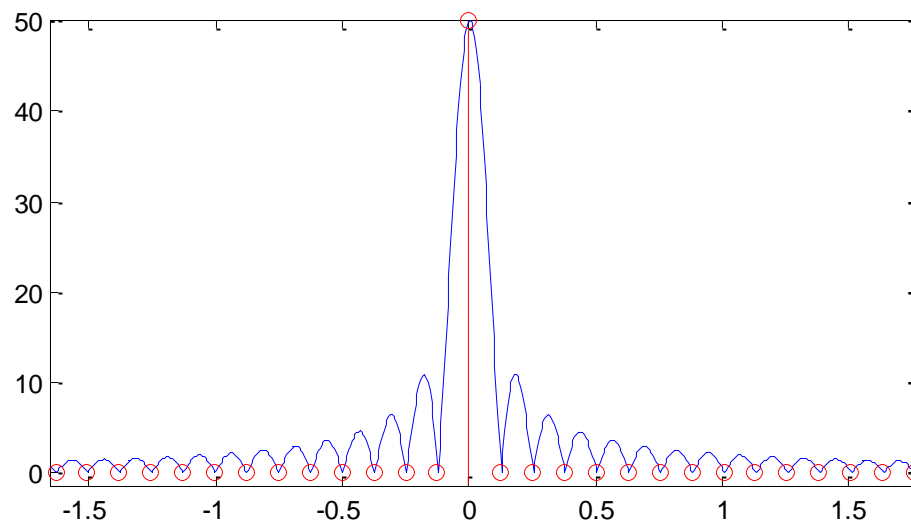
- Ha expliciten nem ablakozunk, akkor:  $h[n] = \text{rect}_T[n]$

Pl.:  $T = 50$

Kék görbe: rect ablak DTFT  
spektrum amplitúdója

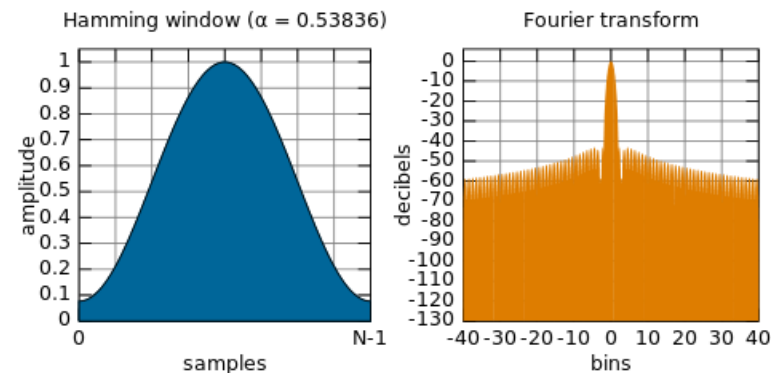
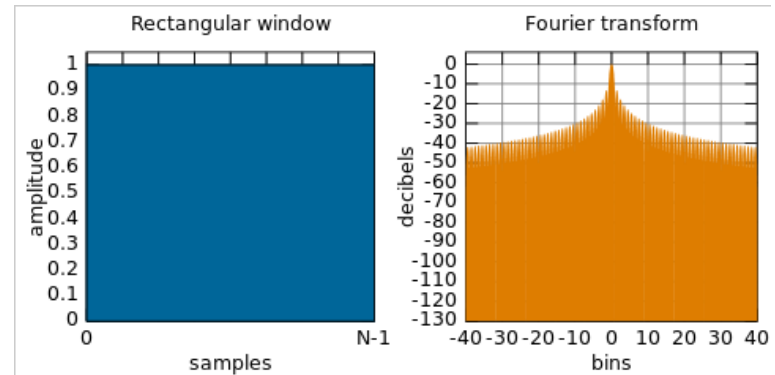
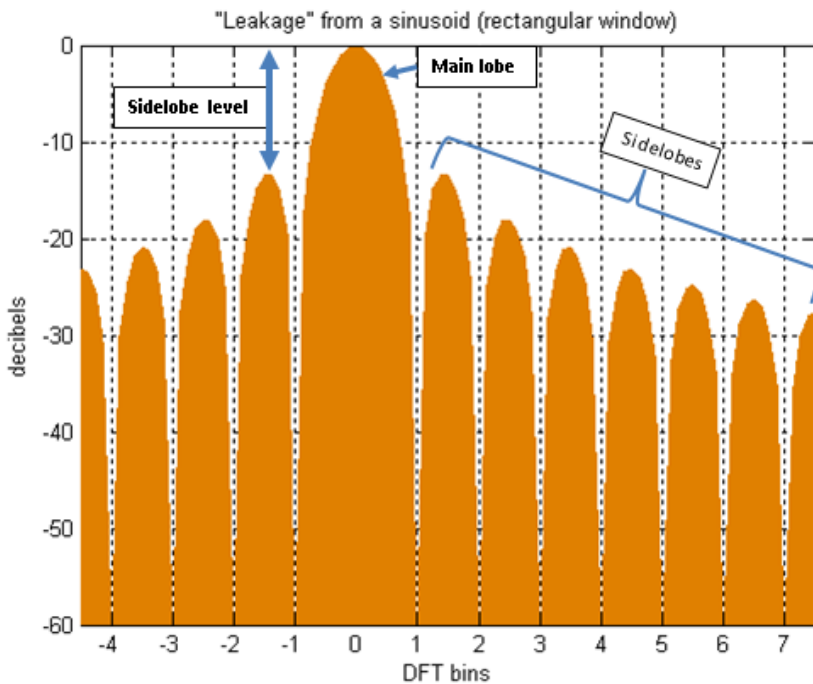
Piros pontsor: rect ablak DFT  
spektrum amplitúdója

Mikor nincs spektrumszivárgás?



# Spektrumszivárgás - ablakozás

- DFT előtti ablakozás:
  - Képtérben az általunk definiált  $h[n]$ -el szorzunk
  - Ablakfüggvények tulajdonságai:

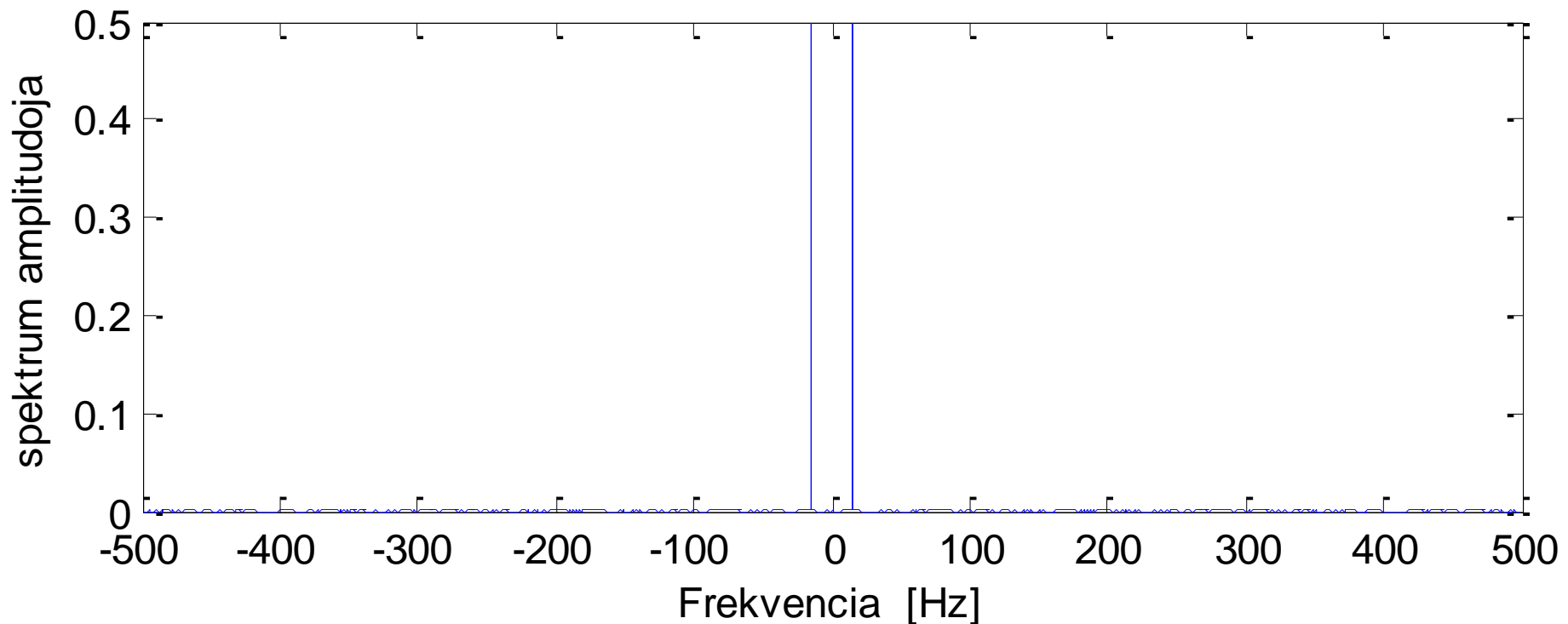


# Koherens mintavételezés

- Periodikus jelből egész számú periódusnyit mintavételezünk ( $y_N$ ):  $N/f_s = k/f$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ 
  - $f$ : periodikus jelünk frekvenciája,  $N$ : minták száma
  - $N$  pontos négyzetes ablak DTFT spektruma:
    - $H_{rect} = \sin(\omega/\Delta\omega)/(\omega/\Delta\omega)$
    - $H_{rect}(k \cdot \Delta\omega) = \delta_{k,0}$  ha  $k \in \mathbb{Z}$
    - $Y_s(\omega) = 0$ , ha  $\omega \neq k \cdot \Delta\omega \big|_{k \in \mathbb{Z}}$
  - Tehát a DFT által mintavételezett frekvenciákon nem torzul az ablakozás miatt a DTFT spektruma
  - Különben Spektrumszivárgás.

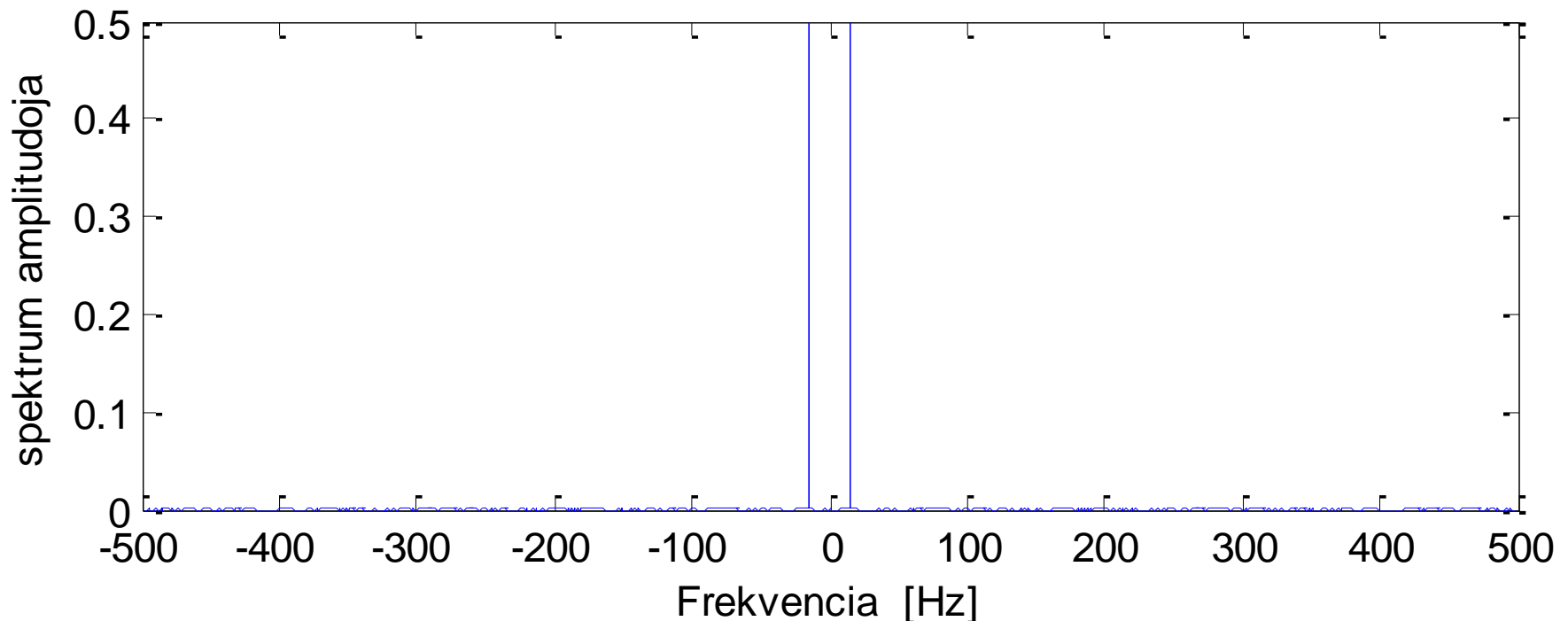
# Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

- Adott folytonos jel:  $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$



# Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

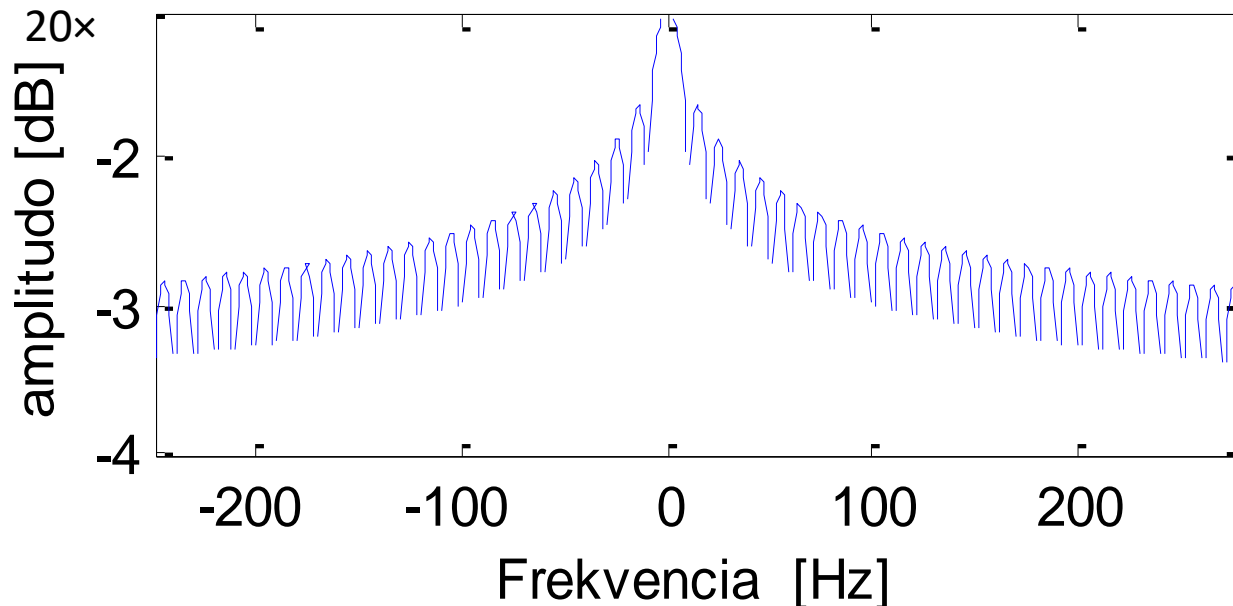
- Adott folytonos jel:  $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$ 
  - Mintavételezzük ( $y_\infty[\cdot]$ ):  $f_s = 1\text{kHz}$ ,  $N = \infty$
  - Mivel a mintavételi törvényt nem sértjük meg:





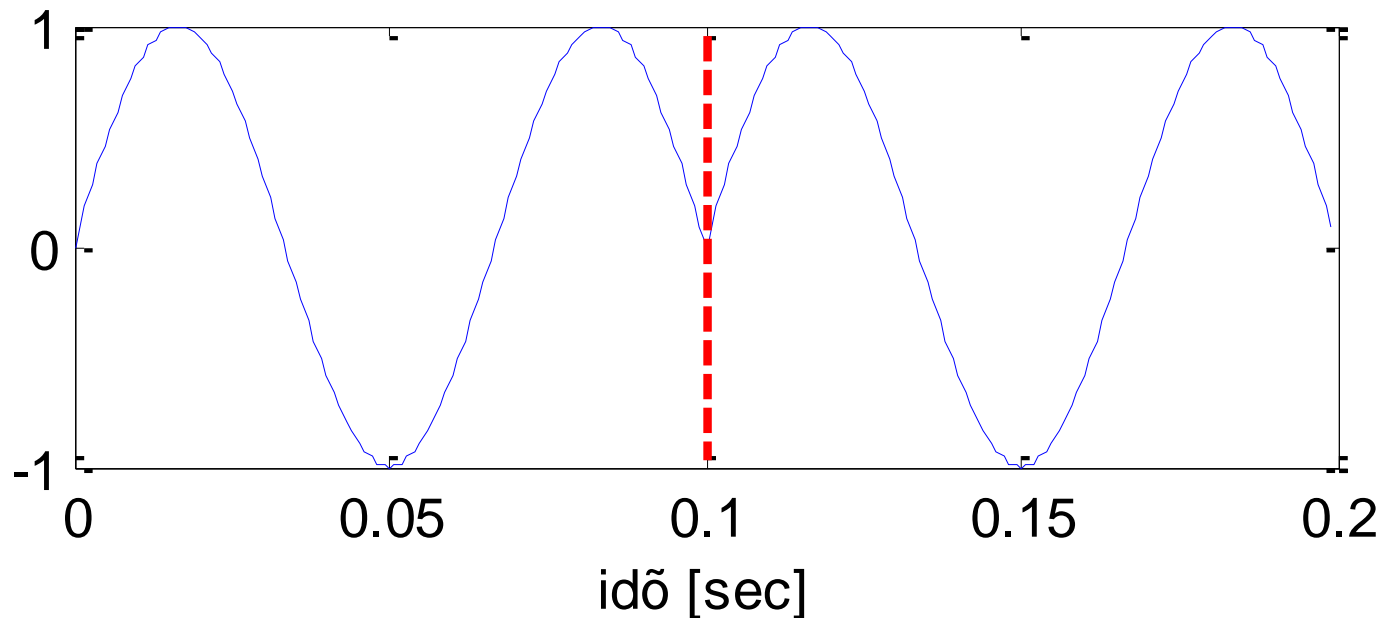
# Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

- Adott folytonos jel:  $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$ 
  - Mintavételezzük ( $y_{100}$ ):  $f_s = 1\text{kHz}$ ,  $N = 100$
  - Megfigyelési ekvivalens:  $(y_\infty \cdot \text{rect}_{100})[\cdot]$
  - Implicit ablak DTFT spektrumának részlete:



# Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

- Adott folytonos jel:  $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$ 
  - Mintavételezzük ( $y_{100}$ ):  $f_s = 1\text{kHz}$ ,  $N = 100$
  - DFT által „látott” jel:  $y_{100}[n] = (y_\infty \cdot h_{Rect})[\text{mod}_{100}(n)]$



# Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

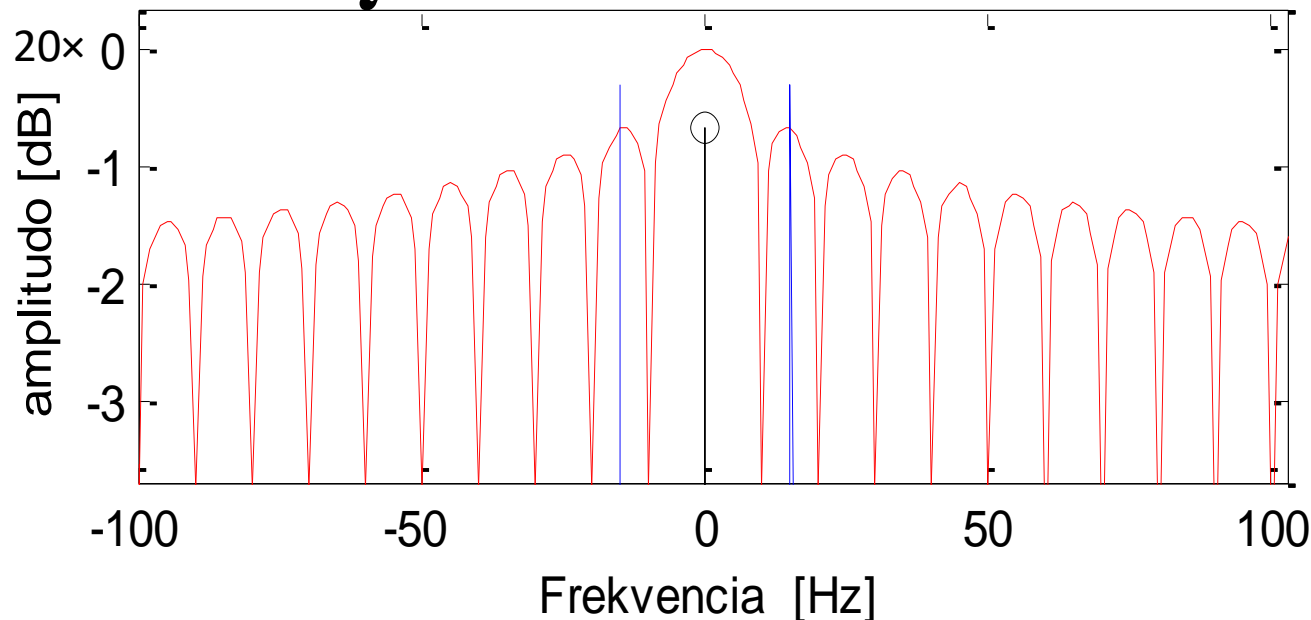
- Adott folytonos jel:  $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$ 
  - Mintavételezzük ( $y_{100}$ ):  $f_s = 1\text{kHz}$ ,  $N = 100$
  - Megfigyelési ekvivalens spektruma:  $Y_{100} \propto Y_\infty * H_{rect}$

$$Y_{100}(0) = \int Y_\infty(\tau) \cdot \frac{1}{2\pi} H_{rect}(0 - \tau) d\tau$$

Piros: ablak normált spektruma

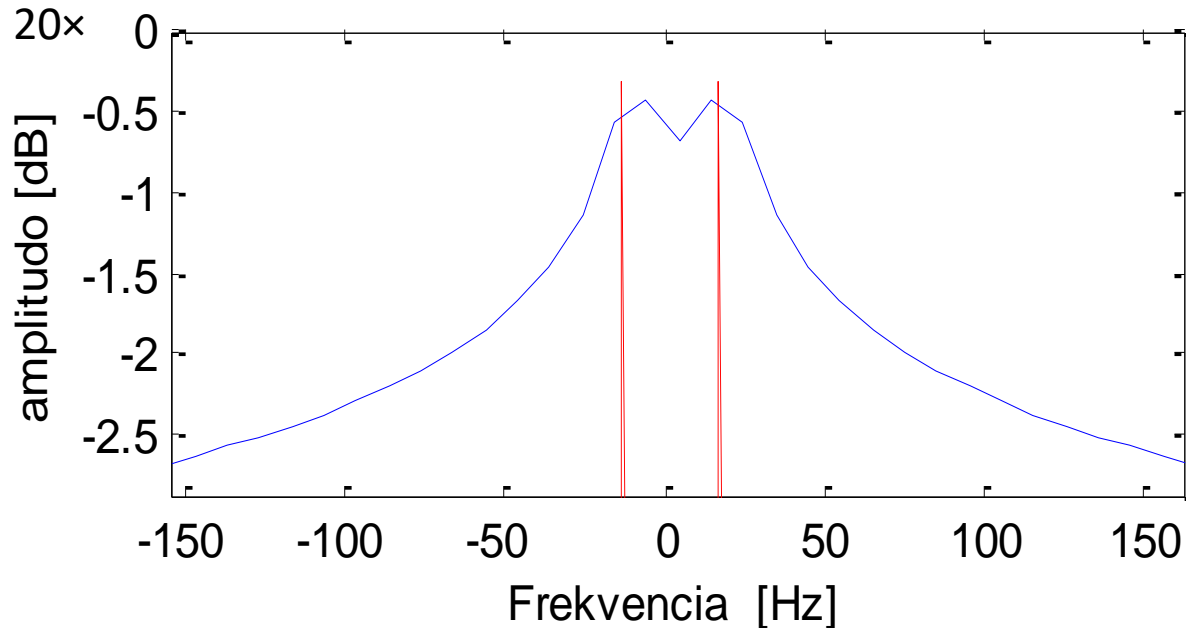
Kék: folytonos jel spektruma

Fekete:  $N=100$  mintavétellel előálló jel spektrumának DC komponense



# Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés

- Adott folytonos jel:  $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$ 
  - Mintavételezzük (  $y_{100}$  ):  $f_s = 1\text{kHz}$ ,  $N = 100$
  - Megfigyelési ekvivalens spektruma:  $Y_{100} \propto Y_\infty * H_{rect}$

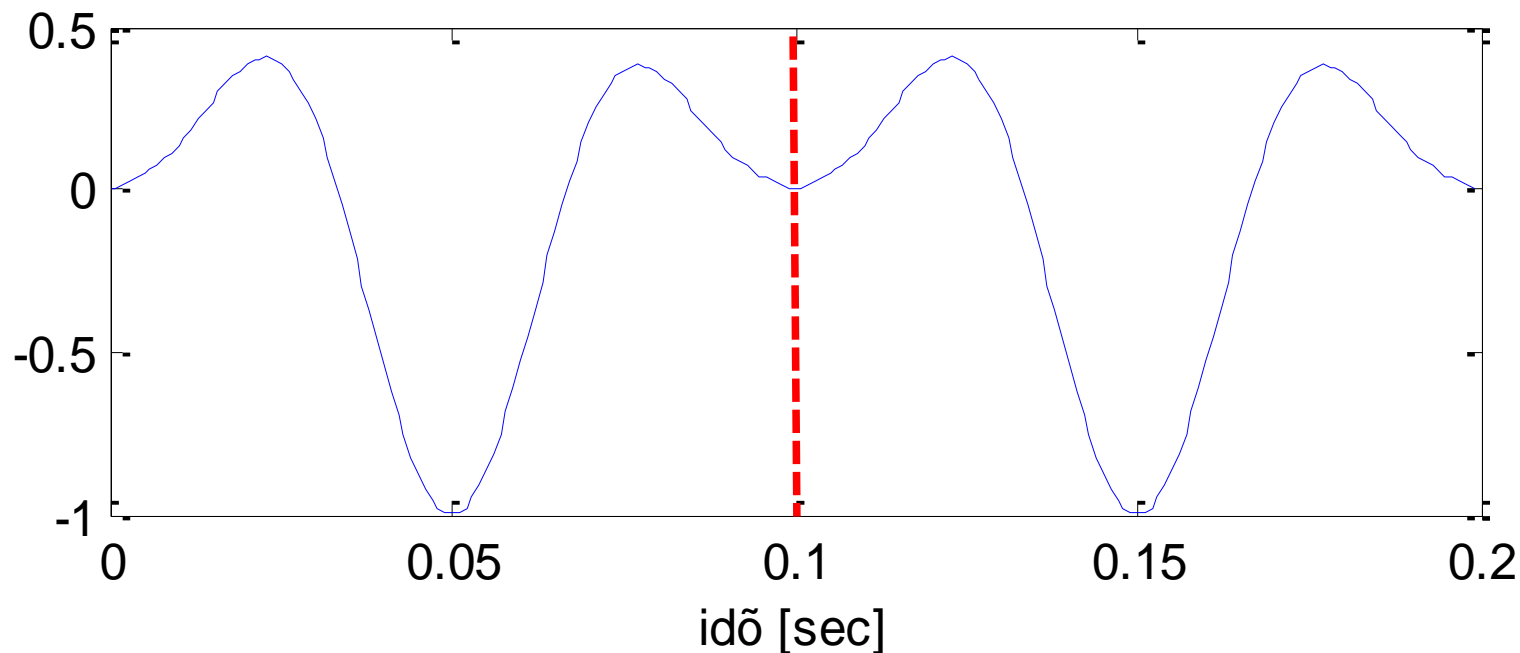


Piros: folytonos jel  
spektruma

Kék: N=100  
mintavétellel előálló  
jel spektruma

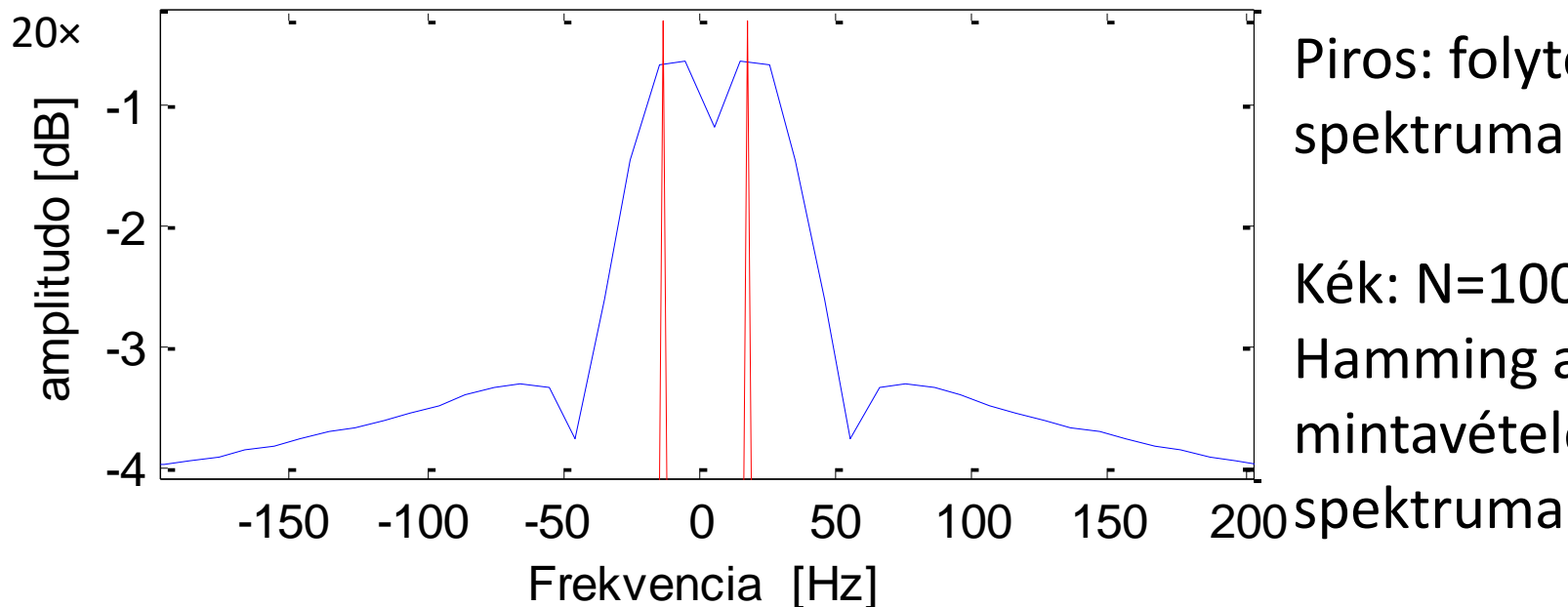
# Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés, Hamming ablak

- Adott folytonos jel:  $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$ 
  - Mintavételezzük (  $y_{100}$  ):  $f_s = 1\text{kHz}$ ,  $N = 100$
  - DFT által „látott” jel:  $y_{100}[n] = (y_\infty \cdot h_{Ham})[\text{mod}_{100}(n)]$



# Spektrumszivárgás – nem koherens mintavételezés, Hamming ablak

- Adott folytonos jel:  $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$ 
  - Mintavételezzük (  $y_{100}$  ):  $f_s = 1\text{kHz}$ ,  $N = 100$
  - Megfigyelési ekvivalens spektruma:  $Y_{100} \propto Y_\infty * H_{Ham}$

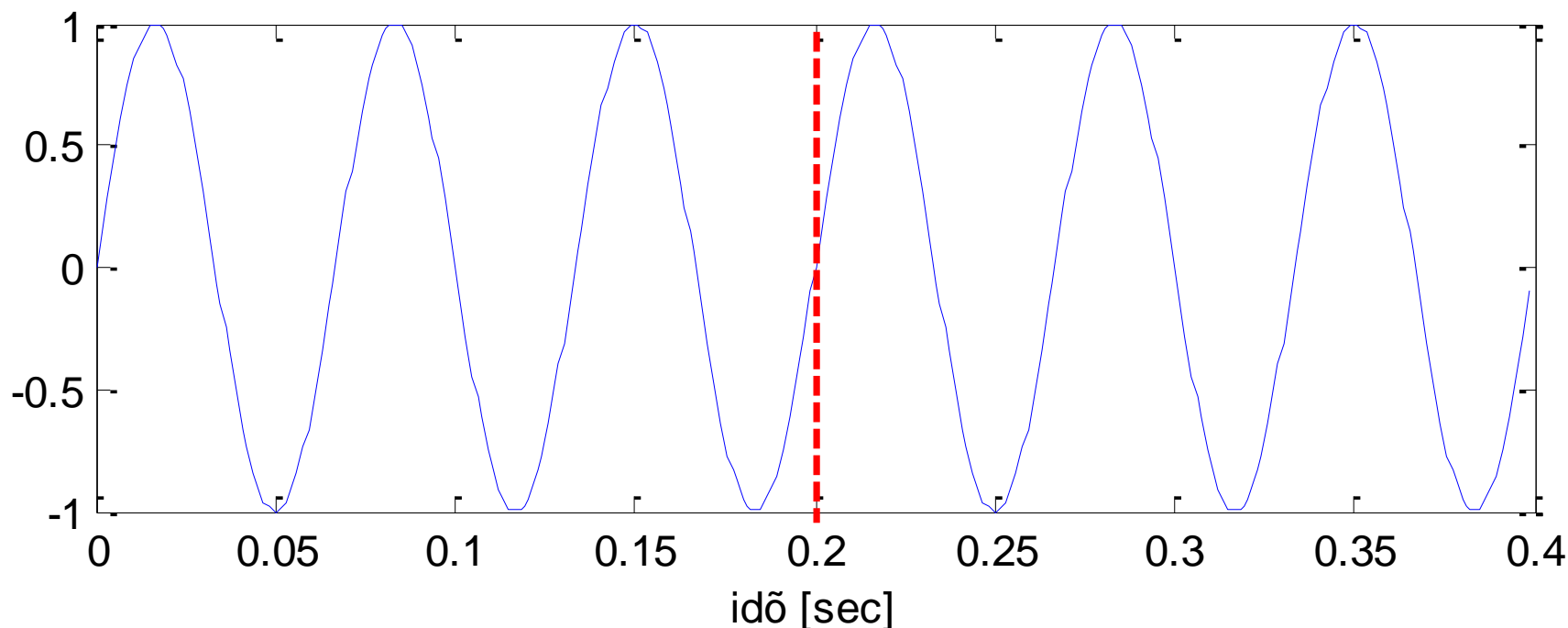


Piros: folytonos jel spektruma

Kék: N=100, Hamming ablakos, mintavételezett jel spektruma

# Koherens mintavételezés

- Adott folytonos jel:  $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$ 
  - Koherensen mintavételezzük ( $y_{200}$ ):  $f_s = 1\text{kHz}$ ,  $N = 200$
  - DFT által „látott” jel:  $y_{200}[n] = y_\infty[\text{mod}_{200}(n)] = y_\infty[n]$

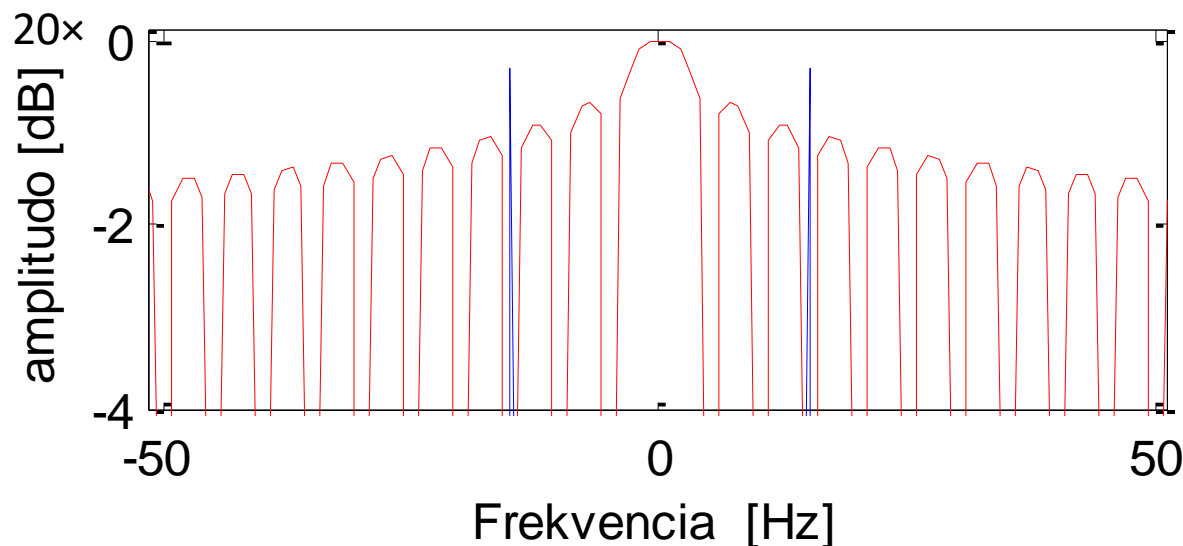


# Spektrum koherens mintavételezés esetén

- Adott folytonos jel:  $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$ 
  - Mintavételezzük ( $y_{200}$ ):  $f_s = 1\text{kHz}$ ,  $N = 200$
  - Megfigyelési ekvivalens spektruma:  $Y_{200} \propto Y_\infty * H_{rect}$

$$Y_{200}(0) = \int Y_\infty(\tau) \cdot 1/2\pi H_{rect}(0 - \tau) d\tau$$

Piros: ablak normált spektruma



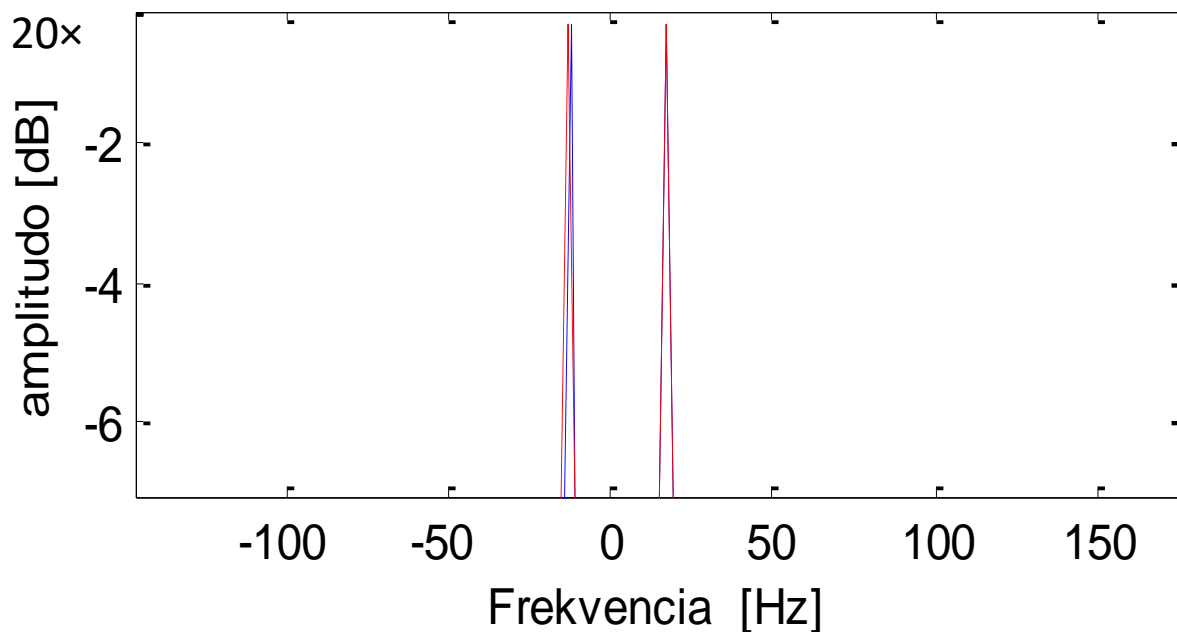
Kék: folytonos jel spektruma

Fekete:  $N=200$  mintavétellel előálló jel spektrumának DC komponense ( $\log(0)$ )



# Spektrum koherens mintavételezés esetén

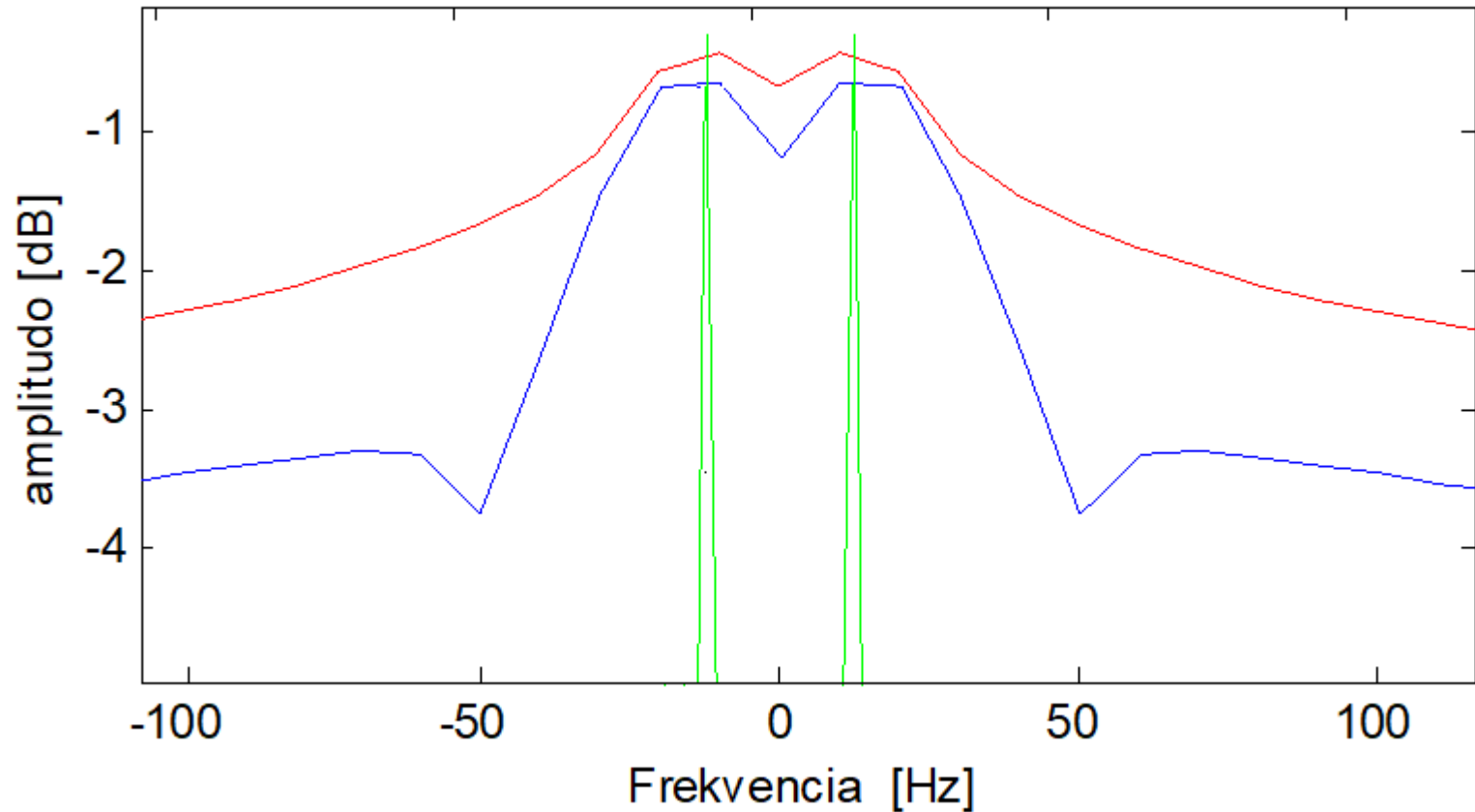
- Adott folytonos jel:  $y(t) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 15)$ 
  - Koherensen mintavételezzük ( $y_{200}$ ):  $f_s = 1\text{kHz}$ ,  $N = 200$
  - Megfigyelési ekvivalens spektruma:  $Y_{200} \propto Y_\infty * H_{rect}$



Piros: folytonos jel  
spektruma

Kék:  $N=200$   
mintavétellel előálló  
jel spektruma

# Koherensen mintavett / ablakozott, nem koherensen mintavett jelek spektruma



Zöld: koherensen mintavételezett jel spektruma, kék: Hamming ablakos, piros: téglalap ablakos spektrum

# 2D DFT

Többi transzformáció esetén is hasonló a többdimenziós eset

- Analízis irány:

$$F_{u,v} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f[m,n] \exp\{-2\pi j \cdot (u \cdot m/M + v \cdot n/N)\} =$$
$$= \sum_{m=0}^{M-1} \left( \sum_{n=0}^{N-1} f[m,n] \cdot \exp\{-2\pi j \cdot (v \cdot n/N)\} \right) \exp\{-2\pi j \cdot (u \cdot m/M)\}$$

- Tulajdonságok:

– Periodikus:  $[M,N]$  szerint

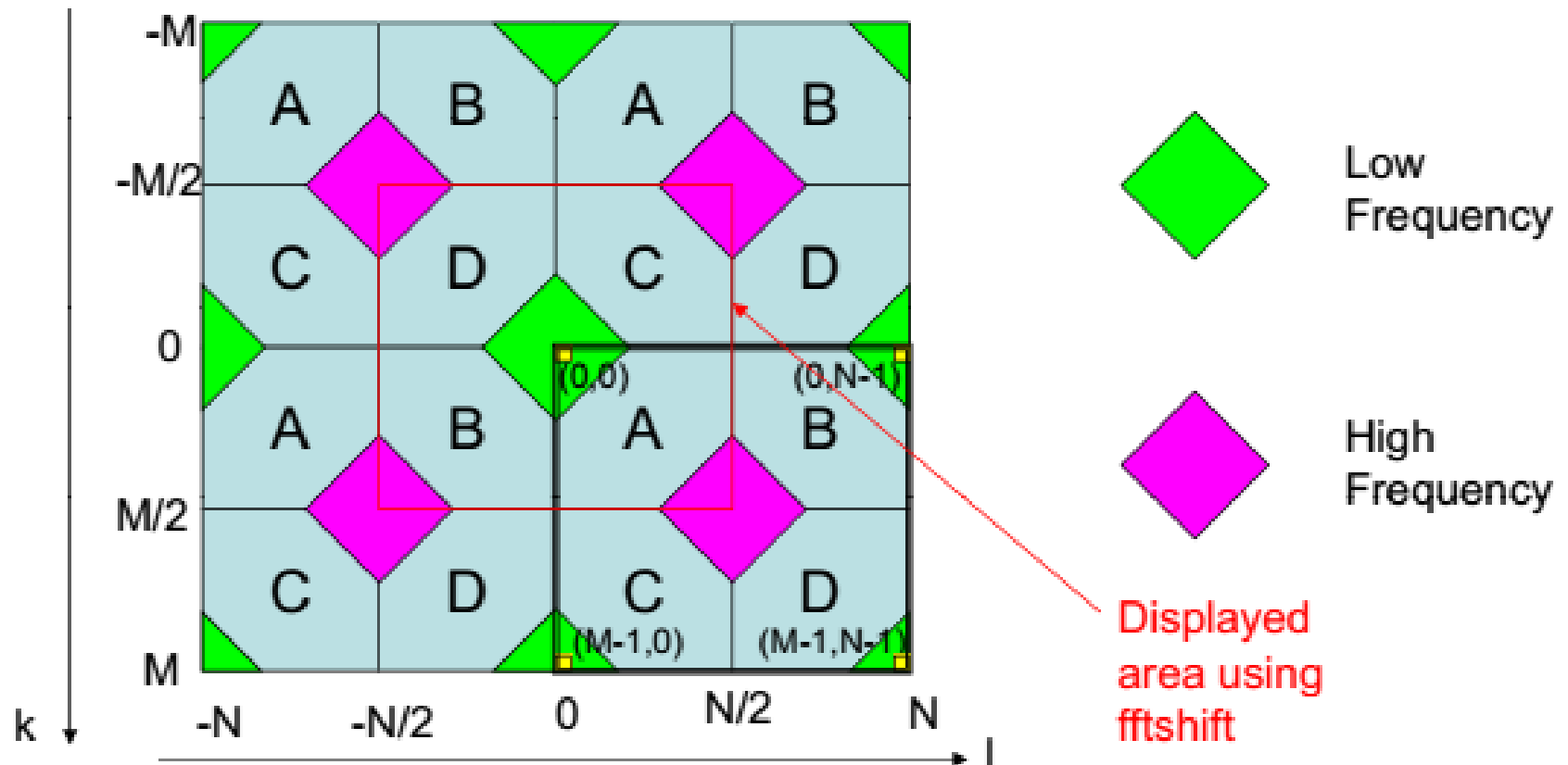
– Valós jel esetén:  $F_{u,v} = \overline{F_{-u,-v}} = \overline{F_{M-u,N-v}}$

• Ha  $M, N$  páros:  $F_{M/2+u,N/2+v} = \overline{F_{M/2-u,N/2-v}}$

- Spektrum hullámfrontos interpretációja

# 2D DFT spektrum

- Spektrum blokkjai:




# 2D DFT spektrum gépi ábrázolása

- Konjugált szimmetria valós jelek esetén:

0	1	2	3	4	3	2	1
5	6	7	8	9	33	32	31
10	11	12	13	14	30	29	28
15	16	17	18	19	27	26	25
20	21	22	23	24	23	22	21
15	25	26	27	19	18	17	16
10	28	29	30	14	13	12	11
5	31	32	33	9	8	7	6

M=N=8

 real      Conjugate pairs

 Nyquist frekvenciához tartozó komponens

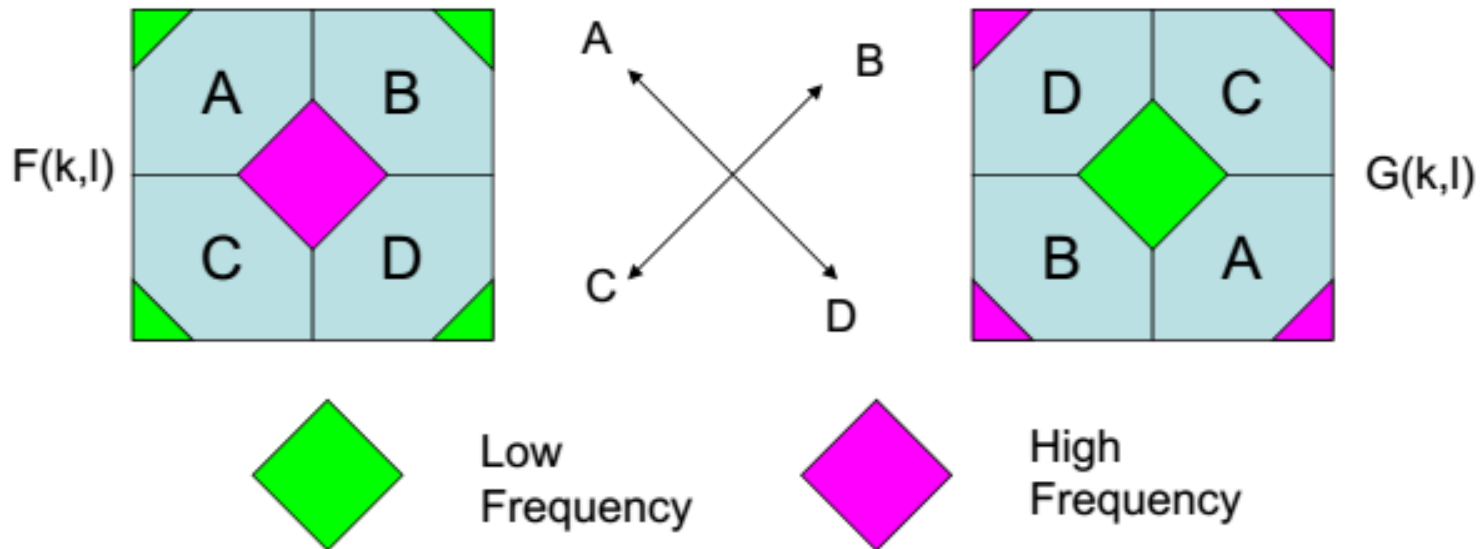
0	1	2	3	4	4	3	2	1
5	6	7	8	9	40	39	38	37
10	11	12	13	14	36	35	34	33
15	16	17	18	19	32	31	30	29
20	21	22	23	24	28	27	26	25
20	25	26	27	28	24	23	22	21
15	29	30	31	32	19	18	17	16
10	33	34	35	36	14	13	12	11
5	37	38	39	40	9	8	7	6

M=N=9

# 2D DFT spektrum

- Általában a DC komponenst „csavarjuk” középre:

– Ampl. moduláció:  $g[m,n] = f[m,n] \cdot (-1)^{(m+n)}$

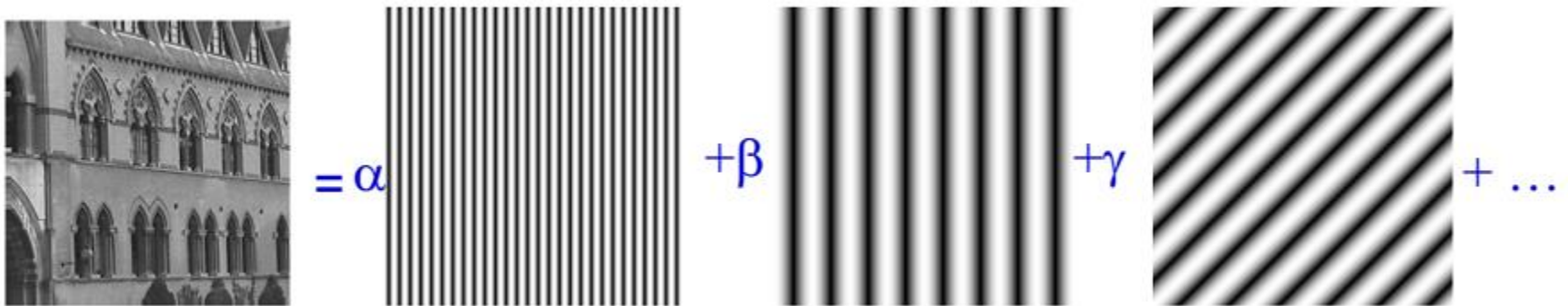


# 2D DFT Számolási tulajdonságok

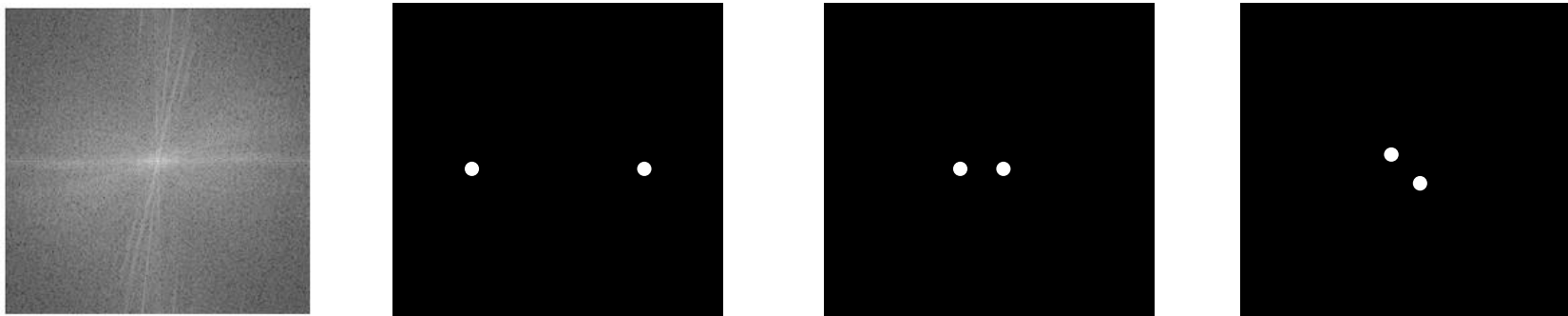
- 1D DFT komplexitása:
  - Direkt módszer:  $O(N^2)$
  - FFT:  $O(N \times \log(N))$ , hatékonyan számítható, ha  $N$  2 hatvány (radix-2 Cooley-Tukey)
- 2D DFT komplexitása ( $N \times N$ -es képre):
  - Direkt számítás:  $O(N^4)$
  - Szeparálással:  $O(N^3)$
  - Szeparálás + FFT:  $O(N^2 \times \log(N))$
- Half Complex ábrázolással helyben tárolható!

# 2D DFT Vizuális értelmezés

- Lényegében egy bázis transzformáció ortogonális bázisokra (szinuszos hullámok)



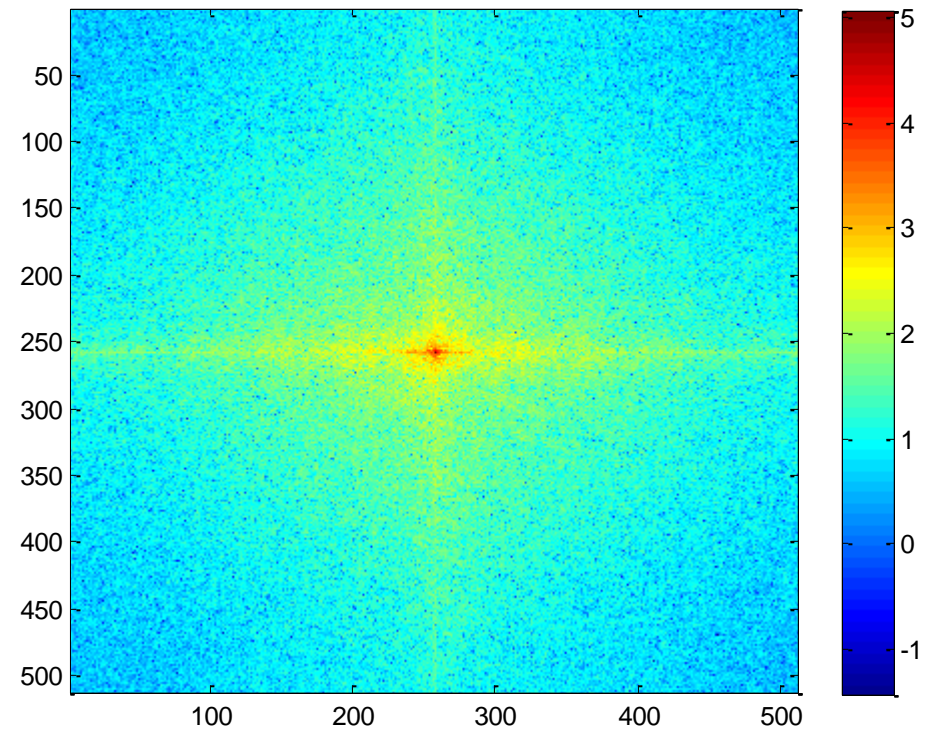
Spektrum amplitudója:





# Képek spektrumának jellemzői

- Alacsony frekvenciákon nagy energia:



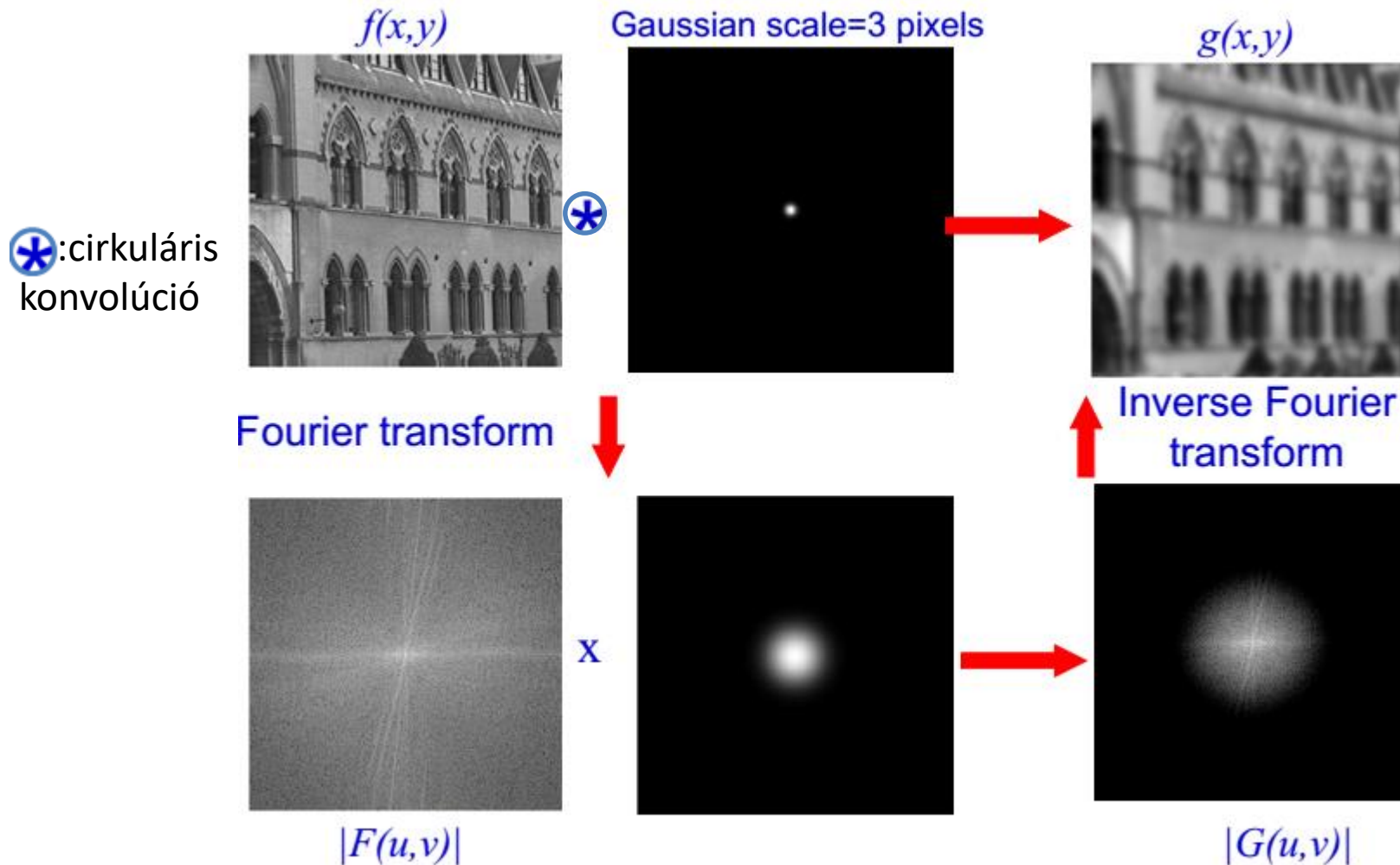
Spektrum amplitúdója logaritmikus skálán

# 2D DFT konvolúciós tétele:

- DFS- es analógia – cirkularitás:
  - $(f \otimes g)[n] = \sum_{m=0}^N f[m] \cdot g[\text{mod}_N(n-m)] = (f' * g')[n]$
  - $f'[n] = f[\text{mod}_N(n)]$ , míg  $g'[m] = g[\text{mod}_N(m)]$
- Mit tegyünk, ha  $f * g$ -t akarjuk DFT-vel számolni?
  - Terjesszük ki  $f$  és  $g$  méretét  $[N+M]$  hosszúra:
    - Ezt időtartomány / síktartományban is meg kell tenni
    - Általános módszerek: 0-val paddelés, kép széleire tükrözés, alul-áteresztő szűréseknél súlyozás, kiterjesztés a kép szélső pixelének intenzitásával, stb.
  - 5×5-ös kernel esetén már gyorsabb

# Konvolúció tétel fontossága

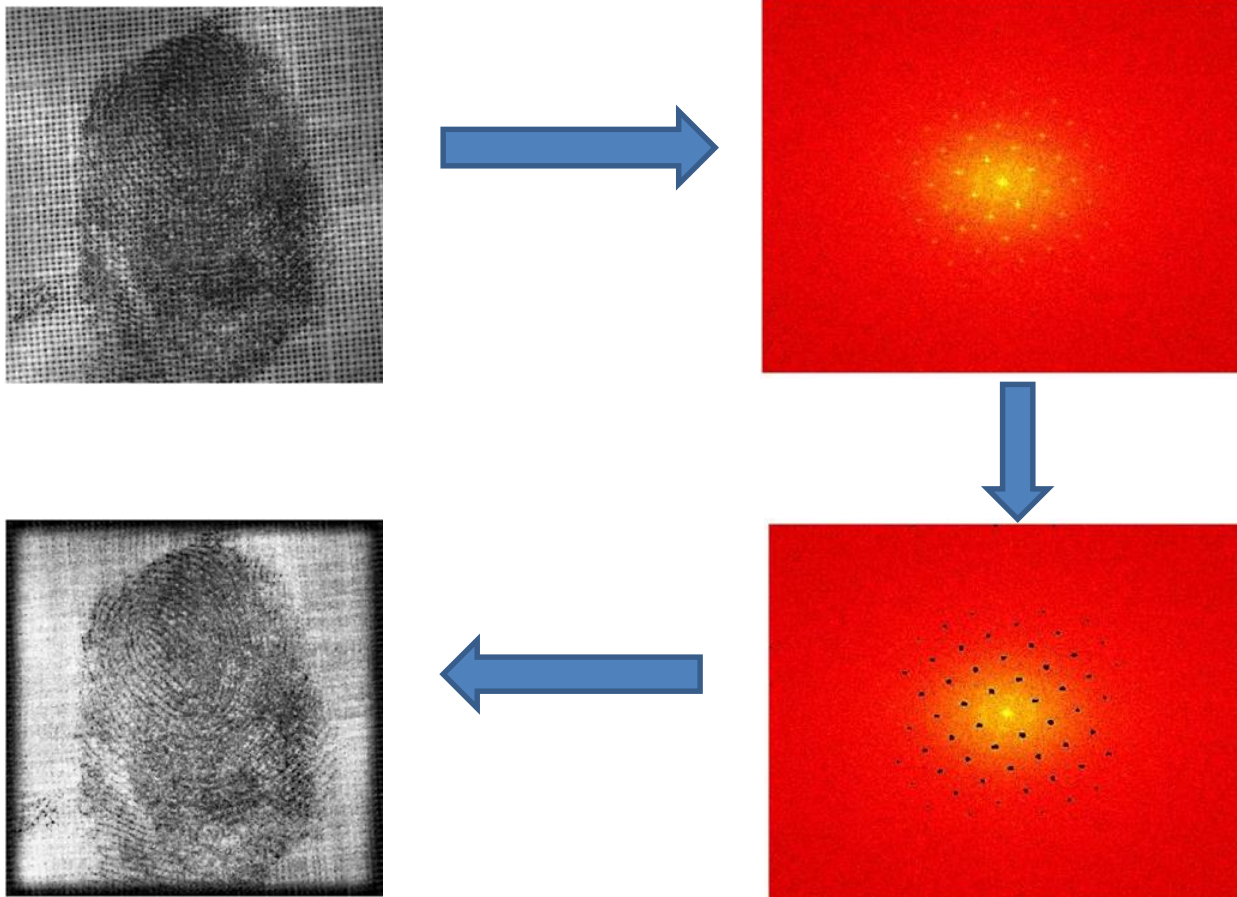
- Lineáris szűrések frekvenciatérben:



# 2D DFT Példa – periodikus textúra

ampl. moduláció

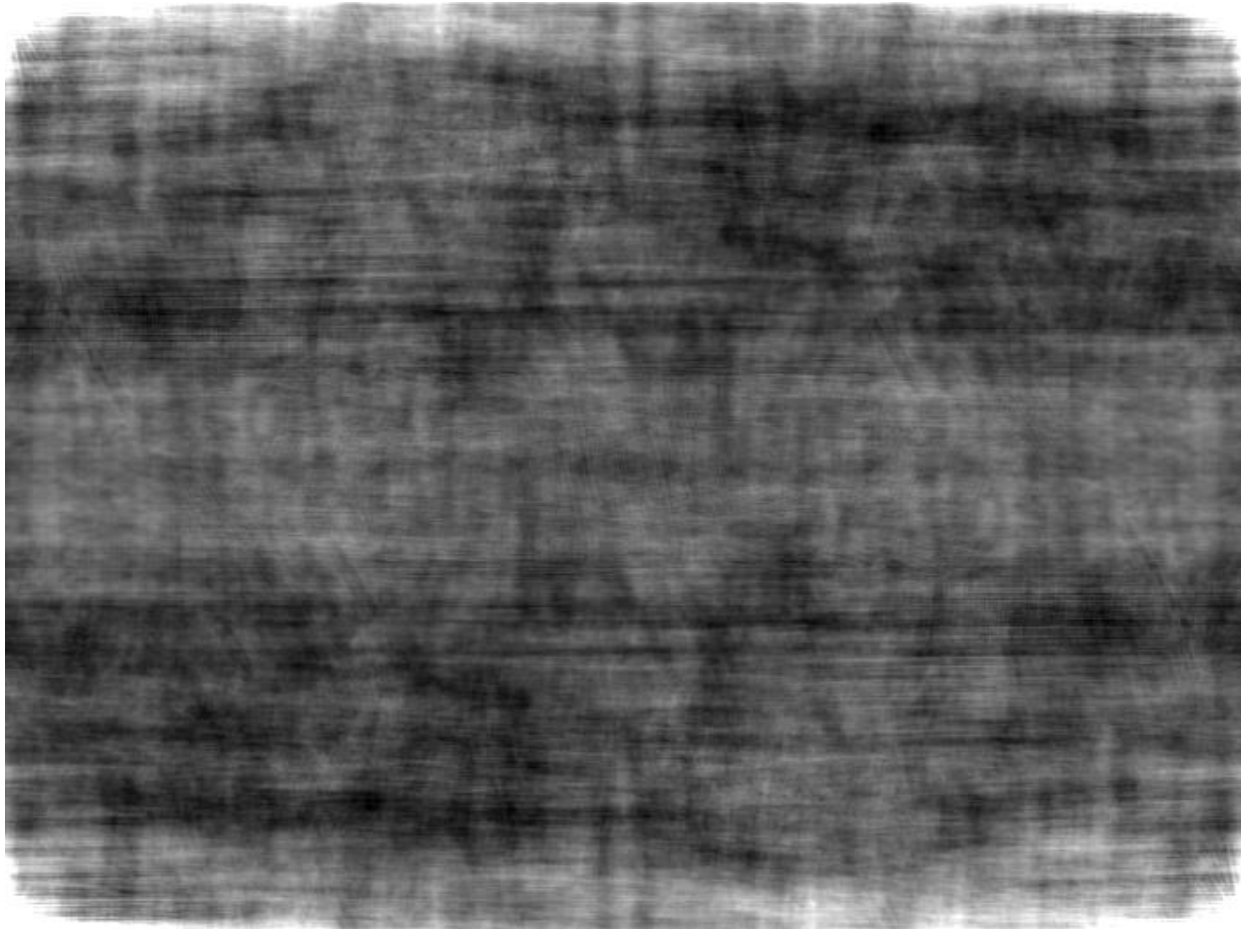
- Periodikus mintázat  $\Leftrightarrow$  csúcsok a spektrumban:



# 2D DFT példa – rekonstrukció spektrum amplitúdóból és fázisból



# 2D DFT példa – spektrum amplitúdójából rekonstruált kép



# 2D DFT példa – spektrum fázisából rekonstruált kép



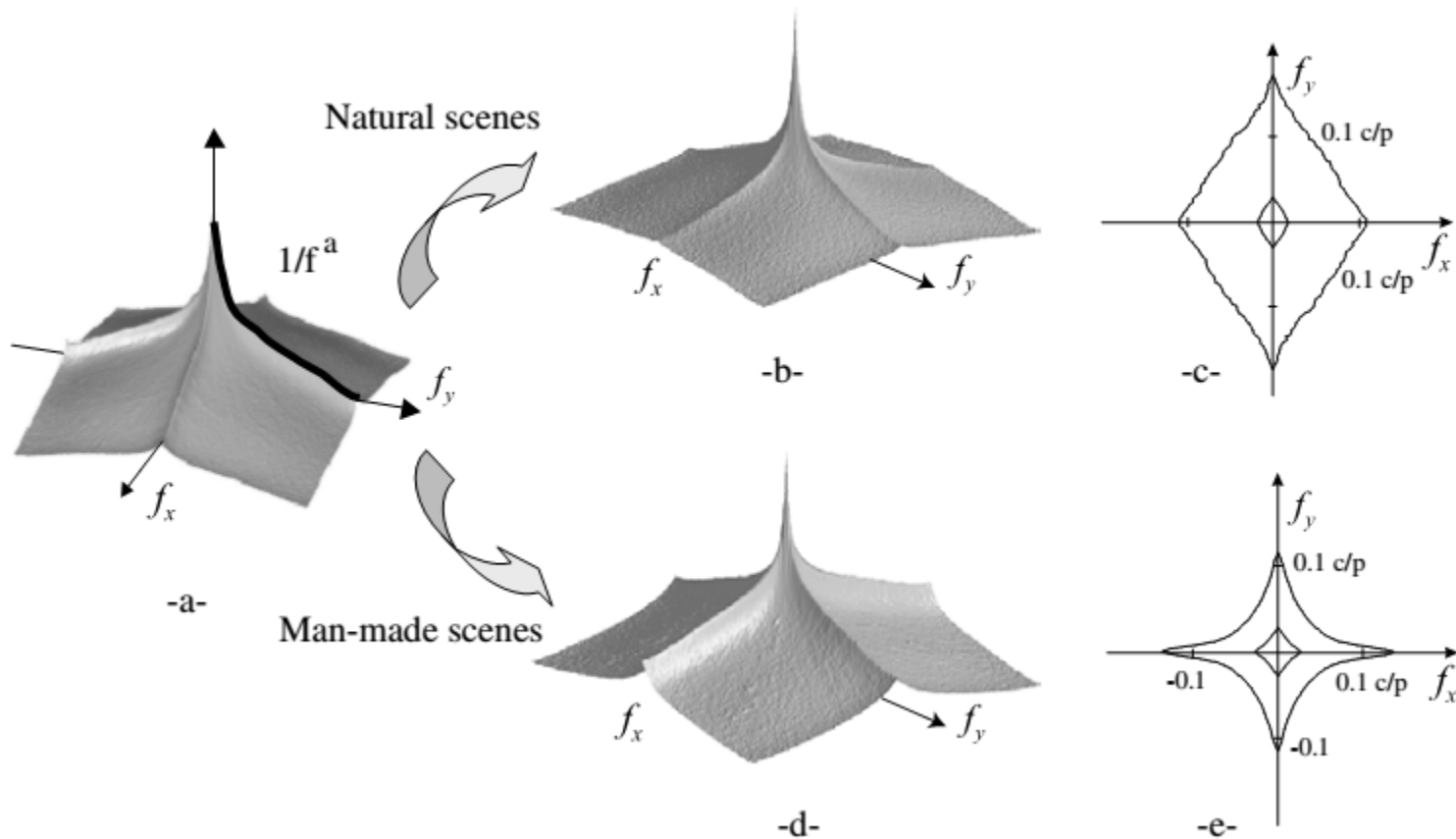
# Polár koordinátás DFT

- Motiváció:
  - Radon transzformáció és annak invertálása
  - Regisztráció: elforgatás és eltolás könnyen számolhatóvá válik
- Számítása – folytonos eset:
  - $F\{\theta, \rho\} = \iint_{x,y} f(x, y) \cdot \exp(-2\pi j \cdot \rho \cdot (x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta))) dydx$
  - Nem szeparábilis
  - Fourier vetítősík tétel
    - Spektrum vonal profiljai  $\Leftrightarrow$  Radon transzformáció 1D Fourier transzformáltjai

Majd a rekonstrukciónál bizonyítjuk is!

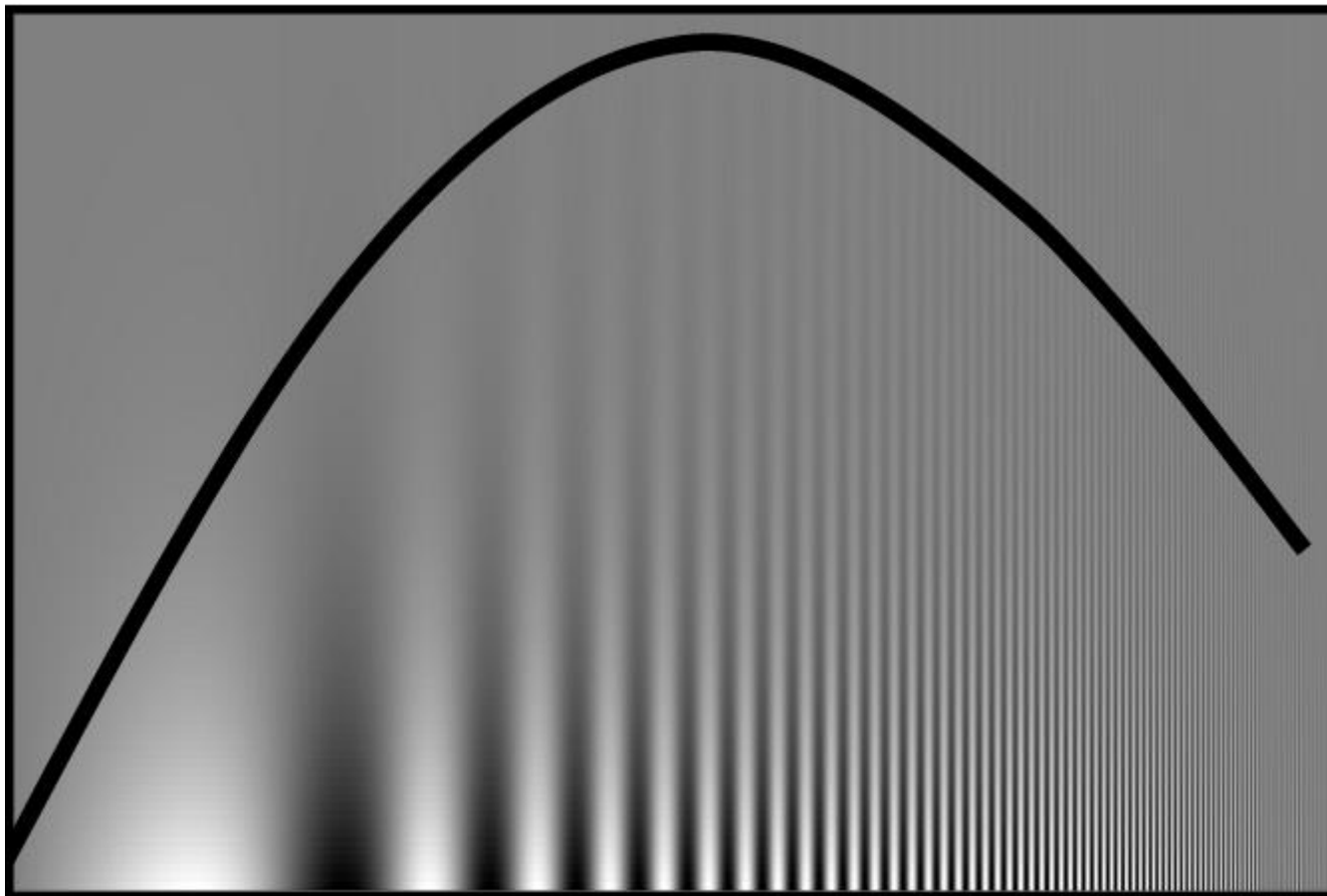


# Digitális képek átlagos energiaspektruma

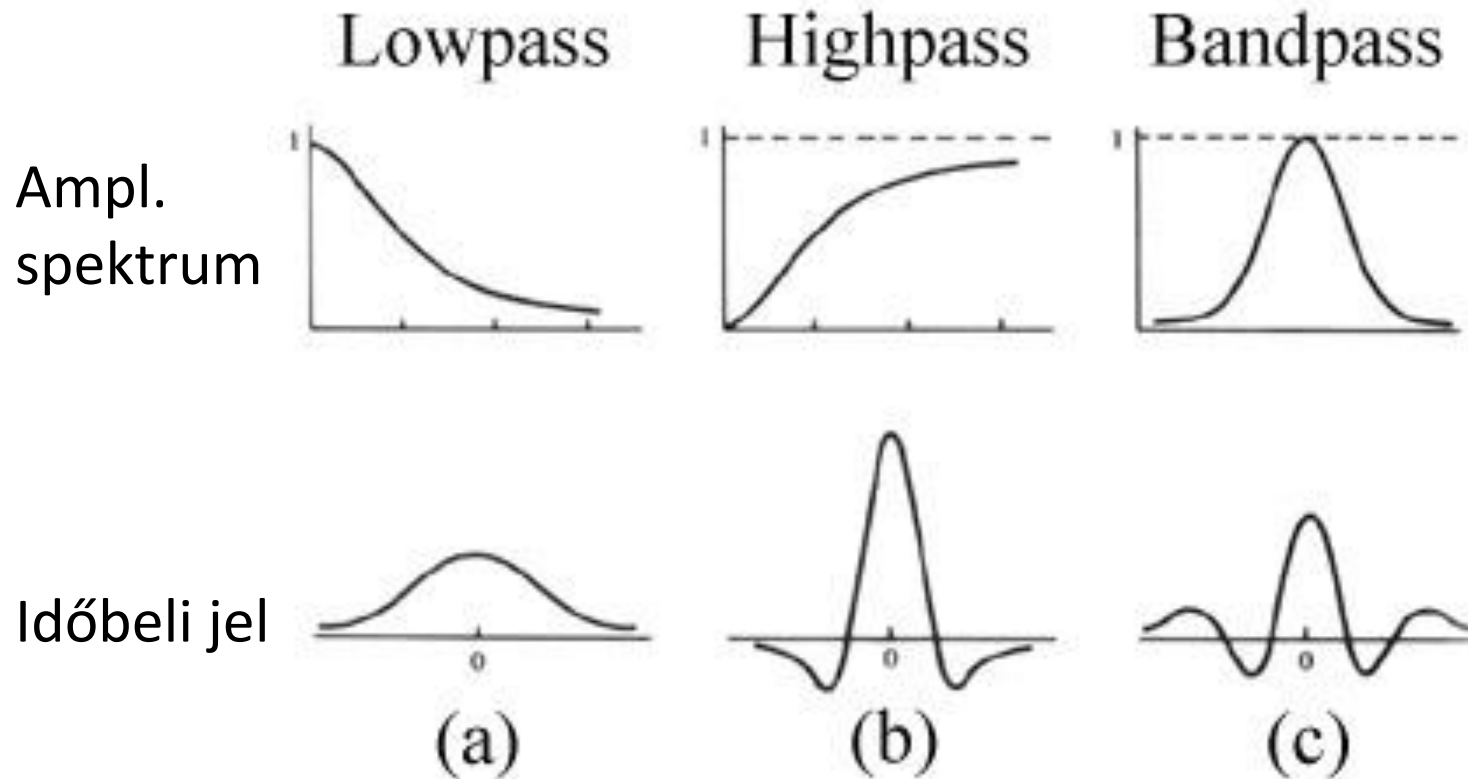


# Frekvenciatartomány és emberi látás

- Campbell-Robson kontraszt érzékenységi görbe:

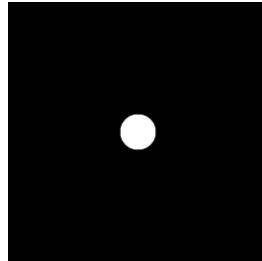


# Szűrők idő és frekvencia tartományban



# Ideális szűrők

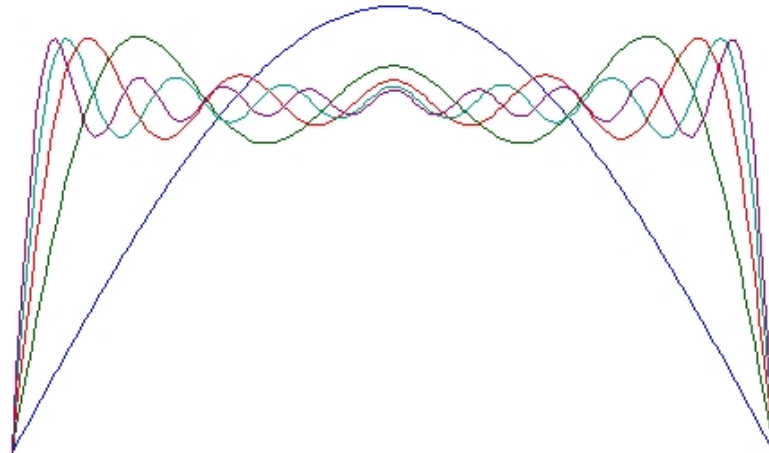
- Amplitúdó éles vágásánál Gibbs jelenség:



# Gibbs gyűrű effektus

- Gibbs jelenség elkerülhető „sima” átmenetű szűrőkkel:
  - Butterworth szűrő: adott sávkorlát mellett a legsimább ampl. spektrumú lineáris szűrő
  - Gauss szűrő: alkalmazásával nincs Gibbs artefekt

Reconstruction of the periodic square waveform with 1, 3, 5, 7, 9 sinusoids



# Gibbs gyűrű effektus

